4 現值與利率

1. 現值、期末價值和利率
2. 信用工具的介紹
3. 到期殖利率
4. 其他收益率的計算法
5. 殖利率和持有期報酬率的區別
6. 實質利率與名目利率

現值與利率

- 為了計算某金融工具今天的價值, 須將它在未來各時點所給付的金額都換算成今天的價值, 並予以加總, 這便是現值的概念
- 利率可視為資金借貸的價格利率的衡量法中, 最精確的是「到期殖利率」(yield to maturity), 或簡稱「殖利率」衡量殖利率也和現值的概念有關

現值公式的應用

1. 已知現值和利率, 計算末來價值, 這是計算未來能收到或應支出的利息與本金的問題
2. 已知利率與末來價值, 計算現值, 這是金融工具定價的問題
3. 已知現值與末來價值, 計算利率, 這可以用來比較各金融工具或投資計畫的優劣

期末價值: 單利

假設已知今天的價值和利率, 我們可以計算期末價值 (也稱為「未來價值」) 令 FV 為期末價值, PV 為現值, i 為利率, 以單利計算的期末價值公式:

$$\mathrm{FV} = \mathrm{PV} \times (1 + \mathrm{i}) \tag{1}$$

例: 你將 100 元存入年利率 5% 的銀行帳戶, 一年後的期末價值為何?

$$\begin{aligned} & 100 + 100 \times 0.05 \\ = & 100 \times (1 + 0.05) \\ = & 105 \end{aligned}$$

期末價值: 複利

例: 你將100元存入年利率5%的銀行帳戶, 每年複利一次, 兩年後的期末價值為何?

$$100 \times (1 + 0.05) = 105 = \text{一年後的期末價值}$$

$$105 \times (1 + 0.05) = 110.25 = \text{兩年後的期末價值}$$

- 令 FV_n 為 n 年後的期末價值, 每年複利:

$$FV_n = PV \times (1 + i)^n \tag{2}$$

- 給定今天的投資金額 PV, 利率越高或投資期限越長, 則期末價值越高

現值

某項投資未來所有收益在今天的價值 在利率與未來價值為已知時, 可利用公式 (1), 求得現值公式:

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{FV}}{(1+\mathrm{i})} \tag{3}$$

例: 已知年利率 5%, 你希望一年後能得到 105 元, 則現在必須存入多少錢? 利用現值公式 (3) 可得:

$$\mathrm{PV} = \frac{105}{1.05} = 100$$

也就是說, 為了一年後能得到 105 元, 若年利率為 5%, 則今天必須存 100 元

現值概念的應用

現值的概念可以將某一投資在未來不同時點的金額支付，轉換為今天價值的金額，如此我們才能比較不同時點的金額的價值

例：有一項金融工具在一年後給付105元，今天該金融工具的價格為102元，在年利率5%的情況下，你願意購買嗎？

- 利用現值公式 (3) 可算出該金融工具的現值為100元，小於投資成本102元，因此我們不會購買

現值: 複利

例: 已知年利率 5%, 每年複利, 你希望兩年後能取得 110.25 元, 則現在你必須存入多少錢? 利用式 (2) 可得:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PV} \times 1.05^2 &= 110.25 \\
\mathrm{PV} &= \frac{110.25}{1.05^2} = 100
\end{aligned}
$$

現值: 複利的公式

令 $\mathrm{FV_n}$ 為 n 年後的期末價值, 則每年複利的情況下, 現值為

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{FV_n}}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}} \tag{4}$$

從式 (4) 我們可以看出, 影響現值的期末價值 ($\mathrm{FV_n}$)、投資期限 (n) 和利率 (i) 之間的關係:

- 當利率與期末價值固定, 期限和現值呈反向關係
- 當期末價值與期限固定時, 利率和現值呈反向關係

內部報酬率

- 利用現值公式, 在已知現在的投資金額 (也是投資的成本), 以及未來一定期間內每期的期末價值, 計算該投資的內部報酬率
- 如果你面臨許多投資計畫, 有些金額較大, 有些回收期長, 我們可以計算各計畫的內部報酬率, 以比較各投資計畫的優劣

例: 假設 A、B 二人都想向你借250元 (你的投資成本為250元), A 的還款方式為, 借款之後3年內每年還給你100元, B 的還款方式則為, 第5年到期時還你375元你應該借給誰呢?

內部報酬率: 比較投資計畫的優劣

- 借給 A 在未來3年每年可得到100元, 那麼這項投資的現值為

$$\frac{100}{(1+i)}+\frac{100}{(1+i)^2}+\frac{100}{(1+i)^3}$$

- 借給 B 在5年到期時拿回375元, 這5年當中沒有得到任何收益, 其現值為

$$\frac{375}{(1+i)^5}$$

内部報酬率: 比較投資計畫的優劣

使一項投資的現值等同於投資成本的利率

- 借給 A 所得到的内部報酬率 i 可由

$$250 = \frac{100}{(1+\mathrm{i})} + \frac{100}{(1+\mathrm{i})^2} + \frac{100}{(1+\mathrm{i})^3}$$

  求得 $\mathrm{i} = 9.7\%$

- 借給 B 所得到的内部報酬率 i 可由

$$250 = \frac{375}{(1+\mathrm{i})^5}$$

  求得 $\mathrm{i} = 8.45\%$

- 假設 A、B 二人的倒帳風險相同, 借給 A 的内部報酬率較高, 你當然會選擇借給 A

信用工具

- 簡單借貸 (simple loan)
- 固定給付借貸 (fixed-payment loan)
- 息票債券 (coupon bond)
- 零息票債券 (zero-coupon bond)

簡單借貸

簡單借貸是指在約定的到期日, 或到期期限, 一次償還所有的本金和利息, 如: 一般商業貸款

例: 已知年利率 5%, 你希望一年後能得到 105 元, 則現在必須存入多少錢?

利用計算期末價值的公式 (1) 我們可以求算:

$$\mathrm{PV} \times (1 + 0.05) = 105$$

$$\Rightarrow \mathrm{PV} = \frac{105}{1.05} = 100$$

也就是說, 為了一年後能得到 105 元, 若年利率為 5%, 則今天必須存 100 元

固定給付借貸

固定給付借貸是指借了某一金額後, 約定一個到期期限, 在期限內的每一期, 都償還一個固定金額 (包含部分的本金和利息), 如: 房地產貸款

- 有一期限為 n 年的貸款, 每年需償還 FP 元, 假設市場利率為 i, 以此利率為計算現值的利率 (亦即折現率), 該貸款的現值為 PV, 則

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{FP}}{(1+\mathrm{i})} + \frac{\mathrm{FP}}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{\mathrm{FP}}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}} \quad (5)$$

息票債券

- 息票債券是應用最廣泛的債券形式，除發行人之外還有三項重要訊息：面額 (face value, principal, par value)、息票率 (coupon rate, 又稱票面利率) 和到期日
- 息票債券的發行人承諾在固定日期給付息票利息 (coupon payments)，並且在到期日時給付該債券的面額，亦即本金
- 息票給付為面額乘以息票率，也就是持有人每期可得到的利息收入

息票債券的現值公式

- 某一期限為n年的息票債券, 面額為 F 元, 每年息票給付為 C 元, 該債券的現值PV為:

$$PV = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{F}{(1+i)^n} \quad (6)$$

永續債券

- 永續債券 (consol)為息票債券的特例, 每期都有息票給付且無到期日
- 一永續債券之息票給付為 C 元, 假設現在市場利率為 i, 則該債券的價格為:

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{i}} \tag{7}$$

折價債券

折價債券 (零息票債券) 在期限內的各期都不發給息票給付, 只有在到期日償付面額, 通常是折價發行, 所以也稱為折價債券

- 某折價債券期限是1年, 面額為 F 元, 假設現在市場利率為 i, 則該債券的現值 P 為:

$$P = \frac{F}{(1+i)} \tag{8}$$

n 年期的折價債券

- 若某折價債券期限是 n 年, 面額為 F_n 元, 假設現在市場利率為 i, 則該債券的現值 P_n 為:

$$P_n = \frac{F_n}{(1+i)^n} \tag{9}$$

例: 某折價債券期限是半年, 面額為1,000元, 假設現在市場年利率為4%, 求此債券的現值。將 $n = \frac{1}{2}$ 代入式 (9) 可得:

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1,000}{(1+0.04)^{1/2}} = 980.6$$

到期殖利率 (yield to maturity)

- 最常被用來衡量債券利率報酬率或持有該債券至到期日為止的收益率的是到期殖利率
- 使持有某一債券至到期日所獲得的所有利息和本金之現值的總和等於該債券現在的市場價格的利率, 便是到期殖利率
- 由內部報酬率的概念可知, 將債券價格視為投資此債券的成本, 那麼殖利率即是投資此債券並持有至到期日的內部報酬率

簡單借貸之殖利率

例: 你借出 100 元, 約定對方兩年後要償還你 121 元, 則你這項貸款所獲得的殖利率為何?
你現在借出 100 元, 即這項簡單借貸今天的價值 (也是投資成本), 則殖利率 i 必須滿足下列式子:

$$100 = \frac{121}{(1+i)^2}$$

由此可得殖利率 $i = 10\%$

- 某一期限為 n 之簡單借貸在今日的價值為 P, 期末價值 (到期本利和) 為 T, 則利用現值公式 (9), 殖利率 i 可由下式求出:

$$P = \frac{T}{(1+i)^n}$$

固定給付借貸之殖利率：例子

例：你借給一個人1,000元，期限為25年，並約定對方在未來25年中，每年償還你126元，此項貸款的殖利率為何？

$$1,000 = \frac{126}{(1+\mathrm{i})} + \frac{126}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{126}{(1+\mathrm{i})^{25}}$$

等號左邊是此借貸今天的價值 (也是你的投資成本)，等號右邊則為此貸款在未來所得到的各項給付現值的總和，由上式可得殖利率 $\mathrm{i} = 11.8\%$

固定給付借貸之殖利率

令 P 表示借貸金額, FP 表示每期的固定給付, 則 n 年的固定給付借貸的殖利率 i 可由下式求出:

$$P = \frac{\mathrm{FP}}{(1+\mathrm{i})} + \frac{\mathrm{FP}}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{\mathrm{FP}}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}$$

息票債券之殖利率

例: 某一息票債券的面額1,000元, 息票率10%, 期限10年, 此債券今天在市場上的價格為1,000元, 則殖利率為何?

$$1,000 = \frac{100}{(1+i)} + \frac{100}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{100}{(1+i)^{10}} + \frac{1,000}{(1+i)^{10}}$$

則殖利率 $i = 10\%$

- 若債券價格為1,200元, 則殖利率 $i = 7.13\%$
- 若以較高的價格買入一張債券, 表示投資此債券的殖利率較低

永續債券之殖利率

例: 一永續債券的市場價格為1,200元, 面額1,000元, 息票率10%, 則殖利率為何?
利用式 (7), $\mathrm{PV} = 1,200$,
$\mathrm{C} = 1,000 \times 10\% = 100$, 則

$$1,200 = \frac{100}{(1+\mathrm{i})} + \frac{100}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots = \frac{100}{\mathrm{i}}$$

可得到$\mathrm{i} = 8.3\%$

- 一般化公式為:

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}} \tag{10}$$

折價債券之殖利率

- 令 P 表示債券市場價格, F 表示面額, n 表示期限, 折價債券殖利率 i 可由下列公式求出:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

- 1年期折價債券的殖利率為

$$i = \frac{F - P}{P}$$

例: 某一折價債券, 面額為1,000元, 期限是一年, 今天在市場上該債券的價格是900元, 則

$$i = \frac{1,000 - 900}{900}$$

殖利率 $i = 11.1\%$

表4.1 債券價格與殖利率

債券價格 (P)	殖利率 (i)
1,200	7.13%
1,100	8.48%
1,000	10.00%
900	11.75%
800	13.81%

公式:

$$P = \frac{100}{(1+i)} + \frac{100}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{100}{(1+i)^{10}} + \frac{1,000}{(1+i)^{10}}$$

債券價格與殖利率的關係

由表4.1我們可以觀察到三個現象，且這三種現象存在於所有的息票債券:

1. 當債券的價格等於面額時，殖利率等於息票率
2. 債券的價格和殖利率呈現反向變動
3. 當殖利率高於息票率，則債券價格低於面額

目前收益率

- 目前收益率是用來估計息票債券的殖利率:

$$i_c = \frac{C}{P} \tag{11}$$

i_c 是目前收益率, C 是息票給付, P 是債券價格

- 對永續債券而言, 目前收益率就是殖利率, 因此當息票債券的期限越長, 則以目前收益率來估計殖利率會越準確

表 4.2 債券價格、殖利率與目前收益率

債券價格 (P)	殖利率 (i)	目前收益率 (i_c)
1,200	7.13%	8.33%
1,100	8.48%	9.09%
1,000	10.00%	10.00%
900	11.75%	11.11%
800	13.81%	12.50%

債券面額為 1,000 元, 息票率 10%, 期限 10 年

目前收益率與殖利率的關係

1. 當債券價格與面額相等時, 目前收益率等於殖利率

   根據式 (11), 當P = F時,

$$\frac{C}{P} = \frac{C}{F} = \text{息票率} = \text{殖利率 (YTM)}$$

   P 越接近 F $\Rightarrow i_c$ 越接近 YTM

2. 目前收益率和殖利率同向變動

$$\text{YTM} \uparrow \; \rightarrow \; P \downarrow \; \rightarrow \; \frac{C}{P} \uparrow (\text{給定息票給付 } C)$$

折價基礎收益率

折價基礎收益率用來估計折價債券的殖利率:

$$i_{db} = \frac{(F - P)}{F} \times \frac{360}{d} \tag{12}$$

i_{db} 是折價基礎收益率, F 是面額, P 是債券價格, d 是距離到期日所剩下的日數

例: 某一國庫券面額為100萬元, 將於2012年10月26日到期, 今天是2012年10月22日, 則距離到期日還有5天, 若該債券今日價格為99.98萬元, 則根據式 (12) 折價基礎收益率為

$$\frac{(100 - 99.98)}{100} \times \frac{360}{5} = 0.0144$$

折價基礎收益率的特性

- 折價基礎收益率對於折價債券的殖利率的估計是低估的
- 當債券的市場價格跟面額的差距越大時, 折價基礎收益率對殖利率的低估情形越嚴重 ($\frac{F-P}{F}$ v.s. $\frac{F-P}{P}$)
- 當折價債券的期限越長, 債券的現值和面額的差異會越大, 所以折價基礎收益率對殖利率低估的程度也會隨債券的期限越長而變嚴重
- 折價基礎收益率與殖利率呈同向變動

殖利率和持有期報酬率的區別

殖利率是衡量人們購買債券持有至到期日為止的收益率, 然而, 在到期日之前, 債券的價格可能會波動, 若投資人在到期日之前將此債券賣出, 所得到的報酬率 (持有期報酬) 不一定等於殖利率

例: 某一10年期的息票債券, 面額1,000元, 息票率10%, 你以1,000元買入, 一年後以1,200元賣出, 則持有此債券一年的報酬率為何?

$$\text{RET} = \frac{(100 + 200)}{1,000} = 30\%$$

- 買入此債券時的殖利率是10%, 而持有一年的獲利率則為30%, 其中關鍵在於債券價格的變動

持有期報酬率

- 息票債券持有一期的報酬率 RET 的公式為

$$\mathrm{RET} = \frac{(\mathrm{C} + \mathrm{P}_{t+1} - \mathrm{P}_t)}{\mathrm{P}_t}$$

  C 為一期的息票給付, P_{t+1} 是下一期的債券價格, P_t 是此債券在本期買入的價格

- 上式整理後又可以得到

$$\mathrm{RET} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}_t} + \frac{(\mathrm{P}_{t+1} - \mathrm{P}_t)}{\mathrm{P}_t} = \mathrm{i}_c + \frac{(\mathrm{P}_{t+1} - \mathrm{P}_t)}{\mathrm{P}_t} = \mathrm{i}_c + \mathrm{g}$$

  i_c為目前收益率, 而 $\mathrm{g} = \frac{\mathrm{P}_{t+1} - \mathrm{P}_t}{\mathrm{P}_t}$ 為資本利得率 (rate of capital gains), 若 $\mathrm{g} < 0$ 則表示有資本損失

表 4.3 利率變動對報酬率的影響

期限	目前收益率	初始價格	下期價格	資本利得率	獲利率
30	10%	1,000	503	−49.7%	−39.7%
20	10%	1,000	516	−48.4%	−38.4%
10	10%	1,000	597	−40.3%	−30.3%
5	10%	1,000	741	−25.9%	−15.9%
2	10%	1,000	917	−8.3%	1.7%
1	10%	1,000	1,000	0%	10%

債券面額 1,000 元, 息票率 10%, 期限各異, 但只持有一期

購買時利率為 10%, 一期後, 利率上漲為 20%

利率變動對報酬率的影響

由表4.3可以觀察到幾個現象:

- 當持有期限等於到期期限, 持有期報酬率等於買入債券當時的殖利率, 不受利率變動的影響
- 由於利率和債券價格呈反向關係, 利率的上升將會使債券的價格下降, 若造成的資本損失很大, 將可能出現報酬率為負的情況
- 期限越長的債券, 利率變動對債券價格的影響越大, 例如30年期的債券因利率上升而報酬率成為 -39.7%, 5年期債券的報酬率則為 -15.9%

實質利率與名目利率

實質利率衡量投資後所能保存的購買力，能夠更精確反映借貸的機會成本；名目利率只表現能得到的貨幣價值

- 費雪方程式 (Fisher Equation):

$$\mathrm{i} \doteqdot \pi^{\mathrm{e}} + \mathrm{i}_{\mathrm{r}}$$

例: $\mathrm{i} = 5\%$, $\pi^{\mathrm{e}} = 3\%$, 則 $\mathrm{i}_{\mathrm{r}} \doteqdot \mathrm{i} - \pi^{\mathrm{e}} = 2\%$

- 假設一年後對方還錢時的實際通貨膨脹率為 $\pi = 6\%$，表示此借貸的實質利率是 -1%，在借貸前你預期通膨率為3%，因此在5%的名目利率下，此借貸的實質利率為2%，實質好處為正，但從事後來看，實質好處為負