第 9 章: 世代家庭的消費與儲蓄

2a 三期的終身預算限制式爲 (推導過程略)

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r_1} + \frac{c_3}{(1+r_1)(1+r_2)} = a_1 + \frac{a_2}{1+r_1} + \frac{a_3}{(1+r_1)(1+r_2)} = x。$$

2b 一階條件爲

$$u'(c_1) = \beta u'(c_2)(1+r_1), \quad u'(c_2) = \beta u'(c_3)(1+r_2)。$$

兩式合併亦可寫爲 $u'(c_1) = \beta^2 u'(c_3)(1+r_1)(1+r_2)$。

2c 所得暫時下降使各期消費皆下降, 這是財富效果。根據定義, 第一期儲蓄的變動量是 $\Delta s_1 = \Delta b_1 = \Delta a_1 - \Delta c_1$。因爲 c_1 的減量小於 a_1 的減量, $\Delta s_1 < 0$, 亦即消費者減少第一期的儲蓄以平滑各期消費。第二期儲蓄的變動量是 $\Delta s_2 = \Delta b_2 - \Delta b_1$。因爲 $\Delta b_1 < 0$ 且根據第三期預算限制式, $\Delta b_2 = \Delta c_3/(1+r) < 0$, 因此 Δs_2 的正負無法判斷。

2d 所得永久性等幅下降使各期消費下降, 消費的變動幅度與所得大抵相當, 儲蓄的變化不明顯。

2e 消費者於 $t = 2$ 時才得知 a_3 將下降, 因此結果是 $\{c_1, b_1, s_1\}$ 不變, 但 c_2 及 c_3 下降。第二期的儲蓄 $s_2 = a_2 + (1+r)b_1 - c_2 = b_2 - b_1$ 必然增加以使未來消費不致下降太多。

2f 條件 $c_3 = a_3$ 表示消費者在進入第三期時, 沒有資產也沒有負債 (即 $b_2 = 0$), 因此 r_2 上升只會產生跨期替代效果, 使 c_1 及 c_2 下降, 而 c_3 上升。若原來的 $c_3 > a_3$, 則消費者必然在進入第三期時擁有資產 (即 $b_2 > 0$), 因此 r_2 上升還有正向的財富效果, 使各期消費均上升。合併跨期替代效果後, 結果是 c_1, c_2 的變化方向無法確定, 但 c_3 必然上升。

6a 終身財富是

$$x = \left(260 + \frac{125}{1+r}\right)\left(1 + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^4} + \cdots\right) = 360\left(\frac{25}{9}\right) = 1,000。$$

恆常所得是

$$\overline{y} = \left(\frac{r}{1+r}\right)x = \left(\frac{0.25}{1.25}\right)1,000 = 200。$$

6b 因爲 $r = \rho$, 各期消費等於固定的恆常所得, 即 $c_t = \overline{y} = 200, \forall t$。第一期的期末債券量是 $b_1 = a_1 - c_1 = 60$, 因此儲蓄是 $s_1 = b_1 - b_0 = 60$。第二期的期末債券量是 $b_2 = a_2 + (1+r)b_1 - c_2 = 0$, 因此儲蓄是 $s_2 = b_2 - b_1 = -60$。第三期回到起始狀態, 因此本題奇數期的儲蓄都是 60, 而偶數期的儲蓄都是 −60。

7a 根據 9.4 節的推導, 各期恆常所得是 $\overline{y}_t = rx_t/(1+r)$。當 $r \neq \rho$ 時, 各期消費是

$$c_t = \phi\overline{y}_t,\ \phi = \frac{\rho(1+r)}{r(1+\rho)},$$

因此消費的增量是

$$\Delta c_t = \phi\Delta\overline{y}_t = \frac{\rho(1+r)}{r(1+\rho)}\left(\frac{r}{1+r}\right)\Delta x_t = \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\Delta x_t。$$

所得暫時上升使財富增加 10,000 元, 因此

$$\Delta c_t = \frac{0.1(10,000)}{1.1} \cong 909 \text{ 元。}$$

所得暫時上升情況下的 MPC ≅ 0.09, 甲的預測高估了將近 10 倍。

7b 每期所得增加 10,000 元, 恆常所得也增加 10,000 元, 因此

$$\Delta c_t = \frac{\rho(1+r)}{r(1+\rho)}\Delta\overline{y}_t = \frac{0.1(1.05)(10,000)}{0.05(1.1)} \cong 19,091 \text{ 元。}$$

直觀而言, 當 $r < \rho$ 時, 消費者傾向現在消費, 因此消費者會挪移相對較多的所得至當下消費, 故 MPC ≅ 1.909 > 1, 此時的 MPS < 0。

8 請參考本文 9.5 節。

9a 令 λ_t 及 μ_T 分別爲對應於各期預算限制式及非負條件 $b_T \geq 0$ (即不能倒債) 的 Lagrange 乘數, 則 Lagrange 函數可寫成

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left[a_t + (1 + r_{t-1}) b_{t-1} - c_t - b_t \right] + \mu_T b_T。$$

對各期 c_t 偏微分, 得到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^{t-1} u'(c_t) - \lambda_t = 0, \quad t = 1, 2, 3, \cdots T。$$

因爲消費者僅存活 T 期, 故選擇各期 b_t 的一階條件應寫成

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_t} = -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1 + r_t) = 0, \quad t = 1, 2, 3, \cdots T - 1,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_T} = \mu_T - \lambda_T = 0。$$

因爲 b_T 有可能爲角解 (即 $b_T = 0$), Kuhn-Tucker 定理的互補鬆弛條件要求

$$\mu_T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_T} = \mu_T b_T = 0。$$

上式類似無限生命情形下的橫截條件。

9b 根據上小題, b_T 的解有兩種情形: 若 $\mu_T > 0$, 則 $b_T = 0$; 若 $\mu_T = 0$, 則 $b_T > 0$。然而, $\mu_T = \lambda_T = \beta^{T-1} u'(c_T) > 0$, 因此 b_T 必爲角解。直觀而言, 拉式乘數 μ_T 衡量的是 b_T 的效用價值。在有限生命情形下, 資產必然存在殘餘效用價值 (因爲消費的邊際效用大於零), 因此消費者會選擇 $b_T = 0$ 的角解。在無限生命模型中, 任何一期的期末資產不需要等於零, 但要求其極限價值爲零, 即 $\lim_{T\to\infty} \mu_T b_T = 0$。

第 10 章: 稟賦經濟的均衡分析

2a 所得稟賦永久性增加使商品供給線右移, 根據恆常所得理論, 消費需求等幅增加, 因此商品需求線也等幅右移。在原利率水準下, 商品市場仍然處於均衡狀態, 因此均衡利率不變, 但均衡消費量增加一單位。在借貸市場中, 因爲所得及消費需求等幅上升, 儲蓄意願或債券需求不變, 均衡點也不動。圖形略。

2b 預期未來所得下降會使當期消費需求下降, 但儲蓄意願上升。在原利率水準下, 商品市場出現超額供給, 債券市場則有超額需求, 表示消費者企圖增加儲蓄以平滑各期消費。此股力量會使均衡利率下降, 但均衡消費量不變, 因爲本期的商品供給量未變。圖形略。

2c 發放消費券使當期所得上升, 但未來所得因政府必須增稅償債而下降。在原利率水準下, 未來稅賦的總現值剛好等於本期所得的增量, 因此消費者的終身財富不變, 消費需求也不變。在商品市場中, 供給線與需求線不動, 但債券市場中, 公債發行與債券需求等幅右移, 表示消費者企圖增加儲蓄以支應未來稅賦, 最後的結果是均衡利率與均衡消費都不受影響, 這是李嘉圖等值論的直接應用。圖形略。

2d 政府支出每年增加一單位, 消費者的恆常所得及商品消費量也等幅下降一單位。商品市場及債券市場的供給及需求都不變, 因此均衡利率不受影響, 但均衡消費量下降一單位。圖形略。

2e 政府增加未來支出, 不論以賦稅或公債融通, 消費者的終身財富都會下降, 使消費需求也下降。因爲本期的政府支出尚未增加, 因此商品市場將出現超額供給, 而債券市場出現超額需求, 表示消費者企圖增加儲蓄以支應未來稅賦。這會使均衡利率下降, 但最後的均衡消費量不受影響。圖形略。

3 預期財政懸崖的均衡效果與 2(e) 小題相反。這個問題要等到以後的實質循環模型才能做一個較爲完整的分析。稟賦模型因爲沒有生產及投資活動, 不適合用來回答這個複雜的問題。

5a 老布希總統爲經濟學家提供一個驗證李嘉圖等值論的絕佳機會。直觀上, 降低扣繳稅額不會影響個人的終身租稅負擔, 因爲現在扣得少, 未來要補稅, 扣得太多則有退稅。對納稅人而言, 這不過是現在繳稅或未來繳稅的問題。假設政府因降低扣繳稅額而少收了 1 億元的稅, 給定支出不變, 公債發行量將增加 1 億元。若利率是 5%, 則次年政府必須擠出 1.05 億元的稅, 其現值仍然是 1 億元。根據李嘉圖等值論, 此一政策對總體經濟的影響應該微乎其微。事後的實證研究發現, 1992 年的政策實驗的確沒有顯著的效果。

5b 假設消費者能夠自由借貸, 不受任何限制, 則政府貸款, 不論其規模大小, 都不會對總體經濟產生實質影響, 這是李嘉圖等值論的直接應用。政府貸款會對流動性受限者造成影響, 提升其福利。

5c 政府以永久性消費稅支應國民年金沒有財富效果, 也沒有跨期替代效果 (因爲各期稅率相等)。對總體經濟而言, 此一政策具有中立性質。從最適租稅的角度觀之, 固定不變的消費稅率也符合租稅平滑假說。

5d「增加支出, 降低稅賦」是希望提振需求, 但此一政策使預算赤字上升, 民衆預期未來租稅負擔增加, 因此儲蓄意願上升, 消費需求下降, 抵銷政策的擴張效果。1990 年代, 日本的屢次提振內需作爲使其公債餘額增至 GDP 的 200%, 但效果卻不如預期。殷鑑不遠, 能不愼乎?

5e 李嘉圖等值論有一個重要的基本假設, 即各期政府支出是一個給定的外生變數, 其折現總值固定不變。在此一假設下, 不論政府發行公債或

增稅, 消費者的終身租稅負擔都不會受到影響。本題中, 公債餘額增加會逼使未來政府撙節開支, 這表示政府支出不再是一個外生變數, 此時赤字減稅政策會使消費者預期未來稅賦下降, 其終身財富因此而增加, 使消費需求上升, 因此李嘉圖等值論不成立。

5f 根據李嘉圖等值論, 政府發行公債是一種國民「自己欠自己」的政策作爲, 只要人民的償債能力不出問題, 舉債規模並非主要問題。根據第一題的分析, 當經濟成長率大於公債利率時, 政府就不致於倒債, 此時限制政府舉債並非必要。其次, 從最適租稅的角度看, 政府透過適當的公債管理 (即預算赤字及盈餘), 可以平滑消費者的跨期租稅負擔。設定過於嚴苛的舉債上限反而有損經濟福利。

實務上, 限制政府舉債是否真能防止其「以債養債」也不無疑問。實際情形是政府有太多「撇步」規避公債的法定上限, 例如巧立各種不受公債法規範的「特種基金」。這些基金號稱自負盈虧, 但其淨負債最後仍要算在政府或人民頭上。根據資料, 台灣的潛在政府負債早已超過 40%。實務上要限制政府的真實負債幾乎不可能。

5g 年金改制的主要受益者是年輕世代及未來世代, 因爲他們的租稅負擔會因此下降。政府發行公債支付轉型期間的退休年金, 未來增稅時仍然必須由年輕人承擔, 換言之, 政策的「受益者」即爲政策的「受害者」。若改制後的「租稅節省」大於未來的「租稅負擔」, 則年輕人的終身財富會增加。實務上, 政府可以「平滑稅賦」, 讓這些租稅由未來「眾多」世代共同負擔, 因此改成全額提撥制應會提升年輕世代及未來世代的經濟福利。此一政策對原制下的退休老人沒有影響, 因爲他們仍然享受原來的年金給付。

第 11 章: 資產定價模型

2a 一階條件是 $q_t u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[(1-\tau)d_{t+1} + q_{t+1}]$。

2b 仿照本文的推導過程, 均衡股價是

$$q_t = (1-\tau)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j u'(d_{t+j})}{u'(d_t)} d_{t+j}。$$

所得稅使各期稅後股利等比例下降, 因此均衡股價也會等比例下降。

2c 稅率上升使稅後股利及股價等比例下降, 故益本比不變。此外, 稅率變動使各期股價等比例變動, 因此資本利得也不受影響。既然兩者都不變, 股票報酬率當然也不變。

6a (11.10) 式兩邊同除 d_t, 利用 $d_{t+1}/d_t = (1+\mu)\epsilon_{t+1}/\epsilon_t$, 得到

$$\frac{q_t}{d_t} = \tilde{\beta} E\left[\left(\frac{\epsilon_{t+1}}{\epsilon_t}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{q_{t+1}}{d_{t+1}} + 1\right)\middle|\, \epsilon_t\right]。 \tag{11.12}$$

上式右邊是 ϵ_t 的函數, 因此我們可將本益比 q_t/d_t 視爲 ϵ_t 的函數, 寫成 $q_t/d_t = g(\epsilon_t)$。數學上, 未知函數 g 即爲 (11.12) 式的定點。

6b 觀察 (11.12) 式, 當期干擾 ϵ_t 是已知資訊, 因此可從右邊的條件均值運算中提出。移項並令 $h(\epsilon) \equiv g(\epsilon)\epsilon^{1-\gamma}$, 則 (11.12) 式可寫成

$$h(\epsilon_t) = \tilde{\beta} E\left[h(\epsilon_{t+1}) + \epsilon_{t+1}^{1-\gamma} \,\middle|\, \epsilon_t\right]。$$

我們知道 ϵ_t 無序列相關, 因此上式右邊的條件均值與 ϵ_t 無關, 換言之, 函數 $h(\epsilon)$ 必然是一個常數函數, 亦即, $h(\epsilon) = h, \forall\epsilon$。將常數 h 代回上式, 運算後得到 (提示: $E(\epsilon_{t+1}^{1-\gamma}) = \exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]$)

$$h = \frac{\tilde{\beta} E\left(\epsilon_{t+1}^{1-\gamma}\right)}{1-\tilde{\beta}} = \frac{\tilde{\beta}\exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]}{1-\tilde{\beta}}。$$

利用 $q_t/d_t = g(\epsilon_t) = h(\epsilon_t)\epsilon_t^{\gamma-1}$, 均衡股價函數是

$$q_t = h(\epsilon_t)\overbrace{\left[(1+\mu)^t\epsilon_t\right]}^{d_t}\epsilon_t^{\gamma-1} = h\,(1+\mu)^t\epsilon_t^{\gamma}, \tag{11.13}$$

或以對數型式表達, $\ln q_t \cong \ln h + \mu t + \gamma \ln \epsilon_t$。顯然, $\ln q_t$ 也是一個趨勢定態過程。請注意, 當 $\gamma = 1$ 時, 上式退化成 11.5 節的特例解。

6c (11.12) 式兩邊同除 d_t, 得到

$$\begin{aligned}\frac{q_t}{d_t} &= E\left[\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\left(\frac{d_{t+j}}{d_t}\right)^{1-\gamma}\middle| d_t\right] = E\left[\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\beta}^j\left(\frac{\epsilon_{t+j}}{\epsilon_t}\right)^{1-\gamma}\middle|\epsilon_t\right]\\ &= \epsilon_t^{\gamma-1}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\beta}^j E\left(\epsilon_{t+j}^{1-\gamma}\right) = \left(\frac{\tilde{\beta}\exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]}{1-\tilde{\beta}}\right)\epsilon_t^{\gamma-1}。\end{aligned}$$

請注意, $E(\epsilon_{t+j}^{1-\gamma})$ 爲一固定常數, 從加總運算提出後, 得到最後一式, 其中的括弧項即爲上題的常數 h, 移項整理後, 得到 (11.13) 式。

6d 根據 (11.13) 式, ϵ_t 上升使當期股價上揚, 而未來股價不受影響。事實上, 若 ϵ_t 上升 1%, 則 q_t 會上升 γ% (因爲 $d\ln q_t/d\ln\epsilon_t = \gamma$), 換言之, γ 的值越大, 股價的上升幅度也越大。這道理不難理解。γ 的值越大, 消費者越厭惡風險, 這樣的消費者不希望各期消費水準有太大差異。當 ϵ_t 上升時, 當期所得增加, 但未來所得不受影響。一個厭惡風險的消費者期待這種「短暫橫財」能夠各期「雨露均沾」, 因此他的儲蓄意願會相對強烈, 對股票的需求也更爲殷切, 導致較大的股價升幅。

6e 仿照 (a)-(b) 兩題, 令 $q/d = g(\epsilon)$, 則函數 g 滿足下式:

$$g(\epsilon_t) = \tilde{\beta}E\left[\epsilon_{t+1}^{1-\gamma}\left(g(\epsilon_{t+1})+1\right)\middle|\epsilon_t\right]。$$

因爲 ϵ_t 無序列相關, 函數 $g(\epsilon)$ 必爲一常數函數。令 $g(\epsilon) = g$, 則上式變成 $g = \tilde{\beta}(1+g)E(\epsilon_{t+1}^{1-\gamma})$, 運算後得到

$$\frac{q_t}{d_t} = g = \frac{\tilde{\beta}\exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]}{1-\tilde{\beta}\exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]},$$

或 $q_t = g\, d_t$。與前例相同, 當 $\gamma = 1$ 時, 上式也退化成 11.5 節的特例解。以成長率表達, 均衡股價的隨機過程可寫成

$$\ln q_t - \ln q_{t-1} \cong \mu + \ln \epsilon_t。 \tag{11.14}$$

正如預期, $\ln q_t$ 也是一個漂浮的隨機醉步。

6f 根據 (11.14) 式, 當 ϵ_t 上升時, 不但當期股價上升, 未來各期的預期股價也等比例上升, 換言之, ϵ_t 的影響是永久的, 與趨勢定態過程情形下, 隨機衝擊僅影響當期股價截然不同。這道理也不難理解。當股利遵循隨機醉步時, ϵ_t 上升導致當期及未來股利等幅增加。正如 11.2 節所述, 這種永久性的所得增加會使各期股價等比例上升。

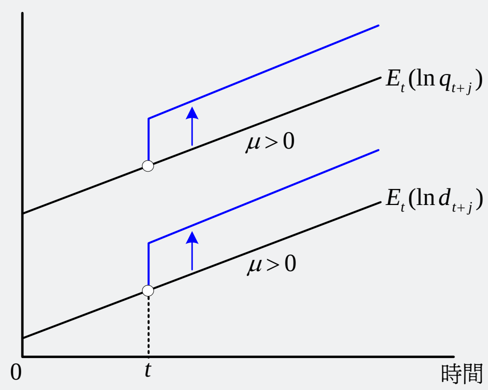

圖 11.17: 預期時間軌跡: 股利與股價

圖 11.17 畫出預期股利及預期股價的時間軌跡, 兩個變數均以對數刻

度衡量。ϵ_t 上升使整條 $E_t(\ln d_{t+j})$ 軌跡上移, 表示各期股利等幅上升。面對這樣的所得變動, 預期股價也會等比例上升。

7a 均衡實質利率滿足

$$1 + r_t = \frac{u'(d_t)}{\beta E_t[u'(d_{t+1})]} = \frac{(1+\rho)\epsilon_t^{-\gamma}}{E(\epsilon_{t+1}^{-\gamma})} = \frac{(1+\rho)\epsilon_t^{-\gamma}}{\exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2/2)}。$$

根據上式, ϵ_t 上升使 r_t 下跌。直觀而言, 當股利短暫上升時, 消費者的債券需求上升, 因此市場利率下跌。

此一經濟社會的平均利率水準是

$$E(r_t) = \frac{(1+\rho)E(\epsilon_t^{-\gamma})}{\exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2/2)} - 1 = \frac{(1+\rho)\exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2/2)}{\exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2/2)} - 1 = \rho。$$

因爲各期的預期消費相等, 平均實質利率等於時間偏好率, 此一結論與全知模型相同。

7b 根據題 6b 的公式解, $q_t = h\epsilon_t^{\gamma}$, 因此

$$1 + r_t^s = \frac{q_{t+1} + d_{t+1}}{q_t} = \frac{h\epsilon_{t+1}^{\gamma} + \epsilon_{t+1}}{h\epsilon_t^{\gamma}}, \text{ 其中 } h = \frac{\beta \exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]}{1-\beta}。$$

給定已知資訊 ϵ_t, 上式的條件均值是

$$\begin{aligned} E_t(1 + r_t^s) &= \left[E(\epsilon_{t+1}^{-\gamma}) + \frac{1}{h}E(\epsilon_{t+1})\right]\epsilon_t^{-\gamma} \\ &= \left[\exp\left(\frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right) + \frac{1}{h}\exp\left(\frac{\sigma_\epsilon^2}{2}\right)\right]\epsilon_t^{-\gamma}。\end{aligned}$$

將常數 h 代回上式, 運算後得到

$$E_t(1 + r_t^s) = \left[\exp\left(\frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right) + \rho\exp\left(\gamma\sigma_\epsilon^2 - \frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right)\right]\epsilon_t^{-\gamma}。$$

與實質利率一樣, 當 ϵ_t 上升時, 預期股票報酬率 $E_t(r_t^s)$ 也會下降, 而且幅度相當。這是當然之理, 因爲 ϵ_t 上升使當期股價上升 (見題 6d),

但不影響預期未來股價及股利, 因此股票報酬率下降, 直到與債券利率相等或套利空間消失時爲止。長期下, 股票報酬率的平均水準或其非條件均值是

$$E(1+r_t^s) = \left[\exp\left(\frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right) + \rho\exp\left(\gamma\sigma_\epsilon^2 - \frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right)\right]\exp\left(\frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right)$$
$$= \exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2) + \rho\exp(\gamma\sigma_\epsilon^2)。$$

7c 根據以上兩題, 股票的平均貼水是

$$E(r_t^s) - E(r_t) = \left[\exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2) + \rho\exp(\gamma\sigma_\epsilon^2)\right] - (1+\rho)$$
$$= \left[\exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2) - 1\right] + \rho\left[\exp(\gamma\sigma_\epsilon^2) - 1\right] > 0。$$

以上結果表示: (1) 參數 γ 的值越大, 消費者越嫌惡風險, 故貼水較高。若 $\gamma \to 0$, 則消費者對風險的態度近乎中立 (risk neutral), 因此風險貼水微乎其微。(2) 股利波動幅度 σ_ϵ 越大, 股票的客觀風險越高, 風險貼水也較高。

7d 當 $d_t/d_{t-1} = \epsilon_t$ 時, 均衡實質利率滿足

$$1 = \beta(1+r_t)E(\epsilon_{t+1}^{-\gamma}) = \beta(1+r_t)\exp(\gamma^2\sigma_\epsilon^2/2)。$$

移項後得到各期均衡利率是一個與 ϵ_t 無關的常數:

$$1 + r = (1+\rho)\exp\left(\frac{-\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right)。$$

當股利遵循隨機醉步時, ϵ_t 上升使各期預期消費等幅增加, 故均衡利率不受影響。此一結果與 $d_t = \epsilon_t$ 的情形截然不同。

根據題 6e 的公式解, $q_t = gd_t$, 因此

$$1 + r_t^s = \frac{gd_{t+1} + d_{t+1}}{gd_t} = \frac{(g+1)\epsilon_{t+1}}{g}, \text{ 其中 } g = \frac{\beta\exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]}{1-\beta\exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]}。$$

還原常數 g, 並取非條件均值 (亦等於條件均值), 得到

$$E(1+r_t^s) = \frac{(1+\rho)\exp(\sigma_\epsilon^2/2)}{\exp[(1-\gamma)^2\sigma_\epsilon^2/2]} = (1+\rho)\exp\left(\gamma\sigma_\epsilon^2 - \frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}\right)。$$

利用 $E(r_t^s) \cong \ln[1+E(r_t^s)]$, 平均股票報酬率約爲

$$E(r_t^s) \cong \rho + \gamma\sigma_\epsilon^2 - \frac{\gamma^2\sigma_\epsilon^2}{2}。$$

同理, 實質利率約爲 $r \cong \rho - \gamma^2\sigma_\epsilon^2/2$。兩式相減, 平均股權貼水是

$$E(r_t^s) - r \cong \gamma\sigma_\epsilon^2。$$

正如預期, γ 或 σ_ϵ 的值越大, 股權貼水就越高。

9a 第一個轉變矩陣連續自乘的結果是

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}}^{\Pi^1} \to \overbrace{\begin{bmatrix} 0.5058 & 0.4942 \\ 0.4942 & 0.5058 \end{bmatrix}}^{\Pi^{20}} \to \overbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}^{\Pi^{50}=\Pi^*}。$$

以上結果表示: 無論從哪一個狀態開始, 長期下兩個狀態各有一半的發生機率。這相當合乎直觀, 因爲此例的轉變矩陣是對稱的, 表示從任一狀態開始, 馬可夫鏈會落在同一狀態的機率都相等, 因此兩個狀態的機率各爲 0.5。第二個轉變矩陣的計算結果是

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}}^{\Pi^1} \to \overbrace{\begin{bmatrix} 0.8031 & 0.1969 \\ 0.7875 & 0.2125 \end{bmatrix}}^{\Pi^{5}} \to \overbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}}^{\Pi^{15}=\Pi^*}。$$

此時, 狀態一的機率是 0.8, 大於狀態二的機率 0.2。這也是自明之理, 因爲從狀態一到狀態一的機率是 0.9, 而從狀態二到狀態一的機率也高達 0.4, 這表示馬可夫鏈有較大的機會落在狀態一, 因此隨機抽樣的結果必然是狀態一發生的機會較高。

9b 本題的 $A = [0.9\ \ 0.4; -1\ \ 0]$, 因此

$$p = (I - A)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.8 \\ -2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}。$$

結果與上題相同。

第 12 章: 消費與勞動的跨期選擇

4a 一階條件是

$$u_l(c_1, l_1) = u_c(c_1, l_1) w_1,$$
$$u_c(c_1, l_1) = v'(c_2)(1 + r)。$$

4b 圖 12.18 中, 消費者年輕時選擇在 E 點消費及勞動, 無異曲線在該點的斜率 (以絕對值衡量) 等於工資率 w_1, 這是最適選擇要滿足的第一個

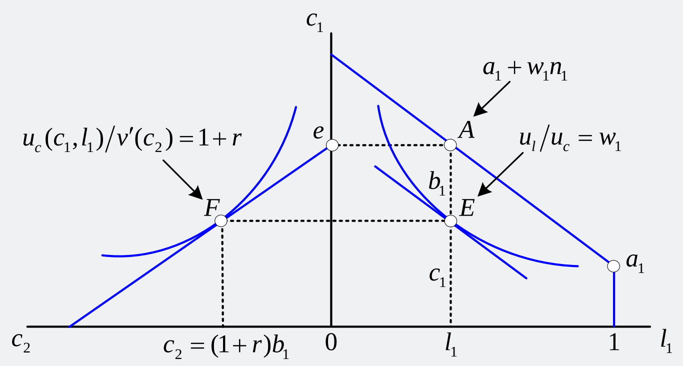

圖 12.18: 消費者的最適選擇

條件。請注意, 此一消費者退休後沒有任何所得, 他年輕時必須有儲蓄, 因此 E 點**必然**落在預算線的**內側**。如圖所示, E 點對應的當期所得落在 A 點, 儲蓄 b_1 等於 AE, 剩下的即為 c_1。在 (c_1, c_2) 象限中, 所得組合落於 e 點, 跨期消費選擇是 F 點, 無異曲線與預算線相切, 這是最適選擇要滿足的第二個條件。請注意, E, F 兩點對應的 c_1 必須相等, 而此時的 c_2 也剛好等於 $(1 + r)b_1$。

4c 消費者的終身預算限制式可寫成

$$c_1 + w_1 l_1 + \frac{c_2}{1 + r} = a_1 + w_1。$$

兩個一階條件分別是 $c_1 = w_1 l_1$ 及 $c_2 = (1 + r)c_1$。代入上式, 得到 c_1^d 爲

$$c_1^d = \frac{a_1 + w_1}{3}。$$

利用一階條件, c_2^d 及 n_1^s 分別爲 (不考慮角解)

$$c_2^d = \frac{(1 + r)(a_1 + w_1)}{3},$$
$$n_1^s = 1 - \frac{c_1^d}{w_1} = \frac{2}{3} - \frac{a_1}{3w_1}。$$

根據第二期 (或第一期) 的預算限制式, 儲蓄或 b_1^d 爲

$$b_1^d = \frac{c_2^d}{1 + r} = \frac{a_1 + w_1}{3}。$$

根據以上的公式解, a_1 上升使 c_1^d 及 c_2^d 上升而 n_1^s 下降, 這是財富效果。爲了平滑消費, a_1 上升也會使儲蓄 b_1^d 增加。此一消費者的儲蓄大於零, 故利率上升會產生正向的財富效果, 使 c_1^d 及 c_2^d 上升而 n_1^s 下降, 但跨期替代效果使 c_1^d 下降, 而 c_2^d 及 n_1^s 上升。綜合考慮後, r 上升必然使 c_2^d 上升, 但在本題的效用函數下, 以上兩個效果對 c_1^d 及 n_1^s 的影響剛好抵消, 故兩者不變, 儲蓄也不變。

最後, 工資率上升會產生財富效果及替代效果, 前者使 c_1^d 及 c_2^d 上升而 n_1^s 下降, 後者使 c_1^d, c_2^d 及 n_1^s 都上升。綜合考慮後, c_1^d 及 c_2^d 必然上升, 但在本題的效用假設下, w_1 上升對 n_1^s 的替代效果大於財富效果, 故最後的 n_1^s 上升。雖然 c_1^d 及 n_1^s 都上升, 但因爲最後的 c_2^d 上升, 因此儲蓄或 b_1^d 必然上升。

若 $a_1 = 0$, 則 $n_1^s = 2/3$, 工資率變動的財富效果及替代效果剛好抵消, 因此勞動爲一固定常數, 與 w_1 無關。

4d 本例的消費者退休後擁有 $a_2 > 0$ 的外生所得, 若 a_2 夠大, 則此人有可能向未來賒借。圖 12.19 中, (c_1, l_1) 選擇落於右邊象限中的 E 點, 對

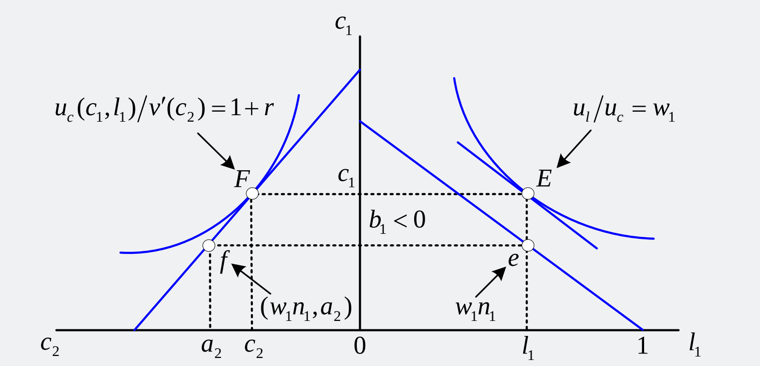

圖 12.19: 消費者的最適選擇

應的勞動所得 w_1n_1 是 e 點。如圖所示, $c_1 > w_1n_1$, 故 $b_1 < 0$, 對應於 Ee 線段。在左邊的 (c_1, c_2) 象限中, 所得組合 (w_1n_1, a_2) 落於 f 點, 最適選擇是 F 點, 無異曲線與預算線相切, 對應的 c_1 與右邊的 E 點一致。

仿照上題的步驟, 本題的最適選擇是 (不考慮角解)

$$c_1^d = \frac{1}{3}\left(w_1 + \frac{a_2}{1+r}\right), \qquad c_2^d = \frac{(1+r)w_1 + a_2}{3},$$
$$n_1^s = \frac{2}{3} - \frac{a_2}{3w_1(1+r)}, \qquad b_1^d = \frac{w_1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{a_2}{1+r}\right)。$$

根據以上的公式解, a_2 上升產生財富效果, 導致 c_1^d 及 c_2^d 上升, 而 n_1^s 下降。爲了增加今天的消費, 儲蓄 b_1^d 必然隨 a_2 上升而下降。當利率上升時, 跨期替代效果使 c_1^d 下降, 而 n_1^s, c_2^d 及 b_1^d 上升。這位消費者的原始儲蓄可能大於零或小於零, 故利率變動也會產生財富效果, 但在對數效用函數下, 即使 $b_1^d > 0$, 替代效果仍然大於財富效果, 故最後的 c_1 仍會下降。最後, 工資率 w_1 上升會導致 c_1^d, c_2^d 及 b_1^d 上升, 但 n_1^s 下降! 在本例中, 工資率上升的財富效果 (使 n_1^s 下降) 大於替代效果 (使 n_1^s 上升), 故最後的 n_1^s 下降。即使勞動供給 n_1^s 下降, 消費需求 c_1^d 上升, 但最後的儲蓄 b_1^d 仍然上升。

6a 一階條件是

$$\frac{u_l(c_t, l_t)}{u_c(c_t, l_t)} = \frac{w_t}{1+\phi_t},\ t = 1, 2,$$
$$\frac{u_c(c_1, l_1)}{\beta u_c(c_2, l_2)} = \left(\frac{1+\phi_1}{1+\phi_2}\right)(1+r)。$$

6b 對消費課稅即爲對勞動課稅, 本期稅率 ϕ_1 上升會產生同期替代效果, 導致 c_1^d 及 n_1^s 下降。因爲 ϕ_2 不變, ϕ_1 上升也會產生跨期替代效果, 使 n_1^s 進一步下降, 而未來的 c_2^d 及 n_2^s 上升。簡言之, 消費者會選擇稅率較低時消費及工作, 故最後結果是 c_1^d 及 n_1^s 下降, 而 c_2^d 及 n_2^s 上升。因爲稅收等於定額移轉, 稅率改變沒有財富效果。

6c 利用一階條件及市場結清條件 $c_t = y_t$, 均衡勞動是

$$n_t = \frac{\alpha}{1+\alpha+\phi},\ t = 1, 2。$$

因爲 $\phi_1 = \phi_2$, 兩期消費相等, 故均衡利率 $r = \rho$。其他變數略去不寫。

6d 稅率等比例上升沒有跨期替代效果, 但同期替代效果會使消費需求及勞動供給下降。在商品市場中, c_t^d 曲線及 y_t^s 曲線等幅左移, 均衡利率不變, 產出及消費下降。在勞動市場中, n_t^s 曲線左移, 而 n_t^d 曲線不動, 故勞動下降, 工資率上升。以上結論與 (c) 小題一致。圖形略。