# 隨機邊界模型的變數衡量誤差問題: 一般動差估計法的應用

陳怡宜　　　王泓仁*

2007年5月

摘要

當隨機邊界模型逐漸被應用到不同的研究領域時, 如何處理變數衡量誤差的問題, 成爲亟待解決的課題。本文針對具有變數衡量誤差問題的隨機邊界模型, 提出一組 GMM 估計式, 以求得模型參數的不偏估計值。此 GMM 估計式是以模型的高階動差爲建構基礎, 且是特別針對具有截斷式常態分配的隨機邊界模型所設計, 而此類模型正是目前實證應用最廣的模型。蒙地卡羅的模擬結果顯示, 該估計式在觀察數爲500的樣本中, 即有良好的表現。

## 1 前言

隨機邊界模型最早是由 Aigner et al. (1977) 以及 Meeusen and van den Broeck (1977) 所提出, 當時主要是用以探討廠商生產行爲中的技術無效率, 對產量的負面影響。此模型與一般生產函數模型的主要相異點之一, 在於此模型將一項非負的隨機變數, 從一個尋常的生產函數中減去 (或說, 將一項負的隨機變數加入生產函數中), 用以衡量技術無效率對產出造成的負面效果。當我們假設了模型中隨機變數的分配型態之後, 可據以推導模型的概似函數。將此概似函數以數值方法極大化之後, 即可得到模型參數的最大概似估計值。

*作者分別爲淡江大學經濟學系助理教授及中央研究院經濟研究所研究員。作者感謝兩位審查人提供的寶貴意見, 以及盧信銘、何心瑀提供優秀的研究協助。王泓仁感謝國立中山大學人文社會科學中心提供的研究經費補助。文中若有任何疏漏之處, 由作者負責。

雖然隨機邊界模型最早是被應用於生產函數的估計, 但文獻的後續發展, 顯示了隨機邊界模型也可被應用於生產函數以外的研究。例如, 在財務金融文獻中, Hunt-McCool et al. (1996) 探討公司企業初次上市 (IPO) 的股票價格, 普遍低於當日收盤價的現象。在此例中, 非負的隨機變數被用以捕捉 IPO 當日收盤價與初售價之間的差距。Habib and Ljungqvist (2003) 以隨機邊界模型, 探討代理人成本 (agency cost) 對公司的投資機會 (以 Tobin's Q 變數衡量) 的負面影響。其中模型中的邊界, 衡量的是在沒有代理人成本時的潛在投資機會, 而從模型中減去的非負隨機變數, 則是代理人成本對投資機會的負面影響效果。Wang (2003) 以隨機邊界模型探討投資的融資限制問題。若資本市場存在資訊不對稱的問題, 則因公司的融資受到限制, 將使實際投資低於最適投資。在這當中, 最適投資量即是以模型的邊界函數衡量, 而非負隨機變數則是融資限制對投資的影響。在勞動文獻中, Hofler and Murphy (1992) 及 Polachek and Robst (1998) 研究的則是勞動市場上資訊不對稱問題, 對於均衡勞動工資的影響。若市場的資訊不對稱的問題嚴重, 搜尋成本很高, 則勞工接受的實際工資, 可能比在資訊完全的市場中可得的工資要低。另外, 在經濟成長文獻中, Kumbhakar and Wang (2005) 則將隨機邊界模型中的邊界, 以函數形式表示爲各國在長期均衡時的生產函數, 而經濟成長的收斂假設, 則表現在實際生產點由下往上、逐漸接近生產邊界的現象。

然而當隨機邊界模型被廣泛的應用到不同的研究領域及課題時, 無可避免的, 就必須面對這些領域中存在的、已知的變數衡量誤差的問題。例如, 在上述 Hunt-McCool et al. (1996) 的研究中, 控制每家公司在經營上具有的不確定性至關重要, 而作者的採用的方法是以公司年齡做爲公司不確定性的替代變數, 而這無疑將與眞實值間產生誤差。Habib and Ljungqvist (2003) 以及 Wang (2003) 都使用 Tobin's Q 變數於模型中, 但此變數的衡量誤差問題, 已在相關文獻中受到關注。Hofler and Murphy (1992) 及 Polachek and Robst (1998) 的研究中, 需要控制個人天賦能力 (innate ability) 對於工資的影響, 而此變數是否能被正確無誤的衡量、以及錯誤衡量造成的後果, 也常在文獻中被提及。此外, Kumbhakar and Wang (2005) 研究中的生產函數, 包含了資本存量變數, 而以永續存貨法 (perpetual inventory method) 衡量的資本存量, 也被認爲可能存在有系統性的衡量誤差。

有關變數衡量誤差的問題, 在文獻中已有不少研究。若衡量誤差是出現在線性模型中, 則工具變數法是常用的解決方法 (Deistler and Seifert 1978)。然而工具變數法需要另找模型之外的其它變數; 對許多實證研究而言, 理想的工具變數並不容易得到。此外, 若具衡量誤差的模型爲非線性, 則工具變數法常無法使用 (Hsiao 1989)。近期的文獻, 則提出不少新的作

法。例如, Erickson and Whited (2000, 2002) 雖然探討的是線性迴歸中的變數衡量誤差問題, 但他們提出的方法是利用模型的高階動差, 建構出一個不偏誤的一般動差 (generalized method of moments; GMM) 估計式, 而此估計式的特點, 在於其不要求使用模型之外的變數, 且其不需對模型變數的分配, 做很強的假設。Hong and Tamer (2003) 假設衡量誤差項呈現 Laplace 分配, 並據以導出修正的動差方程式 (revised method of moments), 做爲估計模型參數的依據。Li and Hsiao (2004) 則是針對一般化線性模型 (generalized linear models) 的變數衡量誤差問題, 利用無母數及半無母數的方法, 極大化模型的漸近正確概似函數 (asymptotically corrected likelihood)。

雖然文獻中已對多種模型的衡量誤差問題, 提出解決建議, 但由於隨機邊界模型的特殊分配假設, 使得這些解決方法, 無法被直接用在隨機邊界模型中。具我們所知, 已正式發表的文獻中, 探討隨機邊界模型變數衡量誤差問題的研究, 僅有 Chen and Wang (2004)。該篇文章探討的對象是無效率項具有半常態分配 (half-normal distribution) 或指數分配 (exponential distribution) 的隨機邊界模型模型, 而其提出的解決方法與 Erickson and Whited (2000, 2002) 相似, 是利用模型的高階動差, 以動差估計法 (method of moments; MM) 求得模型參數的不偏誤估計式。在此模型中, 動差的個數等於欲估計參數的數目, 因此是個恰可認定 (just identified) 的估計模型。

這篇文章的主要目的, 在於針對隨機邊界模型中的一類重要模型, 提出一組不偏誤的 GMM 估計式, 以處理模型變數具有衡量誤差的問題。GMM 估計式的設計原則, 主要是參考 Erickson and Whited (2000, 2002), 差別在於我們將他們爲線性模型提出的估計式, 經轉化後成爲可被非線性的隨機邊界模型使用的估計式。在此組估計式中, 我們考慮了包含不同動差方程式個數的估計式, 其中有恰可認定的 MM 估計式, 還有另外多加了一條及二條 動差方程式的 GMM 估計式。對於後兩個屬於過度認定的估計式, 我們提供了過度認定的檢測。此模型中的動差方程式, 主要取自於模型殘差當中的高階動差, 而我們即是透過這些高階動差提供的資訊, 來矯正變數衡量誤差的影響, 並對模型參數作估計。

本研究對文獻的主要貢獻, 在於針對實證中常用的一類隨機邊界模型, 提出當解釋變數具有衡量誤差問題時的估計方法。此類隨機邊界模型的無效率項呈現截斷式常態分配 (truncated normal distribution; i.e., Stevenson 1980), 而這種模型也是被實證研究者廣泛使用者。而此處提出的估計方法, 是以模型的動差爲基礎而建構的 GMM 估計式。據我們所知, 這是相關文獻中唯一針對此類模型提出的修正變數衡量誤差的估計法。

此處提出的 GMM 估計式, 與 Chen and Wang (2004) 的 MM 估計式, 有重要的不同。Chen and Wang (2004) 考慮的是無效率項呈現半常態分配 (及指數分配; 下略) 的模型。我們則是考慮截斷式常態分配的模型。後者的機率密度函數, 比半常態分配的機率密度函數多了一個參數, 使得後者有更好的彈性 (flexibility) 去配適實證資料。此外, 半常態分配的衆數 (mode) 爲 0, 在估計無效率時, 其隱含的意義是樣本中多數廠商乃集中在最具效率的水準, 且發生無效率的機率, 會隨著無效率程度的增加而單調遞減。相反的, 截斷式常態分配的衆數不必然爲 0, 因此容許多數廠商具有顯著無效率的可能性的存在, 且發生無效率的機率, 不必然與無效率的程度呈單調變動關係。因爲上述兩項原因, 具截斷式常態分配的隨機邊界模型, 被廣泛的運用在相關的實證研究上, 也因此我們於此處提出的 GMM 估計式, 有較 Chen and Wang (2004) 重要的實證應用價值。除此之外, 此處提出的 GMM 估計式, 比 MM 估計式包含更多的動差方程式, 因此使得其估計值較 MM 的估計值, 有統計性質上更高的效率。

除了上述提到的貢獻之外, 本研究爲截斷式常態分配隨機邊界模型設計的 GMM 估計式, 雖然是考慮了變數具有衡量誤差的情況, 但以此模型架構爲基礎, 應可再將之改寫成適用於一般、不具變數衡量誤差情形的估計式。在隨機邊界文獻中, 曾提出以模型動差爲估計基礎的研究只有 Kopp and Mullahy (1990), 但他們考慮的對象是相對較簡單的半常態分配的模型。若能提出以動差爲基礎、針對截斷式常態分配隨機邊界模型設計的 GMM 估計式, 將是文獻首見; 此部分留待後續研究。

本文剩餘的內容安排如下。在第 2 節中, 我們定義一個具有變數衡量誤差的隨機邊界模型, 並利用該模型的高階動差, 導出能矯正衡量誤差的三種 GMM 估計式。第 3 節則以蒙地卡羅的模擬方式, 檢驗三種 GMM 估計式在不同的模型參數的組合下的表現。第 4 節爲結論。

## 2 模型設定及一般動差估計式

我們考慮下列具有變數衡量誤差的隨機邊界模型:

$$y_i = \beta_0 + \tilde{\boldsymbol{x}}_i \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \gamma z_i^* + v_i - u_i, \tag{1}$$

$$z_i = z_i^* + e_i, \tag{2}$$

其中 $y_i$, $i = 1, 2, ..., n$ 是已知應變數; $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$ 是 $1 \times (k-1)$ 的向量, 代表沒有衡量誤差的變數;

$z_i^*$ 是無法被計量學家觀察到的眞實自變數, $z_i$ 則是對應於 $z_i^*$ 、可被觀察到的變數; $e_i$ 爲衡量誤差, 而 $v_i - u_i$ 是模型的合併誤差 (composed error)。式中的 $e_i$、$v_i$、及 $u_i(\geq 0)$ 皆假設爲隨機變數, 其中 $v_i$ 爲對稱性分配, 且

$$\mathrm{E}(v_i) = 0; \qquad \mathrm{E}(v_i^2) = \sigma^2. \tag{3}$$

$u_i$ 的分配, 依循隨機邊界模型文獻中常用的假設而設定如下:

$$u_i \sim N^+(\mu, \sigma_u^2). \tag{4}$$

其中 (4) 式的 + 符號表示該分配爲從 0 截斷、保有非負值的截斷式常態分配。

對於上述模型, 若具衡量誤差的 $z_i$ 取代了 (1) 式中無法觀察到的 $z_i^*$, 則將對模型參數的估計造成偏誤。在此研究中, 我們針對上述的模型, 提出一組 GMM 估計式, 以求得該模型參數的不偏估計值。在導出 GMM 估計式之前, 我們先對上述模型做兩項假設: (1) 以 $z_i^*$ 對 $\boldsymbol{x}_i$ 做迴歸得到的殘差, 其二到四階的動差存在且非 0; (2) $v_i$ 、$u_i$ 、及 $e_i$ 等隨機變數的分配皆爲 iid, 且亦與 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$ 及 $z_i^*$ 相獨立。上述第 (2) 項假設隱含衡量誤差項與無法觀察到的眞實解釋變數無關, 而這也是古典變數衡量誤差 (classical errors-in-variable) 模型的假設。除期望値爲零外, 模型中不對衡量誤差項的分配做特定假設。以下說明 GMM 估計式的推導。[1]

首先, 我們將 $u_i$ 的平均數 $(\bar{u})$ 從 (1) 式中扣除, 使調整後的合併誤差項的平均數爲 0:

$$\begin{aligned} y_i &= (\beta_0 - \bar{u}) + \tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \gamma z_i^* + [v_i - (u_i - \bar{u})] && (5) \\ &= \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + \gamma z_i^* + (v_i - \tilde{u}_i), && (6) \end{aligned}$$

[1]雖然在直觀上, 上述模型應可以用最大概似法估計, 但實際上此方法在此例中的應用難度極高。以最大概似法估計時, 必須額外假設 $e_i$、$v_i$、及 $z_i^*$ 等變數的機率分配函數 (GMM 估計法則不需要這些假設), 而給定這些函數之後, 此模型的概似函數的一般型態可表示爲 (e.x., Carroll et al. 1995, Ch.7):

$$\begin{aligned} f(y, x, z) &= \int_{z^*} g(y, x, z, z^*) dz^* \\ &= \int_{z^*} h(y|x, z^*) p(z|z^*) q(z^*|x) dz^* \end{aligned}$$

其中 $h(y|x, z^*)$ 是 $v_i - u_i$ 的 pdf, 也就是我們一般所估計、不具變數衡量誤差情況下的隨機邊界模型的概似函數, $p(z|z^*)$ 是 $e_i$ 的 pdf, $q(z^*|x)$ 則是 $z^*$ 的 pdf; 對於後者,Carroll et al. (1995, p.148) 的建議是採用 generalized linear models 或是 mixture of normals。在上述設定下, 此概似函數很難具有封閉解, 無法用古典最大概似法估計; 其它的估計方法也將不單純。Carroll et al. (1995) 將不需要假設 $z_i^*$ 分配的估計方式, 稱爲 functional modeling, 其中以動差爲主的估計式即是方式之一; 而他們將需要假設 $z_i^*$ 分配的估計方式, 稱爲 structural modeling, 而 MLE 即屬於此類。

其中 $\boldsymbol{x}_i = (1, \tilde{\boldsymbol{x}}_i)$ 是 $1 \times k$ 的向量, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0 - \bar{u}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}')'$ , 而 $\tilde{u}_i = u_i - \bar{u}$ 。另外, $\bar{u} = \mathrm{E}(u) = \sigma_u(b + \lambda(b))$ , 而

$$b = \frac{\mu}{\sigma_u}, \tag{7}$$

$$\lambda(b) = \frac{\phi(b)}{\Phi(b)}, \tag{8}$$

$\phi(\cdot)$ 和 $\Phi(\cdot)$ 分別爲標準常態分配的機率分配和累積分配函數。

接下來的推導過程分爲兩個主要步驟, 第一是從模型 (6) 及 (2) 中先排除掉無衡量誤差的解釋變數的效果, 並據以建立動差方程式, 然後以這些動差方程式爲基礎, 對模型參數 $\gamma$ 、以及 $v_i$ 與 $u_i$ 的機率分配中的參數求解。第二個步驟則是在給定上述參數的估計值之後, 利用 (6) 式得到 $\boldsymbol{\beta}$ 的估計值。

在將無衡量誤差變數 $(\boldsymbol{x}_i)$ 的效果從 (6) 式左右兩邊扣除掉之後, 得到的結果以母體殘差表示爲

$$y_i - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y = \gamma(z_i^* - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z) + (v_i - \tilde{u}_i), \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_y = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i'y_i]$, $\boldsymbol{\mu}_z = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i'z_i]$。[2] (9) 式中等號的左邊, 即是 $y_i$ 對 $\boldsymbol{x}_i$ 迴歸的母體殘差, 而右邊則是 (6) 式右側對 $\boldsymbol{x}_i$ 迴歸的母體殘差。相同地, 將 $\boldsymbol{x}_i$ 的效果從 (2) 式左右兩邊扣除掉之後, 可得

$$(z_i - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z) = (z_i^* - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z) + e_i. \tag{10}$$

根據 (9) 及 (10) 兩條有關迴歸殘差的方程式, 結合它們各自及彼此的二階、三階、與四

[2]由於模型假設 $\mathrm{E}(e_i) = 0$ 且 $e_i$ 與 $\boldsymbol{x}_i$ 相互獨立, 因此 $\boldsymbol{\mu}_{z^*} = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i'z_i^*] = \boldsymbol{\mu}_z$.

階動差, 即可建構一組動差方程式, 而這組動差方程式爲 $\gamma$、$\mu$、$\sigma_u^2$、$\sigma^2$ 等待估參數的函數:

$$\mathrm{E}[(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)^2] = \gamma^2\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2]+\sigma^2+\mu_2, \tag{11a}$$

$$\mathrm{E}[(z_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)] = \gamma\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2], \tag{11b}$$

$$\mathrm{E}[(z_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2] = \mathrm{E}[(z^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2]+\mathrm{E}(e_i^2), \tag{11c}$$

$$\mathrm{E}[(z_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)^2] = \gamma^2\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^3], \tag{11d}$$

$$\mathrm{E}[(z_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)] = \gamma\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^3], \tag{11e}$$

$$\mathrm{E}[(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)^3] = \gamma^3\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^3]-\mu_3, \tag{11f}$$

$$\mathrm{E}[(z_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^3(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)] = \gamma\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^4]+3\gamma\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2]\mathrm{E}(e_i^2), \tag{11g}$$

$$\mathrm{E}[(z_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)^3] = \gamma^3\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^4]+3\gamma\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2](\sigma^2+\mu_2), \tag{11h}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)^4] = {}&\gamma^4\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^4]+6\gamma^2\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2](\sigma^2+\mu_2)\\ &+3\sigma^4+6\sigma^2\mu_2+\mu_4,\end{aligned} \tag{11i}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(z_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2(y_i-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_y)^2] = {}&\gamma^2\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^4]+\gamma^2\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2]\mathrm{E}[e_i^2]\\ &+\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2](\sigma^2+\mu_2)+\mathrm{E}[e_i^2](\sigma^2+\mu_2),\end{aligned} \tag{11j}$$

其中 $\mu_2$ 、$\mu_3$ 、及 $\mu_4$ 分別爲 $u_i$ 的二階、三階、及四階中央動差:

$$\mu_2 = \mathrm{E}(u-\mathrm{E}(u))^2 = \sigma_u^2(-\lambda(b)^2-b\lambda(b)+1), \tag{12}$$

$$\mu_3 = \mathrm{E}(u-\mathrm{E}(u))^3 = \sigma_u^3\lambda(b)(2\lambda(b)^2+3b\lambda(b)+b^2-1), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 = \mathrm{E}(u-\mathrm{E}(u))^4 = {}&-\sigma_u^4\big(3\lambda(b)^4+6b\lambda(b)^3+4b^2\lambda(b)^2+b^3\lambda(b)\\ &+3b\lambda(b)+2\lambda(b)^2-3\big).\end{aligned} \tag{14}$$

對於上列 (11a) 到 (11j) 這組十條動差方程式的等號左側各項, 我們以樣本殘差取代母體殘差, 其中

$$(\hat{\boldsymbol{\mu}}_y,\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_z) \equiv \left(\sum_{i=1}^N \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^N \boldsymbol{x}_i'(y_i,\ z_i), \tag{15}$$

並以樣本平均數取代母體期望值[3], 此時上列動差方程式中尙有等號右側的八個未知參數: $\gamma$ ,

[3]在以下採用的 GMM 估計式中, 其共變異矩陣已經過調整, 以反應此處以樣本殘差取代母體殘差造成的誤差 (Erickson and Whited; 2000, 2002)。

$\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2]$, $\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^3]$, $\mathrm{E}(e_i^2)$, $\sigma_u^2$, $\sigma^2(\equiv \mathrm{E}(v_i^2))$, $\mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^4]$, 與 $b(=\frac{\mu}{\sigma_u})$。這些參數中, 除了 $\gamma$、$\mu$、$\sigma_u^2$、$\sigma^2$ 等爲我們有興趣的參數之外, 其它屬於 nuisance parameters, 但是爲了模型的聯立求解, 仍須一併估計。

欲估計八個未知參數, 除了 (11a) 到 (11f) 等前六條動差方程式之外, 還需從其餘四條動差方程式中選出至少兩條, 才能對參數求解。在本研究中, 我們採用下列不同的動差方程式的組合, 形成三種不同的估計式:(1) GMM1, 採用 (11a) 到 (11h);(2) GMM2, 採用 (11a) 到 (11i); 以及 (3) GMM3, 採用 (11a) 到 (11j)。值得注意的是, (11i) 和 (11j) 本身並沒有新的參數, 所以 GMM1 是恰可認定的估計模型, 而 GMM2 和 GMM3 都是過度認定 (overidentified) 的估計模型。儘管如此, 三者的估計方法, 在原則上並無不同。

將選用的動差方程式用矩陣表示, 可寫成

$$\mathrm{E}[m_i(\hat{\mu})] - c(\delta) = 0, \tag{16}$$

其中 $\hat{\mu}' = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_y,\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_z)$, $\delta = (\gamma, \mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2], \mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^3], \mathrm{E}(e_i^2), \sigma_u^2, \sigma^2(\equiv \mathrm{E}(v_i^2)), \mathrm{E}[(z_i^*-\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^4], b)'$, 而 $m_i(\cdot)$ 是選用的動差方程式等號左邊組合成的向量。接著我們透過對以下的目標函數求解, 得到 GMM 的一般化動差估計值 $(\hat{\delta})$:

$$\min_{\delta}[\bar{m}(\hat{\mu}) - c(\delta)]'\hat{W}[\bar{m}(\hat{\mu}) - c(\delta)]. \tag{17}$$

上式中, $\bar{m}(\cdot) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} m_i(\cdot)$ 爲 $\mathrm{E}[m_i(\cdot)]$ 的實證對應值, $\hat{W}$ 爲一正定矩陣。Erickson and Whited (2000, 2002) 的研究顯示, 在此模型的假設下, 最適的 $\hat{W}$ 爲 $\hat{W} = \hat{\Omega}^{-1}$, 而此時 $\hat{\delta}$ 的漸近變異-共變異矩陣需經調整, 以反應出我們在估計時, 以樣本殘差平均數取代 (11a) 至 (11j) 式左側母體殘差期望值的步驟。根據 Erickson and Whited (2000, 2002), 調整後的漸近變異-共變異矩陣爲

$$avar(\hat{\delta}) = [C'\hat{\Omega}^{-1}C]^{-1}. \tag{18}$$

相關的符號定義如下:

$$
\begin{aligned}
C =& \frac{\partial c(\delta)}{\partial \delta'}\bigg|_{\hat{\delta}}, && (19)\\
\hat{\Omega} =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(m_i(\hat{\mu}) - \bar{m}(\hat{\mu}) + \bar{G}(\hat{\mu})\hat{\psi}_{\mu i})(m_i(\hat{\mu}) - \bar{m}(\hat{\mu}) + \bar{G}(\hat{\mu})\hat{\psi}_{\mu i})', && (20)\\
\bar{m}(\hat{\mu}) =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i(\hat{\mu}), && (21)\\
\bar{G}(\hat{\mu}) =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial m_i(\mu)}{\partial \mu'}\bigg|_{\hat{\mu}}, && (22)\\
\hat{\psi}_{\mu i} =& (I_{k+1} \otimes \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)^{-1} \times \mathrm{vec}(\boldsymbol{x}_i'(y_i - \boldsymbol{x}_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_y), \boldsymbol{x}_i'(z_i - \boldsymbol{x}_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_z)). && (23)
\end{aligned}
$$

根據上述估計模型求得八個模型參數之後, 我們可再經由下列運算, 求得 $\boldsymbol{\beta}$ 的估計值。

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\mu}_y = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i' y_i] = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i'(\gamma z_i^* + \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + (v_i - \tilde{u}_i))]\\
& \quad\;\; = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i' z_i\gamma + \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}],\\
\Rightarrow \quad & \boldsymbol{\mu}_y = \boldsymbol{\mu}_z\gamma + \boldsymbol{\beta}, && (24)\\
\text{因此}, \quad & \hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_y - \hat{\boldsymbol{\mu}}_z\hat{\gamma}. && (25)
\end{aligned}
$$

需注意的是, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 中的第一個元素, $\hat{\boldsymbol{\beta}}[1]$, 是 $\beta_0 - \bar{u}$ 的估計值(見 (5))。所以, 模型的截距項 $\beta_0$ 應當估計如下

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\boldsymbol{\beta}}[1] + \hat{u}, \tag{26}$$

其中 $\hat{u} = \hat{\sigma}_u(\hat{b} + \lambda(\hat{b}))$。

至於 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (包括截距項) 的變異數,Erickson and Whited (2000, 2002) 建議採用 delta method 得到其估計值; 估計方法如下。令 $\tilde{R} = \boldsymbol{\mu}_y - \boldsymbol{\mu}_z\gamma - \beta$, 此爲一 $(k \times 1)$ 的向量, $R = \tilde{R} + (\bar{u}, 0, \ldots, 0)'$ 以及 $\check{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\bar{u}, 0, \ldots, 0)'$, 其中等式右邊的第二項也爲 $(k \times 1)$ 的向量。加上此向量的主要目的是用來調整截距項 (見 (26))。另外, 再定義 $\boldsymbol{\theta} = (\gamma, \lambda)'$和 $T = (\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\theta}')'$ 。根據以上定義的符號, $\check{\boldsymbol{\beta}}$ 的估計變異數-共變異矩陣爲

$$\mathrm{avar}(\hat{\check{\boldsymbol{\beta}}}) = \frac{1}{n}\left[\hat{C}_0'\hat{\Omega}_0^{-1}\hat{C}_0\right]^{-1}, \tag{27}$$

其中

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \check{\boldsymbol{\beta}}'}\bigg|_{\hat{\check{\boldsymbol{\beta}}}} = -1, \tag{28}$$

$$\hat{\Omega}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \big(\bar{G}_0\hat{\Psi}_{Ti}\big)\big(\bar{G}_0\hat{\Psi}_{Ti}\big)', \tag{29}$$

$$\bar{G}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial T'}\bigg|_{\hat{T}}, \tag{30}$$

$$\hat{\Psi}_{Ti} = \big(\hat{\Psi}'_{\boldsymbol{\mu}i}, \hat{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}i}[1], \hat{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}i}[2]\big)', \tag{31}$$

$$\hat{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}i} = -n \cdot \operatorname{avar}(\hat{\boldsymbol{\delta}})^{-1} \cdot \hat{C} \cdot \big(m_i(\hat{\boldsymbol{\mu}}) - \bar{m}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) + \bar{G}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\hat{\Psi}_{\boldsymbol{\mu}i}\big). \tag{32}$$

上述的估計方式, 在理論上已可運作, 但若考慮到估計時的數值穩定性, 則仍存在可以進一步改善之處。此處主要的問題是, 在待估的八個參數中, 有五個 ($\sigma^2$, $\sigma_u^2$, $\mathrm{E}[(z_i^* - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^2]$, $\mathrm{E}[(z_i^* - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\mu}_z)^4]$, 及 $\mathrm{E}(e_i^2)$) 其值必須爲非負, 然而在將目標函數 (17) 極小化以求參數解的過程中, 這些限制條件沒有被使用, 因此參數爲非負的條件, 在估計結果中不一定會被滿足。[4] 我們在此提出一個簡單的改良方式, 以解決這個問題。

此改良方法, 即是以指數函數改寫這五個待估參數, 待估計完畢之後, 再還原成原參數的估計值。例如, 以 $\sigma_u^2$ 爲例, 我們令 $\sigma_u^2 = \exp(c_u)$, 而將模型中所有出現 $\sigma_u^2$ 之處, 皆以 $\exp(c_u)$ 取代。在極小化目標函數 (17) 時, 其操作對象也從 $\sigma_u^2$ 改變爲 $c_u$。得到 $c_u$ 的估計值 ($\hat{c}_u$) 及其標準誤之後, 我們可再以 $\hat{\sigma}_u^2 = \exp(\hat{c}_u)$ 還原參數值, 而以 delta method 得到 $\hat{\sigma}_u^2$ 的標準誤。這種作法的好處, 在於我們可在所有的實數中尋求 $c_u$ 的最適值, 不必加上限制, 而其結果則可保證 $\hat{\sigma}_u^2$ 爲非負。

此處提出的 GMM 估計式, 與 Chen and Wang (2004) 提出的 MM 估計式相比, 在估計上要複雜許多。Chen and Wang 爲半常態分配隨機邊界模型設計的 MM 估計式, 是一個恰可認定的估計模型, 而且每個參數都有公式解 (closed form solution), 因此不需要以數值方法求解。此處提出的爲截斷式常態分配隨機邊界變數設計的 GMM 估計式, 雖然只多了一個待估參數, 但模型因此變得相當複雜; 即使是恰可認定的 GMM1, 也必須以數值方法將 (17) 極小化, 以求解模型參數。

對於 GMM2 及 GMM3 兩個過度認定的估計模型, 我們必須對其做過度認定的檢驗, 以

[4]在隨機邊界的文獻中, $\sigma_u^2$ 的估計值爲負, 被稱爲 Type I failure; 若 $\sigma^2$ 的估計值爲負, 則被稱爲 Type II failure (Olson et al. 1980)。

確保額外增加的動差條件是有意義的 (valid); 我們以 Hansen (1982) 的 J-test 對模型做檢定。此處的 J-test 的統計量, 即是 (17) 式中的目標函數以 GMM 估計值衡量的數值, 它的分配爲 $\chi^2_{r-s}$ , 其中 $r$ 是納入模型中的動差方程式的數目, 而 $s$ 是待估參數的個數。此檢定的虛無假設是該統計量不異於0; 若檢定結果拒絕虛無假設, 表示納入模型中的動差條件不符合理論的要求。

## 3 蒙地卡羅模擬

在這小節中, 我們針對前面提出的 GMM 估計式, 提供蒙地卡羅模擬結果, 用以檢驗此估計式在有限樣本中的表現。此外, 爲了探討忽略衡量誤差的後果, 我們也模擬了以最大概似法估計未經調整衡量誤差之模型的結果, 亦即在估計時逕以 $z_i$ 取代 (1) 中的 $z_i^*$ , 然後以最大概似法估計該模型所得到的結果。在此設定下, 由於 $e_i$ 進入了模型的誤差項, 造成模型誤差項與解釋變數 $(z_i)$ 間產生相關, 而使得最大概似估計式不再具有不偏誤的性質。

在此模擬中, 我們令模型有一個具衡量誤差的解釋變數, $z_i^*$, 其可被觀察到的值是 $z_i$, 以及一個無衡量誤差的解釋變數 $(x_i)$。針對 (1) 到 (4) 所示的模型, 我們首先考慮下列的參數設定, 並爲了便於討論, 令此參數組合爲 Case 1: $\{\beta_0 = 0.5, \beta_1 = 0.5, \gamma = 0.5, \sigma^2 = 1, \mu = 1, \sigma_u^2 = 3, n = 500, R = 1,000\}$, 其中 $n$ 是樣本數, 而 $R$ 是模擬中重複的次數。此參數的組合, 隱含模型的總變異 (即 $v$ 的變異加上 $u$ 的變異; 後者並不等於 $\sigma_u^2$; 計算公式可參考 Wang 2002) 中, 約有 60% 來自於無效率的變異。對於 $\{x_i, z_i^*, e_i\}$ 三個變數的產生, 我們先從三個期望值爲0的常態分配中產生數據, 而它們各自的變異數分別爲 $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_z^2 = 1$ , 以及 $\sigma_e^2 = 2$ 。我們將這三列數據各自取指數 (exponentiate) 之後再除以其標準差, 最終使得這三個變數的標準差等於1。值得注意的是, 我們特別選擇一個不大的樣本數 $(n = 500)$ 作爲模擬的基礎 (benchmark)。許多研究 (例如, Hayashi 2000, p.215) 指出,GMM 的估計的常有賴於大樣本, 而在小樣本中的表現並不一定理想。我們在此選擇不大的樣本數, 旨在於探討其在有限樣本中的表現, 並藉此瞭解其實證應用價值。

對每一個模擬樣本, 我們比較四種不同估計式得到的模型參數估計值:MLE、GMM1、GMM2、及 GMM3。其中 MLE 是不對衡量誤差做修正、逕以最大概似估計法估計的結果。除了參數估計值之外, 我們亦以 Jondrow et al. (1982) 提出的條件平均值 $(\mathrm{E}(u_i|\hat{v}_i - \hat{u}_i))$ 的方法, 比較樣本個體獨特 (individual specific) 的無效率值的估計。對於 GMM2 及 GMM3, 我

們也檢視過度認定檢測統計量的 $p$ 值。

除了上述 Case 1 之外, 我們還考慮了其它四種不同的參數組合。這四種 (Case 2 到 Case 5) 不同組合與 Case 1 的相異之處如下。Case 2: $\{\sigma_e^2 = 1\}$, 即令衡量誤差具有較小的變異。若調整衡量誤差的方法, 要求很嚴格的衡量誤差的分配特性, 則當衡量誤差的變異較小、較不易被認定出來時, 反而有可能使估計結果較爲不利。Case 3: $\{\sigma_u^2 = 2\}$ , 即令技術無效率的變異較小。隨機邊界模型的估計, 相當依賴於對隨機變數分配的認定; 在 $\sigma^2$ 及 $\mu$ 固定之下, $\sigma_u^2$ 如果太小, 無效率的效果可能愈難被認定, 而此將影響模型的估計結果。Case 4: $\{n = 200\}$ , 即考慮估計式在小樣本中的表現。Case 5: $\{n = 1,000\}$, 即考慮估計式在較大樣本中的表現。估計的結果列於表一至表五。

Case 1 (表一) 顯示, 當 $z_i$ 具衡量誤差時, 若模型未經矯正, 則其係數的 MLE 估計值 $\hat{\gamma}$ 會往 0 偏誤 (biased toward 0; 0.293), 且有較大的 MSE。另一方面, 本文提出的 GMM 系列估計式, 其 $\hat{\gamma}$ 的估計結果則較接近於眞實值。此外, 截斷式常態分配的參數 $\mu$ 及 $\sigma_u^2$ 的 MLE 估計值, 亦具明顯而嚴重的偏誤; 此兩者的 MSE 非常的大, 顯示解釋變數的衡量誤差, 亦會嚴重影響模型無效率項的參數估計。[5] 模型中的 $\sigma^2$ 參數, MLE 的估計值, 則與眞實值差異不大, 唯其 MSE 仍是比 GMM 的估計值要高。有趣的是, 模型中不具衡量誤差的解釋變數, 其係數的估計值 ($\beta_1$) 不會因估計方法的不同而有明顯差異。對於樣本中的個體獨特無效率估計值 ($\mathrm{E}(u|v-u)$), MLE 的估計結果亦有明顯較大的標準誤及 MSE。

就 GMM1、GMM2、及 GMM3 的估計結果來看, 它們的估計值皆較 MLE 估計值更爲準確及有效率;[6] 並且, 一般而言, 使用較多的動差方程式, 有助於改善估計結果。對於後項觀察, 唯一的例外是 $\gamma$ 估計值; 結果顯示, GMM3 估計值的 MSE, 比 GMM2 估計值的 MSE

[5]這裡顯示的嚴重偏誤, 雖然部分原因是少數估計結果具有極端值, 但即使將少數極端值排除, 其餘樣本仍出現明顯偏誤的情形。我們將 $\hat{\mu}_{MLE}$ 依大小排列後, 去除前 10 個及後 10 個觀察值, 則 $\hat{\mu}_{MLE}$ 在剩餘樣本的係數平均值、標準誤、及 MSE 分別爲 $\{-0.055, 3.657, 14.474\}$。若是將樣本依 $\hat{\sigma}_u^2$ 大小做排序, 同樣去除前 10 個及後 10 個觀察值, 則 $\hat{\sigma}_u^2$ 在剩餘樣本的平均值、標準誤、及 MSE 分別爲 $\{4.422, 3.418, 13.693\}$。因此, 即使剔除少數極端值, $\hat{\mu}$ 及 $\hat{\sigma}_u^2$ 的模擬結果亦顯出相當嚴重的估計誤差。這表示若解釋變數具有衡量誤差, 將造成模型認定的困難, 增加參數估計值的標準誤, 並可能出現極端值。

[6]關於模型截距項 $\beta_0$ 的估計, 雖然 GMM 的估計值要比 MLE 的估計值要理想許多, 但與其它參數的 GMM 估計值相比, 在精準度上仍有所失。我們發現, 這個結果是因爲如 (26) 式所示, $\hat{\beta}_0$ 是 $\hat{\mu}$ 及 $\hat{\sigma}_u$ 的函數, 而雖然後兩者的估計誤差分別來看並不顯著, 但透過 (26) 式中的 $\hat{u}$, 些微的估計誤差對 $\hat{\beta}_0$ 的估計值影響甚巨。此估計誤差, 會隨著樣本數的增加而逐漸減小 (見表五), 因此是屬於有限樣本造成的誤差。在大多數的實證研究中, 模型的截距項都不是主要關心的參數。

爲高, 雖然兩者的差距並不大。從後續的表四及表五的結果來看, 我們認爲這個結果可能與樣本的大小有關; 在小樣本中 (表四), 上述的情況更爲明顯, 而在大樣本中 (表五), 則情況有明顯的改善。表一的最後一列, 列出 GMM2 及 GMM3 的過度認定統計量的 $p$ 值。結果顯示, 動差方程式爲合理 (valid) 的虛無假設無法被棄卻。

表二列出 Case 2 的估計結果; 此例中, 我們令 $\{\sigma_e^2 = 1\}$, 即讓衡量誤差的變異較小。結果顯示, GMM 的估計結果普遍較 Case 1 的情形爲好, 唯 GMM2 和 GMM3 對 $\gamma$ 的估計, 並沒有因衡量誤差變異的減小而特別有利。此結果表示, 爲變數衡量誤差而設計的估計式, 在衡量誤差相對較大的時候 (即 Case 1 之例), 能較好的發揮其預定功能。但無論是 Case 1 或 Case 2, GMM 系列估計式的估計結果, 皆明顯較 MLE 的估計結果爲佳。

表三爲 Case 3 的模擬結果, 探討的是 $\sigma_u^2$ 較小的情形。與 Case 1 相比, 此例中 $\beta_0$ 、$\mu$ 、$\sigma^2$ 、乃至 $\mathrm{E}(u|v-u)$ 的 MLE 估計值, 有惡化的情形, 原因應是如前面所提到, 若無效率的變異相對較小, 則以模型分配特性爲認定方法的 MLE 估計結果, 會有較差的表現。GMM 的估計結果, 雖然也有部分參數的估計得稍差 (例如 $\mu$), 但整體而言, 差異不大, 估計結果仍有相當的水準。這顯示採用高階動差的 GMM 估計式, 在無效率的變異較小時, 其估計結果仍不致受到太大的影響。

表四及表五分別爲小樣本及大樣本的模擬結果。結果顯示, GMM 估計式的表現, 與樣本大小有關。在小樣本中 (表四), GMM 估計式的估計結果難稱理想, 特別是對 $\gamma$ 的估計更是如此。並且, 採用的動差方程式愈多 (i.e., GMM3), 估計結果愈不理想。相反的, 在大樣本中 (表五), 較多的動差方程式明顯有助於參數估計的準確度。這個結果並不令人意外; 在相關的研究中, Hayashi (2000, p.215) 指出 GMM 估計式需要的高階動差, 通常要在大樣本中才能被準確估計。儘管如此, 前述表一的結果顯示, 此文提出的估計式, 在樣本數爲 500 的情形下, 即可有不錯的表現。

# 4 結論

在此文中, 我們探討當隨機邊界模型存在變數衡量誤差問題時的估計方法。我們特別針對具有截斷式常態分配的隨機邊界模型, 設計了以模型的高階動差爲基礎的 GMM 估計式。與 Chen and Wang (2004) 相較, 此處針對的具有截斷式常態分配的隨機邊界模型, 在實證上有較高的應用價值, 而且此處提出的 GMM 估計式, 因爲包含了較多的動差條件, 所以估計

值的效率也較高。

模擬分析顯示, 與未經矯正的 MLE 估計結果相比, 此文提出的 GMM 估計式, 能在變數具衡量誤差時, 較正確的估計模型參數。雖然在樣本數較小的情況下 (例如, 200), 此估計式的表現並不理想, 但在稍大的樣本中 (例如, 500), 使用 GMM 估計式, 即可以使估計結果有顯著改善; 對於多數的實證應用而言, 此樣本數的要求應不至形成嚴重限制。

## 參考文獻


[1] Aigner, D., Lovell, C.A.K., and Schmidt, P. (1977). "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models," *Journal of Econometrics* **6**, pp. 21-37.

[2] Carroll, R.J., Ruppert, D., and Stefanski, L.A. (1995). Measurement error in nonlinear models. London ; New York: Chapman & Hall.

[3] Chen, Y.-Y., and Wang, H.-J. (2004). "A Method of Moments Estimator for a Stochastic Frontier Model with Errors in Variables," *Economics Letters* **85**, pp. 221-28.

[4] Deistler, M., and Seifert, H.G. (1978). "Identifiability and Consistent Estimability in Econometric Models," *Econometrica* **46**, pp. 969-80.

[5] Erickson, T., and Whited, T.M. (2000). "Measurement Error and the Relationship between Investment and q," *Journal of Political Economy* **108**, pp. 1027-1057.

[6] Erickson, T., and Whited, T.M. (2002). "Two-Step GMM Estimation of the Errors-In-Variables Model using High-Order Moments," *Econometric Theory* **18**, pp. 776-799.

[7] Habib, M., and Ljungqvist, A. (2003). "Firm Value and Managerial Incentives: A Stochastic Frontier Approach," Working Paper, New York University.

[8] Hansen, L.P. (1982). "Large Sample Properties of Generalized Method Moments Estimators," *Econometrica* **50**, pp. 1029-1054.

[9] Hayashi, F. (2000). Econometrics: Princeton University Press.

[10] Hofler, R.A., and Murphy, K.J. (1992). "Underpaid and Overworked: Measuring the Effect of Imperfect Information on Wages," *Economic Inquiry* **30**, pp. 511-29.

[11] Hong, H., and Tamer, E. (2003). "A Simple Estimator for Nonlinear Error in Variable Models," *Journal of Econometrics* **117**, pp. 1-19.

[12] Hsiao, C. (1989). "Consistent Estimation for Some Nonlinear Errors-in-Variables Models," *Journal of Econometrics* **41**, pp. 159-85.

[13] Hunt-McCool, J., Koh, S.C., and Francis, B.B. (1996). "Testing for Deliberate Underpricing in the IPO Premarket: A Stochastic Frontier Approach," *Review of Financial Studies* **9**, pp. 1251-69.

[14] Jondrow, J., Lovell, C.A.K., Materov, I.S., and Schmidt, P. (1982). "On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model," *Journal of Econometrics* **19**, pp. 233-38.

[15] Kopp, R.J., and Mullahy, J. (1990). "Moment-Based Estimation and Testing of Stochastic Frontier Models," *Journal of Econometrics* **46**, pp. 165-83.

[16] Kumbhakar, S.C., and Wang, H.-J. (2005). "Estimation of Growth Convergence Using a Stochastic Production Frontier Approach," *Economics Letters* **88**, pp. 300-305.

[17] Li, T., and Hsiao, C. (2004). "Robust Estimation of Generalized Linear Models with Measurement Errors," *Journal of Econometrics* **118**, pp. 51-65.

[18] Meeusen, W., and van den Broeck, J. (1977). "Technical Efficiency and Dimension of the Firm: Some Results on the Use of Frontier Production Functions," *Empirical Economics* **2**, pp. 109-22.

[19] Olson, J.A., Schmidt, P., and Waldman, D.M. (1980). "A Monte Carlo Study of Estimators of Stochastic Frontier Production Functions," *Journal of Econometrics* **13**, pp. 67-82.

[20] Polachek, S.W., and Robst, J. (1998). "Employee Labor Market Information: Comparing Direct World of Work Measures of Workers' Knowledge to Stochastic Frontier Estimates," *Labour Economics* **5**, pp. 231-42.

[21] Stevenson, R.E. (1980). "Likelihood Functions for Generalized Stochastic Frontier Estimation," *Journal of Econometrics* **13**, pp. 57-66.

[22] Wang, H.-J. (2002). "Heteroscedasticity and Non-monotonic Efficiency Effects of a Stochastic Frontier Model," *Journal of Productivity Analysis* **18**, pp. 241-253.

[23] Wang, H.-J. (2003). "A Stochastic Frontier Analysis of Financing Constraints on Investment: The Case of Financial Liberalization in Taiwan," *Journal of Business and Economic Statistics* **21**, pp. 406-19.

表一：蒙地卡羅模擬結果（Case 1）

$\beta_0$=0.5, $\beta_1$=0.5, $\gamma$=0.5, $\mu$=1, $\sigma_u^2$=3, $\sigma^2$=1, $\sigma_e^2$=2, n=500

| | | MLE | GMM1 | GMM2 | GMM3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | Coef. | 0.607 | 0.484 | 0.459 | 0.468 |
| | Std. Err. | 0.567 | 0.239 | 0.231 | 0.214 |
| | MSE | 0.333 | 0.057 | 0.055 | 0.047 |
| $\beta_1$ | Coef. | 0.499 | 0.502 | 0.502 | 0.502 |
| | Std. Err. | 0.071 | 0.075 | 0.075 | 0.075 |
| | MSE | 0.005 | 0.006 | 0.006 | 0.006 |
| $\gamma$ | Coef. | 0.293 | 0.521 | 0.501 | 0.524 |
| | Std. Err. | 0.055 | 0.176 | 0.150 | 0.161 |
| | MSE | 0.046 | 0.031 | 0.022 | 0.027 |
| $\mu$ | Coef. | -1.674 | 0.993 | 0.993 | 1.002 |
| | Std. Err. | 23.396 | 0.124 | 0.124 | 0.110 |
| | MSE | 553.971 | 0.015 | 0.015 | 0.012 |
| $\sigma_u^2$ | Coef. | 5.973 | 2.991 | 2.874 | 2.889 |
| | Std. Err. | 22.351 | 0.735 | 0.723 | 0.699 |
| | MSE | 507.906 | 0.540 | 0.538 | 0.501 |
| $\sigma^2$ | Coef. | 1.004 | 1.022 | 1.036 | 1.012 |
| | Std. Err. | 0.410 | 0.360 | 0.332 | 0.306 |
| | MSE | 0.168 | 0.130 | 0.112 | 0.093 |
| E(u\|v-u) | Coef. | 1.921 | 1.738 | 1.712 | 1.721 |
| | Std. Err. | 0.571 | 0.230 | 0.220 | 0.206 |
| | MSE | 0.437 | 0.149 | 0.133 | 0.124 |
| *J*-test | p value | -- | -- | 0.195 | 0.202 |

表二：蒙地卡羅模擬結果（Case 2）

$\beta_0=0.5,\ \beta_1=0.5,\ \gamma=0.5,\ \mu=1,\ \sigma_u^2=3,\ \sigma^2=1,\ \sigma_e^2=1$, n=500

| | | MLE | GMM1 | GMM2 | GMM3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | Coef. | 0.595 | 0.498 | 0.472 | 0.467 |
| | Std. Err. | 0.571 | 0.235 | 0.220 | 0.216 |
| | MSE | 0.335 | 0.055 | 0.049 | 0.048 |
| $\beta_1$ | Coef. | 0.500 | 0.503 | 0.503 | 0.503 |
| | Std. Err. | 0.072 | 0.076 | 0.076 | 0.076 |
| | MSE | 0.005 | 0.006 | 0.006 | 0.006 |
| $\gamma$ | Coef. | 0.284 | 0.529 | 0.510 | 0.515 |
| | Std. Err. | 0.051 | 0.172 | 0.146 | 0.167 |
| | MSE | 0.049 | 0.030 | 0.022 | 0.028 |
| $\mu$ | Coef. | -2.454 | 1.001 | 1.003 | 1.003 |
| | Std. Err. | 24.100 | 0.121 | 0.121 | 0.117 |
| | MSE | 592.179 | 0.015 | 0.015 | 0.014 |
| $\sigma_u^2$ | Coef. | 6.373 | 3.024 | 2.894 | 2.872 |
| | Std. Err. | 19.953 | 0.733 | 0.713 | 0.698 |
| | MSE | 409.089 | 0.538 | 0.519 | 0.503 |
| $\sigma^2$ | Coef. | 1.022 | 0.999 | 1.017 | 1.017 |
| | Std. Err. | 0.415 | 0.348 | 0.309 | 0.299 |
| | MSE | 0.172 | 0.121 | 0.096 | 0.090 |
| E(u\|v-u) | Coef. | 1.906 | 1.753 | 1.724 | 1.720 |
| | Std. Err. | 0.573 | 0.226 | 0.212 | 0.206 |
| | MSE | 0.441 | 0.143 | 0.122 | 0.122 |
| *J*-test | p value | -- | -- | 0.208 | 0.225 |

表三：蒙地卡羅模擬結果（Case 3）

$\beta_0$=0.5, $\beta_1$=0.5, $\gamma$=0.5, $\mu$=1, $\sigma_u^2$=2, $\sigma^2$=1, $\sigma_e^2$=2, n=500

| | | MLE | GMM1 | GMM2 | GMM3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | Coef. | 0.608 | 0.496 | 0.479 | 0.503 |
| | Std. Err. | 0.632 | 0.265 | 0.239 | 0.218 |
| | MSE | 0.410 | 0.070 | 0.058 | 0.048 |
| $\beta_1$ | Coef. | 0.497 | 0.499 | 0.499 | 0.499 |
| | Std. Err. | 0.063 | 0.066 | 0.065 | 0.065 |
| | MSE | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.004 |
| $\gamma$ | Coef. | 0.286 | 0.506 | 0.487 | 0.511 |
| | Std. Err. | 0.049 | 0.160 | 0.142 | 0.144 |
| | MSE | 0.048 | 0.026 | 0.020 | 0.021 |
| $\mu$ | Coef. | -3.227 | 0.999 | 1.004 | 1.025 |
| | Std. Err. | 23.557 | 0.168 | 0.163 | 0.144 |
| | MSE | 572.259 | 0.028 | 0.026 | 0.021 |
| $\sigma_u^2$ | Coef. | 5.703 | 2.042 | 1.955 | 1.995 |
| | Std. Err. | 17.021 | 0.654 | 0.594 | 0.564 |
| | MSE | 303.136 | 0.429 | 0.355 | 0.318 |
| $\sigma^2$ | Coef. | 0.984 | 1.002 | 1.002 | 0.968 |
| | Std. Err. | 0.412 | 0.349 | 0.305 | 0.280 |
| | MSE | 0.170 | 0.122 | 0.093 | 0.080 |
| E(u\|v-u) | Coef. | 1.687 | 1.527 | 1.510 | 1.532 |
| | Std. Err. | 0.631 | 0.243 | 0.216 | 0.195 |
| | MSE | 0.518 | 0.145 | 0.118 | 0.098 |
| *J*-test | p value | -- | -- | 0.200 | 0.206 |

表四：蒙地卡羅模擬結果（Case 4）

$\beta_0=0.5,\ \beta_1=0.5,\ \gamma=0.5,\ \mu=1,\ \sigma_u^2=3,\ \sigma^2=1,\ \sigma_e^2=2,\ n=200$

| | | MLE | GMM1 | GMM2 | GMM3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | Coef. | 0.652 | 0.521 | 0.487 | 0.490 |
| | Std. Err. | 0.623 | 0.320 | 0.305 | 0.302 |
| | MSE | 0.411 | 0.103 | 0.093 | 0.091 |
| $\beta_1$ | Coef. | 0.498 | 0.507 | 0.507 | 0.507 |
| | Std. Err. | 0.113 | 0.120 | 0.119 | 0.122 |
| | MSE | 0.013 | 0.015 | 0.014 | 0.015 |
| $\gamma$ | Coef. | 0.299 | 0.577 | 0.560 | 0.603 |
| | Std. Err. | 0.082 | 0.229 | 0.216 | 0.303 |
| | MSE | 0.047 | 0.058 | 0.050 | 0.102 |
| $\mu$ | Coef. | -2.904 | 1.012 | 1.020 | 1.027 |
| | Std. Err. | 23.430 | 0.165 | 0.169 | 0.167 |
| | MSE | 563.655 | 0.027 | 0.029 | 0.029 |
| $\sigma_u^2$ | Coef. | 7.444 | 3.134 | 2.954 | 2.949 |
| | Std. Err. | 21.502 | 1.008 | 0.977 | 0.972 |
| | MSE | 481.625 | 1.033 | 0.955 | 0.947 |
| $\sigma^2$ | Coef. | 0.927 | 0.954 | 0.963 | 0.937 |
| | Std. Err. | 0.483 | 0.438 | 0.428 | 0.438 |
| | MSE | 0.238 | 0.194 | 0.184 | 0.195 |
| E(u\|v-u) | Coef. | 1.962 | 1.783 | 1.750 | 1.758 |
| | Std. Err. | 0.622 | 0.306 | 0.289 | 0.287 |
| | MSE | 0.539 | 0.246 | 0.231 | 0.276 |
| *J*-test | p value | -- | -- | 0.178 | 0.197 |

表五：蒙地卡羅模擬結果（Case 5）

$\beta_0=0.5,\ \beta_1=0.5,\ \gamma=0.5,\ \mu=1,\ \sigma_u^2=3,\ \sigma^2=1,\ \sigma_e^2=2$, n=1,000

| | | MLE | GMM1 | GMM2 | GMM3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | Coef. | 0.465 | 0.487 | 0.477 | 0.484 |
| | Std. Err. | 0.441 | 0.179 | 0.162 | 0.150 |
| | MSE | 0.196 | 0.032 | 0.027 | 0.023 |
| $\beta_1$ | Coef. | 0.497 | 0.499 | 0.499 | 0.499 |
| | Std. Err. | 0.052 | 0.055 | 0.054 | 0.055 |
| | MSE | 0.003 | 0.003 | 0.003 | 0.003 |
| $\gamma$ | Coef. | 0.293 | 0.507 | 0.491 | 0.510 |
| | Std. Err. | 0.039 | 0.155 | 0.139 | 0.120 |
| | MSE | 0.045 | 0.024 | 0.019 | 0.015 |
| $\mu$ | Coef. | -3.111 | 0.993 | 0.994 | 1.002 |
| | Std. Err. | 29.791 | 0.100 | 0.090 | 0.080 |
| | MSE | 903.525 | 0.010 | 0.008 | 0.006 |
| $\sigma_u^2$ | Coef. | 7.127 | 2.993 | 2.939 | 2.949 |
| | Std. Err. | 28.871 | 0.566 | 0.521 | 0.491 |
| | MSE | 849.733 | 0.321 | 0.274 | 0.244 |
| $\sigma^2$ | Coef. | 1.113 | 1.028 | 1.028 | 1.015 |
| | Std. Err. | 0.323 | 0.289 | 0.250 | 0.222 |
| | MSE | 0.117 | 0.084 | 0.063 | 0.050 |
| E(u\|v-u) | Coef. | 1.781 | 1.739 | 1.727 | 1.733 |
| | Std. Err. | 0.443 | 0.181 | 0.160 | 0.145 |
| | MSE | 0.276 | 0.104 | 0.086 | 0.067 |
| *J*-test | p value | -- | -- | 0.212 | 0.203 |