

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 74.

1. *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen; von Werner Heisenberg.*

Einleitung.

Das Turbulenzproblem, das ganz allgemein den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden soll, ist im Laufe der Zeit in so vielen Arbeiten von so vielen verschiedenen Gesichtspunkten aus behandelt worden, daß es nicht unsere Absicht sein kann, einleitend über die bisherigen Resultate eine Übersicht zu geben. Wir verweisen zu diesem Zweck auf eine Arbeit von Noether¹⁾ über den heutigen Stand des Turbulenzproblems, in welcher auch die meisten Literaturangaben zu finden sind.

Für unseren Zweck genügt es, den gegenwärtigen Stand des Turbulenzproblems in ganz groben Umrissen zu skizzieren: die bisherigen Untersuchungen zerfallen in zwei Teile: die einen von ihnen befassen sich mit der Stabilitätsuntersuchung irgendwelcher laminaren Bewegung, die anderen mit der turbulenten Bewegung selbst.

Die ersteren führten anfangs zu dem negativen Resultat, daß alle untersuchten Laminarbewegungen stabil seien. v. Mises²⁾ und Hopf³⁾ bewiesen auf Grund eines Ansatzes von Sommerfeld⁴⁾ die Stabilität des der Couetteschen Anordnung entsprechenden linearen Geschwindigkeitsprofils, Blumenthal⁵⁾ gelangte bei einem von Noether zur Diskussion gestellten Profile 3. Grades zu demselben Ergebnis. Dagegen gelang es später Noether⁶⁾, ein labiles Profil anzugeben — allerdings

1) F. Noether, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1. S. 125, 1921.

2) R. v. Mises, Beitrag z. Oszillationsprobl.: Heinr. Weber-Festschrift. 1912. S. 252.

3) L. Hopf, Ann. d. Phys. 44. S. 1. 1914.

4) A. Sommerfeld, Atti d. IV. Congr. int. dei Mathem. Rom 1909.

5) O. Blumenthal, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. S. 563. 1913.

6) F. Noether, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1917.

ein Profil, das schon im Falle der reibungslosen Flüssigkeit labil ist und auch in Wirklichkeit nie als stationärer Bewegungszustand realisierbar ist. In neuerer Zeit aber hat Prandtl¹⁾ gezeigt, daß es in der Tat Profile gibt, die erst bei Berücksichtigung der Reibung labilen Charakter besitzen.

Die andere Gruppe von Arbeiten, die in jüngster Zeit durch die Rechnungen²⁾ von v. Karman, Latzko u. a. große Erfolge erzielt hat, untersucht die turbulente Bewegung selbst und geht dabei auf halbempirischem Wege mit Benutzung der Ähnlichkeitsgesetze vor. Theoretisch fußt sie fast durchweg auf dem Boden der Prandtl'schen Grenzschichttheorie. Das für uns wichtigste Resultat dieser Arbeiten ist das aus dem empirischen Blasius'schen Widerstandsgesetz (die Zitate bei Schiller⁵⁾) folgende sogenannte $y^{1/4}$ -Gesetz der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung.

Ein Hauptziel der erstgenannten Arbeiten, der Stabilitätsuntersuchungen, bildete stets die Ermittlung der kritischen Reynoldsschen Zahl. Eine befriedigende Berechnung dieser Zahl ist bisher nicht gelungen und es muß auch als fraglich betrachtet werden, ob eine solche durch Stabilitätsuntersuchungen geleistet werden kann. Die Versuche von Ekman³⁾, Ruckes⁴⁾ und Schiller⁵⁾ zusammen mit dem negativen Ergebnis Hopfs beim linearen Geschwindigkeitsprofil legen vielmehr den Gedanken nahe, daß die kritische Reynoldssche Zahl nicht den Punkt angibt, an dem die Laminarbewegung anfängt labil zu werden, sondern den, an dem zum erstenmal die turbulente Bewegung als stationärer Zustand möglich ist. Vom Standpunkt der Theorie aus müssen wir also darauf gefaßt sein, unter Umständen zwei kritische Reynoldssche Zahlen zu finden, die eine entsprechend

1) L. Prandtl, Physik. Zeitschr. **23**. S. 19. 1922 und O. Tietjens, Dissert. Göttingen 1922.

2) Vgl. bes. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**. S. 233f. 1921.

3) V. Ekman, Turbulent motions of Liquids. Arch. f. Mat. och fysik **6**. S. 12. 1919.

4) W. Ruckes, Dissert. Würzburg 1907. Vgl. auch den Vortrag von W. Wien, Über turbul. Bewegungen. Phys. Zeitschr. **8**. 1904 und Verh. d. deutsch. phys. Gesellsch. **9**. 1907.

5) L. Schiller, Rauigkeit und kritische Zahl. Physik. Zeitschr. **3**. S. 412. 1920.

dem Beginn der Turbulenz, die andere entsprechend dem Niederbrechen der Laminarbewegung.

Auch die vorliegende Untersuchung soll in die zwei verschiedenen Teile, die Behandlung des Stabilitätsproblems einerseits, die der turbulenten Bewegung andererseits zerfallen.

Das Ziel des ersten Teiles soll sein, alle bisherigen Untersuchungen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen, d. h. möglichst allgemein die Bedingungen dafür aufzustellen, wann ein Profil labilen oder stabilen Charakter trägt und die Methoden anzugeben zur Lösung der Stabilitätsgleichung für jedes beliebige Geschwindigkeitsprofil und zur Berechnung der für labile Profile sich ergebenden kritischen Reynoldsschen Zahl. Dieses Ziel kann natürlich nur durch Anwendung von Näherungsverfahren unvollkommen erreicht werden. Dennoch hoffen wir, die qualitativ wesentlichen Gesichtspunkte durch solche Rechnungen klarstellen zu können. Die Untersuchung irgend eines beliebigen Profils scheint zwar zunächst physikalisch sinnlos zu sein, da nur bestimmte Profile in Wirklichkeit vorkommen. Indem wir aber irgendein Profil als endliche Störung eines anderen auffassen können, wie dies z. B. Noether a. a. O. getan hat, wir andererseits später die Untersuchungen auf das zunächst unbekannte Grundprofil der turbulenten Bewegung ausdehnen müssen, so scheint die Untersuchung eines beliebigen Profils doch von großer Wichtigkeit.

Als Anwendung der Methoden soll das Parabelprofil durchgerechnet werden.

Im zweiten Teile wollen wir versuchen, unter gewissen stark idealisierenden Voraussetzungen Differentialgleichungen für die turbulenten Bewegungen abzuleiten und aus diesen qualitative Aufschlüsse zu erhalten über einige Eigenschaften der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung.

I. Teil: Die Stabilitätsgleichung.

§ 1. Festlegung des mathematischen Problems.

Die wesentlichste Beschränkung, die wir unseren Rechnungen auferlegen, besteht in der ausschließlichen Betrachtung von ebenen Laminarbewegungen und nur ebenen Störungen derselben. Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems X, Y, Z nehmen wir also an, daß die Ge-

schwindigkeit in der Z-Richtung Null und alle übrigen Größen von z unabhängig seien. Weiter aber werden wir auch nur die Stabilität solcher Laminarbewegungen prüfen, die zwischen zwei geraden, parallelen Wänden verlaufen. Dabei nehmen wir an, daß die Wände der X-Achse parallel laufen, daß also auch die zu untersuchende Laminarbewegung eine Geschwindigkeitskomponente nur in der X-Richtung besitzt. Diese Geschwindigkeit w in der X-Richtung wird in irgendeiner Weise von y abhängen; über die Funktion $w = w(y)$ behalten wir uns vor, später einige Annahmen über Stetigkeit, Symmetrie usw. zu machen; sonst soll diese Funktion jedoch zunächst ganz willkürlich sein.

Würden wir $w = ay$ setzen, so würden unsere Ansätze gerade mit den von Hopf beim Couetteschen Fall untersuchten identisch. Auf die Frage, ob sich die untersuchten Profile $w = w(y)$ als stationäre Bewegungen realisieren lassen, gehen wir zunächst nicht ein (vgl. u. S. 581).

Bevor wir die (bereits von Sommerfeld a. a. O. aufgestellte) Stabilitätsgleichung noch einmal in Kürze aus den Stokesschen Differentialgleichungen herleiten, führen wir in bekannter Weise dimensionslose Variable ein. Sei h eine charakteristische Länge (etwa der Abstand beider Wände), U eine charakteristische Geschwindigkeit des Profils, μ die Zähigkeit, ρ die Dichte, $\frac{U \cdot h \cdot \rho}{\mu} = R$ die Reynoldssche Zahl, so führen wir statt x, y, u, v, t, p (unter u, v werde die Geschwindigkeit in der x - bzw. y -Richtung verstanden, t sei die Zeit, p der Druck) neue Variable $x_0, y_0, u_0, v_0, t_0, p_0$ ein vermöge der Relationen

$$(1) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{x}{h}; & y_0 = \frac{y}{h}; & u_0 = \frac{u}{U}; & v_0 = \frac{v}{U}; & t_0 = t \cdot \frac{U}{h}; \\ & & & & p_0 = p \cdot \frac{h}{\mu U}. \end{cases}$$

Lassen wir nachträglich den Index 0 weg, so lauten die Stokesschen Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{cases}$$

Weil wir Inkompressibilität voraussetzen, schreiben wir

$$(3) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Durch Elimination von p erhalten wir bekanntlich:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi.$$

Unter Δ ist hier das Differentiationssymbol

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

verstanden.

In Gleichung (4) ist noch nichts über unser spezielles Problem, die Stabilitätsuntersuchung einer gewissen Laminarströmung, enthalten. Dementsprechend wird Gleichung (4) auch die Grundlage für die Rechnungen des Teils II bilden. Um speziell zur Stabilitätsuntersuchung überzugehen, teilen wir die Bewegung und damit auch das Vektorpotential ψ in eine Grundströmung und darüber überlagerte kleine Schwingungen. Wir machen also den Ansatz:

$$(5) \quad \psi = \Phi(y) + \varphi(y) e^{i(\beta t - \alpha x)},$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = w(y) = w.$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in (4) ein, lassen dabei alle Glieder weg, die φ nicht enthalten (da wir die Gleichung (4) für $\varphi = 0$ als erfüllt ansehen), lassen ferner alle in φ quadratischen Glieder weg (da wir φ als klein voraussetzen), so lautet die entsprechende Differentialgleichung für φ :

$$(7) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \varphi w'' = \frac{i}{\alpha R} (\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi).$$

Daß wir Gleichung (4) für $\varphi = 0$ als erfüllt ansehen, bedeutet physikalisch, daß wir nur solche Grundströmungen w betrachten, die entweder vermöge äußerer Kräfte wirklich stationär sind, oder deren zeitliche Veränderung langsam gegen die der kleinen Schwingungen erfolgt.

Gleichung (7) ist in dieser Allgemeinheit schon von Noether a. a. O. abgeleitet. Sie ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für φ von der vierten Ordnung. Dem entspricht es, daß die Funktion φ vier Grenzbedingungen erfüllen muß; es müssen u und v , daher auch φ und φ' an den beiden Wänden verschwinden. Setzen wir $\beta/\alpha = c$, so daß c im wesentlichen die Wellengeschwindigkeit bedeutet, so läßt sich das mathematische Problem folgendermaßen formulieren:

Es sind die Lösungen der Gleichung

$$(7a) \cdot (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - \varphi w'' = \frac{i}{\alpha R} (\varphi''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi)$$

mit der Nebenbedingung, daß an den begrenzenden Wänden (etwa $y = 1$ und $y = -1$) $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ sein soll, zu untersuchen. Zu jedem Wert von α und R soll der zugehörige Wert von c und β berechnet werden; α sei der Einfachheit halber stets positiv. Je nachdem der imaginäre Teil von β positiv, Null oder negativ ist, haben wir es mit einer stabilen, ungedämpften oder labilen Schwingung zu tun. Es sind die Bedingungen für das Profil w aufzusuchen, unter denen Gleichung (7a) nur stabile, bzw. unter denen sie auch labile Schwingungen zuläßt.

Bevor wir zu den Lösungsmethoden übergehen, sei noch auf eine besondere Eigenschaft der Gleichung (7a) hingewiesen. Im Limes der reibungslosen Flüssigkeit $R = \infty$ verwandelt sich Gleichung (7a) in eine Differentialgleichung 2. Grades für φ .

$$(8) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - \varphi w'' = 0.$$

Dem entspricht es, daß für $R = \infty$ nur noch zwei Grenzbedingungen zu befriedigen sind, welche besagen, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit, also v oder φ an beiden Wänden verschwinden soll, nicht mehr aber φ' .

Die Bedingungen für die Lösbarkeit von Gleichung (8) sind schon von Rayleigh¹⁾ ausführlich untersucht worden. Man kann, um eine einfache Bezeichnung einzuführen, „schwingungsfähige“ und „nichtschiebungsfähige“ Grundströmungen unterscheiden, je nachdem Gleichung (8) eine Lösung mit reellem c besitzt, die den Grenzbedingungen genügt, oder nicht.²⁾ Gibt es Lösungen mit komplexem c , so wird, wie sich später zeigen wird, auch bei Berücksichtigung der Reibung die Stabilitätsfrage für diese Schwingungen schon durch (8) entschieden, die Schwingungen sind dann immer *labil*.

Man wird aber darüber hinausgehend zu der Vermutung geführt, daß das Profil w dann und nur dann unter Einfluß

1) Lord Rayleigh, Papers I. S. 361; III. S. 575, 594; IV. S. 203.

2) Hierbei genügt es aber *keineswegs*, das Profil durch Tangentenpolygone anzunähern, das Resultat hinsichtlich der möglichen Schwingungen würde dadurch völlig gefälscht.

der Reibung labile oder ungedämpfte Schwingungen zulassen wird, wenn es zu den schwingungsfähigen Grundströmungen gehört.

Diese Vermutung liegt um so näher, als sie sich an allen bisher untersuchten Profilen bestätigt hat.¹⁾ Trotzdem wird sie keineswegs dadurch begründet, daß Gleichung (8) im Limes $R = \infty$ aus Gleichung (7a) hervorgeht, denn es ist z. B. in den Arbeiten von Oseen²⁾ bewiesen, daß der Grenzübergang $R = \infty$ in den Differentialgleichungen schon mehrfach zu falschen Resultaten, besonders hinsichtlich der Grenzbedingungen der reibungslosen Flüssigkeit, geführt hat und daß man daher den Grenzübergang nur an den Integralen der Gleichung (7a) vornehmen darf. Außerdem ist es von vorneherein keineswegs zu entscheiden, ob die Reibung die ungedämpften Schwingungen von (8) im Sinne einer Dämpfung oder einer Anfachung abändert.

Wir werden im folgenden versuchen, unsere oben ausgesprochene Vermutung zu beweisen, indem wir zeigen, daß die *schwingungsfähigen* Systeme oberhalb eines bestimmten Wertes der Reynoldsschen Zahl im allgemeinen *labilen* Charakter, alle *nichtschwingungsfähigen* dagegen *stabilen* Charakter besitzen.

Durch diesen Satz wird das Problem der Stabilität eines Profils ganz wesentlich vereinfacht; denn für sehr kleine Werte von α lassen sich bekanntlich die Lösungen von (8) direkt hinschreiben.

§ 2. Die Lösungsmethoden und das allgemeine Verhalten der Integrale von (7a).

Die wichtigste Eigenschaft der Gleichung (7a), die eine näherungsweise Darstellung ihrer Lösungen erlaubt, besteht darin, daß R als sehr groß betrachtet werden kann. Es wird sich nämlich zeigen, daß, falls eine Labilitätsgrenze existiert, diese im allgemeinen bei sehr hohen Werten von R liegt. Da es andererseits physikalisch ganz unwahrscheinlich ist, daß bei kleinen Werten von R noch einmal Labilität des betreffenden Profils eintreten kann, so reicht es für unsere Zwecke zunächst aus, R als sehr groß anzusehen.

1) Vgl. auch L. Prandtl, Phys. Zeitschr. a. a. O.

2) Vgl. z. B. C. W. Oseen, Beiträge z. Hydr. Ann. d. Phys. 46. S. 231 u. 623. 1915.

Diese Annahme macht es möglich, die Lösungen von (7a) anzunähern durch Entwicklung nach negativen Potenzen von R bzw., wie sich zeigen wird, von $\sqrt{\alpha R}$. Ferner werden wir α als klein annehmen und die Lösungen gegebenen Falles nach positiven Potenzen von α^2 entwickeln.

Die beiden Entwicklungsmethoden nach $(\alpha R)^{-1/2}$ einerseits, nach α^2 andererseits, scheinen sich insofern zu widersprechen, als im ersten Falle αR als groß, im zweiten α^2 als klein angenommen wird. Der Widerspruch wird jedoch dadurch behoben, daß R im allgemeinen als außerordentlich groß betrachtet werden kann, so daß z. B. für $R = 2000$, $\alpha = 1/10$; $\alpha R = 200$, $\alpha^2 = 1/100$ wird, was für eine gute Konvergenz beider Entwicklungen völlig hinreicht. Die Konvergenzeigenschaften dieser Näherungsmethoden sind aber noch genauer zu betrachten. Die Untersuchung lehrt, daß die Reihen nach $(\alpha R)^{-1/2}$ im allgemeinen divergieren, daß sie aber den bekannten Charakter der semikonvergenten Reihen tragen, d. h. daß die Glieder zuerst abnehmen, dann wieder wachsen und daß man die bestmögliche Annäherung erhält, wenn man die Reihe beim kleinsten Glied abbricht. Unser Näherungsverfahren hat also ähnliche Konvergenzeigenschaften, wie z. B. die in der Astronomie verwendeten Reihen der Störungstheorie, deren Verhalten Poincaré, *Meth. nouv. d. l. mec. cel.* II ausführlich schildert.

Eine erhebliche Schwierigkeit für die Verwendung der semikonvergenten Entwicklungen liegt aber darin, daß sie in der Umgebung eines bestimmten Punktes ihre Gültigkeit verlieren, so daß es nicht ohne weiteres entschieden werden kann, in welcher Weise die Näherungslösungen auf beiden Seiten des Punktes aneinandergefügt werden müssen, um ein bestimmtes Integral der Gleichung (7a) *beiderseits* anzunähern. Wir werden hierauf in § 3 ausführlich eingehen.

Die Entwicklung nach positiven Potenzen von α^2 scheint im allgemeinen wirklich zu konvergieren. Für spezielle Profile läßt sich diese streng beweisen (z. B. für das lineare Profil); eine Untersuchung über die Frage, unter welchen Bedingungen für das Profil w diese Konvergenz wirklich stattfindet, haben wir jedoch nicht ausgeführt.

Wir beginnen mit der Ableitung der Näherungslösungen der Gleichung (7a):

$$(7a) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - w'' \varphi = \frac{i}{\alpha R} (\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi).$$

Zu diesem Zwecke setzen wir zunächst

$$(9) \quad \varphi = e^{\int g dy}, \quad g = \sqrt{\alpha R} g_0 + g_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha R}} g_2 + \dots$$

Die Entwicklung wollen wir auf die beiden höchsten Glieder in $\sqrt{\alpha R}$ beschränken. Es folgt:

$$\alpha R g_0^2 (w - c) + \sqrt{\alpha R} (g_0' + 2g_0 g_1) \cdot (w - c) = i \alpha R g_0^4 + i \sqrt{\alpha R} (4g_0^3 g_1 + 6g_0^2 g_0').$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß α^2 und w'' von der Größenordnung 1 oder jedenfalls $\ll \sqrt{\alpha R}$ seien. Es ergibt sich jetzt durch einfache Rechnung:

$$(10) \quad g_0 = \sqrt{-i(w - c)}, \quad g_1 = -\frac{5}{2} \frac{g_0'}{g_0}, \quad \int g_1 dy = -\frac{5}{2} \lg g_0.$$

Wir erhalten also zwei partikuläre Integrale der Gleichung (7a):

$$(11) \quad \varphi_{1,2} = (w - c)^{-5/4} e^{\pm \int_{y_0}^y \sqrt{-i\alpha R(w-c)} dy}.$$

Der Punkt y_0 soll dadurch festgelegt werden, daß für $y = y_0$ $w = c$ sei. y_0 kann also unter Umständen auch komplex sein. Das Vorzeichen der Wurzel soll so gewählt werden, daß für $w - c = -a e^{i\omega}$, $-i\alpha R(w - c) = \alpha R \cdot a e^{i(\omega + \frac{\pi}{2})}$ die Wurzel wird:

$$(\alpha R a)^{1/4} \cdot e^{i(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4})}.$$

Bemerkenswert an diesen beiden Integralen ist, daß α^2 in φ in dieser Näherung nicht vorkommt (d. h. nur in der Kombination αR , die man, wie aus Gleichung (7a) hervorgeht, in gewissem Sinne als die eigentliche Reynoldssche Zahl bezeichnen könnte).

Wie wir später sehen werden, bestimmen die beiden Integrale (11) das Verhalten von φ in der Grenzschicht und das Nichtvorkommen von α^2 in (11) bedeutet physikalisch, daß wir nur solche Schwingungen betrachten, deren Wellenlänge groß ist gegen die Grenzschichtdicke — was bei den empirisch beobachteten labilen Schwingungen sicher der Fall ist.

Zu einem vollständigen Lösungssystem von (7a) brauchen wir jedoch noch zwei weitere Integrale; naturgemäß werden wir dazu diejenigen nehmen, die durch Entwicklung nach Potenzen von $(\alpha R)^{-1}$ aus den Integralen der Gleichung (8) hervorgehen.

Zu diesem Ende lösen wir zunächst Gleichung (8) durch Entwicklung nach Potenzen von α^2 . Wir setzen also:

$$(8) \quad (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) (w - c) - \varphi w'' = 0,$$

$$(12) \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \alpha^2 \varphi^{(1)} + \alpha^4 \varphi^{(2)} + \dots$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)''} (w - c) - \varphi^{(0)} w'' &= 0, \\ \varphi^{(1)''} (w - c) - \varphi^{(1)} w'' &= \varphi^{(0)} \cdot (w - c), \\ \varphi^{(2)''} (w - c) - \varphi^{(2)} w'' &= \varphi^{(1)} \cdot (w - c), \\ &\dots \end{aligned}$$

Es ergeben sich durch die Methode der Variation der Konstanten die beiden Integrale:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_3(R=\infty) &= (w - c) \left(1 + \alpha^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} \int dy (w - c)^2 + \dots \right), \\ \varphi_4(R=\infty) &= (w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2} \left(1 + \alpha^2 \int dy (w - c)^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Integrale sind nun noch um Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1}$, ... usw. zu korrigieren, wenn sie der Gleichung (7a) genügen sollen.

Ohne die entsprechende Reihenentwicklung im einzelnen anzuschreiben, geben wir als Resultat φ mit den Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1}$ an:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_3 &= (w - c) \left\{ 1 + \alpha^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} \int dy (w - c)^2 + \alpha^4 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\alpha R} \int \frac{dy}{(w - c)^2} \frac{d^2}{dy^2} (w - c) + \dots \right\}, \\ \varphi_4 &= (w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2} \left\{ 1 + \alpha^2 \int dy (w - c)^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} + \alpha^4 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\alpha R} \frac{d^2}{dy^2} (w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Mit (11) und (14) ist ein vollständiges Lösungssystem der Gleichung (7a) näherungsweise gefunden.

Ehe wir dieses Lösungssystem zur Erfüllung der Grenzbedingungen anwenden, wird es zweckmäßig sein, wenn wir uns den physikalischen Sinn der vier Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ klar machen und einige Resultate vorwegnehmen, die wir erst später begründen können.

Die Integrale φ_1, φ_2 haben die Eigenschaft, bei den uns interessierenden großen Werten von R sehr rasch veränderlich zu sein, wie aus dem Exponenten der Ordnung $\sqrt{\alpha R}$ hervorgeht. Wenn also etwa φ_1 an der einen Wand von der Größenordnung 1 ist, so wird es in einigem Abstand von der Wand exponentiell verschwinden (an sich könnte es auch noch außerordentlich groß werden, doch dies wird naturgemäß durch die Grenzbedingungen verhindert). Das hat zur Folge, daß sich, von der unmittelbaren Umgebung der Wände abgesehen, φ aus φ_3 und φ_4 allein zusammensetzt, d. h. dem Verhalten von φ in der reibungslosen Flüssigkeit sehr ähnlich ist.

Daß α^2 in φ_1, φ_2 nicht explizit vorkommt (vgl. Gleichung (11)), wohl aber in φ_3, φ_4 (vgl. Gleichung (14)), muß physikalisch offenbar so gedeutet werden, daß bei der Annahme, α^2 sei nicht sehr groß ($\alpha^2 < \sqrt{\alpha R}$, vgl. Gleichung (7a) und (9)) die Wellenlänge zwar als unendlich groß gegen die Grenzschichtdicke, nicht aber gegen die Kanalbreite betrachtet werden kann. Der charakteristische Unterschied zwischen den „Grenzschichtintegralen“ φ_1, φ_2 einerseits, den der reibungslosen Flüssigkeit entsprechenden Integralen φ_3, φ_4 andererseits, spricht sich also in dem Auftreten bzw. Nichtauftreten von α^2 bezeichnend aus.

Was die Konvergenz der Entwicklung nach Potenzen von α^2 betrifft, so können wir hoffen, daß sie für Werte von α^2 von der Größenordnung 1 noch sehr wohl hinreicht, um eine gute Näherung zu ermöglichen, denn für ein lineares Profil gehen die Reihen für φ_3, φ_4 über in solche vom Typus der Potenzentwicklung von $\cos \alpha$, die in der Umgebung $\alpha = 1$ noch sehr rasch konvergiert.

Das Strömungsbild, das wir nach allen diesen Schlüssen erwarten müssen, entspricht den Ansätzen, die man in der Prandtl'schen Grenzschichttheorie macht. Mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung der Wände gehorcht die Bewegung sehr nahe den Differentialgleichungen der reibungslosen Flüssigkeiten. An den Wänden selbst aber haftet eine Grenzschicht,

deren Dicke von der Größenordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ ist. In dieser nimmt die Geschwindigkeit u gegen die Wand zu rasch gegen Null ab, während v auch außerhalb der Grenzschicht schon nahezu Null ist.

§ 3. Die Übergangssubstitutionen.

Wenn wir den Verlauf der Integrale von (7a) von der einen begrenzenden Wand bis zur anderen studieren wollen, so müssen wir damit rechnen, daß an einer Stelle $y = y_0$ im Kanal $w - c = 0$ ist (oder wenigstens der reelle Teil von $w - c$ Null ist), daß also die Wellengeschwindigkeit dort mit der Geschwindigkeit der Grundströmung übereinstimmt. In diesem Punkte verlieren die Näherungsformeln (11) und (14) für die Integrale von (7a) ihre Gültigkeit.

Es ist daher nötig, die Übergangssubstitutionen für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ zu kennen, die beim Übergang von $\Re(w - c) > 0$ zu $\Re(w - c) < 0$ anzuwenden sind. Zu diesem Ende entwickeln wir w und φ in der „Umgebung“ des kritischen Punktes y_0 nach Potenzen von $(\alpha R)^{-1/2}$ und setzen deshalb $y - y_0 = \eta \cdot (\alpha R)^{-1/2}$. Ferner nehmen wir an, daß der imaginäre Teil von y_0 von *kleinerer* Größenordnung als $(\alpha R)^{-1/2}$ sei. Ist er nämlich von *höherer* Größenordnung, so verstehen sich die Übergangssubstitutionen von selbst, weil dann im ganzen Bereich reeller y nirgends ein „kritischer Punkt“ auftritt. Ist er von *derselben* Größenordnung, so läßt sich das Verhalten von φ und w leicht aus den beiden eben angeführten Grenzfällen interpolieren. Wir können zunächst sogar $\Im(y_0) = 0$ setzen, weil sich φ in unserem Falle ($\Im(y_0) \ll (\alpha R)^{-1/2}$) nach Potenzen von $\Im(y_0)$ entwickeln läßt und fürs erste nur das Verhalten von φ für $\Im(y_0) = 0$ gebraucht wird.

Wir setzen also jetzt $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$,
 $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}$; $w - c = \varepsilon \cdot a \eta + \varepsilon^2 b \eta^2 + \dots$

Dann entsteht aus (7a):

$$\begin{aligned} & \varphi_0'''' + \varepsilon \varphi_1'''' + \dots \\ & = -i[(\varphi_0'' + \varepsilon \varphi_1'' + \dots) a \eta + \varepsilon \varphi_0'' b \eta^2 - 2\varepsilon \varphi_0 b] + \dots \end{aligned}$$

Also in erster Näherung:

$$(15) \quad \varphi_0'''' = -i \varphi_0'' \eta a;$$

in zweiter Näherung:

$$(15a) \quad \varphi_1'''' = -i[\varphi_1'' \eta a + \varphi_0'' b \eta^2 - 2\varphi_0 b].$$

Für die Integrale φ_1, φ_2 Gl. (11) entnehmen wir aus

(15), daß sie sich im „kritischen Gebiete“ (η Größenordnung 1) wie die von Hopf beim *linearen* Profile gefundenen Integrale, d. h. wie gewisse Zylinderfunktionen verhalten. Wir können also jetzt schon schließen, daß die Übergangssubstitutionen für φ_1, φ_2 aus (11) bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ dieselben, wie beim linearen Profil sein müssen:

$$(16) \quad \begin{cases} \varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + i \varphi_2 \\ \varphi_1 - i \varphi_2 \rightarrow \varphi_1 \end{cases}$$

entsprechen einem Übergang von

$$\Re(w - c) < 0 \rightarrow \Re(w - c) > 0.$$

Für das Studium der Integrale φ_3, φ_4 in der Umgebung von $y - y_0 = 0$ reichen aber die bisherigen einfachen Rechnungen nicht aus, denn für diese würde die Näherungslösung (15) lauten $\varphi'' = 0$; aus (14) wissen wir aber, daß im Limes $R \rightarrow \infty$ φ_4' an der Stelle $y - y_0 = 0$ im allgemeinen logarithmisch unendlich wird. Die Gleichungen (15) und (15a) sind also in dieser Form ungeeignet zur Erfassung dieser Singularität.

Wir setzen jetzt vielmehr $\alpha = 0$ und $w''' = 0$ (d. h. wir brechen die Entwicklung von w mit dem 2. Gliede ab), integrieren aber sonst (7a) zunächst *exakt*. Dabei bemerken wir, daß $\varphi = w - c$ ein partikuläres Integral dieser vereinfachten Gleichung (7a) sein muß, und für φ machen wir daher den aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen geläufigen

Ansatz: $\varphi = (w - c) \int \psi \, d y$. Dann folgt aus

$$\varphi'''' = -i \alpha R (\varphi'' (w - c) - w'' \varphi)$$

für $\varphi = (w - c) \int \psi \, d y$:

$$\begin{aligned} & \psi''' (w - c) + 4 \psi'' w' + 6 \psi' w'' \\ & = -i \alpha R (2w' (w - c) \psi + (w - c)^2 \psi'), \end{aligned}$$

was nach nochmaliger Integration übergeht in:

$$(17) \quad \psi'' (w - c) + 3 \psi' w' + 3 \psi w'' = -i \alpha R ((w - c)^2 \psi - C).$$

C ist eine Integrationskonstante. Führt man jetzt wieder ein:

$$\eta = (y - y_0) (\alpha R)^{1/2}, \quad \varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}, \quad w - c = \varepsilon a \eta + \varepsilon^2 b \eta^2,$$

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots,$$

so ergibt sich:

$$(17a) \quad \begin{cases} \psi_0'' a \cdot \eta + 3 \psi_0' a = -i (\alpha^2 \eta^2 \psi_0 - C) \\ \psi_1'' a \eta + 3 \psi_1' a + \psi_0'' b \eta^2 + 6 \psi_0' b \eta + 6 \psi_0 b \\ \quad = -i (2a b \psi_0 \eta + a^2 \eta^2 \psi_1). \end{cases}$$

Diese Differentialgleichungen enthalten natürlich immer noch sämtliche Lösungen von (7a). Da wir speziell φ_4 studieren wollen (φ_3 verhält sich für $\alpha = 0$ im Punkte $y = y_0$ regulär), so suchen wir *diejenige* Lösung von (17a) aus, die sich in einigem Abstand von y_0 , also für große $(w - c) \propto R$, wie $\frac{1}{(w - c)^2}$ verhält; denn wir wissen ja aus (14), daß φ_4 in einigem Abstand von y_0 durch

$$(w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2}$$

gegeben ist. Es wird also nach (17a)

$$\psi_0 = \frac{C}{a^2 \eta^2}$$

und

$$(18) \quad \psi_1'' \eta + 3 \psi_1' = -i \left(\frac{2b}{a^2} C \eta + a \eta^2 \psi_1 \right).$$

ψ_1 ist wieder dadurch völlig bestimmt, daß es sich „im Unendlichen“ wie $-\frac{2bC}{a^2 \eta}$ verhalten soll.

Wenn wir nun nach den Übergangssubstitutionen für φ_4 (und φ_3) fragen, so ist damit folgendes gemeint: In den asymptotisch gültigen Darstellungen (14) für φ_3, φ_4 kommt immer das Integral $\int \frac{dy}{(w - c)^2}$ vor, das seinen Sinn verliert, wenn es über die Stelle $y = y_0$ ($w - c = 0$) hinweg zu erstrecken ist. In Wirklichkeit tritt aber eben an Stelle von $\frac{1}{(w - c)^2}$ in der Nähe des kritischen Punktes die Funktion ψ . Es kommt also alles auf das Verhalten von ψ (insbesondere ψ_1) in der kritischen Umgebung an. Ist dieses Verhalten, also auch die Größe des Integrals $\int \psi dy$ (erstreckt über die kritische Stelle hinweg) bekannt, so ist diese Kenntnis gleichbedeutend mit der Kenntnis der Übergangssubstitutionen für φ_3, φ_4 .

Die durch (18) und die Grenzbedingung im Unendlichen charakterisierte Lösung ψ_1 lautet:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(\eta) = & -\frac{\pi b C}{3 a^2 \eta} \left\{ H_{\frac{1}{2}}^{(1)} \left(\frac{2}{3} (-i \alpha_0 \eta)^{3/2} \right) \int_{+\infty}^{\eta} H_{\frac{1}{2}}^{(2)} \eta^2 d\eta \right. \\ & \left. - H_{\frac{1}{2}}^{(2)} \int_{-\infty}^{\eta} H_{\frac{1}{2}}^{(1)} \eta^2 d\eta \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin treten die Hankelschen Zylinderfunktionen vom Index $\frac{2}{3}$ und dem Argument $\frac{2}{3} (-i \alpha_0 \eta)^{3/2}$ auf ($\alpha_0 = a^{3/2}$). Dabei ist das Vorzeichen von $(-i \alpha_0 \eta)^{3/2}$ so zu nehmen, daß $(-i \alpha_0 \eta)^{3/2}$ für $\eta = \frac{r e^{i\xi}}{\alpha_0}$ positiv wird. Eine nähere Untersuchung von (19) lehrt, daß sich ψ_1 in der ganzen oberen Halbebene und sogar noch in der unteren Halbebene teilweise, nämlich für $\eta = r e^{i\xi}$ in den Grenzen

$$-\frac{i\pi}{6} < \xi < \frac{7i\pi}{6}$$

im Unendlichen wie $-\frac{2bC}{a^2\eta}$ verhält, wenn α_0 oder a positiv ist. Ist a negativ, so vertauschen sich obere und untere Halbebene und es gilt

$$(20) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_1(r e^{i\xi}) = -\frac{2bC}{a^2\eta}, \quad \text{wenn} \begin{cases} \frac{5i\pi}{6} < \xi < \frac{13i\pi}{6} \\ a < 0, \end{cases} \\ \text{oder} \begin{cases} -\frac{i\pi}{6} < \xi < \frac{7i\pi}{6} \\ a > 0. \end{cases}$$

Daraus entnehmen wir das wichtige Resultat:

$$(21) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1 d\eta = \begin{cases} \frac{2bC}{a^2} i\pi & a > 0, \\ -\frac{2bC}{a^2} i\pi & a < 0. \end{cases}$$

Es sind also jetzt die Übergangssubstitutionen für φ_3, φ_4 bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ genau auch für endliche Werte von α gefunden; denn wir wissen jetzt — und das ist hinreichend — was wir nach (21) unter dem Integral $\int \frac{dy}{(w-c)^2}$, erstreckt von $w-c < 0$ nach $w-c > 0$, zu verstehen haben.

Auch die Formeln (16) lassen sich aus (17) noch einmal ableiten. Denn den asymptotischen Lösungen (11) der Gleichung (7a) entsprechen die Integrale

$$(19a) \quad \frac{1}{\eta} H_{2/3}^{(1),(2)} \left(\frac{2}{3} (-i \alpha_0 \eta)^{3/2} \right)$$

der homogenen Gleichung (18) ($C = 0$). Die Aufgabe, die Übergangssubstitutionen der „asymptotischen“ Integrale (11)

und (14) zu finden, ist hiermit in der für uns erforderlichen Genauigkeit (bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$) gelöst.

§ 4. Erfüllung der Grenzbedingungen und die Stabilität der dem Lösungssystem I entsprechenden Schwingungen.

Nachdem unsere bisherigen Betrachtungen von der Art des Profils ganz unabhängig waren — bis auf einige, die singulären Punkte betreffende Einschränkungen, die dem Profil auferlegt werden mußten — wollen wir, um uns nicht in einer übergroßen Anzahl verschiedener Möglichkeiten zu verlieren, die Natur der Grundströmung weiter spezialisieren. Die Betrachtungen gelten jedoch viel allgemeiner. Wir nehmen also an, daß die begrenzenden Wände durch die Formeln $y = +1$; $y = -1$ dargestellt sind, daß ferner die Wand $y = 1$ gegen die andere eine Relativgeschwindigkeit in der positiven X -Richtung besitze (von der Größe $w(+1) - w(-1)$) und daß die Laminarströmung an den Wänden hafte (was der Versuchsanordnung von Couette entspricht); daß schließlich im Gebiete $-1 < y < +1$, also in der Flüssigkeit, $\Re(w - c)$ einmal und nur einmal Null sei. Außerdem werden wir im ganzen Gebiete Stetigkeit für w und die Differentialquotienten von w voraussetzen und darüber hinausgehend noch annehmen, daß die Funktionen w , w' , w'' usw. stets normale Größe besitzen, d. h. z. B. nicht an einzelnen Stellen groß werden von der Ordnung $(\alpha R)^{1/2}$.

Ferner betrachten wir zunächst für die folgenden Rechnungen α als so klein und αR als so groß, daß wir mit genügender Genauigkeit setzen können

$$(14a) \quad \begin{cases} \varphi_3 = w - c, \\ \varphi_4 = (w - c) \int_{-1}^y \frac{dy}{(w - c)^2}. \end{cases}$$

Die Festlegung der unteren Grenze des Integrals in φ_4 bedeutet offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit unserer Lösungen. Wir setzen dadurch vielmehr φ_4 als diejenige lineare Kombination von φ_3 und φ_4 fest, die an der Stelle $y = -1$ verschwindet. Sollte dort auch $w - c$ verschwinden, so tritt offenbar an Stelle von φ_4 die Funktion $\varphi_3 = w - c$, die jetzt für $y = -1$ Null wird.

Um die Grenzbedingungen zuerst an der Wand $y = -1$

zu befriedigen, bilden wir zwei Aggregate f_1, f_2 aus $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, für die wirklich $\varphi = \varphi' = 0$ ist für $y = -1$.

$$(22) \left\{ \begin{aligned} f_1 &= \varphi_4 + \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] - \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1}{\varphi_1(-1)} \right], \\ f_2 &= \varphi_4 - \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] + \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1}{\varphi_1(-1)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Hierbei verstehen wir unter g_0 von jetzt ab die Wurzel $\sqrt{-i\alpha R(w - c)}$, nicht, wie in (10), $\sqrt{-i(w - c)}$, um uns das Anschreiben des Faktors $\sqrt{\alpha R}$ zu ersparen.

Um die Grenzbedingungen auch an der anderen Wand zu erfüllen, muß man zwei Konstanten A und B so zu bestimmen suchen, daß

$$\begin{aligned} A f_1(+1) + B f_2(+1) &= 0, \\ A f_1'(+1) + B f_2'(+1) &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Bestimmung lautet:

$$(23) \quad \begin{vmatrix} f_1(+1) & f_2(+1) \\ f_1'(+1) & f_2'(+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diese Bedingung wird c bzw. β festgelegt, wenn R und α gegeben sind. Es handelt sich also jetzt darum, die Gleichung (23) nach c aufzulösen und das Vorzeichen des imaginären Teils von β zu bestimmen. Gleichung (23) bildet das vollständige Analogon zur Sommerfeldschen Turbulenzgleichung für das lineare Profil.

Aus (16) entnehmen wir:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} f_1(+1) &= \varphi_4(+1) + \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] - \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3(+1)}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1(+1) + i\varphi_3(+1)}{\varphi_1(-1)} \right], \\ f_1'(+1) &= \varphi_4'(+1) + \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] - \frac{9}{4}w'(-1)} \left[\frac{\varphi_3'(+1)}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_1'(+1) + i\varphi_3'(+1)}{\varphi_1(-1)} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(24) \left\{ \begin{aligned} f_2(+1) &= \varphi_4(+1) - \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] + \frac{9}{4} w'(-1)} \\ &\quad \left[\frac{\varphi_3(+1)}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_2(+1)}{\varphi_2(-1)} \right], \\ f_2'(+1) &= \varphi_4'(+1) - \frac{1}{g_0(-1)[w(-1) - c] + \frac{9}{4} w'(-1)} \\ &\quad \left[\frac{\varphi_3'(+1)}{w(-1) - c} - \frac{\varphi_2'(+1)}{\varphi_2(-1)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Werte von f_1, f_2, f_1', f_2' setzen wir in (23) ein, nehmen aber zuerst noch eine Abschätzung der Größe der einzelnen Glieder vor, um die Rechnung nicht durch Anschreiben unwesentlicher Glieder unnötig zu komplizieren. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß im allgemeinen entweder $\varphi_2(+1) \gg \varphi_2(-1)$ oder $\varphi_2(+1) \ll \varphi_2(-1)$ sein wird. Dies bewirkt der Faktor $\sqrt{\alpha R}$ im Exponenten von φ_1, φ_2 in (11), wenn nicht gerade

$$\Re \int_{+y_0}^{-1} \sqrt{-i(w-c)} dy = \Re \int_{y_0}^{+1} \sqrt{-i(w-c)} dy$$

sein sollte, was wir ausschließen.

Welcher der beiden Fälle eintritt, läßt sich nicht vorher entscheiden; im allgemeinen sind beide möglich und liefern beide Lösungen. Im Falle eines schiefsymmetrischen Profils gibt der eine Fall die zu dem des anderen symmetrischen Lösungen. Jedenfalls verhalten sich die beiden Möglichkeiten in prinzipieller Hinsicht ganz analog und es genügt daher, eine von beiden zu untersuchen. Wir nehmen also an:

$$\varphi_2(+1) \ll \varphi_2(-1),$$

d. h. (vgl. S. 585) der Punkt $w = c$ soll näher an $w = w(+1)$ als an $w = w(-1)$ liegen.

Daraus folgt, daß $\varphi_1(-1) \sim \frac{1}{\varphi_2(-1)}$ außerordentlich klein, also $\frac{1}{\varphi_1(-1)}$ sehr groß ist. Es bleiben daher in f_1 und f_1' nur die Glieder stehen, die $\varphi_1(-1)$ im Nenner haben, in f_2 und f_2' fallen die Glieder, die φ_2 enthalten, fort.

Aus (23) erhalten wir so:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & [\varphi_1(+1) + i\varphi_2(+1)] \\ & \left[\varphi_4'(+1) - \frac{\varphi_3'(+1)}{\left[g_0(-1)[w(-1) - c] + \frac{9}{4}w'(-1) \right] [w(-1) - c]} \right] \\ & = [\varphi_1'(+1) + i\varphi_2'(+1)] \\ & \left[\varphi_4(+1) - \frac{\varphi_3(+1)}{\left[g_0(-1)[w(-1) - c] + \frac{9}{4}w'(-1) \right] [w(-1) - c]} \right] \end{aligned} \right.$$

Auch in dieser Form ist die Gleichung für c noch recht kompliziert. Wir vereinfachen daher (25) zunächst weiter, indem wir jetzt nicht nur Größen der Ordnung $e^{-\sqrt{\alpha R}}$, sondern auch solche der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ streichen.

Zu diesem Zwecke stellen wir fest, daß $g_0(+1)$ von der Ordnung $(\alpha R)^{1/2}$ ist — wir schließen also zunächst aus, daß $w(+1) - c$ sehr klein ist —, daß ferner:

$$\varphi_1'(+1) + i\varphi_2'(+1) = -\frac{5}{4} \frac{w'(+1)}{w(+1) - c} \{ \varphi_1(+1) + i\varphi_2(+1) \} + g_0(+1) \{ \varphi_1(+1) - i\varphi_2(+1) \}.$$

Von den Gliedern der Gleichung (25) behalten wir daher nur noch diejenigen bei, die mit dem Faktor $g_0(+1)$ multipliziert sind.

So entsteht das einfache Resultat:

$$[\varphi_1(+1) - i\varphi_2(+1)] \varphi_4(+1) = 0$$

oder

$$(26) \quad \left[e^{y_0} \int_{y_0}^{y=+1} 2\sqrt{V - i\alpha R(w-c)} dy - i \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} \right] = 0.$$

Diese Gleichung besitzt zwei völlig verschiedene Lösungssysteme:

$$\text{I. } e^{y_0} \int_{y_0}^{+1} 2\sqrt{V - i\alpha R(w-c)} dy = i, \quad \text{II. } \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} = 0.$$

Das System I stellt das vollkommene Analogon dar zu den Lösungen, die Hopf für das lineare Profil erhalten und a. a. O. § 4 ausführlich diskutiert hat. In der Tat zeigt sich, daß die

dem System I entsprechenden Schwingungen stets stabilen Charakter tragen.

Denn aus

$$e^{2 \int_{y_0}^{+1} \sqrt{-i \alpha R(w-c)} dy} = i \text{ folgt:}$$

$$(27) \quad 2 \int_{y_0}^{+1} \sqrt{-i \alpha R(w-c)} dy = \pi \left(\frac{1}{2} + 2n \right),$$

wo n eine positive (vgl. S. 585) ganze Zahl ist. Es ist leicht zu sehen, daß diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn $\alpha c = \beta$ einen positiv imaginären Teil besitzt. Also sind die durch (27) charakterisierten Schwingungen tatsächlich gedämpft, der Betrag der Dämpfung ist von der Größenordnung $w(+1) - c$ und braucht daher keineswegs klein zu sein.

§ 5. Das Lösungssystem II und die Bedingungen für die Labilität eines Profils.

Die Lösungen im System II sind identisch mit den Lösungen der Rayleighschen Gleichung (8) und genügen der Bedingung:

$$(28) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} = 0$$

oder (vgl. die Bemerkung zu (14 a) S. 592) ganz allgemein

$$\varphi_4 = (w-c) \int_{-1}^y \frac{dy}{(w-c)^2} = 0 \text{ für } y = +1 \text{ und } y = -1.$$

Die letztere Form unterscheidet sich von der ersteren in gewissen Ausnahmefällen, die nachher besprochen werden sollen; außerdem stellt (28) natürlich nur eine erste Näherung ($\alpha = 0$) dar. Für die Lösungen von (28) müssen jetzt vier verschiedene Möglichkeiten unterschieden werden: Entweder 1. besitzt (28) Lösungen mit komplexem c . Dann ist das Profil immer *labil*, da stets auch der konjugiert komplexe Wert zu c eine Lösung darstellt; oder 2. es gibt Lösungen von (28) mit *reellem* c . Dann bezeichnen wir mit Prandtl a. a. O. das Profil als „*schwingungsfähig*“. Dies kann nach (21) nur vorkommen, wenn an der Stelle ($w = c$) $w'' = 0$ ist, wenn also das Profil entweder einen Wendepunkt besitzt oder aus linearen

Stücken zusammengesetzt ist. Oder 3. es gibt *reelle* Werte von c , die wenigstens den *reellen* Teil von

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2}$$

zu Null machen. Oder endlich 4. Es tritt keiner dieser drei Fälle ein, (28) besitzt keine Lösung. Im Fall (3) und (4) bezeichnen wir das Profil als „*nicht schwingungsfähig*“. Wir behaupten nun, daß Fall 1. stets *Labilität*, Fall 3. und 4. stets *Stabilität*, Fall 2. im allgemeinen *Labilität* des zugrunde gelegten Profils ergibt. Für 1. und 4. haben wir dies im vorhergehenden schon bewiesen. Im Fall 3. setzen wir $c = c_r + i c_i$, wo c_r denjenigen reellen Wert von c bedeutet, für den der reelle Teil von

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2}$$

verschwindet. Dann wissen wir aus § 3, daß für $c_i \leq 0$ der imaginäre Teil des Integrals $\frac{2b}{|\alpha^2|} \pi i$ wird, für $c_i \gg |(\alpha R)^{-1/2}|$ aber gleich $-\frac{2b}{|\alpha^2|} \pi i$. Also muß es aus Stetigkeitsgründen (vgl. § 3) eine Stelle $c_i > 0$ geben, an welcher auch der *imaginäre* Teil des Integrals (28) verschwindet. Die vier so charakterisierten Lösungen von (28) liefern also eine Größe c mit positiv imaginärem Bestandteil, also *stabile* Schwingungen.

Der Fall 2. schließlich erfordert etwas ausführlichere Rechnungen. Bevor wir sie ausführen, bemerken wir, daß zu 2. auch zwei Lösungstypen von (28) gehören, die sich nicht in der Form

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} = 0$$

darstellen lassen. Wenn nämlich $w(+1) = w(-1)$ ist, so lautet eine Lösung von (28) $\varphi = w - w(+1)$; in der Tat ist hier $\varphi = 0$ für $y = +1$ und $y = -1$. Ferner kann es vorkommen, daß z. B. w' für $w = w(+1)$ unendlich wird. Dann ist auch

$$\varphi = (w - w(+1)) \int_{-1}^y \frac{dy}{[w - w(+1)]^2}$$

eine Lösung von (8), die den Grenzbedingungen genügt. Wir wollen hierauf nicht weiter eingehen, da dieser Fall im Teil II

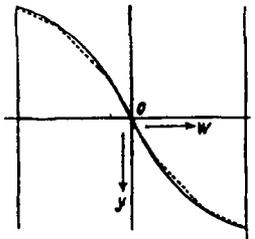
ausführlicher diskutiert werden wird. Wesentlich ist aber noch zu bemerken, daß der Unterschied zwischen Fall 2. und 3. sehr groß ist und daß es z. B. in keiner Weise genügt, nach Rayleigh ein krummes Profil durch ein Polygon anzunähern.

Zur Veranschaulichung dieses Unterschieds ist

$$\Re e (J(c)) = \Re e \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2}$$

als Funktion von c qualitativ in Fig. 1 dargestellt, wo die ausgezogene Kurve dem krummen, die gestrichelten Kurven dem aus linearen Stücken bestehenden Profile entsprechen. Man sieht, daß jeder Knick eine neue Wurzel $\Re e (J) = 0$ verursacht, weil J im Punkte $c = w_{\text{Knick}}$ beim geknickten Profil sich wie $\frac{1}{w - c_{\text{Knick}}}$ verhält. Dies entspricht dem bekannten Rayleighschen Satz, daß es soviel Schwingungswurzeln wie Knicke gibt. Trotzdem besitzt das krumme Profil keine Schwingungswurzel. — Nach dieser Bemerkung kehren wir zu unserer Behauptung zurück, daß die schwingungsfähigen Profile im allgemeinen bei Berücksichtigung der Reibung labil werden.

— Profil
 - - - - - Näherungspolygon



x = Stellen, an denen $c = w_{\text{Knick}}$

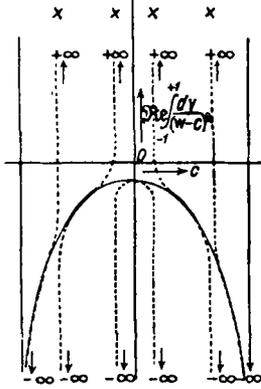


Fig. 1.

entspricht dem bekannten Rayleighschen Satz, daß es soviel Schwingungswurzeln wie Knicke gibt. Trotzdem besitzt das krumme Profil keine Schwingungswurzel. — Nach dieser Bemerkung kehren wir zu unserer Behauptung zurück, daß die schwingungsfähigen Profile im allgemeinen bei Berücksichtigung der Reibung labil werden.

Zum Beweise dieser Labilität kehren wir zur Gleichung (25) und zu den genaueren Lösungen im System II zurück. Da wir wissen, daß c bis auf Größen der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ reell ist, können wir

$$\varphi_2 (+1) \geq \varphi_1 (+1)$$

annehmen. Vernachlässigen wir ferner die Glieder der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ in (25),

so erhalten wir nach leichten Umformungen:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{(w-c)^2} = \frac{1}{g_0(-1)[w(-1)-c]^2} - \frac{1}{g_0(+1)[w(+1)-c]^2}$$

Setzen wir weiter $c = c_0 + \delta$, wo c_0 die Nullstelle von J , δ eine kleine Größe der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ bedeutet. α nehmen wir der Einfachheit halber positiv an, dann können wir auf der rechten Seite c durch c_0 ersetzen und die linke in eine Taylorsche Reihe nach δ entwickeln. So ergibt sich, wenn wir die Taylorsche Reihe mit dem 2. Gliede abbrechen, was wir als hinreichende Näherung voraussetzen:

$$J(c) = J(c_0) + \delta \frac{dJ}{dc} \Big|_{(c=c_0)}$$

und aus (25) wegen

$$J(c_0) = 0; \quad g_0 = \sqrt{-i \alpha R(w - c)}$$

(über das Vorzeichen vgl. S. 585).

$$\delta \frac{dJ}{dc} \Big|_{(c=c_0)} \cdot \sqrt{2 \alpha R} = \frac{1 - i}{[c_0 - w(-1)]^{3/2}} + \frac{1 + i}{[w(+1) - c_0]^{3/2}}.$$

Hieraus folgt wegen $c_0 - w(-1) > w(+1) - c_0$ (c_0 soll näher an $w(+1)$ liegen!), daß der imaginäre Teil von δ , also auch der von c und von β dasselbe Vorzeichen hat, wie $\frac{dJ}{dc} \Big|_{(c=c_0)}$ und daß Schwingungen, welche einem negativen Werte von $\frac{dJ}{dc}$ entsprechen, *labilen* Charakter tragen. Wenn also unser teilweise lineares Profil noch die Eigenschaft hat, daß $\frac{dJ}{dc} < 0$ ist an der Stelle $w = c$, so ist es *labil*. Diese Bedingung $\frac{dJ}{dc} < 0$ ist aber sehr häufig, z. B. immer dann erfüllt, wenn der Punkt $w = c$ in der Nähe der einen Wand (z. B. $y = +1$) liegt und das Profil von der Stelle $w = c$ bis zum Rand linear verläuft.

Zusammenfassend folgern wir:

Die Labilität bzw. Stabilität eines Profils kann bei allen von uns bisher betrachteten Profilen schon durch das Verhalten derselben bei reibungsloser Flüssigkeit entschieden werden. Profile, die im letzteren Falle ungedämpfter Schwingungen fähig sind, werden bei Berücksichtigung der Reibung unter bestimmten Voraussetzungen labil. Die letzteren Profile müssen, wie oben gezeigt, ganz spezielle Eigenschaften haben, z. B. entweder teilweise aus *linearen* Stücken zusammengesetzt sein, oder sie müssen einen Wendepunkt $w'' = 0$ besitzen (vgl. oben).

Diese Profile der Gattung 2. sind aber zugleich die einzigen, die noch ein physikalisches Interesse beanspruchen können. Denn

nur sie besitzen ein Verhalten hinsichtlich ihrer Stabilität, das etwa den Vermutungen von Reynolds entspricht. Wir werden im folgenden zeigen, daß diese Profile wirklich im allgemeinen eine „kritische“ Reynoldssche Zahl besitzen (mit Ausnahme der geknickten Profile).

§ 6. Die Reynoldssche Zahl der Stabilitätsgrenze;
numerische Rechnung am Parabelprofil.

Wenn also ein Profil gegeben ist, das bei reibungsloser Flüssigkeit ungedämpfte Schwingungen zuläßt und mit Reibung labil ist, so taucht die Frage auf: Welches ist der kleinste Wert der Reynoldsschen Zahl, für den Labilität eintritt? Um diese Frage zu beantworten, reichen die vereinfachten Gleichungen (25), (26) usw. nicht aus. Wir müssen zur Gleichung (23) und den Formen (11) und (14) für die Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ zurückkehren. Es ist aber natürlich ganz unmöglich, allgemein für ein beliebiges Profil w die kritische Reynoldssche Zahl als Funktion von w und Integralen über w darzustellen; unsere Aufgabe soll es nur sein, den Weg anzugeben, auf dem man zur kritischen Geschwindigkeit gelangt und dann an einem speziellen Beispiele die Rechnung durchzuführen.

Da in unseren letzten Rechnungen α und R nur in der Kombination αR vorgekommen sind (weil wir α^2 als klein annehmen), können diese Rechnungen auch bestenfalls nur einen kritischen Wert für αR , nicht aber für R allein liefern. Wir müssen daher zunächst das Verhalten der Wurzeln von (23) bei wachsendem α^2 untersuchen. Von den Wurzeln von (23) interessieren uns hierbei nur die im Lösungssystem II, welche der Gleichung $\varphi_4(+1) = 0$ genügen.

An Stelle von (28) müssen wir also die Gleichung

$$(28a) \left\{ \begin{array}{l} \varphi = (w - c) \int \frac{dy}{(w - c)^2} \left(1 + \alpha^2 \int dy (w - c)^2 \int \frac{dy}{(w - c)^2} + \dots \right) \\ \varphi = 0 \text{ für } y = -1, y = +1 \end{array} \right.$$

diskutieren. Besteht das Profil, wie bei Rayleigh, aus linearen Stücken, so gibt es (vgl. S. 598) stets eine Wurzel von (28a) für jeden Knick und diese Wurzeln bleiben für jeden Wert von α^2 bestehen. Das geknickte Profil liefert also *keinen*

Maximalwert von α^2 und kann daher auch niemals auf eine kritische Reynoldssche Zahl führen.¹⁾

Anders ist dies, wenn (vgl. S. 597) eine Lösung von (28) bzw. (28a) mit reellem c deswegen möglich ist, weil entweder irgendwo im Profil $w'' = 0$ ist oder weil $w(+1) = w(-1)$, $\varphi = w - w(+1)$ eine Lösung von (28) darstellt. Diese letzteren Lösungstypen liefern nämlich immer nur für einen ganz bestimmten Wert von α^2 eine Lösung von (28a). Für $w'' = 0$ ist c schon festgelegt dadurch, daß eben $w = c$ sein soll für $w'' = 0$; also definiert die Gleichung (28a) einen ganz bestimmten Wert α^2 . Für den Fall $w(+1) = w(-1)$ aber gibt es offenbar nur für $\alpha^2 = 0$ eine Lösung von (28a).

Für diese Art von Lösungen der Gleichung (28) bzw. (28a) die im Limes $R = \infty$ durch einen ganz bestimmten Wert von α^2 charakterisiert sind, werden wir erwarten, daß sich bei Berücksichtigung der Reibung α auch nur um geringe Beträge von seinem „bestimmten“ Wert entfernen kann, das Auftreten eines Maximalwertes (und im Falle $w'' = 0$ auch eines Minimalwertes) für α ist bei diesen Profilen sehr verständlich. Alle Schwingungen also, deren Wellenlänge kleiner ist, als eine bestimmte kritische Wellenlänge, sind in solchen Fällen für alle Werte von αR gedämpft.

Nachdem eine obere Grenze für α^2 gefunden ist, wird man die ungefähre Größe für die untere Grenze von αR zu bestimmen suchen. Eine einfache Untersuchung der Gleichung (25) lehrt, daß wesentliche Veränderungen im imaginären Teil von c erst eintreten, wenn der Exponent von e in der Näherungsdarstellung (11) in $\varphi_1(+1)$, $\varphi_2(+1)$ auf Werte der Größenordnung 1 gesunken ist. Ist dies aber der Fall, so haben wir den kritischen Wert, bei dem der imaginäre Teil von c von negativen zu positiven Werten übergeht, sehr bald erreicht, wie auch das Zahlenbeispiel zeigen wird. Nehmen wir an, daß w zwischen $w = c_0$ ($c_0 =$ reeller Teil von c) und $w(+1)$ wesentlich linear verläuft, so lautet daher die Bedingung für die ungefähre Größe von αR :

$$(29) \quad \frac{(\alpha R)^{1/6} [w(+1) - c_0]^{1/2}}{w'(+1)} \sim 1$$

1) Hierbei ist immer noch vorausgesetzt, daß R und αR groß und $\alpha \ll R$ sei. Möglicherweise treten also kritische Reynoldssche Zahlen dann auf, wenn diese Voraussetzungen nicht mehr gelten. Die betreffenden Reynoldsschen Zahlen R dürften aber dann bei so kleinen Werten liegen, daß sie physikalisch sicher keine Bedeutung haben.

oder

$$(29a) \quad (\alpha R)^{1/2} \sim \frac{w'(+1)^{3/2}}{w(+1) - c_0}.$$

Da $w(+1) - c_0$ in den uns interessierenden Fällen klein sein wird, so kann man aus (29) vermutungsweise auf große kritische Reynolds'sche Zahlen schließen. Zugleich bemerken wir hier, daß es für einen bestimmten Wert von R stets nicht nur einen Maximalwert, sondern auch einen Minimalwert für α der labilen Schwingungen geben wird. Dies folgt daraus, daß wir ja einen Minimalwert von αR (nicht R) gefunden haben.

Als numerisches Beispiel für unsere bisherigen allgemeinen Rechnungen wählen wir das Parabelprofil, weil es physikalisch am interessantesten ist. Es gehört zur Klasse der „schwingungsfähigen Profile“ vom Typus $w(+1) = w(-1)$.

Wir wollen auch hier nur die ebene Bewegung betrachten, d. h. nicht die Poiseuillesche Strömung in Rohren, sondern die Strömung, die zwischen zwei parallelen ruhenden Wänden ($y = +1$, $y = -1$) unter Einfluß eines konstanten Druckgradienten herrscht. Wir setzen also

$$(30) \quad w = 1 - y^2.$$

Aus der Symmetrie von w und $w - c$ läßt sich ableiten, daß φ eine gerade Funktion von y sein muß.¹⁾ Von den Lösungen der Gleichung (7a) greifen wir also zwei symmetrische partikuläre Integrale heraus und suchen die Grenzbedingungen an der einen Wand, etwa $y = -1$, zu befriedigen. Die an der anderen Wand sind dann von selbst erfüllt. Als das eine dieser symmetrischen Integrale kann offenbar einfach φ_3 genommen werden. Für das andere wählen wir:

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(0)} + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_2(0)}.$$

1) Zerlegt man φ in einen in y geraden und einen ungeraden Teil, so muß, wegen der Symmetrie von $w - c$ und w , jeder Teil von φ für sich der Differentialgleichung (7a) und den Grenzbedingungen genügen. Für die allgemeine Stabilitätsuntersuchung des Profils $1 - y^2$ ist es daher ausreichend, die beiden Fälle „ φ gerade“ und „ φ ungerade“ getrennt und nur diese beiden Fälle zu behandeln. Es ist aber leicht zu sehen, daß die Annahme symmetrischer Schwingungen, d. h. „ φ ungerade“ zu keiner Lösung von (28) und daher nicht zu labilen Schwingungen führt. Die Annahme „ φ gerade“ genügt also zur Stabilitätsuntersuchung. Dies ist insofern bemerkenswert, als hiernach alle symmetrischen Schwingungen stabil und nur unsymmetrische Störungen labil sind.

Wie aus (29a) hervorgeht, wird c bei unserem Profil in Nähe der kritischen Geschwindigkeit klein sein von der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$, wir werden also in den folgenden Rechnungen Glieder von höherer als erster Ordnung in c streichen. Ferner stellen wir fest, daß $\varphi_2(0) \gg \varphi_1(0)$ sein wird, so daß sich in der Umgebung von $w = 0$ und $w = c$ die zweite symmetrische Funktion φ einfach auf $\varphi_1(y)$ reduziert. Aus (16) geht dann hervor, daß wir zur Befriedigung der Grenzbedingungen für $y = -1$ die beiden Integrale φ_3 und $\varphi_1 - i\varphi_2$ zur Verfügung haben. Gleichung (29) geht damit über in

$$(31) \quad \left| \begin{array}{cc} \varphi_3(-1) & \varphi_1(-1) - i\varphi_2(-1) \\ \varphi_3'(-1) & \varphi_1'(-1) - i\varphi_2'(-1) \end{array} \right| = 0.$$

In φ_3 ist hierbei als untere Grenze für die auftretenden Integrale immer $y = 0$ zu nehmen, um die Symmetrie von φ_3 zu gewährleisten. In φ_3 werden wir ferner nur bis zu Größen der Ordnung α^4 entwickeln und bei der Entwicklung nach $(\alpha R)^{-1}$ mit den Gliedern der Ordnung $(\alpha R)^{-1}$ abbrechen. Wir schreiben nun (31) in der Form

$$(32) \quad \frac{\varphi_1'(-1) - i\varphi_2'(-1)}{\varphi_1(-1) - i\varphi_2(-1)} = \frac{\varphi_3'(-1)}{\varphi_3(-1)}.$$

Setzt man (11) und (14) ein, so ergibt sich

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{-1} \int_{y_0}^{-1} \sqrt{-i\alpha R(w-c)} dy}{2} + i\sqrt{i\alpha R}c = -\frac{9}{2c} \\ -i \\ + \frac{\frac{\alpha^2}{c^2} \left[\int_0^{-1} dy (w-c)^3 + \alpha^2 \dots + \frac{i}{\alpha R} \dots \right]}{1 + \alpha^2 \int_0^{-1} \frac{dy}{(w-c)^2} \int_0^y dy (w-c)^3 + \alpha^4 \dots + \frac{i}{\alpha R} \dots} \end{array} \right.$$

Da c sehr klein wird, nehmen wir in erster Näherung w von 0 bis c als linear an: $w \sim 2(y+1)$. Dann wird

$$(34) \quad \int_{y_0}^{-1} \sqrt{c-w} dy = -\frac{1}{3}c^{3/2}.$$

Setzen wir $z = \frac{1}{3} c^{3/2} \cdot (2\alpha R)^{1/2}$, so entsteht aus (33)

$$(35) \quad \frac{e^{-(1+i)z} + i}{e^{-(1+i)z} - i} \cdot \frac{3\pi(1+i)}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{\alpha^2}{c} \frac{\int_0^{-1} dy(w-c)^2 + \dots}{1 + \alpha^2 \int \dots}$$

Diese Gleichung ist zu (26) völlig analog. Uns interessiert vor allem der Grenzwert R bzw. z , bei dem die labilen Schwingungen sich in stabile verwandeln, also der imaginäre Teil von c gerade Null ist. Dieser Grenzwert z wird natürlich noch von α abhängen. Wir nehmen also jetzt c als reell an und erhalten dadurch den Grenzwert von z bzw. R als Funktion von α . Den Minimalwert von R auf dieser $R(\alpha)$ -Kurve wird man als charakteristische Reynoldssche Zahl für das Parabelprofil ansprechen. Die Durchrechnung zeigt nun, daß man durch die Form (35) der Stabilitätsgleichung nur den oberen Teil der Kurve $R = R(\alpha)$ (in der Fig. 2 ausgezogen) erhält — was ja nach den Betrachtungen von § 6 zu erwarten war, daß man aber den unteren Teil der Kurve $R = R(\alpha)$ nur berechnen kann, wenn man für φ_1, φ_2 andere Näherungen [vgl. (19a)]

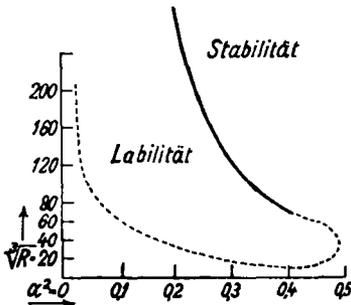


Fig. 2.

als die asymptotischen Formeln (11) verwendet. Die kritische Reynoldssche Zahl bezeichnet eben gerade das Gebiet, in welchem die asymptotischen Formeln ihre Gültigkeit verlieren. Da dieser Umstand zu sehr komplizierten numerischen Rechnungen führen würde und wir (vgl. § 7) allgemein der hier charakterisierten Art von Labilität keine wesentliche physikalische Bedeutung beimessen können, haben wir zur Berechnung des unteren Teiles (in Fig. 1 gestrichelt) der Kurve $R = R(\alpha)$ rohe Schätzungen benutzt, die keinen Anspruch darauf machen können, quantitative Ergebnisse zu liefern. Das qualitative Verhalten der Kurve wird aber wohl richtig wiedergegeben. Wir entnehmen also aus der Fig. 2:

Wir entnehmen also aus der Fig. 2:

1. Es gibt sowohl einen Maximalwert von α , wie einen Minimalwert von R , nach deren Über- bzw. Unterschreitung die Labilität aufhört.

2. Für einen bestimmten Wert von R existiert sowohl ein Maximal- wie auch ein Minimalwert von α ; innerhalb dieser Werte herrscht *Labilität*, außerhalb *Stabilität*.

3. Der Maximalwert von α liegt etwa bei $\alpha = 0,7$ ($\alpha^2 = \frac{1}{2}$). Der Minimalwert von R bei Größen der Ordnung 10^3 . Eine einigermaßen genaue Berechnung dieses Minimalwertes aus der Figur ist nicht möglich.

§ 7. Physikalische Diskussion der Resultate des Teiles I.

Fassen wir noch einmal ausführlich alle Ergebnisse zusammen, die wir für das Stabilitätsproblem gefunden haben. In erster Linie hat sich im Verlaufe der Rechnung gezeigt, daß man allgemein die Frage nach der Stabilität eines Profils bei reibender Flüssigkeit entscheiden kann, wenn man, wie Lord Rayleigh, den Grenzfall reibungsloser Flüssigkeit (Gleichung 8) behandelt. Profile, die dann, d. h. für $R = \infty$ labil sind, bleiben dies auch für hinreichend große endliche Werte von R (§ 4) — wie dies wohl von vornherein zu erwarten war. Ebenso erweisen sich Profile, die im reibungslosen Falle *keiner* Schwingungen fähig sind, als *stabil* (§ 4) und Profile, die bei der Untersuchung durch Gleichung (8) *ungedämpfte* Schwingungen zulassen, im allgemeinen als *labil* (§ 5). Dieser letztere Fall ist offenbar der einzige, der physikalisch gegenüber der reibungslosen Hydrodynamik etwas Neues bedeutet. Wir müssen aber hervorheben, daß er, entgegen dem, was man aus Rayleighs Arbeiten zunächst schließen möchte, einen *Ausnahmefall* darstellt. Wenn man von den Möglichkeiten $w (+1) = w (-1)$, $w'_{\text{Rand}} = \infty$ (§ 5) absieht, so ist es für das Eintreten dieses Ausnahmefalls *notwendige* Bedingung, daß irgendwo in der Flüssigkeit $w'' = 0$ ist. Die von Rayleigh eingeführten geknickten, aus linearen Stücken bestehenden Profile gehören zu diesen Ausnahmeprofilen; hieraus ist aber nur zu schließen, daß eben gekrümmte Profile zum Zwecke der Stabilitätsuntersuchung *nicht* nach Rayleigh durch Polygone angenähert werden dürfen (S. 598). Auch für überall gekrümmte Profile ($w'' \neq 0$) findet man allerdings (§ 5) bei Benützung der Differentialgleichungen *mit* Reibungsgliedern eventuell Schwin-

gungen, die für jeden Wert von αR gedämpft sind, bei denen aber im Limes $R = \infty$ der Betrag der Dämpfung wie $(\alpha R)^{-1/2}$ gegen Null geht; man hat also auch hier für $R = \infty$ ungedämpfte Schwingungen. Diese Schwingungswurzeln gehen aber *verloren*, wenn man die vereinfachte Differentialgleichung (8) ohne Reibungsglieder zugrunde legt. Insofern liegt also auch hier *keine* Ausnahme der Regel vor, nach welcher dann, wenn die reibungslose Gleichung (8) *ungedämpfte* Schwingungen zuläßt, die Berücksichtigung der Reibung eine *Anfachung* ergibt. Die Möglichkeit ungedämpfter Schwingungen für die Gleichung (8) muß aber, wie oben gesagt, als Ausnahmefall betrachtet werden. Das Parabelprofil gehört zu diesen Ausnahmeprofilen (§ 6). Fragen wir bei den „labilen Profilen“ weiter nach dem Wertebereich für R , innerhalb dessen Labilität stattfindet, so zeigt sich, daß auf „kritische Reynoldssche Zahlen“ auch im allgemeinen nur Profile der letzten Klasse führen können, d. h. nur solche, die ohne Reibung ungedämpfte Schwingungen zulassen. Von diesen lieferten aber die Rayleighschen „geknickten Profile“ dennoch keine (vgl. auch S. 601, Anm. 1) kritische Reynoldssche Zahl. Bei diesen gibt es nämlich wohl einen Minimalwert von αR , nicht aber einen Maximalwert von α , also auch keinen Minimalwert von R für die Labilität (§ 6). Nur diejenigen Profile der letzten Klasse, bei denen im reibungslosen Falle nur ein bestimmter Wert von α auf ungedämpfte Schwingungen führt (z. B. die Typen $w'' = 0$ für $w = c$), $w(+1) = w(-1)$, ergeben einen Maximalwert von α und einen Minimalwert von αR , also auch einen Minimalwert für R . Für einen bestimmten Wert von R gibt es daher bei diesen Profilen sowohl einen *Maximal-* wie einen *Minimalwert* von α für die labilen Schwingungen. Alle diese Resultate sind in Übereinstimmung mit den bisherigen Stabilitätsuntersuchungen hydrodynamischer Profile.¹⁾

Es fragt sich jetzt, wie sich experimentell diese mathematischen Resultate äußern werden. Es erscheint verwunderlich, daß sich empirisch die stabilen (z. B. das Couettesche²⁾

1) Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten.

2) Vgl. jedoch hierzu die interessanten Stabilitätsuntersuchungen der Couetteschen Bewegung gegen dreidimensionale Störungen. G. J. Taylor, *Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders*. Phil. Transact. of the Royal Society London **223**, S. 289–343. 1922.

und die labilen (z. B. das Poiseuillesche) Profile ganz gleich verhalten. Oberhalb einer bestimmten Reynoldsschen Zahl tritt bei hinreichenden Störungen Turbulenz ein; macht man die Störungen möglichst klein, so läßt sich das Laminarprofil bei beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen erhalten. Besonders die letztere Tatsache, die von Ekman (a. a. O.) am Parabelprofil geprüft worden ist, scheint bei den labilen Profilen im Widerspruch zur Theorie zu stehen. Es ist aber leicht zu erkennen, daß dieser Widerspruch nur scheinbar ist.¹⁾ Je kleiner nämlich die äußeren Störungen sind, um so länger dauert es (besonders bei hohen Reynoldsschen Zahlen, da die Anfachung von der Ordnung $(\alpha R)^{-1/2}$ ist (vgl. § 5), bis sie die Bewegung merklich beeinflussen; bei der Strömung in Rohren wird man also diesen Zeitpunkt immer so weit hinausschieben können, daß die betreffende Flüssigkeitsmenge, um deren Stabilität es sich handelt, das Rohr schon wieder verlassen hat, wenn ihre Labilität in Erscheinung tritt. Die von uns berechnete Reynoldssche Zahl könnte also nur an in sich geschlossenen Rohren geprüft werden, bei denen immer dieselbe Flüssigkeitsmenge strömt.²⁾ Die Versuche von Schiller (a. a. O.) andererseits, durch die gezeigt wird, daß es unterhalb einer bestimmten Reynoldsschen Zahl *nur* Laminarbewegung gibt, können durch Stabilitätsuntersuchungen überhaupt nicht erfaßt werden, da man hier gar nicht als ursprüngliche Bewegung die laminare hat, sondern da es sich nur um die Existenz oder Nichtexistenz einer turbulenten Bewegungsform dabei handelt. Jedenfalls ist aus allen diesen Betrachtungen nur zu schließen, daß sich durch Stabilitätsbetrachtungen allein das Turbulenzproblem eben durchaus *nicht* lösen läßt.

Immerhin können uns die vorhergehenden Untersuchungen auch für das eigentliche Ziel, die Berechnung der turbulenten

1) Auf diese Möglichkeit, die Ekmanschen Versuche als eine Art Anlaufeffekt aufzufassen, hat mich Hr. Professor Prandtl hingewiesen, dem ich hierfür und für viele andere wertvolle Hinweise an dieser Stelle den herzlichsten Dank aussprechen möchte.

2) Vielleicht sind aber die Störungen der Stabilität, die Ruckes a. a. O. bei ziemlich kleinen Reynoldsschen Zahlen beobachtet, durch die Labilität nach § 7 hervorgerufen. Dies wäre dann sehr wohl denkbar, wenn die kritische Reynoldssche Zahl nach § 7 unter derjenigen liegt, bei welcher zum ersten Male Turbulenz (vgl. Teil II) möglich ist.

Bewegung, wesentliche qualitative Ergebnisse liefern. Wenn wir nämlich die turbulente Bewegung auffassen als eine bestimmte Grundströmung mit überlagerten *ungedämpften* Schwingungen, so können wir aus unseren Rechnungen schließen, daß der Minimalwert R , für den dieser Bewegungstypus möglich ist, wahrscheinlich ebenfalls bei Werten der Größenordnung 10^3 liegt; daß die Wellenlänge der ungedämpften Schwingungen bei $2\pi h/2$, nämlich α bei Werten der Ordnung 1 liegt und daß α für ein gegebenes R zwischen bestimmte, eventuell sehr enge Grenzen eingeschlossen ist; daß ferner diese Schwingungen, wie aus der Kleinheit von $w (+1) - c$ zu schließen ist, den Charakter einer Wandstörung haben. Diese qualitativen Ergebnisse sind von der speziellen Form der Grundströmung ganz unabhängig. Über solche qualitativen Anhaltspunkte hinaus aber liefern die bisherigen Rechnungen nichts, was uns der eigentlichen Lösung des Turbulenzproblems näherbrächte.

II. Teil: Die turbulente Bewegung.

§ 1. Formulierung des mathematischen Problems.

Diejenige Reynoldssche Zahl, die man für gewöhnlich als die „kritische“ bezeichnet, die z. B. in den Versuchen von Schiller gemessen wird und die den Eintritt der Turbulenz bei hinreichend großen Störungen angibt, hat mit Stabilitätsfragen und mit der Laminarströmung nichts zu tun; sie ist durchaus eine charakteristische Konstante der *turbulenten* Bewegung. Ebenso lassen das Blasius'sche Widerstandsgesetz und die aus ihm abgeleitete bekannte Folgerung, daß die turbulente Geschwindigkeit in der Nähe einer Wand mit der $1/7$ ten Potenz der Wandentfernung anwächst, deutlich erkennen, daß die sogenannte „turbulente“ Bewegung ihre eigenen wohl definierten Gesetzmäßigkeiten hat und daß sie eine zweite mögliche Bewegungsform der reibenden Flüssigkeiten darstellt. Zur Lösung des Turbulenzproblems kann man also nur versuchen die turbulente Bewegung ihrer Undefiniertheit zu entkleiden und sie soweit zu idealisieren, bis sie der mathematischen Analyse durch die Stokesschen Gleichungen zugänglich wird.

Das „Turbulenzproblem“ der Hydrodynamik ist ein Problem der energetischen, nicht der dynamischen Stabilität. Es gibt zwei verschiedene Bewegungsformen der reibenden

Flüssigkeit, von denen jede einen bestimmten Wertebereich der Reynoldsschen Zahl besitzt, innerhalb dessen sie möglich ist. Die Laminarströmung ist möglich von $R = 0$ bis $R = \infty$, wird aber unter Umständen oberhalb eines bestimmten Wertes von R dynamisch labil. Die turbulente Bewegung dagegen existiert erst oberhalb eines bestimmten kritischen Wertes von R , ist dann aber immer¹⁾ energetisch stabiler als die Laminarbewegung. In demjenigen Bereich von R , in welchem beide Bewegungsformen möglich sind, kann man daher stets die Flüssigkeit aus dem laminaren Zustand durch hinreichend große Störungen, in den turbulenten Zustand „herunterfallen“ lassen.

Um die turbulente Bewegung näherungsweise mathematisch behandeln zu können, fassen wir wieder die Strömung zwischen zwei parallelen Wänden ins Auge und machen zunächst folgende Annahmen²⁾: Die Strömung soll a) um die X -Achse symmetrisch, die begrenzenden Wände in Ruhe sein; sie soll b) periodisch in der X -Richtung mit der Periode $2\pi/\alpha^3$ und c) periodisch in der Zeit mit der Periode $2\pi/\beta$ sein. d) Alle Störungen sollen sich mit der Geschwindigkeit β/α relativ zur X -Achse fortpflanzen, d. h. wenn wir die Bewegung in eine Fourierreihe entwickeln, so sollen in den Exponenten von e nur Vielfache von $i(\beta t - \alpha x)$ vorkommen.⁴⁾

Die Fourierentwicklung der Stromfunktion soll also lauten:

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \psi = \varphi_0(y) + \varphi_1(y) e^{i(\beta t - \alpha x)} + \overline{\varphi_1(y)} e^{-i(\beta t - \alpha x)} \\ + \varphi_2(y) e^{2i(\beta t - \alpha x)} + \dots \end{aligned} \right.$$

Die mathematische Aufgabe besteht dann in der Ermittlung der (nach a) ungeraden Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$

1) Vgl. F. Noether, a. a. O.

2) Auch dieser Ansatz, der eine einfache Verallgemeinerung des Sommerfeldschen Stabilitätsansatzes darstellt, wurde zur Untersuchung der turbulenten Bewegung selbst von F. Noether: Zur Theorie der Turbulenz, Jahresber. d. deutsch. Math. Vereins 23. S. 138. 1914 ohne weitergehende Folgerungen angegeben.

3) Zur Annahme eines bestimmten α berechtigt uns das Ergebnis von Teil I, daß α zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen ist, die insbesondere in der Nähe des Minimalwertes von R sehr eng sind.

4) Wir brauchen nicht hervorzuheben, daß die wirklichen Bewegungsvorgänge zweifellos viel komplizierter sind; trotzdem kann man wohl erwarten, daß diese Ansätze qualitative Aussagen über die Turbulenz gestatten.

$$(38) \begin{cases} \varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1 = \frac{i}{\alpha R} (w' - C_1 y), \\ (\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - w'' \varphi_1 = \frac{i}{\alpha R} (\varphi_1'''' - 2\alpha^2 \varphi_1'' + \alpha^4 \varphi_1). \end{cases}$$

Einschaltungsweise wollen wir uns jetzt überlegen, was an Stelle von (38) tritt, wenn wir nicht eine um die X -Achse symmetrische Strömung (Forderung a), d. h. die Strömung einer Flüssigkeit unter Druckgefälle zwischen zwei ruhenden Wänden, sondern eine um die X -Achse antisymmetrische Strömung (d. h. Strömung zwischen zwei relativ zueinander bewegten Wänden ohne Druckgefälle wie beim Couetteschen Fall) betrachten. Forderung (b) und (c) sollen bestehen bleiben. Der Ansatz (36) wird dann nicht mehr genügen, da φ_1, φ_2 usw. bei beliebigem β/α keine geraden Funktionen mehr sind; wir müssen, um das ganze Strömungsbild ungerade zu erhalten, auch noch die symmetrischen Schwingungen der Form $e^{i(-\beta t - \alpha x)}$ in den Ansatz für ψ aufnehmen d. h. ψ muß beginnen mit den Gliedern

$$\varphi_0 + \varphi_1(y) e^{i(\beta t - \alpha x)} + \overline{\varphi_1(y)} e^{-i(\beta t - \alpha x)} + \dots$$

Das hat zur Folge, daß in ψ schließlich alle Glieder der Form $e^{i(m\beta t - n\alpha x)}$ auftreten (Wegfallen der Forderung (d)).

An Stelle von (38) ergibt sich:

$$(39) \begin{cases} \overline{\varphi_1(y)} \varphi_1(y)' - \overline{\varphi_1(y)'} \varphi_1(y) + \overline{\varphi_1(-y)} \varphi_1(-y)' - \overline{\varphi_1(-y)'} \varphi_1(-y) = \frac{i}{\alpha R} (w' - C), \\ (\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - w'' \varphi_1 = \frac{i}{\alpha R} (\varphi_1'''' - 2\alpha^2 \varphi_1'' + \alpha^4 \varphi_1). \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen des Systems (38) bzw. (39) haben eine einfache anschauliche Bedeutung.

Die zweite Gleichung ist nichts anderes, als unsere frühere „Stabilitätsgleichung“ (7), welche die Amplitude der einer Grundströmung w überlagerten Schwingung bestimmt und die Grundlage für unsere Untersuchungen im Teil I bildete. Die erste

Gleichung aber stellt den Impulssatz dar. Die linke Seite dieser Gleichung gibt nämlich im wesentlichen den durch die turbulente Wirbelung im Mittel übertragenen Impuls an^1), das Glied mit w' rechts stellt die laminare Impulsübertragung dar, die Konstante C bzw. $C_1 y$ ist die „Konstante“ des Impulssatzes.

An den Wänden ist wegen der Grenzbedingungen $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$. Also ist dort $w' = C$ bzw. $= C_1 y_{\text{wand}}$; an den Wänden überwiegt also der laminare Impulstransport den turbulenten, w'_{wand} wird im allgemeinen sehr groß sein (vgl. den nächsten Paragraphen). In der Kanalmitte aber, d. h. im ganzen Kanal außerhalb der unmittelbaren Wandnähe, ist w' von der Größenordnung 1, also sehr klein gegen C bzw. $C_1 y$. Hier wird daher der turbulente Impulstransport den laminaren völlig überwiegen.

Der Bauart der Systeme (38) und (39) entspricht es, daß wir eine triviale Lösung derselben sofort angeben können, nämlich

$$\varphi_1 = 0, \quad w' = C \quad \text{bzw.} \quad w' = C_1 y,$$

d. h. wir kommen so zur Laminarbewegung zurück.

Unser Ziel muß es jetzt sein, über die nichttrivialen Lösungen von (38) und (39) bestimmte Resultate zu erhalten.

§ 2. Die turbulente Bewegung in Wandnähe und das Widerstandsgesetz.

Das wichtigste Ergebnis über das Verhalten von w in unmittelbarer Nähe der Wände ist das von v. Kármán (a. a. O.) durch Dimensionsbetrachtungen aus dem Blasius'schen Widerstandsgesetz abgeleitete Gesetz, daß w in der Nähe einer Wand wie $\eta^{1/2}$ anwächst (wenn η die Entfernung von der Wand darstellt). Wir wiederholen kurz den Kármánschen Gedankengang, da wir uns dadurch allgemein darüber orientieren.

1) Wir meinen hier den mittleren Impuls in der X -Richtung, der bei unserem Problem in der Y -Richtung übertragen wird. Der Impuls in der X -Richtung ist im wesentlichen gleich u , die Geschwindigkeit des den Impuls tragenden Teilchens in der Y -Richtung ist v , also der in der Zeiteinheit übertragene Impuls $u \cdot v$, im Mittel $\overline{u \cdot v}$, was im Falle (36) ergibt:

$$\overline{u \cdot v} = -i \alpha (\Phi_1 \varphi_1' - \Phi_1' \varphi_1).$$

tieren können, was wir — auch ohne das Blasius'sche Gesetz zu kennen — für das Verhalten von w in Wandnähe zu erwarten haben.

Die an einer Wand angreifende Schubspannung τ (d. h. also der Widerstand) muß sich, wie aus Dimensionsbetrachtungen leicht zu ersehen ist, darstellen lassen in der Form:

$$\tau = \kappa \cdot \mu \cdot \frac{U}{h} \cdot f(R),$$

wo κ eine bestimmte dimensionslose Konstante bedeutet.

Wenn wir speziell ein Potenzgesetz annehmen, so ist

$$(40) \quad \tau = \kappa \cdot \mu \cdot \frac{U}{h} \cdot R^\xi = \kappa \cdot \mu \cdot \frac{U}{h} \cdot \left(\frac{U \cdot h \cdot \rho}{\mu} \right)^\xi.$$

Aus (40) folgt umgekehrt:

$$U = \left[\frac{\tau}{\kappa} \cdot \left(\frac{h}{\mu} \right)^{1-\xi} \cdot \rho^{-\xi} \right]^{\frac{1}{1+\xi}}.$$

Die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe muß sich dann durch eine Gleichung der Form darstellen:

$$w = \frac{1}{U} \left[\tau \cdot \rho^{-\xi} \cdot \left(\frac{h}{\mu} \right)^{1-\xi} \right]^{\frac{1}{1+\xi}} f\left(\frac{\eta}{h}\right)$$

(w ist hier wieder [vgl. (1) und (6)] dimensionslos gewählt und enthält daher U im Nenner, η bedeutet den Abstand von der Wand).

Nehmen wir wieder in 1. Näherung ein Potenzgesetz an (σ sei eine dimensionslose Konstante):

$$w = \frac{\sigma}{U} \left[\tau \rho^{-\xi} \cdot \left(\frac{h}{\mu} \right)^{1-\xi} \right]^{\frac{1}{1+\xi}} \left(\frac{\eta}{h} \right)^\varepsilon.$$

Fordert man jetzt, daß die Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe der Wand nur von τ , μ , ρ , nicht aber von h abhängen soll, was physikalisch sehr plausibel ist, so folgt:

$$(41) \quad \frac{1-\xi}{1+\xi} = \varepsilon.$$

Für $\xi = \frac{3}{4}$, wie es dem Blasius'schen Gesetze entspricht, ergibt sich also $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Um uns über die physikalische Bedeutung dieses Resultats klar zu werden, bemerken wir: $w \sim \eta^{1/4}$ bedeutet, daß $w' = dw/d\eta$ am Rande unendlich ist, daß also w sich un-

endlich an die Wand anschmiegt. Nun ist es aber klar, daß in Wirklichkeit w' an der Wand nicht unendlich sein kann, denn w' bedeutet ja gerade im wesentlichen die Schubspannung an der Wand und ist daher nach (40) bis auf einen von R unabhängigen Zahlenfaktor gleich R^ξ zu setzen.

$$(42) \quad w'_{\text{Rand}} \sim R^\xi.$$

w' an der Wand ist also bei den uns interessierenden großen Werten von R sehr groß. Die Geschwindigkeitsverteilung $w \sim \eta^{1/2}$ wird ihrer Ableitung entsprechend nur im Grenzfalle unendlich großen Wandabstandes oder reibungsloser Flüssigkeit ($R = \infty$) in Strenge gültig sein. Noch einfacher läßt sich dieser Sachverhalt überblicken, wenn wir das gefundene Gesetz $w \sim \eta^{1/2}$ in der Form schreiben $\eta \sim w^2$. Aus der Tatsache endlicher Schubspannung wissen wir, daß das erste Glied der Potenzentwicklung $\eta(w)$ von der Form $\gamma_1 w$ sein muß. Dieses Glied ist aber sehr klein, nämlich im wesentlichen gleich dem reziproken Werte von w' , also von der Ordnung $R^{-\xi}$ (vgl. 42).

Die Meinung des abgeleiteten Gesetzes $w \sim \eta^{1/2}$ ist also offenbar die, daß die Reihenentwicklung von $\eta(w)$ anfangen soll mit den Gliedern

$$(43) \quad \eta = \gamma_1 w + \gamma_7 w^7 + \dots$$

wo γ_1 außerordentlich klein ist, und daß daher das erste Glied $\gamma_1 w$ für einigermaßen große Werte von w gegen das zweite $\gamma_7 w^7$ gestrichen werden kann.

Nach den vorhergehenden Darlegungen erwarten wir unabhängig von der Gültigkeit des $\frac{1}{2}$ -Gesetzes für das Aussehen der Grundströmung der turbulenten Bewegung in der Mitte kleine Krümmungen, in Wandnähe Anschmiegen der Grundströmung an die Wände.

Für ein solches Profil gelten die Untersuchungen des Teiles I nicht unmittelbar, denn wir haben dort w' , w'' usw. als endlich vorausgesetzt. Doch lassen sich diese Untersuchungen leicht auf solche Profile wie das hier vorkommende verallgemeinern (vgl. § 5, S. 597). Insbesondere wird die Lösung der reduzierten Gleichung (8) (also $\lim R = \infty$) mit Befriedigung der Grenzbedingungen hier besonders einfach; das soeben charakterisierte Profil gehört nach § 5, S. 597 zu den „schwingungsfähigen“, es existiert eine Lösung von (28) mit reellem c ; dies ist außerordentlich wichtig, zeigt es doch,

daß die „turbulenten Profile“ immer „labil“ sind nach § 5, oder anders ausgedrückt, daß gerade die Abweichung (42) vom laminaren Widerstandsgesetz die Möglichkeit eines „labilen“ Profils, also der Turbulenz gibt.

Die Lösung von (28) heißt für $\alpha = 0$

$$(44) \quad \varphi = [w - w(+1)] \int_{-1}^y \frac{dy}{[w - w(+1)]^2}.$$

Daß φ für $y = -1$ Null wird, haben wir durch Wahl der unteren Grenze des Integrals erreicht; daß es aber auch für $y = +1$ Null wird, wegen der Wahl $c = w(+1)$ ist leicht zu sehen aus folgender Umformung:

$$\varphi = [w - w(+1)] \int_{w(-1)}^w \frac{dw}{[w - w(+1)]^2 \cdot w'}.$$

Das Integral der rechten Seite wird nämlich im Punkte $w = w(+1)$ von niedrigerer Ordnung unendlich als $\frac{1}{w - w(+1)}$, da w' dort (im Limes $R = \infty$) unendlich wird. Also ist $\varphi_1 = 0$ für $y = +1$. Durch (44) haben wir im Limes reibungsloser Flüssigkeit die Amplitude der turbulenten Schwingungen dargestellt und aus den Grenzbedingungen den Wert für β/α , nämlich $\beta/\alpha = w(+1)$ abgeleitet. Es ist aber selbstverständlich, daß auch die zu (44) symmetrische Lösung

$$(44a) \quad \varphi = [w - w(-1)] \int_{+1}^y \frac{dy}{[w - w(-1)]^2}$$

den Grenzbedingungen genügt; also gilt hier $c = w(-1)$. Bei der Couetteschen Anordnung schließen wir daher aus (44) und (44a), daß zwei zueinander symmetrische Schwingungssysteme existieren, deren Wellengeschwindigkeit bzw. mit den Geschwindigkeiten der beiden Wände ($w(+1)$ und $w(-1)$) übereinstimmen.

Für die symmetrische Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden dagegen ist $w(+1) = w(-1) = 0$. Aus (44) und (44a) schließen wir dann, daß jedes Integral der Form

$$\varphi = w \int \frac{dy}{w^2}$$

den Grenzbedingungen genügt. Aus der Forderung (a), daß

φ ungerade sein soll, ergibt sich aber, daß wir als untere Grenze des Integrals $\int \frac{dy}{w^2}$ $y = 0$ wählen müssen; also

$$(44b) \quad \varphi = w \int_0^y \frac{dy}{w^2}.$$

Im Falle symmetrischer Strömung gilt also insbesondere für β/α :

$$(44c) \quad w(+1) = w(-1) = \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Von der turbulenten Grundströmung interessiert uns zunächst am meisten die Art der Singularität derselben an den Wänden, also wenn wir annehmen $w \sim \eta^\varepsilon$, der Exponent ε . Wir wollen zu zeigen versuchen, daß aus den Differentialgleichungen (38) bzw. (39) im Limes $R = \infty$ wenigstens in unmittelbarer Wandnähe tatsächlich ein solches Potenzgesetz mit dem Exponenten $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt. Dabei ist allerdings der Konvergenzbereich der benutzten Potenzreihen nicht sicher gestellt, so daß die Schlüsse, soweit sie auf die Gestalt des Profils in einigem Abstand von der Wand angewendet werden, unsicher sind. Wir entwickeln φ_1 und w in der Umgebung von $\eta = 0$ nach ganzen und positiven Potenzen von η — dies ist möglich für jedes endliche — und dann umgekehrt η nach ganzen Potenzen von w . So werden wir direkt zu der Formel (49) für $\eta(w)$ geführt.

Wir behaupten — und dies ist das wichtigste Resultat, das wir später brauchen — φ_1 läßt sich in 1. Näherung darstellen durch eine Reihe der Form

$$\varphi_1 = \alpha_2 \eta^2 + \alpha_5 \eta^5 + \alpha_8 \eta^8 + \dots,$$

wo $\alpha_2, \alpha_8 \dots$ reelle, $\alpha_5, \alpha_{11} \dots$ rein imaginäre Konstanten sind; ferner ist w von der Form:

$$(45) \quad w = \beta_1 \eta + \beta_7 \eta^7 + \dots$$

Diese Behauptung läßt sich für die Differentialgleichungen (38) direkt durch Ansatz von φ und w mit unbestimmten Koeffizienten beweisen, wenn die Glieder $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und β_0, β_1 gegeben sind. Suchen wir also vorerst diese Glieder zu bestimmen. Zunächst muß φ_1 und φ_1' für $\eta = 0$ wegen der Grenzbedingungen Null sein, also fängt die Reihe für φ_1 mit $\alpha_2 \eta^2$ an ($\alpha_0 = \alpha_1 = 0$). Daß ferner das folgende Glied $\alpha_3 \eta^3$

wegfällt, d. h. sehr klein wird gegen die übrigen Glieder, können wir nachträglich verifizieren. Einschaltungsweise wollen wir hier zu diesem Zwecke durch einmalige näherungsweise Integration der zweiten Gleichung (38) beweisen, daß α_3 von der Größenordnung αR wird. Für $\alpha^2 = 0$ lautet Gleichung (38)

$$\varphi_1'' \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \varphi_1 w'' = \frac{i}{\alpha R} \varphi_1'''' ,$$

woraus folgt:

$$(46) \quad \varphi_1' \left(w - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \varphi_1 w' = \frac{i}{\alpha R} \varphi_1''' + A .$$

Die Konstante A ist hierin von derselben Größenordnung, wie die linke Seite von (46) in der Mitte des Kanals, also höchstens von der Größenordnung 1 (vgl. I, § 2). φ_1''' am Rande ist daher wegen der Grenzbedingungen von der Ordnung αR . Dasselbe gilt für α_3 .

Nehmen wir also einstweilen α_3 als klein an und suchen dies später zu rechtfertigen. Von den Konstanten β_0, β_1 ist die erste β_0 wegen Forderung (a) § 1 gleich Null.

Die Konstanten α_2 und β_1 sind zunächst willkürlich¹⁾ und wir haben auch keine Möglichkeit, sie aus der Lösung der Differentialgleichungen (38) und (39) in Wandnähe abzuleiten. Diese Möglichkeit bestände erst, wenn es uns gelänge, die Lösung (45) analytisch bis zur anderen Wand fortzusetzen. Diese Aufgabe jedoch ist mathematisch außerordentlich kompliziert, schon deswegen, weil, wie sich zeigen wird, die vereinfachten Gleichungen (38), (39) nicht ausreichen, um φ_1 und w in der Mitte des Kanals zu bestimmen. Obwohl wir demnach auf die Lösung dieser Aufgabe verzichten müssen, können wir doch erwarten, daß wir durch die bloße Entwicklung von φ_1 und w in der Nähe einer Wand mit unbestimmten Koeffizienten α_2, β_1 doch diejenigen qualitativen Eigenschaften von w und φ_1 in Wandnähe erhalten können, die erfahrungsgemäß ganz unabhängig sind von dem Verhalten der Flüssigkeit in der Kanalmitte wie z. B. das Gesetz $w \sim \eta^{1/2}$.

1) Wir wollen α_2 als reell annehmen; dies bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn φ_1 ist nur bis auf einen Faktor der Form e^{ix} bestimmt, da man in (36) den Anfangspunkt der Zeit beliebig wählen kann.

Gehen wir mit dem Ansatz:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha_2 \eta^2 + \alpha_4 \eta^4 + \alpha_5 \eta^5 + \dots \\ w &= \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \beta_3 \eta^3 + \dots\end{aligned}$$

in Gleichung (38) ein, wobei wir die zweite Gleichung durch (46) ersetzen. Wir nehmen also wieder α als sehr klein an, was hier nur bedeutet (vgl. I, § 2), daß die Wellenlänge der Schwingungen groß sein soll gegenüber der Grenzschichtdicke. Außerdem setzen wir nach (44c)

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Für die erste Gleichung (38) schreiben wir ferner

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} -i\alpha R(\varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1) &= 2\alpha R(\varphi_{1i}' \varphi_{1r} - \varphi_{1i} \varphi_{1r}') \\ &= w' - C_1 y. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet φ_{1r} den reellen, φ_{1i} den imaginären Teil von φ_1 .

Aus (46) und (47) folgen jetzt die Rekursionsformeln

$$(48) \quad n(n-1)(n-2)\alpha_n = -i\alpha R \sum_{s=2}^{n-2} (n-2s)\alpha_{n-1-s}\beta_{s-1},$$

$$(49) \quad n\beta_n = 2\alpha R \sum_{s=2}^{n-2} (n-2s)\alpha_{n-s}^i \beta_s^r;$$

$$\begin{aligned}\text{dazu} \quad \beta_1 &= C_1 y_{\text{Rand}}, \\ 2\beta_2 &= C_1.\end{aligned}$$

Hierin bedeutet α_s^r , α_s^i den reellen bzw. imaginären Teil von α_s .

Aus (48) folgt zunächst

$$\alpha_4 = 0.$$

Aus (49) ergibt sich dann:

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0.$$

Auch β_2 können wir näherungsweise Null setzen.

Aus (49) folgt nämlich

$$\beta_2 = \frac{\beta_1}{2y_{\text{Rand}}};$$

das Glied $\beta_2 \eta^2$ ist also für sehr kleine η gegen das erste Glied $\beta_1 \eta$ zu vernachlässigen; für größere η aber überwiegen die höheren Glieder $\beta_7 \eta^7$ usw. völlig.

Nehmen wir also auch $\beta_2 = 0$ an und rechnen so die höheren Glieder der Reihen für β_1 und w aus.

Es folgt

$$\alpha_5 = -i\alpha R \frac{\alpha_2 \beta_1}{3 \cdot 4 \cdot 5}; \quad \alpha_6 = \alpha_7 = 0; \quad \alpha_8 = -(\alpha R)^2 \frac{\alpha_2 \beta_1^2}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8};$$

$$\alpha_9 = \alpha_{10} = 0;$$

$$\alpha_{11} = -(\alpha R)^3 \left(\frac{\alpha_2^2 \beta_1}{2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} - \frac{\alpha_2 \beta_1^2}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} \right);$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0.$$

$$\beta_7 = -(\alpha R)^2 \frac{\alpha_2^2 \beta_1}{70}; \quad \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{12} = 0;$$

$$\beta_{13} = (\alpha R)^4 \left(\frac{\alpha_2^2 \beta_1^2}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14} - \frac{\alpha_2^4 \beta_1}{7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13} \right).$$

Die von uns behauptete Darstellung (45) für w ist also bewiesen und es läßt sich leicht zeigen, daß auch von den weiteren Gliedern β nur jedes sechste Glied einen endlichen Wert hat.

Für die Darstellung von η als Potenzreihe nach w folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \eta &= \gamma_1 w + \gamma_7 w^7 + \gamma_{13} w^{13} + \dots \\ (50) \quad \gamma_1 &= \frac{1}{\beta_1}, \quad \gamma_7 = (\alpha R)^2 \frac{\alpha_2^2}{70 \beta_1^2}, \\ \gamma_{13} &= (\alpha R)^4 \left(\frac{\alpha_2^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17}{7 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \beta_1^{13}} - \frac{\alpha_2^2}{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14 \beta_1^{11}} \right). \end{aligned}$$

Die Glieder γ_2 bis γ_6 , γ_8 bis γ_{12} , γ_{14} usw. sind alle gleich Null.¹⁾

Die Entwicklung (50) stimmt nun in der Tat völlig mit (48) überein und auch ohne Kenntnis der Konstanten α_2 und β_1 scheinen wir so zu dem von Kármán halbempirisch abgeleiteten Gesetz $\eta \sim w^7$ zu gelangen. Die Koeffizienten γ_1 und γ_7 lassen sich jedoch nicht berechnen. Umgekehrt können wir vielleicht aus dem empirischen Befund für die Koeffizienten β_1 und α_2 schließen, daß γ_7 von der Größenordnung 1, γ_1 von der Ordnung $(\alpha R)^{-7/6}$, also $\alpha_2 \sim (\alpha R)^{7/6}$ ist. Nachträglich bestätigen wir so auch unsere frühere Behauptung $\alpha_3 \eta < \alpha_2$. Fragt man sich nach der Größenordnung der Werte von w , für die das

1) Diese Potenzreihe $\eta(w)$ läßt sich natürlich auch direkt aus (46) und (47) ableiten, ohne den Umweg über die Reihe von $w(\eta)$, wenn w als unabhängige Variable eingeführt wird. Doch sind die dazu nötigen Rechnungen etwas komplizierter.

3. Glied in (50) klein ist gegen das zweite, für die also das w^7 -Profil wirklich gilt, so ergibt sich $w \sim \beta_1^{-1/6}$, also $\sim R^{-1/6}$. Aus den Differentialgleichungen (38) folgt nach alledem das Profil $w \sim \eta^{1/2}$ zunächst nur qualitativ; darüber, daß das $\frac{1}{2}$ -Profil fast bis zur Kanalmitte hin beobachtet ist, geben unsere Rechnungen keinen Aufschluß. Das war jedoch auch nicht zu erwarten, denn die übrigen Konstanten, die in das Gesetz eingehen, hängen auch von dem Verhalten der Flüssigkeit an der gegenüberliegenden Wand ab.

Fassen wir einschaltungsweise noch einmal kurz zusammen, welche Vernachlässigungen wir bei der Ableitung von (50) aus (48) und (49) begangen haben und suchen dadurch zu bestimmen, mit welcher Genauigkeit die aus (50) gezogenen Schlüsse richtig sind. Zunächst haben wir das System (38) statt (37) benutzt, also Größen der Ordnung φ_2/w gestrichen. Ferner haben wir $\alpha_3 = 0$, $\beta/\alpha = 0$, $\beta_2 = 0$ gesetzt und damit Größen der Ordnung

$$\frac{\alpha_2 \eta}{\alpha_2}, \quad \frac{\beta}{\alpha w}, \quad \frac{\beta_2 \eta}{\beta_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\beta_1}{\beta_1 \eta^6}$$

vernachlässigt. Die Genauigkeit unserer Rechnungen wird durch das größte der hier vernachlässigten Glieder bestimmt sein. Einfache Größenordnungsbetrachtungen, die wir hier nicht durchführen, machen es wahrscheinlich, daß von diesen Gliedern φ_2/w das größte ist, daß aber auch dieses Glied mit $R \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Durch Wahl eines hinreichend großen Wertes für R wird man also die Genauigkeit der aus (48), (49) und (50) abgeleiteten Resultate beliebig weit treiben können.

Was das Blasius'sche Widerstandsgesetz betrifft, so läßt sich dieses natürlich umgekehrt nach dem oben geschilderten Verfahren mittels Dimensionsbetrachtungen aus dem Gesetz $\eta \sim w^7$ herleiten, wenn man, wie geschehen, annimmt, daß das Verhalten von w in Wandnähe von der Kanalbreite unabhängig ist. Die Frage aber, ob auch diese letztere physikalisch sehr plausible Annahme aus den Differentialgleichungen (38) bzw. (39) folgt, müssen wir aus den oben angegebenen Gründen (Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung) unbeantwortet lassen.

Eine bemerkenswerte direkte Folgerung über das Widerstandsgesetz können wir jedoch aus (38) und (39) durch Größenordnungsbetrachtungen ziehen. Im Kanal, die unmittelbare

Wandnähe und den Punkt $y = 0$ [vgl. u. (66)] ausgeschlossen, kann man nämlich statt der ersten Gleichung (38) wegen der Größe von C_1 schreiben (vgl. S. 612)

$$(51) \quad i \alpha R (\varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1) = C_1 y.$$

Da nun die Amplitude φ_1 nicht mit $R \rightarrow \infty$ gegen unendlich gehen kann — dies würde allen unseren Rechnungen den physikalischen Sinn nehmen —, so folgt, daß C_1 höchstens groß von der Ordnung αR ist, daß also der Exponent ξ von Gleichung (40) < 1 sein muß (was ja auch in gewisser Weise aus (41) hervorgeht). Daraus folgt [vgl. Gleichung (42) und (40)], daß das in der Hydraulik gewöhnlich angenommene Widerstandsgesetz $\tau = \text{const} \cdot U^2$ eine obere Grenze für alle denkbaren Widerstandsgesetze der Turbulenz darstellt, die *unabhängig ist von der Wandbeschaffenheit*. Man kann vermutungsweise schließen, daß das Gesetz $\tau \sim U^{1/4}$ nur gültig ist für glatte Wände — nur für diese haben wir ja auch $\eta \sim w^7$ erhalten —, daß sich aber das Widerstandsgesetz für rauhe Wände immer mehr dem quadratischen annähert.¹⁾ Denn für rauhe Wände wird die Amplitude φ_1 von R unabhängig und von der Größe der Wandstörungen sein — außerdem werden für rauhe Wände die Grenzbedingungen nicht mehr verursachen, daß φ_1 in erster Näherung reell ist, wie es der Gleichung (44) entspricht.

An den Schlüssen dieses Paragraphen ändert sich nichts, wenn man an Stelle der Differentialgleichungen (38) die Gleichungen (39) zugrunde legt.

§ 3. Die turbulente Bewegung außerhalb der unmittelbaren Wandnähe.

Für die Bewegung in der Kanalmitte ist es wesentlich, daß sich φ_1 hier aus denjenigen beiden Integralen von (7a) zusammensetzt, die schon bei der reibungslosen Flüssigkeit, also für Gleichung (8) auftreten (vgl. I, § 2). Die wichtigste hieraus folgende Eigenschaft von φ_1 ist die, daß es, bis auf Größen der Ordnung φ_2 und $(\alpha R)^{-1}$ der Bedingung

$$(52) \quad \varphi_1' \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_1' \varphi_1 = \text{const.}$$

genügt.

1) Vgl. die genaueren Untersuchungen von v. Kármán a. a. O. und die experimentellen Untersuchungen von Schiller, dieselbe Zeitschrift 3. S. 2. 1923.

Dies ergibt sich vermöge des Abelschen Satzes aus der Tatsache, daß, bis auf Größen der Ordnung φ_2 und $(\alpha R)^{-1} \varphi_1$, und φ_{1i} (der reelle bzw. imaginäre Teil von φ_1) Lösungen der Differentialgleichung (8) sind.

Daraus ist zu schließen, daß die Gleichungen (38) bzw. (39) nicht ausreichen, um die Bewegung in der ganzen Kanalbreite festzulegen, daß wir vielmehr zu Gleichung (37) und zu dem ihr im Couetteschen Fall entsprechenden Gleichungssystem zurückgreifen müssen.

Dies bringt im allgemeinen eine Komplizierung der mathematischen Aufgabe mit sich. Nur im Couetteschen Fall läßt sich die Aufgabe verhältnismäßig leicht lösen, weil die erste Gleichung (39) bis auf Größen der Ordnung w'/C also $(\alpha R)^{-3/4}$ und φ_2^2 , vgl. (37), mit Gleichung (52) übereinstimmt. Während also Gleichung (52) ihrer Ableitung aus dem Abelschen Satz gemäß nur bis auf Größen der Ordnung φ_2 richtig ist, soll hier im Couetteschen Fall noch (39) bis auf Größen der Ordnung φ_2^2 gelten. Dieser Forderung wird Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$(53) \quad \varphi_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist also als Lösung unserer zugrunde gelegten Differentialgleichung für den Couetteschen Fall anzusehen.

Aus (53) würde für φ_1 aus (37) folgen

$$(54) \quad \varphi_1''' \varphi_1 - \varphi_1'' \varphi_1 = 0.$$

Nun gilt für den Couetteschen Fall nicht das System (37), sondern ein komplizierteres, das wir hier nicht anschreiben wollen. Wir geben aber von ihm an, daß es ebenso wie (37) für $\varphi_2 = 0$ zur Lösung (54) führt und daher zum Ergebnis:

$$(55) \quad \varphi_1 = a e^{\gamma y} + b e^{-\gamma y}$$

Hier sind a , b , γ irgendwelche komplexe Konstanten. Für w folgt dann aus der 2. Gleichung (39) bzw. aus ihrer reduzierten Form (8):

$$(56) \quad w - c = a_1 e^{\gamma_1 y} + b_1 e^{\gamma_1 y}.$$

Da nun $w - c = 0$ sein soll an der einen Wand, da andererseits w ungerade sein soll um $y = 0$, so folgt, daß w einfach durch Nullwerden von γ_1 und geeignetes Wachsen von a_1 und b_1 zum linearen Profil ausarten muß.

Wir erhalten also das wichtige Resultat, daß beim Couette-schen Fall das Grundprofil *w* der turbulenten Bewegung in der ganzen Kanalbreite wesentlich linear verläuft (— jedoch stark abweichend vom laminaren Profil; es wird viel flacher sein, als das laminare —) [daß es sich aber (vgl. II. § 2) am Rand wieder wie $\eta^{1/2}$ an die Wände anschmiegt].

Gehen wir nun zum komplizierteren Fall einer Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden, also genau zum System (37) über. Zur Lösung müssen wir uns naturgemäß mit rohen Näherungen begnügen. Zunächst können wir in (37) die rechten Seiten aller drei Gleichungen, nämlich die Reibungsglieder, streichen — dies wird durch die Überlegungen von I, § 2 vollauf gerechtfertigt. Dann setzen wir [vgl. Gleichung (44c)] $\beta/\alpha = 0$.

Für φ_1 erhalten wir so an Stelle der zweiten Gleichung (37)

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1'' w - w'' \varphi_1 - \alpha^2 w \varphi_1 - \varphi_2' (\bar{\varphi}_1'' - \alpha^2 \bar{\varphi}_1) - 2 \varphi_2 (\bar{\varphi}_1''' \\ - \alpha^2 \bar{\varphi}_1') + 2 \bar{\varphi}_1' (\varphi_2'' - 4 \alpha^2 \varphi_2) + \bar{\varphi}_1 (\varphi_2''' - 4 \alpha^2 \varphi_2') = 0. \end{aligned} \right.$$

Entwickeln wir φ_1 als Lösung der Gleichung (57) nach Potenzen von α^2 einerseits, von φ_2 andererseits, bemerken ferner, daß φ_1 ungerade sein soll (vgl. 44b) und schreiben $\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11}$, so ergibt sich bei Berücksichtigung nur der linearen Glieder:

$$(58) \quad \varphi_{10} = a w \int_0^y \frac{dy}{w^2}.$$

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{11} = a w \int_0^y \frac{dy}{w^2} \int_0^y dy (\alpha^2 w \varphi_{10} + \varphi_2' \varphi_{10}'' + 2 \varphi_2 \varphi_{10}''' \\ - 2 \varphi_{10}' \varphi_2'' - \varphi_{10} \varphi_2'''). \end{aligned} \right.$$

Hierin ist φ_1 natürlich nur bis auf einen konstanten Faktor a bestimmt, den wir hier, was keine Beschränkung bedeutet, reell angenommen haben.

Gehen wir mit diesem Werte von φ_1 in die vereinfachte 1. Gleichung (37), nämlich:

$$(60) \quad \varphi_1 \bar{\varphi}_1'' - \bar{\varphi}_1 \varphi_1'' = \text{const.}$$

ein, so ergibt sich, wenn φ_{2i} den imaginären Teil von φ_2 bezeichnet:

$$(61) \quad (\varphi_{2i}' \varphi_{10}'' + 2 \varphi_{2i} \varphi_{10}''' - 2 \varphi_{10}' \varphi_{2i}'' - \varphi_{10} \varphi_{2i}''') \int_0^y \frac{dy}{w^2} = \text{const.}$$

Jetzt genügt aber φ_{2i} , wie aus der dritten Gleichung (37) und daraus, daß φ_1 in erster Näherung reell ist, folgt, der Gleichung

$$(62) \quad \varphi_{2i}'' w - \varphi_{2i} w'' = 0.$$

also

$$(63) \quad \varphi_{2i} = b w \int_0^y \frac{dy}{w^2} = c \varphi_{10}.$$

Gehen wir mit diesem Werte von φ_{2i} in (63) ein, bedenken wir ferner, daß für $y = 0$ die linke Seite von (61) und damit die Konstante der rechten Seite Null ist (dies bedeutet für die Konstante der rechten Seite von (60) nur, daß sie in erster Näherung Null, d. h. klein von der Ordnung $\varphi_1 \varphi_2^2$ bzw. $\alpha^2 \varphi_1 \varphi_2$ oder $\alpha^4 \varphi_1$ ist), so erhalten wir

$$(64) \quad \varphi_{10} \varphi_{10}''' - \varphi_{10}'' \varphi_{10}' = 0,$$

was vollständig mit (54) übereinstimmt.

Diese Gleichung wird nun allerdings, ebenso wie (54), in der Umgebung des Punktes $y = 0$ trivial, sie ist, weil φ eine ungerade Funktion von y ist, dort identisch erfüllt. Sie kann also dort auch keine Bestimmung von w liefern. Dies führt beim symmetrischen Profil (64) zu einer merkwürdigen Unstetigkeit im Punkte $y = 0$. (Beim ungeraden Profil ist eine solche Unstetigkeit aus den Differentialgleichungen nicht zu erkennen). Integriert man nämlich (37a), so erhält man, wie oben gezeigt, nach einmaliger Integration die Gleichung:

$$(65) \quad 2\alpha R [\bar{\varphi}'_1 \varphi_1 - \varphi_1'' \bar{\varphi}_1 + 2(\bar{\varphi}_2'' \varphi_2 - \varphi_2'' \bar{\varphi}_2) + \dots] = w'' - C$$

[wo C (vgl. S. 612) bei Gültigkeit des Blasius'schen Gesetzes von der Größenordnung $(\alpha R)^{1/4}$, also jedenfalls sehr groß ist]. Die linke Seite von (65) verschwindet aber mit φ_1 und φ_2 (die ja ungerade Funktionen von y sind) an der Stelle $y = 0$. Dort muß also gelten

$$(66) \quad w_{y=0}'' = C.$$

Dies bedeutet, daß $w_{y=0}''$ sehr groß ist ($\sim (\alpha R)^{1/4}$), daß also w an der Stelle $y = 0$ einen scharfen Knick¹⁾ (Krümmungsradius

1) Auf diesen Knick hat mich freundlicherweise Hr. Prof. Prandtl auf Grund des empirischen Materials hingewiesen. Der Knick scheint dabei empirisch nicht so scharf zu sein, wie ihn die Rechnung ergibt, was sich wohl zwanglos dadurch erklärt, daß eben die Annahme (a) S. 609 über die Symmetrie auch der *Wirbel* und *Störungen* nicht genau der Wirklichkeit entspricht.

$\sim (\alpha R)^{-3/4}$) aufweist. In geringer Entfernung von diesem Punkt muß w nach (64) wieder wesentlich linear verlaufen.

Wir erhalten das Resultat:

Auch bei der Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden — was sich wohl auch auf die Strömung im Rohr übertragen läßt — verläuft das Profil näherungsweise über die ganze Kanalbreite linear, in der Mitte jedoch besitzt es einen scharfen Knick (an die Wände schmiegt es sich mit dem $y^{1/2}$ -Gesetz an). (Vgl. Fig. 8.)

Die physikalische Ursache des scharfen Knicks ist die, daß der Gradient der turbulenten Impulsübertragung für $y = 0$ aus Symmetriegründen verschwindet, daß also, weil der Gradient der gesamten Impulsübertragung über die Kanalbreite konstant ist, der Gradient der laminaren Impulsübertragung, d. h. w'' dort sehr groß sein muß.

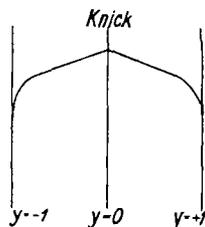


Fig. 8.

§ 4. Schlußbemerkungen und Zusammenfassung der physikalischen Ergebnisse.

Unsere Untersuchungen haben noch zwei wesentliche Lücken: Erstens liefern sie nicht den Übergang von dem $\eta^{1/2}$ -Profil in das im mittleren Teil gültige lineare Profil und zweitens beschränken sie sich auf große Werte von R , liefern also auch nicht den Minimalwert von R , falls ein solcher existiert, für den die turbulente Bewegung noch möglich ist. Die erste dieser beiden Lücken ist am schwersten auszufüllen (vgl. S. 617) und wir können auch kein Verfahren angeben, das in befriedigender Weise die hier gestellte Aufgabe lösen würde. Man kann versuchen, die beiden von der Wand und der Kanalmitte herkommenden Näherungen aneinander zu stückeln, was durch die Bedingung geschehen müßte, daß an der betreffenden Ansatzstelle $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \varphi_1'''$, w und w' stetig sein sollen; die Konvergenz der Entwicklungen (45) und (50) reicht aber kaum aus, um so eine einigermaßen definierte Näherung zu garantieren. Jedenfalls hängt das Endresultat, das Profil w , noch stark von der Art der Zusammensetzung der beiden Näherungen ab. Es muß schließlich auch als fraglich betrachtet werden, ob eine solche exakte Durch-

führung der Ansätze (S. 609) wesentlich neue physikalische Resultate in Übereinstimmung mit der Erfahrung liefern würde, da diese Ansätze zweifellos eine sehr starke Idealisierung der Wirklichkeit bedeuten.

Die Ausfüllung der zweiten Lücke dagegen bietet prinzipiell gar keine Schwierigkeiten, alle Hilfsmittel dazu sind schon im Teil I enthalten, und wenn einmal das Profil w vollständig bekannt ist, so reichen die im Teil I geschilderten Methoden prinzipiell aus, um nach Art von I, § 6 den Minimalwert von R zu berechnen, für den die turbulente Bewegung möglich ist. Man könnte z. B. die kritische Reynoldssche Zahl für ein Profil berechnen, das nach dem oben erwähnten Verfahren durch Anstückelung der beiden Näherungen gewonnen ist oder man könnte für diese Untersuchung das empirisch beobachtete Profil zugrunde legen und so die Reynoldssche Zahl auf halbempirischem Wege ausrechnen. In jedem Falle wird man wohl — das haben die Untersuchungen im Teil I wahrscheinlich gemacht und direkte, hier nicht angegebene Rechnungen bestätigt — zur selben Größenordnung der kritischen Reynoldsschen Zahl, nämlich $R \sim 10^3$ kommen; der genaue Wert von R wird allerdings noch zu sehr von der Art abhängen, wie das Profil gewonnen wurde, als daß wir Vergleiche mit der Erfahrung ziehen könnten. Deshalb haben wir hier noch keine derartige Berechnung von R durchgeführt.

Fassen wir zum Schluß zusammen, was als physikalisches Ergebnis aus unseren Untersuchungen über das Turbulenzproblem zu schließen ist: Im Teil I haben wir erkannt, daß die laminare Bewegung und ihre Stabilitätsverhältnisse keine wesentliche Bedeutung für das Turbulenzproblem und die kritische Reynoldssche Zahl besitzen. Im Teil II aber haben wir die turbulente Bewegung selbst untersucht und können daraus einige Angaben über den turbulenten Bewegungszustand machen: Allgemein besitzt die Geschwindigkeitsverteilung über den ganzen Kanal einfachsten Charakter, sie ist — je nach den Versuchsbedingungen — linear oder konstant (§ 3), in der Mitte besitzt sie bei der (symmetrischen) Strömung zwischen zwei ruhenden Wänden einen scharfen Knick; an den Wänden schmiegt sie sich im $\eta^{1/2}$ -Profil den Wänden an (§ 2). Darüber, daß das $\eta^{1/2}$ -Profil

bis weit in das Kanalinnere hinein Gültigkeit besitzt, geben die Rechnungen keinen Aufschluß. Die turbulenten Schwingungen verlaufen beim Couetteschen Fall im Innern des Kanals nahezu harmonisch (§ 3, Gl. (59)), in der Nähe der Wände treten alle Oberschwingungen auf. Die Geschwindigkeit der Wellen stimmt mit der Wandgeschwindigkeit überein (§ 2 Gl. 44—44c), beim Couetteschen Fall gibt es zwei Gruppen von turbulenten Schwingungen, deren eine hinsichtlich ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der einen Wand übereinstimmt, während die andere die Geschwindigkeit der anderen Wand besitzt. Die turbulenten Störungen tragen also äußerlich den Charakter einer Wandstörung. Dabei ist aber hervorzuheben, daß diese Störungen unabhängig von Wandrauigkeit und ähnlichen Einflüssen als freie Schwingungen existenzfähig sind. Die Amplitude der turbulenten Wellen nimmt gegen die Wände (folgt aus (44) § 2) stark zu, um erst in unmittelbarer Wandnähe zu Null zu gehen.

Die Wellenlänge der auftretenden Schwingungen (I, § 8) ist der Größenordnung nach gleich, eher etwas größer als die Kanalbreite. Der Minimalwert der Reynoldsschen Zahl (I, § 8), für welchen noch die Turbulenz möglich ist, liegt größenordnungsmäßig bei 10^3 . Als Widerstandsgesetz (§ 2, Gl. (50)) scheint sich für glatte Wände aus dem Profil $\eta^{1/2}$ unter gewissen Voraussetzungen das Blasiusche $\tau \sim u^{3/4}$ zu ergeben. Für raue Wände nähert es sich wahrscheinlich (§ 2) dem hydraulischen Gesetz $\tau \sim u^2$ an. — Das Ziel der vorliegenden Arbeit bildete weniger die Aufstellung dieser zum großen Teil schon bekannten Gesetzmäßigkeiten, als vielmehr der Nachweis, daß sich alle bisherigen, teilweise scheinbar sich widersprechenden Ergebnisse durch einfache Grundannahmen einheitlich mathematisch beschreiben lassen.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Sommerfeld, möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für vielfache Förderung den herzlichsten Dank aussprechen.

München, Institut für theoret. Physik.

(Eingegangen 20. Februar 1924.)