13 廠商的投資決策

本書上半部的理論特徵是國民儲蓄等於零。首先, 在第 4-7 章的靜態模型中, 消費者及廠商沒有明天, 無論是個人或整體經濟, 都沒有儲蓄可言。這樣一個簡單的經濟社會不能「寅吃卯糧」, 也不能「未雨綢繆」。其次, 在第 8-11 章的動態稟賦經濟中, 個別消費者及政府可以借貸, 但因爲有借必有貸, 國民儲蓄等於零, 因此整體經濟社會仍然無法將所得在不同期間挪移。讀者或許會以爲這是因爲模型中沒有考慮生產活動, 其實不然。在上冊的最後一章中, 我們允許消費者進行跨期勞動選擇, 但假設廠商不能投資, 因此國民儲蓄仍然等於零。對整體經濟而言, 這表示所有產出都必須在當下消費殆盡, 而任何衝擊的影響也會透過利率變動在當下充分反映。這個相對完整的世界並非貨真價實的動態模型, 因爲今天和明天是互相獨立的。從本章開始, 我們要帶領讀者進入真正的動態世界, 不但個別消費者, 整體經濟也能夠挪移所得。

根據國民所得恆等式, 國民儲蓄等於國內投資加經常帳餘額, 因此在封閉經濟中, 國民儲蓄必然等於國內投資。透過廠商的投資活動, 國民儲蓄變成機器設備等生產投入, 進而影響未來的生產和消費。當投資增加時, 資本累積加速, 這表示未來的消費可能性上升, 而當投資減少時, 資本累積減緩, 未來的消費可能性也下降。簡言之, 透過投資活動, 整體經濟

就像個人一樣, 可以將產出在不同期間挪移。這種挪移資源的動態過程是我們瞭解一國經濟表現的關鍵所在。

投資與資本是一體之兩面, 前者是流量, 後者是過去投資流量累積而成的最終結果或存量。概括的說, 任何能夠透過累積而形成的生產投入, 都可稱之爲資本, 其中不僅包括機器設備及廠房等實體資本或有形資本, 也包括無形的人力資本。從本章開始, 我們要將實體投資納入全面均衡模型, 除了分析廠商投資需求的決定因素外, 也要分析投資與消費, 產出及實質利率等其他總體變數的關係。人力資本及教育投資是影響一國經濟長期表現的關鍵因素, 我們留待成長模型再爲讀者介紹。

爲簡化分析, 本章要將焦點對準廠商投資, 考慮一個固定勞動供給的經濟社會。在此一世界中, 消費者不能進行勞動或休閒選擇, 但廠商可以決定勞動需求及資本累積。此一模型由著名英國學者 Frank Ramsey 於 1928 年首先提出, 其後又由 David Cass 及 Tjalling Koopmans 於 1965 年補充, 文獻中稱爲 Ramsey 模型或 Ramsey-Cass-Koopmans 模型, 而 Koopmans 也因此獲得 1975 年諾貝爾經濟學獎。這幾乎可以說是當代總體理論最重要的入門模型, 又稱**最適成長模型** (optimal growth model)。依循往例, 我們假設體系成員活在非隨機的世界中, 對未來具有全知能力。風險及不確定因素以後再納入考慮。

13.1 模型經濟

學術文獻多從集權式經濟的角度切入 Ramsey 模型, 這是一個人說了算的世界, 其中所有成員的經濟活動都聽命於一位無所不能的「真主阿拉」。讀者還記得, 上冊第 6 章即曾以這種角度詮釋競爭均衡。這樣的分析架構自有其理, 但對初學者而言, 從市場經濟切入更爲恰當, 這也是本書一貫採取的角度。關於集權式模型, 最後再補充。

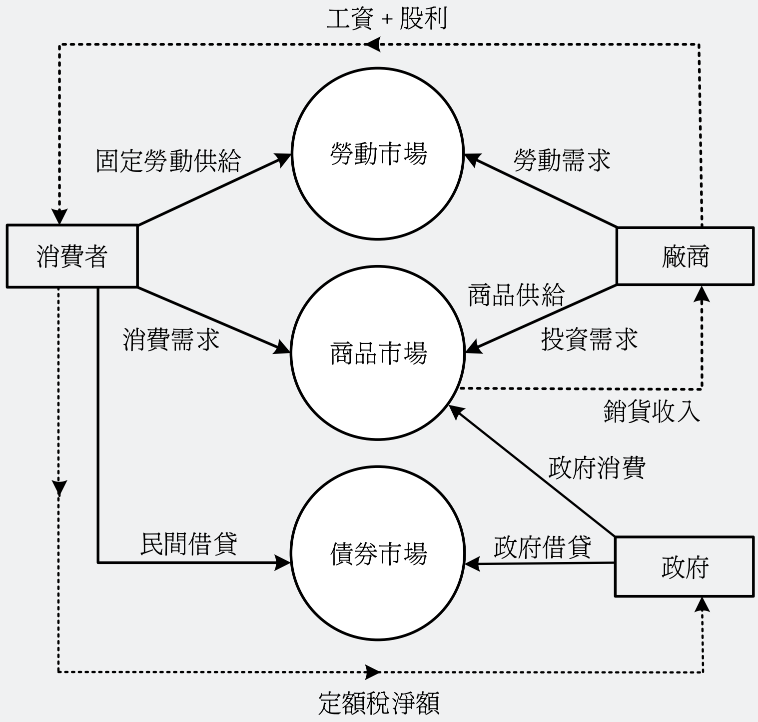

圖 13.1: Ramsey 模型的循環流程圖

Ramsey 模型考慮的經濟社會由政府及眾多同質的消費者及廠商所組成, 這三個成員在完全競爭的勞動市場, 商品市場及債券市場交易。圖 13.1 中, 廠商每天一早進入勞動市場雇用勞力, 連同既有的資本設備, 生產**同質** (homogeneous) 而且**能夠儲存** (storable) 的商品。這些商品可供消費者及政府直接消費, 也可用於投資, 變成明天的資本投入。簡單的說, 我們假設商品既是消費財, 也是投資財。讀者或許要問: 這太瘋狂了, 消費者如何「吃掉」工廠裡的機器設備? 我們可以這樣看。想像生產者阿達種植的是椰樹; 果汁椰肉進入肚腹是消費, 果種埋地, 明天又成一棵椰樹, 這是投資。或者, 阿達養牛耕地, 牛隻可供食用, 也可當作生產工具, 帶到明天繼續耕作, 這是投資。

現實世界中, 消費財及投資財不僅性質及生產技術不同, 價格也不同。阿達豢養牛隻耕作水稻, 牛隻是資本財, 稻米是消費財, 理論上, 我們需要一個多部門的模型才能分析牛隻和稻米的生產及消費。就本章目的而言, 這會增加模型的複雜度, 而且也無必要。我們假設商品可同時做爲消費及投資之用, 因此兩者有相同的市場價格。此一簡化假設不影響 Ramsey 模型的主要結論, 讀者的分析負擔也可減輕不少。

消費者站在勞動市場及商品市場的另一面, 每天一早進入勞動市場提供外生給定的勞力, 並於商品市場中消費。在 Ramsey 模型中, 勞動供給是給定的外生變數, 因此用什麼單位衡量勞力並不重要。這些勞力可以是工作時間或就業人口, 爲了簡單, 我們假設消費者每天提供一單位的勞動工時。內生的勞動供給將於後續章節納入考慮。消費者既是勞動供給者, 也是廠商的股東, 他的所得包括工資所得及股利所得, 扣掉政府課徵的定額稅淨額 (即定額稅減定額移轉), 可支配所得可用於消費及儲蓄。依循往例, 我們假設政府不向廠商課稅。事實上, 因爲所有稅賦及所得移轉均爲定額性質, 廠商是否繳稅不影響分析結果。

在借貸市場中, 消費者及政府交易一紙沒有倒債風險的短期債券。消費者可以在此購買或發行私人債券, 而政府也可發行公債, 以補稅收之不足。爲了簡單, 我們假設廠商不直接參與借貸活動。此一假設看似極端, 而且有違常情。不錯, 現實世界中, 廠商爲了興建廠房或購買機器設備等投資活動, 的確可以發行公司債。如果現金充足, 廠商還可以動用保留盈餘或以「印股票, 換鈔票」等手段支應投資計畫。這些融資手段牽涉到廠商如何選擇資本結構, 屬於公司理財的討論範疇, 不是 Ramsey 模型的分析焦點。我們假設廠商不能發債, 因此所有資金都來自利潤及股東, 這等於是假設股東 (即消費者) 代理廠商在債券市場中借貸, 因此私人借據或民間會金等私人債券也可視爲廠商的公司債。遵循往例, 我們假設民間債券及政府公債能夠完全替代, 因此兩者的利率相等。

稍加觀察, 讀者即可發現以上的經濟世界幾乎與上冊第 12 章相同, 唯一的不同是廠商及消費者在生產過程中扮演的角色。在第 12 章中, 消費者可以選擇勞動供給, 但廠商不能投資。如前所述, 這不是真正的動態模型, 因爲國民儲蓄恆爲零。在 Ramsey 的世界中, 消費者的勞動供給固定不變, 但廠商擁有累積資本的能力, 因此國民儲蓄不再等於零。這個看似無足輕重的改變將對總體經濟活動產生關鍵影響, 而模型的均衡特徵也會與前面的模型截然不同。

消費者的跨期選擇問題

Ramsey 模型中的消費者其實就是上冊第 9 章分析的世代家庭, 我們簡要爲讀者複習主要結論。站在任何 t 期, 消費者的所得包括股利所得 d_t 及固定一單位工作時間的勞動報酬或實質工資 w_t, 扣除政府的定額稅淨額 T_t, 再加上 (或減去) 到期債券的利息收入 (或支出) $r_{t-1}b_{t-1}$, 即得到消費者的可支配所得。這些所得除用於消費 c_t 外, 還可累積債券 $(b_t - b_{t-1})$ 進入下一期。讀者還記得, 債券餘額 b_{t-1} 可正可負; 若 $b_{t-1} > 0$, 這表示消費者擁有資產, 而 $b_{t-1} < 0$ 則表示背負債務。令 $a_t = d_t + w_t - T_t$ 表示外生所得, 則消費者的各期預算限制滿足

$$c_t + b_t = a_t + (1 + r_{t-1})b_{t-1}, \ \forall t。$$

以上的預算限制也可用現值表達。令 $q_t = 1/(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{t-1})$ 表示 t 期商品或消費的折現價格 (當 $t = 1$ 時, 令 $q_1 = 1$), 則消費者的終身預算限制可寫成 (假設期初債券餘額 $b_0 = 0$)

$$\sum_{t=1}^{\infty} q_t c_t = \sum_{t=1}^{\infty} q_t a_t = x。$$

上式要求消費者將終身財富 x 在無窮的存活期間消費殆盡, 這表示消費者不能倒債, 也不會累積過多的資產。

給定各期實質利率 $\{r_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及外生所得 $\{a_t\}_{t=1}^{\infty}$, 代表性消費者在預算限制下追求最大終身滿足。他的選擇變數包括各期消費 $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及期末債券餘額 $\{b_t\}_{t=1}^{\infty}$。因爲勞動或休閒固定不變, 因此消費者的效用僅受消費影響, 寫成 $u(c_t)$。此一效用函數滿足 $u' > 0, u'' < 0$。以符號表示, 消費者的跨期選擇問題可寫成

$$\max_{\{c_t, b_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$$

$$\text{subject to} \quad c_t + b_t = a_t + (1 + r_{t-1}) b_{t-1}, \ \forall t。$$

上述問題中, $\beta = 1/(1+\rho) \in (0,1)$ 是消費者的時間偏好因子。對於以上問題, 讀者想必已經爛熟。最適選擇要求消費者在「今天消費或明天消費」之間的取捨必須滿足

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_t)。$$

上式連同終身預算限制共同決定消費者的消費需求及債券需求, 這些行爲函數受各期實質利率及外生所得的影響。

根據第 9 章的分析, 整體經濟或代表性消費者的消費需求及債券淨需求函數可以表示成

$$c_t^d = c_t^d(\underset{(-)}{r_t}, \underset{(-)}{r_{t+1}}, \cdots; \underset{(+)}{a_t}, \underset{(+)}{a_{t+1}}, \cdots),$$

$$b_t^d = b_t^d(\underset{(+)}{r_t}, \underset{(+)}{r_{t+1}}, \cdots; \underset{(+)}{a_t}, \underset{(-)}{a_{t+1}}, \cdots)。$$

首先, 在封閉經濟中, 實質利率變動對代表性消費者不產生財富效果。當本期或未來利率上升時, 當下的消費需求下降, 而儲蓄及債券需求上升, 這是**跨期替代效果**。其次, 當本期所得上升而未來所得不變時, 這種短暫的所得增加會使消費及儲蓄同時上升, 但因爲恆常所得的增幅有限, 此時

的邊際消費傾向低, 而邊際儲蓄傾向高, 這是**財富效果或平滑消費效果**。最後, 若本期所得不變但未來所得上升, 這也會產生財富效果, 導致各期消費需求上升, 但當下的儲蓄及債券需求下降。若所得永久性等幅上升, 則恆常所得也約略等幅上升, 此時的邊際消費傾向接近一, 各期消費等幅上升, 儲蓄及債券需求大抵不變。

政府的預算限制

政府的預算限制也與過去的模型相同。以人均單位衡量, 令 G_t 及 b^g_{t-1} 分別表示 t 期的人均政府消費支出及期初未償公債餘額, 則各期政府預算限制滿足

$$G_t + (1 + r_{t-1})b^g_{t-1} = T_t + b^g_t,\ \forall t。$$

根據上式, 政府有 G_t, T_t 及 b^g_t 等三個政策工具。給定期初公債餘額 b^g_{t-1}, 政府若決定了支出水準 G_t 及定額稅淨額 T_t, 則期末公債餘額 b^g_t 亦同時決定; 顯然, 政府僅能選擇其中的兩個工具。以下的分析假設政府選擇 G_t 及 T_t 做爲政策工具。提醒讀者, 公債是政府的負債; 當 $b^g_t > 0$ 時, 政府有負債流通在外, 而 $b^g_t < 0$ 則表示政府擁有淨資產。

以現值表示, 政府的跨期預算限制也可寫成 (假設期初債券 $b^g_0 = 0$)

$$\sum_{t=1}^{\infty} q_t G_t = \sum_{t=1}^{\infty} q_t T_t。$$

上式表示, 政府不能操弄龐氏賽局; 短期內或能舉債度日, 但長期下所有支出都必須靠課稅支應。

13.2 廠商的跨期選擇問題

在 Ramsey 的世界中, 廠商使用勞動及資本設備進行生產; 這是一個能夠存活或企圖存活無窮萬代的生產者, 與過去「開了關, 關了又開」的「短

命」廠商相較, 這個生產者顯然要有意思多了。站在任何時點, 廠商必須決定要進入勞動市場雇用多少勞力, 生產多少商品, 同時又要購買多少資本設備 (即投資) 作爲明天的生產投入。廠商的投資支出, 連同消費者及政府的消費支出, 共同形成經濟社會對商品的總需求, 這是決定總體均衡產出的關鍵因素。本節要爲讀者介紹一個簡單的廠商決策模型, 我們的主要目的是推導廠商的勞動需求及投資需求函數。

站在任何 t 期, 假設代表性廠商擁有 k_{t-1} 的**期初**資本存量, 這是過去投資活動累積而成的結果。給定期初資本存量 k_{t-1} 及當期的勞動投入 n_t, 廠商生產同質且可儲存的商品, 其產出量 y_t 是

$$y_t = A_t F(k_{t-1}, n_t)。$$

上式中, A_t 是外生給定的要素生產力或供給面衝擊。我們假設生產函數 F 滿足所有古典假設 (見上冊第 4 章), 特別是規模報酬固定。讀者還記得, 這表示大廠與小廠具有相同的生產效率, 因此個別廠商的生產行爲即是整體經濟社會的生產行爲。

資本設備與勞動投入的主要不同是資本設備會在生產過程中產生耗損或折舊。現實世界中, 這種耗損會因爲資本財的「耐操程度」不同而異。爲了簡單, 我們假設**資本折舊率** (depreciation rate of capital) $\delta \in [0, 1]$ 固定不變, 這也是多數文獻的通常假設 (見習題 4)。給定期初資本存量 k_{t-1}, 若廠商的投資支出是 i_t, 則 t 期的**期末**資本存量 k_t 必然滿足

$$k_t = i_t + (1 - \delta) k_{t-1}。 \tag{13.1}$$

用白話說, 期末資本存量 k_t 等於當期投資支出 i_t 再加上殘餘或未耗損的資本存量 $(1-\delta)k_{t-1}$, 這是當然之理, 稱爲**資本移動方程式** (law of motion of capital)。根據上式, 廠商一旦決定了今天的投資支出 i_t, 則明天能夠投入生產的資本設備 k_t 亦同時決定。顯然, 投資會加速資本累積, 影響未來的商品產出。

(13.1) 式移項後也可表示成

$$i_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1} = (k_t - k_{t-1}) + \delta k_{t-1}。$$

讀者看到, 廠商的投資支出包括兩項: 第一項是新增資本存量 $(k_t - k_{t-1})$, 稱爲**淨投資** (net investment), 第二項是**折舊** (depreciation) δk_{t-1}, 這是廠商爲了使機器設備可堪使用的必要支出, 這也屬於廠商的投資。顯然, 這裡的投資即是國民所得帳中所稱的**毛投資** (gross investment)。根據上式, 給定期初資本存量 k_{t-1}, 廠商若能決定期末資本存量 k_t, 則必要的投資支出 i_t 亦同時決定。簡言之, 投資支出與資本存量是一體之兩面, 決定了最適存量, 對應的支出流量也同時決定, 反之亦然。

廠商的決策問題

廠商以追求股東或消費者的最大福祉爲目標。在靜態模型或資本存量固定不變的世界中, 廠商僅存活一期, 因此追求股東最大福祉即是追求最高利潤或股利。在 Ramsey 模型中, 廠商透過資本累積可以存活無窮萬代, 每期能夠發放的股利或**現金流量** (cash flow) d_t 等於利潤 $(y_t - w_t n_t)$ 減投資支出 i_t, 即 $d_t = y_t - w_t n_t - i_t$。現實世界中, 這些現金流量可能以保留盈餘的形式留在公司帳上, 不見得當下就落入股東的袋中, 但不論「今天發放或未來發放」, 這些現金流的最終財產權仍然屬於股東, 因此消費者真正關心的乃是各期現金流量或股利的折現總值。在非隨機的全知世界中, 消費者以無風險實質利率折算未來股利所得, 因此我們可以將**廠商價值** (value of firm) 定義成

$$\sum_{t=1}^{\infty} q_t d_t = \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{d_t}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{t-1})} \right]。$$

簡單的說, 廠商價值即是各期股利或現金流的折現總值, 這是消費者財富的一部分, 而廠商的決策目標便是追求消費者財富之極大。

作者要特別指出, 以上的決策目標只有在非隨機的世界中才成立。當經濟社會存在不確定因素時, 無風險利率不能真正反映消費者對風險的厭惡程度 (見上冊第 11 章), 因此財富極大不見得表示消費者的終身效用也極大。隨機環境下的廠商決策問題稍微複雜, 但主要結論與全知模型並無不同, 以後再為讀者補充 (見第 15 章)。

站在起始期 $t = 1$, 代表性廠商擁有外生給定的資本存量 k_0, 這是廠商成立時的資本支出, 如開辦費。面對各期市場工資率 $\{w_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及實質利率 $\{r_t\}_{t=1}^{\infty}$, 廠商追求消費者財富極大, 選擇變數包括各期勞動投入 $\{n_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及期末資本存量 $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$。以符號表示, 廠商的決策問題可寫成

$$\begin{aligned} \max_{\{n_t,k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad & \sum_{t=1}^{\infty} q_t d_t \\ \text{subject to} \quad & d_t = A_t F(k_{t-1}, n_t) - w_t n_t - i_t, \ \forall t, \\ & i_t = k_t - (1-\delta) k_{t-1}, \ \forall t。 \end{aligned}$$

一階必要條件

廠商的勞動選擇相當單純, 因為其中不牽涉任何跨期取捨。觀察上述決策問題, 廠商若於任意 t 期增雇一單位勞動, 則當期可增加的現金流或股利即是該單位勞動的邊際產出 MPL_t。最適選擇要求此一邊際報酬等於實質工資率 w_t, 因此最適勞動選擇的一階必要條件是

$$\text{MPL}_t = A_t F_n(k_{t-1}, n_t) = w_t。 \tag{13.2}$$

此一條件與上冊第 4 章及第 12 章的模型相同。根據邊際產出遞減及要素互補兩個性質, 要素生產力 A_t 上升或期初資本存量 k_{t-1} 上升會使勞動需求上升, 而實質工資率 w_t 上升使勞動需求下降, 故勞動需求函數可寫成 $n_t^d(w_t, A_t, k_{t-1})$。代入生產函數, 商品供給也受這三個變數影響, 而且影響方向相同, 寫成 $y_t^s(w_t, A_t, k_{t-1})$。

廠商的投資決策必須考慮投資對未來股利或現金流量的影響。站在任何 t 期, 廠商若增加一單位投資支出 (即 $\Delta i_t = \Delta k_t = 1$), 則當期的現金流量或股利 d_t 也下降一單位, 這是投資以 t 期商品單位衡量的邊際成本。廠商帶了一單位額外資本進入 $t+1$ 期, 根據股利的定義, 這可以使該期的現金流量增加 $\Delta d_{t+1} = A_{t+1}F_k(k_t, n_{t+1}) + (1-\delta)$, 其中第一項是新增資本投入的邊際產出 MPK_{t+1}, 第二項 $(1-\delta)$ 是該單位資本的**殘餘或清算價值** (residual or liquidation value of capital)。以 t 期的商品單位衡量, 此一邊際報酬應以實質利率折算, 即 $\Delta d_{t+1}/(1+r_t)$。最適選擇要求投資的邊際成本等於折現邊際報酬, 否則廠商價值即有增加空間, 因此最適投資決策的一階必要條件是

$$1 = \frac{\Delta d_{t+1}}{1+r_t} = \frac{\mathrm{MPK}_{t+1} + (1-\delta)}{1+r_t}。$$

上式移項整理後也可表示成

$$\mathrm{MPK}_{t+1} = A_{t+1}F_k(k_t, n_{t+1}) = r_t + \delta。\tag{13.3}$$

直觀上, 此一條件與 (13.2) 式沒有什麼不同。簡言之, 最適投資要求資本的**未來**邊際產出 MPK_{t+1} 等於對應的機會成本 $(r_t+\delta)$。給定市場利率, 廠商調整期末資本存量 k_t 直到 (13.3) 式成立。從另一個角度看, 實質利率 r_t 是債券的報酬率, 而 $(\mathrm{MPK}_{t+1}-\delta)$ 是資本的淨報酬率, 上式要求資本及債券的報酬率相等, 否則即存在套利空間。

市場利率是廠商的**資金成本** (cost of capital), 讀者當不陌生。現實世界中, 這種成本視廠商的融資手段, 可能是外顯的, 也可能是隱含的。一般而言, 廠商可透過兩種手段募集資金, 一是**外部融資** (external financing), 如向銀行借款或發行公司債, 此時, 市場利率即是資金的外顯成本。其次, 廠商也可訴諸**內部融資** (internal financing), 如動用利潤或保留盈餘, 此時, 損失的利息收入即是投資的隱含成本。顯然, 不論使用何種融資手段, 利率都是投資的機會成本。

表 13.1: 資本累積與現金流量

時間	期末資本存量 (Δk_t)	現金流量 (Δd_t)
t	1	-1
$t+1$	$(1-\delta)$	MPK_{t+1}
$t+2$	$(1-\delta)^2$	$(1-\delta)\text{MPK}_{t+2}$
$t+3$	$(1-\delta)^3$	$(1-\delta)^2\text{MPK}_{t+3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

細心的讀者可能懷疑, (13.3) 式假設廠商在投資次期即選擇清算資本設備, 獲得 $(1-\delta)$ 的殘餘價值, 這個廠商也未免太「短視」了! 現實世界中, 廠商之所以投資難道不是希望「永續經營」, 為股東創造更多的財富? 其實, 在最適選擇狀態下, **資本的清算價值必然等於持續生產的價值**, 因此廠商可以選擇關廠, 也可以選擇繼續營運, 但兩者對股東財富的影響完全相同。以下要用較為嚴謹的方式證明此一命題, 演算過程略嫌醜陋, 讀者請耐住性子, 諸位的「投資」不會白費。

假設廠商於 t 期增購一單位資本設備, 次期投入生產後繼續營運, 直到這一單位資本設備耗損殆盡為止。表 13.1 列出此一永續生產計畫對各期現金流量及期末資本存量的影響。首先, 投資當期的現金流量減少一單位, 而期末資本存量增加一單位。這一單位的資本設備可為 $t+1$ 期創造 $\Delta d_{t+1} = \text{MPK}_{t+1}$ 的額外現金流量, 折舊耗損後, 資本存量剩下 $(1-\delta)$ 單位。廠商若於此時選擇關廠, $(1-\delta)$ 即是資本的殘餘或清算價值。本例中, 廠商帶了 $(1-\delta)$ 的資本存量進入 $t+2$ 期, 因此該期的股利可增加 $\Delta d_{t+2} = (1-\delta)\text{MPK}_{t+2}$, 即殘餘資本增量 $(1-\delta)$ 乘上對應的邊際產出 MPK_{t+2}。折舊耗損後, 資本存量剩下 $(1-\delta)^2$ 單位, 又可為 $t+3$ 期創造 $\Delta d_{t+3} = (1-\delta)^2\text{MPK}_{t+3}$ 的額外股利。廠商持續生產, 直到原始一單位資本設備折舊殆盡為止。

如果以上的生產規劃是股東財富極大選擇, 則 t 期減少的一單位股利必然等於未來各期股利增幅的折現總值 (爲什麼?), 亦即,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mathrm{MPK}_{t+1}}{1+r_t} + \frac{(1-\delta)\mathrm{MPK}_{t+2}}{(1+r_t)(1+r_{t+1})} + \frac{(1-\delta)^2\mathrm{MPK}_{t+3}}{(1+r_t)(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)^j \mathrm{MPK}_{t+j+1}}{(1+r_t)\cdots(1+r_{t+j})}。 \end{aligned} \tag{13.4}$$

這是廠商永續經營的一階必要條件, 對任何 t 期均適用。我們可以將上式右邊的折現總值拆成兩個部分, 改寫成

$$\frac{\mathrm{MPK}_{t+1}}{1+r_t} + \left(\frac{1-\delta}{1+r_t}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-\delta)^{j-1}\mathrm{MPK}_{t+j+1}}{(1+r_{t+1})\cdots(1+r_{t+j})}\right)。$$

觀察上式, 第一項是 $t+1$ 期的股利增幅, 第二項是 $(1-\delta)$ 單位殘餘資本的生產價值, 兩項都是以現值 (即 t 期商品單位) 衡量。我們提出 $1/(1+r_t)$, 將第二項表達成 $(1-\delta)/(1+r_t)$ 乘上一單位 $t+1$ 期資本存量的折現價值, 亦即, 從 $t+2$ 期起算各期股利增幅的折現總值。根據 (13.4) 式, 此一折現總值也必然等於一 (讀者請說服自己瞭解此一步驟), 因此永續經營情形下的一階條件也可寫成

$$1 = \frac{\mathrm{MPK}_{t+1} + (1-\delta)}{1+r_t}。$$

上式即爲前面的 (13.3) 式。以上推導表示, 廠商若於投資次期選擇關廠, 則資本的殘餘價值是 $(1-\delta)$, 若繼續生產, 則資本的利用價值也是 $(1-\delta)$, 換言之, 關廠清算與永續經營對股東沒有任何差別。直觀上, 這是最適選擇的必然性質, 否則即存在套利空間。

數學推導: 一階必要條件及橫截條件*

本小節要利用數學方法 (見上冊第 9 章 9.2 節) 推導廠商選擇問題的一階必要條件, 不熟悉的讀者可直接略過。令 λ_t 爲對應於資本移動方程式

(13.1) 的拉氏乘數, 則廠商極值問題的拉氏函數可寫成

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} q_t \left[A_t F(k_{t-1}, n_t) - w_t n_t - i_t \right] + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \left[i_t + (1-\delta) k_{t-1} - k_t \right]。$$

直觀上, 拉式乘數 λ_t 是 t 期投資 i_t 的折現邊際價值, 也是期末資本存量 k_t 的折現邊際成本或設算價格。最適選擇要求 $\mathcal{L}$ 對 $\{n_t, i_t, k_t, \lambda_t\}$ 的偏導數等於零。首先, $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_t = 0$ 表示 (13.1) 式成立, 略去不寫。考慮任何 t 期, 對 n_t 偏微分, 可得

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_t} = q_t [A_t F_n(k_{t-1}, n_t) - w_t] = 0 \;\;\Rightarrow\;\; A_t F_n(k_{t-1}, n_t) = w_t。$$

這是最適勞動選擇的一階條件 (13.2) 式。其次, 對 i_t 偏微分, 一階條件是

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_t} = \lambda_t - q_t = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda_t = q_t。$$

上式要求投資的折現邊際報酬 λ_t 等於商品折現價格 q_t, 這是當然之理, 因爲最適投資要求邊際利潤等於零。最後, 對 k_t 微分 (請留意, k_t 出現在 t 及 $t+1$ 兩期), 一階條件是

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = q_{t+1} A_{t+1} F_k(k_t, n_{t+1}) + (1-\delta)\lambda_{t+1} - \lambda_t = 0。$$

移項後, 一階條件也可寫成

$$\lambda_t = q_{t+1}\mathrm{MPK}_{t+1} + (1-\delta)\lambda_{t+1}。$$

用白話說, 投資的邊際報酬 λ_t 包括兩個部分: 第一項是新增產出的折現價值 $q_{t+1}\mathrm{MPK}_{t+1}$, 第二項是殘餘資本存量的商品價值 $(1-\delta)\lambda_{t+1}$。請注意, 我們用設算價格 λ_{t+1} 衡量資本的殘餘價值。上式兩邊同除 q_t (或 λ_t), 利用 $q_{t+1}/q_t = 1/(1+r_t)$, 得到 $A_{t+1}F_k(k_t, n_{t+1}) = r_t + \delta$。此即最適投資的一階條件 (13.3) 式。

利用上式式定義的遞迴關係, $\lambda_{t+1} = q_{t+2}\text{MPK}_{t+2} + (1-\delta)\lambda_{t+2}$, 代回等式右邊, 並逐期向未來疊代, 可得

$$\begin{aligned}\lambda_t &= q_{t+1}\text{MPK}_{t+1} + (1-\delta)\overbrace{\left[q_{t+2}\text{MPK}_{t+2} + (1-\delta)\lambda_{t+2}\right]}^{\lambda_{t+1}} \\ &= q_{t+1}\text{MPK}_{t+1} + (1-\delta)q_{t+2}\text{MPK}_{t+2} + (1-\delta)^2\lambda_{t+2} \\ &= \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} q_{t+j+1}(1-\delta)^j\text{MPK}_{t+j+1}\text{。}\end{aligned}$$

兩邊同除 λ_t (或 q_t), 利用 $q_{t+j+1}/q_t = 1/(1+r_t)\cdots(1+r_{t+j})$, 即得到永續經營情形下的一階條件 (13.4) 式。

廠商的極值問題也要滿足**橫截條件** (transversality condition), 讀者曾在上冊第 9 章遭遇過。在本節的模型中, 橫截條件是

$$\lim_{T\to\infty} \lambda_T k_T = 0\text{。}$$

因爲 $\lambda_T = q_T$, 此一條件也可寫成 $\lim q_T k_T = 0$。簡單的說, 橫截條件要求**期末資本存量的極限商品價值等於零**, 這是保證廠商價值或股東財富極大的充分條件。此一條件看似抽象, 但背後直觀不難理解。

假設廠商只能存活有限的 T 期。若關廠之際, 廠商還存留 $k_T > 0$ 的機器設備未及使用, 這必然不是最適選擇, 因爲已經「沒有明天」了, 這些設備等於是「丟入大海」, 不能爲股東創造財富。更精確的說, 若關廠時資本仍有商品價值 (即 $q_T k_T > 0$), 則股東財富仍有增加空間。此時, 廠商只要少留一些資本設備, 即可在存活期間增加股東財富。因爲廠商不能選擇 $k_T < 0$ (資本畢竟不是債券!), 因此 $q_T k_T = 0$ 或 $k_T = 0$ (因爲 $q_T > 0$) 的狀態必然表示廠商已經「榨乾」了資本的利用價值, 股東財富沒有再增加的空間。無限生命的情形也是一樣。此時的條件應寫成 $\lim q_T k_T = 0$ (請注意, 不是 $\lim k_T = 0$), 表示資本沒有極限商品價值。以上的直觀論述與第 9 章的消費者選擇問題類似, 讀者應回去再體會一次。

13.3 投資需求函數

利用一階條件 (13.3) 式, 我們可以推導廠商的投資需求函數。根據資本移動方程式, 廠商若能決定下期的**期待資本存量** (desired capital stock), 以 k_t^* 表示, 則必要的投資支出即爲 $i_t^d = k_t^* - (1-\delta)k_{t-1}$。基本上, 影響投資需求的因素不外邊際成本及預期報酬, 分項解說於下。

- 實質利率上升

  實質利率是投資的機會成本, 因此利率上升會打擊廠商的投資意願, 這道理與實質工資率上升對勞動需求的影響沒有什麼不同。事實上, 根據 (13.3) 式, 當實質利率 r_t 上升時, 投資的機會成本上升, 其他情形不變下, 期待資本存量 k_t^* 下降, 導致投資支出下降。以圖 13.2 說明, 原來的最適選擇落於 $\mathrm{MPK}_{t+1} = r_t + \delta$ 的 E 點, 期待資本存量是 k^E。當實質利率 r_t 上升時, 成本線上移, 但 MPK_{t+1} 曲線不動, 最適選擇移向 B 點, 期待資本存量降爲 k^B, 對應的投資支出也隨之下降。

  現實世界中, 廠商對利率波動極爲敏感, 微不足道的利率上升也能令廠商「雞飛狗跳」, 投資巨幅下降。換言之, 投資需求的**利率彈性**極高。這中間有一個簡單的道理。讀者知道, 資本存量是過去投資活動累積而成的最終結果, 因此一般情形下, 投資占資本存量的比例極小。正因爲如此, 存量的些微變動會導致投資支出的巨幅**比例**變動。

  我們用實例爲讀者解說。1980 年代以來, 台灣的**資本產出比** (capital-output ratio) 約爲 3 倍, 這表示三單位的有形資本大概可以創造一單位的產出。同期間, 美國的資本產出比是 2.5 倍, 但近年來呈現上升趨勢。法國經濟學者 Thomas Piketty 甚至認爲歐美各國的資本產出比已經回到 20 世紀初的水準, 約爲 7 倍。考慮台灣的情形, 假設資本產出比是 $K/Y = 3$。根據資料, 投資的 GDP 占比 I/Y 約爲 20%, 因此資本

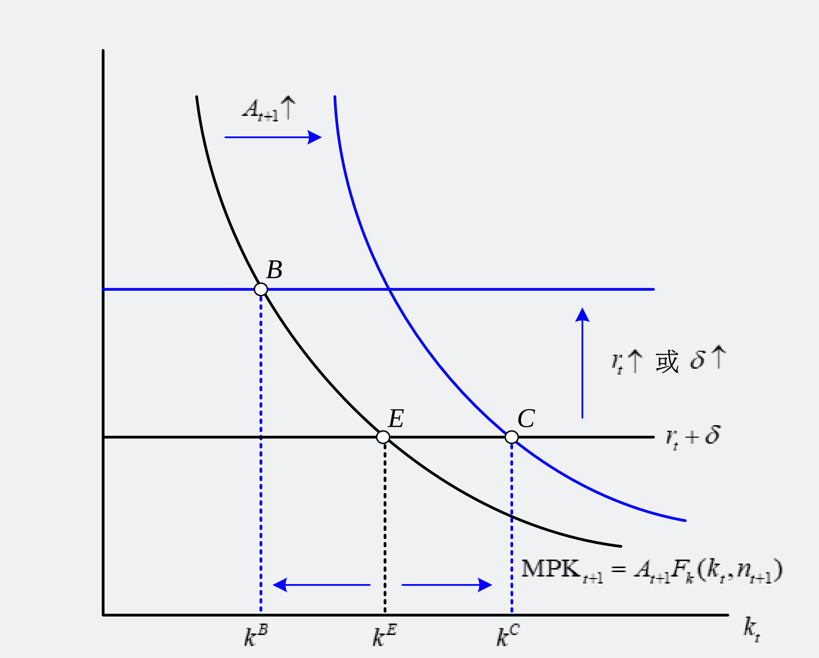

圖 13.2: 期待資本存量

存量大約是投資支出的 15 倍 ($K/I = 3/0.2$)。若資本存量是 100, 則對應的投資支出約爲 100/15=6.7。假設實質利率上升使資本存量下降一單位, 則投資支出也下降一單位, 但下降比例是 $1/6.7 \cong 15\%$! 讀者看到, 資本存量的小幅變動會導致投資流量巨幅比例變動 (見習題 2)。

- 資本折舊率上升

資本耗損也是投資的機會成本, 故折舊率 δ 上升也會導致期待資本存量下降 (見圖 13.2)。給定期初資本存量 k_{t-1}, 這表示投資淨額 $(k_t^*-k_{t-1})$ 必然下降, 但因爲折舊投資 δk_{t-1} 上升了, 投資毛額 (即淨投資加折舊投資) 的變動方向無法確定。想像阿達養牛耕田, 牛隻不幸罹患口蹄疫, 折損慘重。爲了生產, 阿達必須補足損失的牛隻, 這是折舊投資, 但因爲耗損成本上升了, 阿達對牛隻的淨需求下降, 最後的投資總額須視兩者

的相對變動幅度而定。現實世界中, 資本設備的耗損速度各不相同, 理論分析多假設折舊率固定不變 (見習題 3e 及 4)。

- 預期要素生產力上升

根據一階條件 (13.3) 式, 影響廠商投資意願的是明天或預期的邊際產出 MPK_{t+1}, 不是今天的 MPK_t。當期要素生產力 A_t 上升固然多多益善, 但影響的是期初資本的邊際產出 $\mathrm{MPK}_t = A_t F_k(k_{t-1}, n_t)$, 與期末資本存量 k_t 無關, 換言之, 如果衝擊不能持續, 廠商沒有理由改變資本規模。直觀上, 只有明天的邊際生產力上升, 廠商才會擴大生產規模, 增加投資支出。圖 13.2 中, 原來的資本存量是 k^E。假設 A_{t+1} 上升, 例如, 廠商預期下期油電價格下降。此一變動使明天的邊際產出 MPK_{t+1} 上升, 導致 MPK 曲線外移, 在原利率水準下, 最適選擇自 E 點移向 C 點, 期待資本存量增為 k^C, 投資支出增加。

- 期初資本存量下降

假設期初資本存量 k_{t-1} 因地震而下降, 這會使當下的 MPK_t 上升, 但不影響未來的 MPK_{t+1}, 故期待資本存量 k_t^* 不變。根據資本移動方程式, 因為 k_t^* 不受影響, k_{t-1} 下降會導致投資支出 $i_t = k_t^* - (1-\delta)k_{t-1}$ 增加 (除非折舊率 $\delta = 1$)。倒過來說, 期初資本存量越高, 則廠商的投資意願越低, 亦即, 投資需求與期初資本存量呈反向關係。初學者經常對這種反向關係感到迷惑, 其實道理非常簡單。想像阿達原有牛隻 90 頭, 最適牛隻存量是 100 頭, 故本期需增購 10 頭。不幸宵小橫行, 農場裡的 40 頭牛被偷盜私宰。此一損失不影響原來的期待牛隻存量, 因此阿達的投資支出必須從 10 頭增為 50 頭。

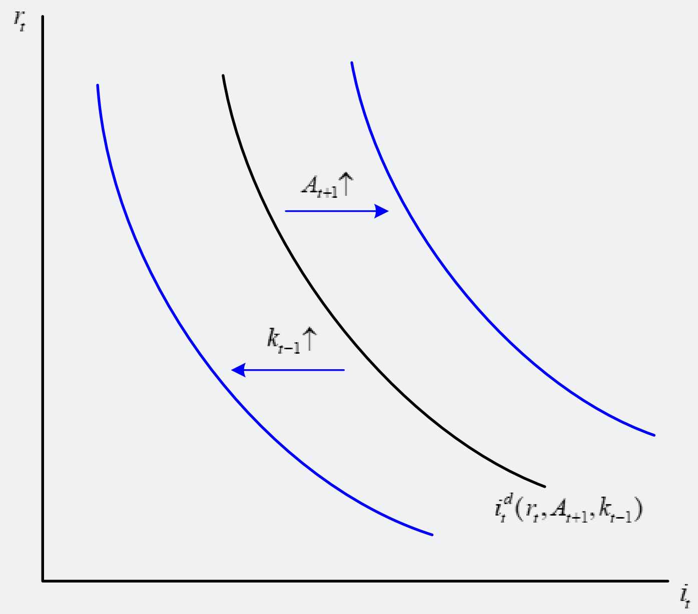

圖 13.3: 投資需求曲線

投資需求函數

總結以上分析, 代表性廠商或整體經濟的投資需求函數可以表示成

$$i_t^d = i_t^d(\underset{(-)}{r_t}, \underset{(+)}{A_{t+1}}, \underset{(-)}{k_{t-1}}, \underset{(?)}{\delta})。$$

爲方便參考, 圖 13.3 畫出廠商的投資需求曲線。首先, 投資隨實質利率上升而下降, 需求曲線的斜率爲負; 其次, 期初資本存量上升也會使投資下降, 導致需求曲線左移, 而未來要素生產力上升使投資增加, 導致需求曲線右移。以上的投資需求, 連同民間消費及政府支出, 共同形成整體經濟對商品的總需求, 這是決定均衡產出的關鍵因素。

13.4 延伸分析: 投資的調整成本*

除了利息成本及折舊耗損外, 廠商的投資活動還必須面對許多額外的支出。想像老農阿達養驢耕地, 驢性彆扭, 長年來阿達已學會了如何討好所養的一隻老驢。如今老驢年華已盡, 阿達必須重新學習如何適應新買的一隻小驢, 這是阿達投資必須付出的額外成本。現實世界中, 這些因投資而衍生的額外成本包括員工訓練, 資金調度, 環保要求, 甚至賄賂官員等支出, 文獻中稱爲**投資的調整成本** (adjustment cost of investment)。本節要分析調整成本對廠商投資決策的影響, 模型稍微複雜, 適合研究生閱讀, 初學者可直接略過 (除了數式醜陋外, 其實也不難)。爲了簡潔, 我們不考慮無關分析的勞動投入及生產衝擊, 故生產函數可寫成 $y_t = f(k_{t-1})$; 函數 f 滿足 $f' > 0, f'' < 0$。

調整成本函數

一般情形下, 機器耗損大概沒有什麼調整成本, 因此淨投資或資本存量變動才是影響調整成本的主要因素。此外, 調整成本應與淨投資的**相對規模**有關; 像台積電或英代爾這等大廠, 幾百萬元買個機器設備有如鳳毛麟角, 調整成本微不足道, 但小本經營的「老農阿達」恐怕就得折騰一番, 付出較高的調整成本。更嚴格的說, 若期初資本存量是 k_{t-1}, 則投資淨額 $(i_t - \delta k_{t-1})$ 的相對規模可定義成 $x_t = (i_t - \delta k_{t-1})/k_{t-1} = k_t/k_{t-1} - 1$。令 ψ_t 表示調整成本, 則 ψ_t 可視爲 x_t 的函數, 寫成 $\psi_t = \psi(x_t)$。

一個正常的調整成本函數應該要滿足幾個基本性質。首先, 當淨投資等於零時, 廠商不需支付任何調整成本, 故 $\psi(0) = 0$。其次, 當資本存量變動時, 不論上升或下降, 調整成本都會增加, 這表示邊際成本 $\psi' > 0$。最後, 邊際成本會隨投資相對變動幅度擴大而遞增, 故 $\psi'' > 0$。

圖 13.4 畫出一個對稱的調整成本函數。當 $x_t = 0$ 時, 淨投資等於零,

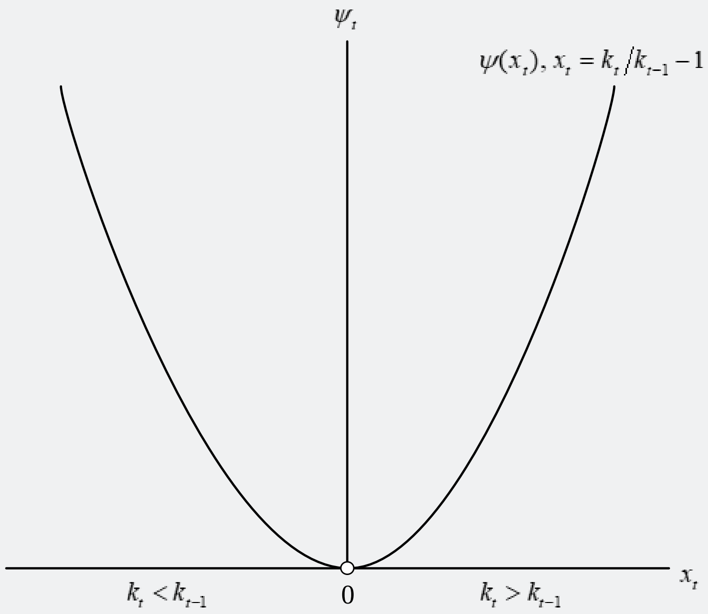

圖 13.4: 調整成本函數

調整成本落於最低的 $\psi_t = 0$。當 $x_t > 0$ 時, $k_t > k_{t-1}$。此時若 k_t 上升或 k_{t-1} 下降, 淨投資變動的相對幅度擴大, 調整成本將以遞增速度上升, 即 $\psi' > 0, \psi'' > 0$。當 $x_t < 0$ 時, 淨投資小於零。此時若 k_t 上升或 k_{t-1} 下降, 則淨投資的相對變動不是擴大, 而是縮小, 故調整成本會以遞減速度下降。若原始的 x_t 落在這個區間, 則 k_t 下降或 k_{t-1} 上升使資本的變動幅度相對變大, 故調整成本以遞增速度上升。顯然, 只要資本存量變動的相對幅度擴大, 總成本及邊際成本都會上升, 這是調整成本函數的主要特徵。文獻中常見的函數 $\psi(x_t) = \phi x_t^2/2$ (參數 $\phi > 0$) 滿足以上所有性質, 讀者請自行驗證。

爲方便以後參考, 成本函數對 k_t 及 k_{t-1} 的一階偏導數是

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial k_t} = \frac{\psi'(x_t)}{k_{t-1}} > 0, \qquad \frac{\partial \psi_t}{\partial k_{t-1}} = \frac{-k_t \psi'(x_t)}{k_{t-1}^2} < 0。 \tag{13.5}$$

利用連鎖律, 二階偏導數是

$$\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial k_t^2} = \frac{\psi''(x_t)}{k_{t-1}^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial k_{t-1}^2} = \frac{k_t^2 \psi''(x_t)}{k_{t-1}^4} + \frac{2k_t \psi'(x_t)}{k_{t-1}^3} > 0。 \tag{13.6}$$

最適選擇問題

面對投資的調整成本, 廠商的現金流量是 $d_t = f(k_{t-1}) - i_t - \psi(x_t)$, 跨期選擇問題可寫成 (我們也可將以下的 i_t 及 x_t 代掉, 分析結果不變)

$$\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} q_t[f(k_{t-1}) - i_t - \psi(x_t)]$$

$$\text{subject to} \quad i_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1}, \ \forall t,$$

$$x_t = i_t/k_{t-1} - \delta, \ \forall t。$$

讓我們先用直觀推導最適選擇的一階必要條件。假設廠商於 t 期增購一單位 k_t, 則邊際成本除了該單位資本設備的購買支出外, 還包括衍生的調整成本 $\partial\psi_t/\partial k_t = \psi'(x_t)/k_{t-1}$, 即

$$邊際成本 = 1 + \frac{\psi'(x_t)}{k_{t-1}}。$$

廠商多帶了一單位 k_t 進入下期, 產出可增加 $f'(k_t)$。除了 $(1-\delta)$ 的殘餘價值外, 此一新增資本還可為廠商**降低**該期的調整成本 ψ_{t+1}, 以正值衡量, 等於 $-\partial\psi(x_{t+1})/\partial k_t > 0$。加總之後, 投資的折現邊際報酬是

$$邊際報酬 = \left(\frac{1}{1+r_t}\right)\left[f'(k_t) + (1-\delta) + \frac{k_{t+1}\psi'(x_{t+1})}{k_t^2}\right]。$$

上式最後一項即是新增資本能為 $t+1$ 期節省的調整成本 (見 (13.5) 式)。最適選擇要求邊際成本等於邊際報酬, 故一階條件是

$$1 + \frac{\psi'(x_t)}{k_{t-1}} = \left(\frac{1}{1+r_t}\right)\left[f'(k_t) + (1-\delta) + \frac{k_{t+1}\psi'(x_{t+1})}{k_t^2}\right]。 \tag{13.7}$$

與前面的 (13.3) 式比較, 調整成本使投資的邊際成本及邊際報酬同時上升, 外觀雖然醜陋, 但直觀並無不同。此一條件可用來決定廠商的期待資本存量, 稍後再討論。

數學推導: 一階必要條件

我們一直鼓勵讀者用直觀看待選擇問題, 特別是看似複雜的跨期模型。然而直觀有時而窮, 初學者經常對自己「說故事」的能力缺乏信心, 以下要用數學方法讓讀者「安心」。

首先, 廠商極值問題的拉式函數是 (爲了簡潔, 略去 x_t 的定義式不寫)

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} q_t \left[f(k_{t-1}) - i_t - \psi(x_t) \right] + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \left[i_t + (1-\delta) k_{t-1} - k_t \right]。$$

提醒讀者, 拉式乘數 λ_t 是投資 i_t 的邊際價值, 也是資本存量 k_t 的設算價格。考慮任意 t 期, 廠商選擇 i_t 的一階條件是 (別忘了, $x_t = i_t / k_{t-1} - \delta$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_t} = -q_t \left[1 + \frac{\partial \psi(x_t)}{\partial i_t} \right] + \lambda_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_t = q_t \left[1 + \frac{\psi'(x_t)}{k_{t-1}} \right]。 \tag{13.8}$$

上式表示: 投資的邊際報酬 λ_t 必須等於購買成本再加上邊際調整成本。這是一個重要的條件, 我們稍後將從不同角度詮釋此一條件。

給定各期投資滿足 (13.8) 式, 廠商選擇 k_t 的一階條件是

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = q_{t+1} \left[f'(k_t) - \frac{\partial \psi(x_{t+1})}{\partial k_t} \right] + (1-\delta) \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_t = q_{t+1} \left[f'(k_t) + \frac{i_{t+1} \psi'(x_{t+1})}{k_t^2} \right] + (1-\delta) \lambda_{t+1}。 \tag{13.9}$$

上式表示: 投資的邊際報酬 λ_t 有三個部分, 包括第一項的邊際產出 $f'(k_t)$, 第二項的 $i_{t+1}\psi'(x_{t+1})/k_t^2$, 這是 k_t 能爲 $t+1$ 期節省的調整成本, 及最後一項的資本殘餘價值。以上三項均以現值衡量。請注意, 對 $\psi(x_{t+1})$ 微分時, 我們視 i_{t+1} 爲給定, 故 $\partial \psi(x_{t+1})/\partial k_t = -i_{t+1}\psi'(x_{t+1})/k_t^2$。利用 (13.8) 式將上式兩邊的 λ 代掉, 同時代入 $i_{t+1} = k_{t+1} - (1-\delta) k_t$, 化簡後即得到一階條件 (13.7) 式 (請自行驗證)。

期待資本存量

一階條件 (13.7) 式可用來決定廠商的期待資本存量。首先, 根據定義, $x_t = k_t/k_{t-1} - 1$, 左邊的的邊際成本可視爲 k_{t-1} 及 k_t 的函數, 寫成

$$MC(k_{t-1}, k_t) = 1 + \frac{\psi'(k_t/k_{t-1} - 1)}{k_{t-1}}。$$

利用 (13.6) 式, $\partial MC/\partial k_{t-1} < 0$ 及 $\partial MC/\partial k_t > 0$, 亦即, 邊際成本隨期初資本存量 k_{t-1} 上升而遞減, 但隨期末資本存量 k_t 上升而遞增。同樣的, (13.7) 式右邊的邊際報酬是 k_t 及 k_{t+1} 的函數, 寫成

$$MR(k_t, k_{t+1}) = \left(\frac{1}{1+r_t}\right)\left[f'(k_t) + (1-\delta) + \frac{k_{t+1}\psi'(k_{t+1}/k_t - 1)}{k_t^2}\right]。$$

利用 (13.6) 式, $\partial MR/\partial k_t < 0$ 及 $\partial MR/\partial k_{t+1} > 0$, 亦即, MR 隨 k_t 上升而下降, 但與 k_{t+1} 同向變動。綜上所述, 我們可將 (13.7) 式表示成

$$MC(\underset{(-)}{k_{t-1}}, \underset{(+)}{k_t}) = MR(\underset{(-)}{k_t}, \underset{(+)}{k_{t+1}})。$$

圖 13.5 以 k_t 爲橫軸畫出 MC 及 MR 曲線, 兩者交於 E 點, 對應的期待資本存量是 k^E。這是 k_{t-1} 及 k_{t+1} 不變下, 廠商的最適選擇點。

假設地震使期初資本存量 k_{t-1} 下降。給定任一 k_t 水準, 因爲 x_t 變大, 這會使邊際調整成本上升, 但不影響邊際報酬, 故 MC 曲線上移, 而 MR 曲線不動, 新的選擇落於 A 點, 期待資本存量自 k^E 降至 k^A。因爲 k_t 及 k_{t-1} 都下降, 廠商的淨投資 $(k_t - k_{t-1})$ 可能增加, 也可能減少, 導致投資毛額的變動方向無法確定。讀者還記得, 若調整成本不存在, 則期初資本存量下降不影響期待資本存量, 故淨投資及毛投資都會增加。當存在調整成本時, 若邊際調整成本因爲地震而巨幅上升, 則廠商重建資本的企圖將變得極爲困難, 因此淨投資及毛投資都可能下降。正常情形下, 這種「地震後還不想投資」的悽慘情況不太可能發生。

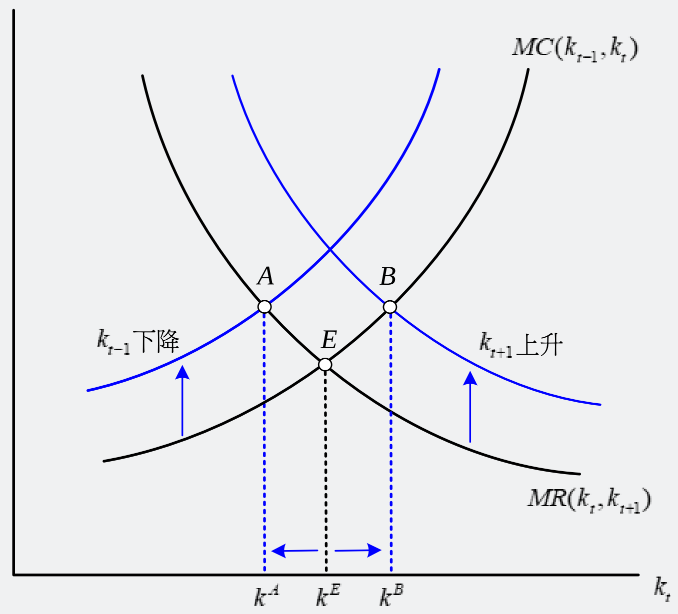

圖 13.5: 調整成本與期待資本存量

假設未來的最適資本規模 k_{t+1} 因廠商預期景氣復甦而上升。讀者知道, 這種樂觀預期會刺激今天的投資意願。當存在調整成本時, 還有另一股力量會進一步刺激廠商的投資需求。根據前面的分析, MR 是 k_{t+1} 的正向函數, 因此當 k_{t+1} 上升時, MR 曲線上移, 但不影響 MC 曲線, 最適選擇從 E 點移至 B 點, 期待資本存量增爲 k^B。直觀的說, 投資可以節省未來的調整成本, 如果今天不投資, 則未來必須負擔較高的調整成本, 故面對未來景氣復甦, 廠商有更強的誘因增加投資。

最後, 利率變動對投資的影響不因存在調整成本而改變。當利率上升時, MR 曲線下移, 導致投資下降。綜上所述, 除了期初資本存量變動的影響稍有不同外, 調整成本不影響投資需求函數的基本性質。

杜賓 q 理論

結束本節以前, 我們要借用調整成本模型簡略介紹著名的**杜賓** q (Tobin's q), 這是關於投資需求的另一個重要模型。杜賓教授 (James Tobin) 是凱因斯學派大將, 1981 年諾貝爾經濟學獎得主, 對當代總體理論 (包括古典理論) 有重要貢獻。

首先,「此 q 非彼 q」, 杜賓 q 不是我們模型中的 q, 但兩者存在密切關係。讓我們用前面「老農養驢」的隱喻解說杜賓 q 的背後直觀。老農阿達養的一隻老驢年華逝去, 他在市場裡看到一頭身形壯碩, 但性情卻更爲彆扭的小驢, 要價十石小麥。阿達極爲苦惱, 因爲他不知道這麼昂貴, 性格又古怪的小驢能爲他創造多少利潤。爲此, 他必須好好研讀本書, 知道如何計算「未來利潤的折現值」! 這是阿達買驢的調整成本。好心的杜賓教授告訴他:「不必擔心, 養驢的大有人在, 你只要查一下養驢農場的股票價格, 即可得知一頭驢大概能爲你創造多少利潤了。」阿達上 Google 查了一下, 發現平均一頭古怪小驢的股價是十五石小麥, 這大約是小驢所能創造的未來利潤。阿達開心地買了驢, 因爲邊際利潤大於成本。

用杜賓教授的話說, 十五石股價是小驢的**市場價值**, 而十石要價是小驢的**重置成本** (replacement cost), 兩者的比值即是杜賓 q。顯然, 只要 q 值不小於一就值得進行投資, 因爲阿達至少能回收成本, 此即杜賓 q 理論的主要結論。杜賓模型簡單而且相當直觀, 因此極受實務界及管理學界歡迎。以下要從此一角度重新詮釋調整成本模型。

在本節的廠商選擇問題中, 資本設備的購買價格是一單位商品, 若以起始期的商品單位衡量, 則爲 q_t, 這是資本的折現重置成本。另一方面, (13.9) 式是一單位資本存量的折現邊際價值 λ_t。根據 13.2 節的分析, 此一邊際價值也等於未來各期現金流量的折現總值。顯然, λ_t/q_t 比值即是杜賓 q。根據一階條件 (13.8) 式, 此一比值等於當期商品價格再加上邊際調

整成本, 亦即,

$$\text{杜賓 } q = \frac{\lambda_t}{q_t} = 1 + \frac{\psi'(x_t)}{k_{t-1}}。$$

因爲邊際調整成本 $\psi'(x_t) > 0$, 杜賓 q 必然大於一。請注意, 若調整成本不存在, 則杜賓 q 等於一。

顯然, 杜賓 q 不過是一階條件 (13.7) 或 (13.8) 式的另一種詮釋。嚴格的說, 廠商真正關心的是資本的「邊際市場價值」, 而股價反映的則是資本的「平均市場價值」, 利用前者算出的 q 值稱爲**邊際** q (marginal q), 後者算出的稱爲**平均** q (average q)。這兩個 q 值不等, 但存在特定關係。這個問題已經超出本章範圍, 有興趣的讀者請參考其他文獻。

13.5 應用分析: 投資租稅扣抵

廠商的投資活動不僅會影響總體經濟的短期表現, 也是決定一國長期成長的關鍵因素, 因此面臨經濟衰退, 有志之士總是大聲疾呼: 政府應鼓勵民間投資。政府有許多手段可以刺激廠商的投資意願, 本節要考慮一個常見的政策手段, 稱爲**投資租稅扣抵** (investment tax credit)。所謂投資租稅扣抵, 即是政府對廠商投資支出的租稅抵免。直觀上, 這種政策降低了廠商的投資成本, 因此會刺激廠商的投資意願。

爲了簡單, 我們不考慮勞動投入及要素生產力, 因此生產函數可寫成 $y_t = f(k_{t-1})$。假設政府對廠商投資支出 i_t 給予比例 $\phi_t \in (0,1)$ 的租稅扣抵, 因此廠商的實際投資支出是 $(1-\phi_t)i_t$。根據定義, 現金流量等於產出減投資支出, 故廠商的現金流是 $d_t = f(k_{t-1}) - (1-\phi_t)i_t$。顯然, 租稅扣抵會使廠商的現金流量增加。現實世界中, 這種政策經常排除折舊投資, 僅適用於淨投資, 我們假設折舊投資也包括在內不影響分析結果。事實上, 折舊費用是利潤的減項; 折舊費用越高, 廠商的所得稅賦也越低, 這等於是對折舊投資給予租稅扣抵 (見習題 3)。

面對各期實質利率 $\{r_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及租稅扣抵 $\{\phi_t\}_{t=1}^{\infty}$, 廠商的決策問題是

$$\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} q_t \left[f(k_{t-1}) - (1-\phi_t) i_t \right]$$
$$\text{subject to} \quad i_t = k_t - (1-\delta) k_{t-1}, \ \forall t。$$

表面上, 以上問題與 13.2 節沒有什麼不同, 但因爲存在租稅扣抵, 資本財的商品價格不再等於一, 而是 $(1-\phi_t)$。事實上, $(1-\phi_t)$ 乃是投資相對於消費的價格, 因此廠商若決定出售資本設備, 則一單位資本的 t 期清算價值是 $(1-\phi_t)$, 這是以上問題的關鍵特徵。直觀上, 資本的淸算價格之所以小於一, 是因爲期初資本存量上升會使廠商損失投資所能享受的租稅優惠, 即遭受**資本損失** (capital loss)。

假設廠商於 t 期增購一單位資本設備, 因爲政府補貼了 ϕ_t 比例, 故實際的購買成本是 $(1-\phi_t)$。這一單位資本設備可爲 $t+1$ 期創造 $f'(k_t)$ 的額外產出, 剩下的 $(1-\delta)$ 若在商品市場出售, 清算價值是 $(1-\phi_{t+1})(1-\delta)$, 因此投資的邊際報酬是 $\Delta d_{t+1} = f'(k_t) + (1-\phi_{t+1})(1-\delta)$。請注意, 我們用 $(1-\phi_{t+1})$ 衡量殘餘資本的商品價值。最適選擇要求投資的邊際成本等於折現邊際報酬, 故一階條件是

$$1-\phi_t = \frac{f'(k_t) + (1-\phi_{t+1})(1-\delta)}{1+r_t}。$$

移項整理後, 上式也可表示成

$$f'(k_t) = (1-\phi_t)(1+r_t) - (1-\phi_{t+1})(1-\delta)。 \tag{13.10}$$

用白話說, 資本的邊際產出必須等於資金成本減殘餘價值。當各期 $\phi_t = \phi$ 時, 上式退化成

$$f'(k_t) = (1-\phi)(r_t+\delta)。 \tag{13.11}$$

顯然, 租稅扣抵率 ϕ 永久上升會降低投資的機會成本, 導致期待資本存量及投資需求上升 (請自行繪圖補充)。

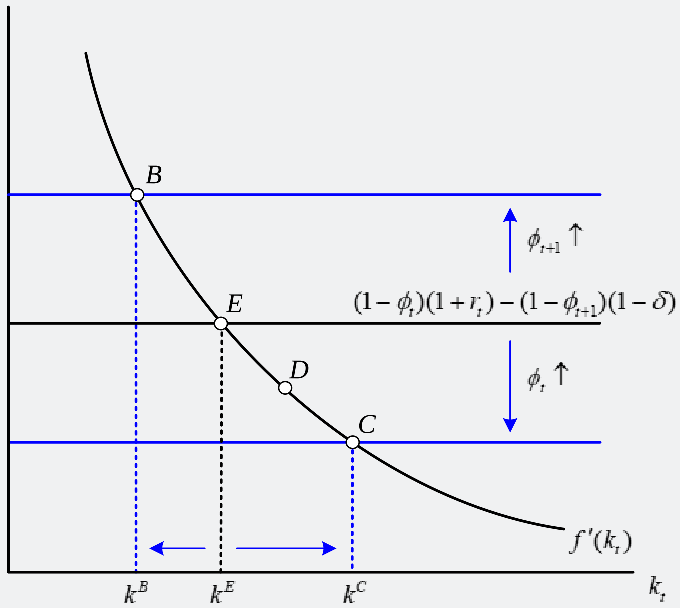

圖 13.6: 租稅扣抵與投資需求

根據 (13.10) 式, 今天和未來的租稅優惠都會影響廠商的投資決策, 但效果截然不同。直觀上, 如果租稅扣抵極爲短暫, 爲了享受這稍縱即逝的租稅優惠, 廠商會增加投資支出, 甚至提前未來的投資計畫。相反的, 若政府宣布未來才實施租稅抵免, 則廠商會延緩投資支出。簡單的說, 廠商會選擇機會成本相對較低或邊際報酬相對較高時進行投資; 就像消費者一樣, 廠商也可以「跨期替代」! 以下用圖形爲讀者解說。

圖 13.6 中, 廠商原來選擇 E 點, 期待資本存量是 k^E。假設 ϕ_t 上升而 ϕ_{t+1} 不變。根據 (13.10) 式, 這種短暫的租稅優惠降低了投資的機會成本, 導致成本線下移, 最適選擇移至 C 點, 期待資本存量增爲 k^C, 投資需求增加。相反的, 若 ϕ_t 不變, 但廠商預期 ϕ_{t+1} 上升, 則成本線上移, 最適選擇移向 B 點, 期待資本存量降爲 k^B, 投資需求減少。直觀而言, 未來的租稅

扣抵會降低今天投資的清算價值,因此今天投資將遭受資本損失,聰明的廠商會等到明天成本較低時才投資。

由以上的分析可知, 類似租稅減免這種意在鼓勵投資的政策應該要「迅雷不及掩耳, 突然而短暫」, 才能產生最大的刺激效果。面對永久性的租稅扣抵, 今天投資或明天投資沒有什麼不同, 雖然也能引導廠商增加投資 (因爲投資成本還是下降了), 但其刺激效果一定不及暫時性的租稅優惠。圖 13.6 中, 假設原來各期 $\phi_t = \phi$, 最適選擇是 E 點。政府宣布 ϕ 永久上升, 則新的選擇會落於 E, C 兩點之間的 D 點 (爲什麼?), 效果顯然不及 C 點的暫時性政策。簡單的說, 永久性租稅扣抵乃是當期及預期未來租稅優惠這兩種政策的混合體; 今天的租稅優惠使投資增加, 但未來的優惠使投資下降, 因此永久性政策的刺激效果必然小於暫時性政策。

考慮以下實例。假設各期利率 $r_t = r$, 生產函數 $f(k) = k^\alpha, \alpha \in (0,1)$。當各期 $\phi_t = \phi$ 時, (13.11) 式整理後以自然對數表達, 可寫成

$$\ln k = \frac{\ln \alpha}{1-\alpha} - \frac{\ln(1-\phi)}{1-\alpha} - \frac{\ln(r+\delta)}{1-\alpha}。$$

上式可用來估計租稅扣抵永久上升對投資的影響。對 ϕ 微分, 得到

$$\frac{d \ln k}{d\phi} = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\phi)}。$$

假設原來不存在投資扣抵, 即 $\phi = 0$, 則 ϕ 上升的邊際效果是

$$\left.\frac{d \ln k}{d\phi}\right|_{\phi=0} = \frac{1}{1-\alpha}。$$

這是**永久性租稅扣抵**的政策彈性。假設資本份額 $\alpha = 1/3$, 則 ϕ 上升一個百分點會使廠商的期待資本存量上升 $1/(1-1/3) = 1.5\%$。

(13.11) 式不能用來分析暫時性租稅減免的政策效果, 因爲此時正確的一階條件是 (13.10) 式。以自然對數表達, (13.10) 式可寫成

$$\ln k_t = \frac{\ln \alpha}{1-\alpha} - \frac{\ln[(1-\phi_t)(1+r) - (1-\phi_{t+1})(1-\delta)]}{1-\alpha}。$$

令 ϕ_{t+1} 不變, 上式對 ϕ_t 微分可得

$$\frac{d\ln k_t}{d\phi_t} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left[\frac{1+r}{(1-\phi_t)(1+r)-(1-\phi_{t+1})(1-\delta)}\right]。$$

假設原來不存在投資扣抵, 則 ϕ_t 上升的邊際效果是

$$\left.\frac{d\ln k_t}{d\phi_t}\right|_{\phi_t=\phi_{t+1}=0} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1+r}{r+\delta}\right)。$$

這是**暫時性租稅扣抵**的政策彈性。假設實質利率 $r = 3\%$, 折舊率 $\delta = 7\%$, 則 ϕ_t 上升一個百分點將使期待資本存量增加 $(3/2)(1.03/0.1) \cong 15.5\%$。這是永久性政策的 10 倍!

回顧歷史, 各國政府 (台灣也在內) 先是一個「五年免稅」優惠, 但五年過後, 再來一個「五年免稅」。政客自認聰明, 將一個暫時的租稅優惠搞成了永久的減稅政策。活在這種環境下的廠商逐漸形成「理性預期」, 政策效果焉有不打折之理? (見習題 5)

13.6 全面均衡

截至目前, 我們分析的仍是個別決策者的行爲。首先, 消費者在不同市場利率下決定消費和儲蓄, 而廠商則在不同工資率及利率下, 決定勞動需求及投資需求。消費者和廠商的選擇及政府政策共同形成勞動市場, 借貸市場及商品市場的總供給及總需求。當任何一個市場的供需不等時, 價格就會調整, 直到所有市場的供需相等爲止。此時, 經濟社會處於全面均衡狀態, 所有成員的目標均已滿足。

更嚴謹的說, Ramsey 模型的外生變數包括各期要素生產力 $\{A_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及政府政策 $\{G_t, T_t\}_{t=1}^{\infty}$。給定這些外生變數, 全面均衡包括各期市場價格 $\{w_t, r_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及交易數量 $\{c_t, i_t, y_t, k_t, n_t, b_t\}_{t=1}^{\infty}$ 等 8 個內生變數。這些數量和價格必須保證以下條件同時滿足。爲方便參考, 我們全部列示, 並特別標示其中的四個條件。

1. **消費者效用極大**: 面對市場利率, 消費者的終身效用極大, 這表示預算限制及一階條件必須滿足, 亦即,

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_t), \tag{a}$$

$$c_t + b_t = (d_t + w_t - T_t) + (1 + r_{t-1})b_{t-1}。$$

2. **廠商價值極大**: 面對市場利率及工資率, 廠商價值或股東財富極大, 因此以下兩個一階條件也要滿足:

$$\mathrm{MPL}_t = A_t F_n(k_{t-1}, n_t) = w_t,$$

$$\mathrm{MPK}_{t+1} = A_{t+1} F_k(k_t, n_{t+1}) = r_t + \delta。 \tag{b}$$

此外, 資本累積滿足移動方程式:

$$k_t = i_t + (1 - \delta)k_{t-1}。 \tag{c}$$

最後, 現金流量或股利是 $d_t = y_t - w_t n_t - i_t$。

3. **政府預算限制**: 政府預算滿足

$$G_t + (1 + r_{t-1})b^g_{t-1} = T_t + b^g_t。$$

給定期初公債餘額 b^g_{t-1}, 政府消費支出 G_t 及定額稅淨額 T_t, 期末公債餘額 b^g_t 可單獨由上式決定。

4. **市場供需相等**: 市場利率及工資率必須保證勞動, 債券及商品市場同時達到均衡。首先, 在勞動市場中, 消費者供給一單位的勞力, 而廠商的勞動需求是 $n^d_t(w_t, A_t, k_{t-1})$, 故結清條件是

$$n^d_t(w_t, \cdots) = n^s_t = 1。$$

在借貸市場中, 政府公債餘額 b^g_t 已由政府預算限制決定。市場均衡要求民間對債券的淨需求等於公債發行量, 故結清條件是

$$b^d_t(r_t, \cdots) = b^g_t。$$

在商品市場中, 均衡要求商品供給 $y_t^s(w_t, A_t, k_{t-1})$ 等於總需求, 包括消費需求, 投資需求及政府購買, 故結清條件是

$$c_t^d(r_t, \cdots) + i_t^d(r_t, \cdots) + G_t = y_t^s(w_t, \cdots)。 \tag{d}$$

這個看似複雜的均衡體系其實非常簡單。首先, Walras 市場法則仍然成立, 簡要證明如下。站在任何 t 期, 期初政府公債 b_{t-1}^g 必然爲民間持有, 故 $b_{t-1} = b_{t-1}^g$。利用政府預算限制, 並將廠商股利 $d_t = y_t^s - w_t n_t^d - i_t^d$ 代入消費者的預算限制, 整理後可得

$$\left[(c_t^d + i_t^d + G_t) - y_t^s\right] + w_t(n_t^d - 1) + (b_t^d - b_t^g) = 0。$$

顯然, 三個市場的超額需求加總等於零, 故其中若有兩個市場已達均衡, 則最後一個也必然處於均衡狀態。

均衡條件還可進一步簡化。首先, 因爲均衡勞動恆等於一, 故任何 t 期的產出是 $y_t = A_t F(k_{t-1}, 1)$。此外, 根據廠商的一階條件, 均衡工資率等於勞動的邊際產出, 故 $w_t = A_t F_n(k_{t-1}, 1)$。顯然, 給定要素生產力 A_t 及期初資本存量 k_{t-1}, 任何 t 期的產出及實質工資率都是一個定值, 與其他內生變數無關。爲了簡潔, 我們將生產函數寫成 $y_t = A_t f(k_{t-1})$, 對應的資本邊際產出是 $A_t f'(k_{t-1})$。最後, 政府公債餘額 b_t^g 可由政府預算限制單獨決定, 故均衡債券餘額 $b_t = b_t^g$ 也同時決定。

至此, 我們已決定了 $\{w_t, y_t, n_t, b_t\}$ 等四個變數, 剩下的 $\{r_t, c_t, i_t, k_t\}$ 剛好可由 (a)-(d) 四式決定。讀者如果仍嫌複雜, 其實真正關鍵的只有兩式。利用 (b) 式將 (a) 式中的利率 r_t 代掉, 同時利用 (c) 式將商品市場結清條件中的投資 i_t 也代掉, 則均衡條件可化簡成:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[A_{t+1} f'(k_t) + (1 - \delta)\right], \tag{13.12}$$

$$c_t + \left[k_t - (1 - \delta)k_{t-1}\right] + G_t = A_t f(k_{t-1})。 \tag{13.13}$$

以上兩式共同決定均衡消費 c_t 及期末資本存量 k_t。一旦這兩個變數決定了, 其他變數也同時決定。

(13.12)-(13.13) 兩式形成一組包括前後期消費及資本存量的一階差分聯立方程。透過此一動態體系, 今天的消費和投資取決於明天的消費, 而明天的產出和消費又取決於今天的投資, 因此今天和明天不再互相獨立。與上冊第 10 章或第 12 章的模型比較, 這樣的動態均衡顯然較爲複雜, 但也有意思多了。

數學上, 我們若進一步利用 (13.13) 式將 (13.12) 式中的消費也代掉, 則剩下的會是一條資本存量的**二階差分方程式** (second-order difference equation)。讀者在 13.4 節的 (13.7) 式也見過這樣的方程式。此類二階差分方程在動態均衡模型中極爲常見, 分析起來當然要費事一些。不過, 讀者可以先「喘口氣」, 以後再爲諸位 (特別是研究生) 解說。

市場供需模型

讓我們將分析焦點對準市場結清條件, 暫時忘掉 (13.12)-(13.13) 兩式。因爲均衡勞動恆等於一, 我們可忽略勞動市場, 僅考慮商品市場及債券市場。根據 Walras 市場法則, 若商品市場達到均衡, 則債券市場也一定處於均衡狀態, 因此真正關鍵的是商品市場。爲了完整, 我們同時考慮這兩個市場的結清條件:

$$\begin{aligned}
\text{商品市場:}\quad & c_t^d(r_t,\cdots)+i_t^d(r_t,\cdots)+G_t=A_t f(k_{t-1}),\\
\text{債券市場:}\quad & b_t^d(r_t,\cdots)=b_t^g。
\end{aligned}$$

圖 13.7 畫出商品市場及債券市場的全面均衡。在商品市場中, 商品供給 $A_t f(k_{t-1})$ 是一條垂直線, 與實質利率無關。商品需求包括家計單位的消費需求, 廠商的投資需求及政府消費購買。因爲消費需求及投資需求都是利率的負向函數, 故商品需求 y_t^d 是一條負斜率的曲線, 與商品供給

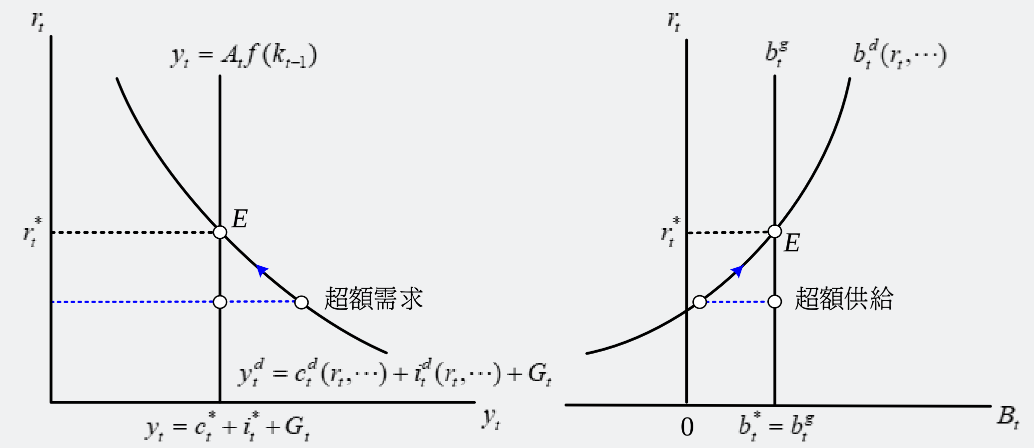

圖 13.7: 全面均衡: 商品市場與債券市場

線交於 E 點, 對應的均衡利率是 r_t^*, 均衡產出滿足 $y_t = c_t^* + i_t^* + G_t$。

在債券市場中, 政府公債發行量 b_t^g 已由政府預算限制決定了, 故債券供給也是一條垂直線。消費者決定債券需求; 當實質利率上升時, 民間儲蓄意願增加, 故債券的淨需求 b_t^d 是一條正斜率的曲線。均衡要求政府發行的公債全部爲民間購買或持有, 兩者交於 E 點, 均衡利率是 r_t^*, 與商品市場決定的水準相同。

若現行市場利率低於均衡水準, 則如圖所示, 商品市場會出現超額需求。直觀上, 此時的消費及投資實在太「便宜」了, 結果必然是產出供不應求。正因爲利率水準太低了, 消費者及廠商急著借錢融通消費及投資, 因此債券市場必然出現超額供給。在完全競爭的市場中, 這種失衡現象當然不可能永遠持續, 於是市場利率開始上升, 消費需求及投資需求下降, 而儲蓄意願及債券需求上升, 直到均衡的 E 點爲止。

表面上, 這裡的均衡似乎與第 10 章的稟賦模型沒有什麼不同。然而, 這只是一種假象。的確, 站在任何 t 期, 因爲商品供給量已經給定了, 因此

市場均衡形似稟賦經濟, 但這裡的商品「稟賦」會隨投資而變動; 今天投資越多, 明天的「稟賦」也越多。這是一個貨真價實的動態世界, 其中關鍵當然牽涉到國民儲蓄。我們進一步爲讀者解說。

國民儲蓄

國民儲蓄等於民間儲蓄加政府儲蓄, 而民間儲蓄包括家計儲蓄及廠商儲蓄。根據定義, 廠商的現金流量是 $d_t = y_t - w_t n_t - i_t$, 代入消費者的預算限制, 利用 $n_t = 1$, 整理後可得

$$c_t + (b_t - b_{t-1}) + i_t = (y_t + r_{t-1} b_{t-1}) - T_t。$$

這是民間部門面對的預算限制, 右邊是民間可支配所得, 左邊是民間所得的支配用途, 包括家計消費, 債券累積及廠商投資。根據定義, 民間儲蓄等於可支配所得減消費支出, 故民間儲蓄 s_t^P 是

$$s_t^P = (y_t + r_{t-1} b_{t-1} - T_t) - c_t = (b_t - b_{t-1}) + i_t。$$

觀察上式, 民間儲蓄等於債券增量 $(b_t - b_{t-1})$ 再加上廠商投資 i_t。顯然, 投資若要增加, 民間儲蓄未必要增加, 因爲廠商可以透過舉債, 即 $(b_t - b_{t-1})$ 下降, 支應投資計畫。街談巷議或報章媒體常說: 我們必須鼓勵民間儲蓄才能提振投資。這其實是一個「不甚精確」的說法, 因爲即使民間儲蓄不變, 甚或下降, 廠商投資也可以增加。

政府儲蓄 s_t^G 等於稅收減消費性支出及公債利息。根據政府預算限制, 政府儲蓄是

$$s_t^G = T_t - (G_t + r_{t-1}^g) = b_{t-1}^g - b_t^g。$$

顯然, 政府儲蓄也等於公債餘額變動量; 當稅收大於總支出時, 政府有正儲蓄, 負債或公債餘額下降。國民儲蓄等於民間儲蓄加政府儲蓄, 以上兩

式相加, 利用 $b_t = b_t^g, \forall t$ (因爲在封閉經濟中, 政府公債必然爲民間持有), 國民儲蓄 s_t 是

$$s_t = s_t^P + s_t^G = i_t。$$

讀者看到, 在封閉經濟中, 投資的唯一資金來源是國民儲蓄, 唯有國民儲蓄增加, 投資才能增加, 而投資增加也必然表示國民儲蓄增加, 這是國民所得恆等式, 沒有什麼高深的學問。因爲國民儲蓄不再等於零, 整體經濟透過投資可以將產出或所得在不同期間挪移, 這是第 10 章或第 12 章中的消費者多麼期盼能夠擁有的能力! 下一章將以本節定義的均衡模型分析外來衝擊的動態效果, 但開始之前, 我們要再從集權式經濟的角度詮釋以上的市場均衡。

Crusoe 的荒島經濟

讀者還記得, 上冊第 6 章曾用一個「沒有價格, 市場不存在」的假想世界隱喻市場經濟, 故事主角是漂流到荒島上的 Robinson Crusoe, 這是一個人主宰所有經濟活動的世界。我們發現競爭均衡和這個集權式經濟有極其相似的特徵。故事稍加改變, Crusoe 的荒島經濟也可用來詮釋 Ramsey 模型, 這也是許多文獻採取的分析角度。

荒島上的 Crusoe 靠種植開心果爲生, 這是一種沒有果肉的堅果, 種子可供食用, 食後極爲「開心」, 也可埋地種植, 明天又成一棵果樹。Crusoe 每天花 8 小時爬樹摘果, 可生產 $y_t = A_t f(k_{t-1})$ 的開心果, A_t 是天晴天雨等外生衝擊, k_{t-1} 是昨天播下的果種, 今天即可收成。給定每天的開心果產出, Crusoe 的問題是要吃多少, 剩下的可供播種, 這是投資。想像島上鼠輩橫行, 果種有 δ 比例被盜食, 因此 Crusoe 的果種也滿足資本移動方程式 $k_t = i_t + (1-\delta)k_{t-1}$。此外, 產出也有 G_t 被土人搶奪或被猴兒偷吃, 因此產出滿足 $y_t = c_t + i_t + G_t$, 這是 Crusoe 面對的資源限制。給定各期

A_t 及 G_t, Crusoe 的選擇問題是

$$\max_{\{c_t,k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$$
$$\text{subject to} \quad c_t + \left[k_t - (1-\delta)k_{t-1}\right] + G_t = A_t f(k_{t-1}),\ \forall t。 \tag{13.14}$$

Crusoe 既是消費者, 也是生產者, 給定每天的開心果產出, 他必須決定消費多少及投資多少。Crusoe 若於 t 期少吃一顆開心果, 種子埋地, 明天可增加 $\text{MPK}_{t+1} = A_{t+1} f'(k_t)$ 的消費, 剩下的 $(1-\delta)$ 單位也可食用, 這是果種的殘餘價值。簡單的說, Crusoe 可用今天一單位的儲蓄或投資換得明天 $A_{t+1} f'(k_t) + (1-\delta)$ 單位的消費。最適選擇要求效用的邊際損失等於對應的邊際增益, 故一階條件是

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left[A_{t+1} f'(k_t) + (1-\delta)\right]。 \tag{13.15}$$

讀者看到, Crusoe 的行爲與消費者極爲相似。在市場經濟中, 消費者面對的是利率, 而 Crusoe 面對的則是果樹的生產力。稍加觀察, 我們發現 (13.15) 式即是 (13.12) 式, 而荒島的資源限制式 (13.14) 即是商品市場結清條件 (13.13) 式。顯然, Crusoe 的最適選擇與競爭市場的交易結果完全相同。因爲 Crusoe 的最適選擇即是柏拉圖最適狀態, 因此福利第一及第二定理成立 (見上冊第 6 章), 亦即, 競爭均衡就是柏拉圖狀態, 而柏拉圖狀態也是競爭均衡。

這是一個重要而且方便的結論, 因爲我們可以擱置市場價格, 直接分析 Crusoe 的最適行爲。一旦決定了 Crusoe 的消費和投資, 我們即可利用前面的 (a) 式或 (b) 式還原對應的均衡利率。從分析的角度看, Crusoe 的行爲比較直接, 因爲我們不必面對市場價格。下一章將分別利用市場供需模型及荒島模型分析外來衝擊的動態效果。

本章摘要

- 投資支出及資本存量是一體之兩面, 前者是流量, 後者是過去投資支出累積而成的最終結果。
- 期末資本存量等於投資支出加殘餘資本存量, 寫成 $k_t = i_t + (1-\delta)k_{t-1}$, 又稱資本移動方程式。
- 投資毛額 i_t 等於投資淨額 $(k_t - k_{t-1})$ 加折舊投資 δk_{t-1}。
- 廠商的股利或現金流量等於利潤減投資支出, 而廠商價值即爲各期股利的折現總值, 這是廠商的的決策目標。
- 廠商最適投資的一階條件要求資本的預期邊際產出等於對應的機會成本, 包括實質利率及資本折舊率, 寫成

  $$A_{t+1}F_k(k_t, n_{t+1}) = r_t + \delta。$$

  上式表示套利空間不存在, 資本與債券的報酬率相等。
- 在最適選擇狀態, 資本的淸算價值等於持續營運的生產價值, 因此廠商可以選擇關廠, 也可以繼續生產, 兩者對股東財富的影響相同。
- 實質利率是投資的機會成本, 當期或未來利率上升會使期待資本存量及投資需求下降。
- 折舊率上升使期待資本存量及淨投資下降, 但折舊投資增加, 故投資毛額的變動方向不能確定。
- 當期要素生產力上升不影響投資需求, 只有未來或預期的邊際生產力上升時, 投資需求才會上升。
- 期初資本存量下降不影響未來的 MPK, 故期待資本存量不變, 但淨投資及毛投資增加。

- 投資的調整成本泛指所有因投資活動而衍生的額外支出, 如教育訓練, 資金調度或環保要求等支出。
- 淨投資相對規模是影響調整成本的主要因素。當資本存量變動時, 邊際調整成本大於零, 且隨變動幅度擴大而遞增。
- 面對調整成本, 期初資本存量變動對投資需求的影響無法確定。
- 今天投資可以節省未來的調整成本, 故面臨未來正向生產力衝擊, 廠商更有動機增加投資。
- 杜賓 q 等於資本的市場價值除以資本的重置成本。q 值等於或大於一時才值得進行投資。
- 投資租稅扣抵是政府針對廠商投資支出的租稅抵免。
- 暫時的租稅扣抵會刺激廠商的投資需求, 而未來的租稅優惠會打擊當下的投資意願。
- 暫時性投資扣抵的刺激效果大於永久性租稅扣抵。
- 民間儲蓄等於債券變動量加廠商投資。因爲廠商可以舉債, 故即使民間儲蓄不變, 甚或下降, 投資也可以增加。
- 在封閉經濟中, 國民儲蓄等於投資, 故投資只能依賴國民儲蓄融通。
- 商品市場的結清條件是 $c_t^d(r_t) + i_t^d(r_t) + G_t = A_t f(k_{t-1})$, 總需求是利率的負向函數, 總供給是一條垂直線。
- 債券市場的結清條件是 $b_t^d(r_t) = b_t^g$, 債券需求是利率的正向函數, 公債餘額由政府預算決定。
- Ramsey 模型的均衡條件可化簡成以下兩式:

$$
\begin{aligned}
u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1})\left[A_{t+1}f'(k_t) + (1-\delta)\right],\\
c_t + \left[k_t - (1-\delta)k_{t-1}\right] + G_t &= A_t f(k_{t-1})。
\end{aligned}
$$

這兩式共同決定均衡消費及期末資本存量。一旦這兩個變數決定了, 均衡利率即可利用不可套利條件決定。

- 在 Ramsey 模型中, 競爭均衡即是柏拉圖最適狀態, 而柏拉圖最適狀態也是競爭均衡, 故第一及第二福利定理均成立。

習題

1. **資本移動方程式**: 請根據資本移動方程式 $k_t = i_t + (1-\delta)k_{t-1}$ 回答以下各題。

   (a) 假設各期投資支出是期初資本存量的 4%, 折舊率是 $\delta = 2\%$。請計算資本成長率 $(k_t - k_{t-1})/k_{t-1}$。若投資占期初資本存量之比升至 6%, 資本成長率有何變化? 請以直觀解釋。

   (b) 假設折舊率 $\delta > 0$, 各期投資支出 $i_t = x > 0$ 固定不變。請證明: 不論起始資本存量 k_0 等於多少, 長期下 (即 $t \to \infty$), 資本存量會收斂至一個定值 $k^* = x/\delta$。顯然, 若 $\delta = 0$, 則資本存量會持續成長, 沒有上限。[提示: 資本存量固定不變的情形, 稱爲**恆定狀態** (steady state), 下一章會進一步解說。]

   (c) 假設 $\delta = 5\%$, 各期投資 $i_t = 0.1$。請分別畫出 $k_0 = 1$ 及 $k_0 = 3$ 情形下資本存量的時間軌跡。若 $\delta = 10\%$, 資本存量會如何變化? 請以直觀解釋。

2. **投資需求的利率彈性**: 投資支出對利率變動極爲敏感。本題要請讀者從理論角度分析投資需求的利率彈性。

   (a) 投資的利率彈性是利率變動一個百分點所導致的投資比例變動, 寫成 $d\ln i_t/dr_t$ (假設 $i_t > 0$)。因爲利率的單位即爲百分點, 一般

不再對 r_t 取自然對數, 這種彈性又稱**半彈性** (semi-elasticity)。請利用資本移動方程式證明

$$\frac{d\ln i_t}{dr_t} = \left(\frac{k_t}{i_t}\right)\left(\frac{d\ln k_t}{dr_t}\right),$$

亦即, 投資的利率彈性等於資本存量的利率彈性乘以 k_t/i_t。

(b) 假設生產函數是 $f(k) = k^{\alpha}$。令 $\alpha = 1/3, \delta = 20\%$。若原始利率是 $r_t = 5\%$, 請計算期待資本存量的利率彈性。

3. **公司所得稅**: 假設政府對廠商利潤 $(y_t - \delta k_{t-1})$ 課徵 τ_t 比例的所得稅, 故廠商的稅後利潤是 $y_t - \tau_t(y_t - \delta k_{t-1}) = (1-\tau_t)y_t + \tau_t\delta k_{t-1}$。政府允許折舊費用自銷貨收入或所得中扣除, 這種制度形同退稅, 稱爲**折舊扣抵** (depreciation allowances)。廠商的現金流量等於稅後利潤減投資支出, 故 $d_t = (1-\tau_t)y_t + \tau_t\delta k_{t-1} - i_t$。爲了簡單, 本題不考慮勞動投入及生產衝擊, 故生產函數是 $y_t = f(k_{t-1})$。給定各期利率及稅率, 廠商的決策問題是

$$\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} q_t\left[(1-\tau_t)f(k_{t-1}) + \tau_t\delta k_{t-1} - i_t\right]$$
$$\text{subject to} \quad i_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1},\ \forall t。$$

(a) 請以直觀推導廠商最適選擇的一階必要條件。

(b) 請利用動態規劃法推導一階必要條件。[提示: 請參考上冊第 9 章 9.2 節。初學者可略過。]

(c) 假設原來各期稅率 $\tau_t = \tau$。請分別討論暫時性及永久性減稅對投資需求的影響。

(d) **政策評估**: 政府於 2018 年將營所稅稅率從 17% 調升爲 20%。本題要請讀者粗略評估此一政策對廠商投資的數量效果。令生產函數 $f(k) = k^{\alpha}$。假設 $\alpha = 1/3, r = 3\%, \delta = 10\%$。請問政府調升所

得稅率會使期待資本存量下降多少? 請以比例變動表示。根據資料, 台灣的資本產出比約爲 $k/y = 3$, 投資產出比是 $i/y = 20\%$, 請問投資支出會變動多少?

(e) **加速折舊** (accelerated depreciation): 政府刺激投資的另一個手段是允許廠商提前提列折舊,降低廠商在投資初期的所得稅賦,稱爲加速折舊。

舉例而言, 假設起始資本存量 $k_0 = 1$, 折舊率是 δ, 稅率 τ 固定不變, 則今天的折舊扣抵等於 $\tau\delta$, 明天資本剩下 $(1-\delta)$, 可退稅 $\tau(1-\delta)\delta$, 後天剩下 $(1-\delta)^2$, 又可退稅 $\tau(1-\delta)^2\delta$, 直到原始一單位資本存量全部耗盡爲止。假設政府允許廠商今天就可將折舊全部提列完畢, 故折舊扣抵是 τ, 但未來不再享有扣抵優惠。請證明: 若 $\delta < 1$, 則加速折舊可降低廠商的租稅負擔。

4. **資本利用率***: 現實世界中, 廠商可以視需要決定如何使用資本設備, 例如, 景氣熱絡時, 一台電腦可以當兩台使用, 而衰退時則閒置不用。本題要考慮廠商如何決定**資本利用率** (utilization rate of capital)。令 x_t 表示資本利用率, 則廠商的生產函數可寫成 $y_t = A_t f(x_t k_{t-1})$。更一般的說, 我們可將 x_t 想成是資本設備的效率指標, 則 $x_t k_{t-1}$ 即是以效率單位衡量的資本投入。

廠商可以「狠操」資本設備, 但「操」得越凶, 資本的耗損也越快, 因此折舊率 δ_t 是資本使用率 x_t 的函數, 寫成 $\delta_t = \delta(x_t) \in [0,1]$。我們假設函數 δ 滿足 $\delta' > 0$ 且 $\delta'' > 0$, 亦即, 邊際折舊遞增。給定各期實質利率 r_t 及要素生產力 A_t, 廠商的決策問題是

$$\max_{\{x_t,k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} q_t\left[A_t f(x_t k_{t-1}) - i_t\right]$$

$$\text{subject to} \quad i_t = k_t - [1-\delta(x_t)]k_{t-1}, \ \forall t。$$

(a) 請以直觀或數學推導廠商最適選擇的一階必要條件。

(b) 請分析要素生產力 A_t 及期初資本存量 k_{t-1} 變動對資本利用率 x_t 的影響。

(c) 請分析實質利率 r_t 及未來要素生產力 A_{t+1} 變動對期待資本存量 k_t 的影響。

(d) 假設生產函數是 $y_t = A_t(x_t k_{t-1})^\alpha$, 折舊函數是 $\delta(x_t) = x_t^2/2$。請求解最適資本利用率 x_t 及期待資本存量 k_t。

5. **投資租稅扣抵**: [本題使用到簡單的均值運算, 初學者也應該試試看] 現實世界中, 人們對政府的政策承諾總是沒有十足的把握。本題要延伸 13.5 節的模型, 考慮一個不確定情況下的投資扣抵政策。假設投資扣抵率 ϕ_t 是一個兩狀態馬可夫鏈, 轉變矩陣是

$$\text{Prob}(\phi_{t+1}|\phi_t) = \text{Prob}\begin{bmatrix} 0 \to 0 & 0 \to \phi \\ \phi \to 0 & \phi \to \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1-q & q \end{bmatrix}。$$

用白話說, 若今天的 $\phi_t = 0$, 則明天 $\phi_{t+1} = \phi > 0$ 的機率是 p, 但若今天的扣抵率已是 ϕ, 則明天政府會繼續此一政策的機率是 q。讀者在上冊第 11 章也曾見過這樣的隨機結構。假設各期利率 $r_t = r$, 折舊率 $\delta \in [0, 1)$, 生產函數是 $y_t = f(k_{t-1})$。

[本題的設定仿自 Lucas (1976): "Econometric Policy Evaluation: A Critique"。這是一篇重要的論文, 著名的 **Lucas 批判** (Lucas' Critique) 即濫觴於此, 值得細細咀嚼。]

(a) 請仿照 13.5 節分別寫下 $\phi_t = 0$ 及 $\phi_t = \phi$ 情形下, 廠商最適投資決策的一階必要條件。[提示: 給定今天的 ϕ_t, 廠商關心明天或預期的租稅優惠 $E(\phi_{t+1}|\phi_t)$。]

(b) 令 k^1 及 k^2 分別表示 $\phi_t = 0$ 及 $\phi_t = \phi$ 時的期待資本存量。此外, k^0 是各期 $\phi_t = 0$ 情形下 (即租稅扣抵不存在) 的期待資本存量。首先, 請證明 $k^1 < k^0 < k^2$。其次, 請證明機率 p 上升使 k^1 下降, 而機率 q 上升也使 k^2 下降。請以直觀解釋以上結果。

(c) 請證明 ϕ 上升使 k^1 下降, 但 k^2 上升。背後直觀何在?

(d) **政策評估**: 某國政府發現鄰國的投資特別暢旺, 追問之下, 原來鄰國對民間投資給予租稅優惠, 於是政府也開始實施投資扣抵政策, 爲時五年, 扣抵率是 2%, 五年之後歸零。對廠商而言, 此一租稅優惠有如天外橫財, 事前完全不知。有位經濟學家想要評估此一政策的效果。首先, 既然宣稱是五年優惠, 則機率 $q = 1/5$。如果這位經濟學家相信這是「只此一次, 下不爲例」的政策, 則 $p = 0$。假設生產函數是 $f(k_{t-1}) = k_{t-1}^{\alpha}$, 實質利率 $r = 3\%$。利用歷史數據, 這位學者估計的其他參數值是 $\delta = 10\%$, $\alpha = 1/3$。請爲這位學者量化政策效果 (請以資本存量的比例變動表示)。

(e) **Lucas 批判**: 經濟學家利用歷史數據及計量模型評估政策效果。在 1976 年的論文中, Lucas 教授強調政策評估不能忽略**體制變動** (regime switch), 尤其必須考慮人們對未來的預期。所謂體制變動, 泛指政策操作模式及隨機環境的改變。

繼續上題的政策評估。光陰荏苒, 廠商發現所謂「只此一次, 下不爲例」的政策承諾其實不那麼可信, 因爲每隔幾年, 政府總是來那麼一次。廠商開始有點「受騙」的感覺。爲了享受五年的租稅優惠, 廠商不但提前了投資計畫, 而且還爲此付出不少調整成本! 他們開始相信: 或許這個政策會持續較久的時間, 因此轉變機率變成 $p = 0.5, q = 0.9$。如今, 租稅扣抵又回到 $\phi_t = 0$ 的狀態, 政府再度宣布執行下一個五年扣抵政策。如果政府還是拿了上題的估計結果做爲政令宣導, 請問誤差有多少?

6. **資本創新**: 隨著技術進步, 廠商的資本設備也不斷創新; 同樣是電腦, 但今天的電腦顯然比過去強悍許多。令 $z > 0$ 表示技術進步率, 則資本移動方程式可寫成

$$k_t = (1-\delta)k_{t-1} + (1+z)i_t。$$

用白話說, 當技術進步率 $z > 0$ 時, 今天能夠買到性能更優越的機器設備。直觀上, 資本創新與題 4 非常類似, 兩者的資本投入都是以效率單位衡量, 稱為**有效資本投入** (effective capital input)。本題要請讀者思考資本創新對廠商投資決策的影響。給定市場利率及資本創新率 z, 廠商的選擇問題是

$$\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} q_t\left[f(k_{t-1}) - i_t\right]$$
$$\text{subject to} \quad i_t = \frac{k_t - (1-\delta)k_{t-1}}{1+z}, \ \forall t。$$

(a) 請以直觀推導廠商最適選擇的一階必要條件。

(b) 請討論 z 上升對期待資本存量及投資需求的影響。

(c) 假設生產函數是 $f(k_{t-1}) = k_{t-1}^{\alpha}$, 請求解期待資本存量。$z$ 上升對投資需求有何影響?

7. **耗時投資**: 本章的模型假設今天投資, 明天即可生產收成, 這當然有違常情。套句老掉牙的古諺:「羅馬不是一天造成的」, 廠商投資建廠當然不可能在一天內完成。2004 年諾貝爾獎得主 F. Kydland 及 E. C. Prescott 曾經提出著名的**耗時投資** (time-to-build) 模型。顧名思義, 所謂耗時投資, 即是廠商的投資活動需要時間。Kydland 及 Prescott 的文章發表於 1982 年的 Econometrica, 這是當代實質循環模型的基礎文獻, 但模型「艱澀又醜陋」, 適合研究生閱讀。本題要簡化他們的設定, 請讀者思考耗時投資的最適決策。

假設廠商的投資需時兩期, 完工後才能投入生產。更清楚的說, 令 x_t 表示 t 期啟動的投資計畫, 若 $\theta \in (0,1)$ 是首期的支出比例, 則 t 期及 $t+1$ 期必須分別投入 θx_t 及 $(1-\theta)x_t$ 才能完成整個投資計畫。爲了強調投資耗時兩期, 我們以 k_{t-2} 表示 t 期的期初資本存量, 故生產函數是 $y_t = f(k_{t-2})$。因爲 t 期的投資計畫要到 $t+2$ 期完成後才能投入生產, 故 $t+2$ 期的期初資本存量 k_t 滿足 $k_t = (1-\delta)k_{t-1} + x_t$, 這是耗時投資情形下的資本移動方程式, 與正文的模型並無不同。

站在任何 t 期, 廠商的投資支出除了本期的新投資 θx_t 外, 還包括上期啟動, 剩下一期即可完成的投資支出 $(1-\theta)x_{t-1}$。顯然, t 期的投資總額是 $i_t = (1-\theta)x_{t-1} + \theta x_t$, 故現金流量是 $d_t = f(k_{t-2}) - (1-\theta)x_{t-1} - \theta x_t$。假設各期利率 $r_t = r$, 廠商的選擇變數是各期投資計畫 x_t 或兩期之後的期待資本存量 k_t, 其決策問題可寫成

$$\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{f(k_{t-2}) - (1-\theta)x_{t-1} - \theta x_t}{(1+r)^{t-1}} \right]$$

$$\text{subject to} \quad x_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1}, \ \forall t。$$

(a) 請以直觀推導廠商最適選擇的一階必要條件。

(b) 請再以數學推導廠商最適選擇的一階必要條件。[初學者可略過]

(c) 令 k^1 及 k^2 分別表示基準模型 (即一期投資) 及兩期耗時投資情形下的期待資本存量。請證明 (1) $k^2 < k^1$, (2) 當 $\theta \to 0$ 時, $k^2 \to k^1$。以上結果的背後直觀何在?

(d) 令 $f(k) = k^\alpha$。請求算資本的利率彈性 $d\ln k/dr$。當首期的支出比例 θ 上升時, 此一彈性會上升或下降? 直觀何在?

8. **不可逆投資***: [本題使用到 Kuhn-Tucker 定理, 不熟悉的讀者可略過] 本章的模型假設廠商可隨時出售資本設備, 甚至選擇負投資。換言之, 廠商可任意逆轉投資支出, 不受任何限制。現實世界中, 投資活動經

常面臨「騎虎難下」的窘境, 一旦機器安裝了, 即難以回復, 尤其在經濟不景氣時, 投資支出可能變成**沈沒成本** (sunk cost), 這種現象稱爲**不可逆投資** (irreversible investment)。本題要考慮一個簡單的不可逆投資, 假設投資毛額不能爲負值, 即 $i_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1} \geq 0$。此一限制條件表示淨投資 $(k_t - k_{t-1})$ 可以爲負值, 但不能超過折舊投資 δk_{t-1}。爲了簡單, 假設廠商僅存活兩期。給定起始資本 k_0, 第一期生產 $y_1 = f(k_0)$, 現金流量是 $d_1 = f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1$, 第二期生產 $y_2 = Af(k_1)$, 現金流量是 $d_2 = Af(k_1) + (1-\delta)k_1$。面對不可逆條件 $k_1 \geq (1-\delta)k_0$, 廠商的選擇問題是

$$\max_{\{k_1\}} \left(d_1 + \frac{d_2}{1+r}\right) \quad \text{subject to} \quad k_1 \geq (1-\delta)k_0。$$

此一極值問題的拉氏函數給定如下:

$$\mathcal{L} = [f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1] + \frac{Af(k_1) + (1-\delta)k_1}{1+r} - \mu[(1-\delta)k_0 - k_1]。$$

上式中, μ 是對應於不可逆條件的拉式乘數。

(a) 請解釋拉氏乘數 μ 的經濟意義, 並推導廠商最適選擇的一階條件, 包括互補鬆弛條件 (complementary slackness condition)。
(b) 請根據一階條件及互補鬆弛條件討論廠商的最適選擇。
(c) 請分別討論 A, k_0 及 r 變動對廠商最適選擇及拉式乘數 μ 的影響。背後直觀何在?
(d) 假設 $f(k) = k^\alpha$, 請求算 k_1 及 μ 的公式解。

9. **競爭均衡**:本章假設廠商擁有資本設備, 故投資需求由其決定, 這是文獻的通常設定。本題要將資本存量的所有權指定給消費者, 廠商爲了生產, 必須進入一個完全競爭的**租賃市場** (rental market), 向消費者租用資本設備。面對市場工資率 w_t 及資本租金率 r_t^k, 廠商的利潤是

$d_t = A_t F(k_{t-1}, n_t) - w_t n_t - r_t^k k_{t-1}$。廠商追求最大利潤, 選擇變數包括各期勞動投入 n_t 及資本投入 k_{t-1}, 其選擇問題可寫成

$$\max_{\{k_{t-1}, n_t\}} d_t = A_t F(k_{t-1}, n_t) - w_t n_t - r_t^k k_{t-1}。$$

爲了簡單, 假設政府不存在。消費者供給一單位的勞動, 面對市場價格 $\{w_t, r_t, r_t^k\}$ 及外生所得 $a_t = d_t + w_t$, 其選擇問題是

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, b_t, k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad & \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \\ \text{subject to} \quad & c_t + b_t + i_t = a_t + r_t^k k_{t-1} + (1 + r_{t-1}) b_{t-1}, \ \forall t, \\ & i_t = k_t - (1 - \delta) k_{t-1}, \ \forall t。 \end{aligned}$$

請注意, 消費者的所得包括期初資本存量的租賃所得 $r_t^k k_{t-1}$。

(a) 請定義此一經濟社會的全面均衡。

(b) 請證明 Walras 市場法則成立。

(c) 請仿照圖 13.7 畫出商品市場, 債券市場, 勞動市場及資本租賃市場的供需均衡。

(d) 請證明此一經濟社會的競爭均衡滿足福利定理。

(e) 本題的市場均衡是否與正文的模型相同? 亦即, 兩個模型的均衡解是否相等? 請討論其中意義。

部分習題解答

3a 廠商若於 t 期增加一單位投資, 因爲折舊免稅, 次期的稅後利潤可增加 $(1-\tau_{t+1})f'(k_t)+\tau_{t+1}\delta$, 加上資本的殘餘價值 $(1-\delta)$, 現金流量的增幅是 $(1-\tau_{t+1})f'(k_t)+\tau_{t+1}\delta+(1-\delta)$。最適選擇要求邊際成本等於邊際稅後報酬, 故一階條件是

$$1=\frac{(1-\tau_{t+1})f'(k_t)+\tau_{t+1}\delta+(1-\delta)}{1+r_t},$$

整理化簡後, 亦可寫成

$$(1-\tau_{t+1})[f'(k_t)-\delta]=r_t。$$

3b 令 k 及 k' 分別表示期初及期末資本存量, 則廠商的價值函數滿足

$$v(k)=\max_{\{k'\}} q\left[(1-\tau)f(k)+\tau\delta k+(1-\delta)k-k'\right]+v(k')。$$

對 k' 微分, 一階條件是 $q=v'(k')$, 亦即, 資本的邊際價值 $v'(k')$ 必須等於資本的折現市場價格。利用此一條件, 期初資本存量 k 的邊際價值是 (即包絡性質)

$$\begin{aligned}v'(k)&=q\left[(1-\tau)f'(k)+\tau\delta+(1-\delta)\right]+\left[v'(k')-q\right]\frac{dk'}{dk}\\&=q\left[(1-\tau)f'(k)+\tau\delta+(1-\delta)\right]。\end{aligned}$$

利用上式可得期末資本存量 k' 的邊際價值 $v'(k')$, 代回 $q=v'(k')$, 並利用 $q/q'=1+r$, 化簡後可得

$$(1-\tau')\left[f'(k')-\delta\right]=r。$$

以時間表示, 一階條件是 $(1-\tau_{t+1})[f'(k_t)-\delta]=r_t$, 與上小題相同。

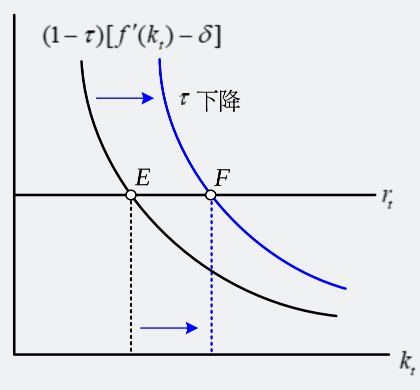

圖 13.8: 所得稅率下降的效果

3c 暫時性減稅 (即 τ_t 下降, 未來不變) 當然沒有效果, 因爲影響投資決策的是預期未來稅率。相反的, 永久性減稅使投資的稅後邊際報酬上升, 故期待資本存量及投資需求上升。圖 13.8 中, 廠商原來選擇 E 點, 當稅率永久下降時, 預期稅後報酬增加, 最適選擇右移至 F 點, 期待資本存量及投資需求上升。

3d 一階條件以自然對數表達可寫成

$$\ln k = \frac{\ln\alpha + \ln(1-\tau) - \ln[r + (1-\tau)\delta]}{1-\alpha}$$

對 τ 微分, 得到

$$\begin{aligned}\frac{d\ln k}{d\tau} &= \left(\frac{-1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{1-\tau} - \frac{\delta}{r+(1-\tau)\delta}\right)\\ &= \frac{-r}{(1-\alpha)(1-\tau)[r+(1-\tau)\delta]}。\end{aligned}$$

這是資本存量的稅率彈性, 即稅率變動 1% 對期待資本存量的比例影響。代入參數值, 稅率若從 17% 升至 20%, 則資本存量約會下降

$$\left|\frac{d\ln k}{d\tau}\right|\Delta\tau = \frac{0.03(20-17)}{(1-1/3)(1-0.2)[0.03+(1-0.2)0.1]} \cong 1.5\%。$$

根據資料, 台灣的資本與投資之比是 $k/i = 3/0.2 = 15$。利用題 2, 投資的利率彈性是 $d\ln i/d\tau = (k/i)(d\ln k/d\tau)$, 代入以上數值, 投資需求下降的幅度高達 $15(1.5) \cong 22\%$。

3e 在比例折舊 (或直線折舊) 下, 廠商的退稅總額, 以現值衡量, 是

$$\begin{aligned}&\tau\delta + \frac{\tau\delta(1-\delta)}{1+r} + \frac{\tau\delta(1-\delta)^2}{(1+r)^2} + \cdots \\ &= \tau\delta\left[1 + \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right) + \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{\tau\delta(1+r)}{r+\delta}。\end{aligned}$$

在加速折舊下, 退稅總額是 τ, 兩者的稅賦差異是

$$\tau\left[1 - \frac{\delta(1+r)}{r+\delta}\right]。$$

觀察上式, 當 $\delta = 1$ 時, 兩種情形的租稅負擔相等。這是當然之理, 因爲資本當天就全部折耗了, 有無加速折舊不影響稅賦。一般情形下, 折舊率 $\delta \in (0,1)$, 以上差異大於零 (請自行驗證), 故加速折舊可爲廠商節稅, 刺激廠商的投資意願。

5a 在隨機的政策環境下, 廠商關心的是預期租稅優惠 $E(\phi_{t+1}|\phi_t)$。仿照 13.5 節的分析, 最適投資選擇的一階條件是

$$1 - \phi_t = \frac{f'(k_t) + (1-\delta)\left[1 - E(\phi_{t+1}|\phi_t)\right]}{1+r_t}。$$

根據轉變矩陣, $E(\phi_{t+1}|\phi_t = 0) = p\phi$ 及 $E(\phi_{t+1}|\phi_t = \phi) = q\phi$, 故兩種起始狀態下的一階條件分別是

$$\text{若 } \phi_t = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{f'(k^1) + (1-\delta)(1-p\phi)}{1+r}, \tag{5a}$$

$$\text{若 } \phi_t = \phi \quad \Rightarrow \quad 1-\phi = \frac{f'(k^2) + (1-\delta)(1-q\phi)}{1+r}。 \tag{5b}$$

5b 當 $\phi_t = 0$ 時, 期待資本存量 k^1 滿足 (5a) 式, 整理後可寫成

$$f'(k^1) = (r+\delta) + (1-\delta)\phi p > r+\delta。$$

同理, 當 $\phi_t = \phi$ 時, 期待資本存量 k^2 滿足 (5b) 式, 移項整理後,

$$f'(k^2) = (r+\delta) - \phi\left[(1+r) - (1-\delta)q\right] < r+\delta。$$

此外, k^0 是各期 $\phi_t = 0$ 時的期待資本存量, 故 $f'(k^0) = r+\delta$。顯然, 以下不等式成立:

$$f'(k^2) < f'(k^0) < f'(k^1)。$$

根據邊際產出遞減性質, 得知 $k^2 > k^0 > k^1$。

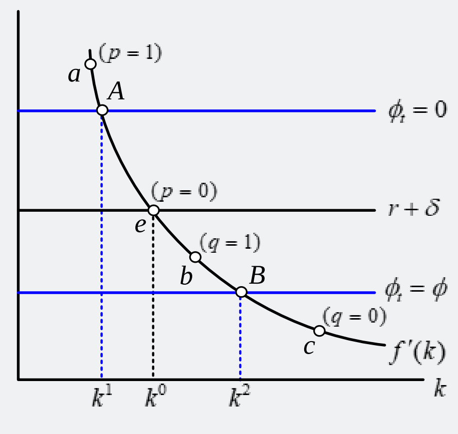

圖 13.9: 隨機的投資租稅扣抵

圖 13.9 中, 當租稅扣抵政策不存在時, 廠商選擇 e 點, 資本存量是 k^0。在隨機的政策環境下, 若今天的狀態剛好是 $\phi_t = 0$, 則廠商選擇 A 點, 資本存量 $k^1 < k^0$。這是因爲廠商預期明天有 p 的機率政府會給予租稅優惠。果真如此, 今天投資豈不是虧大了? 顯然, 若機率 p 上升, 則

今天投資可能遭受的資本損失也越高, 故資本存量下降。當 $p \to 1$ 時, 廠商非常篤定租稅優惠即將到來, 最適選擇趨向 a 點, 而當 $p \to 0$ 時, 這形同優惠永遠不可能實施, 最適選擇回到 e 點。

反之, 若今天的狀態是 $\phi_t = \phi$, 則廠商會選擇 B 點, 資本存量 $k^2 > k^0$。這是因爲今天雖然享受了租稅優惠, 但明天卻有 $(1-q)$ 的機率政府會「食言而肥」, 突然取消優惠, 聰明的廠商當然把握機會在今天投資。顯然, 當機率 q 下降時, 政府反悔的可能性較高, 政策的持續性比較短暫, 故資本存量上升。當 $q \to 0$ 時, 廠商非常篤定租稅優惠即將取消, 最適選擇趨向 c 點, 而當 $q \to 1$ 時, 租稅優惠是永久性的, 最適選擇落在 b 點, 資本存量雖然相對較低, 但仍大於 e 點的 k^0。

總結以上分析, 在 $\phi_t = 0$ 的狀態下, 最適選擇會落在 (a, e) 兩點之間; 當機率 p 上升時, 資本存量 k^1 下降。在 $\phi_t = \phi$ 的狀態下, 最適選擇會落在 (b, c) 兩點之間; 當機率 q 下降時, 資本存量 k^2 上升。

5c 根據上題, 當 ϕ 上升時, 預期效果會使 $\phi_t = 0$ 狀態下的資本存量下降。反之, 在 $\phi_t = \phi$ 的狀態下, 現在的租稅優惠相對於未來更具吸引力, 故資本存量上升。

5d 因爲事前完全不知, 政策實施前的資本存量 k^0 滿足 $f'(k^0) = r + \delta$。政策實施後, 資本存量 k^2 滿足一階條件 (5b) 式。兩式相除, 可得

$$\frac{f'(k^0)}{f'(k^2)} = \left(\frac{k^2}{k^0}\right)^{1-\alpha} = \frac{r+\delta}{(r+\delta) - \phi\left[(1+r) - (1-\delta)q\right]}。$$

代入參數值, 得到

$$\frac{k^2}{k^0} = \left(\frac{0.13}{0.13 - 0.02(1.03 - 0.18)}\right)^{1.5} \cong 1.23,$$

亦即, 資本存量上升約 23%。

5e 在隨機的政策環境下, $\phi_t = 0$ 時的 k^1 滿足 (5a) 式, 這是政策實施前的資本存量。當 $\phi_t = \phi$ 時, 資本存量變成 k^2, 滿足 (5b) 式。兩式相除,

$$\frac{f'(k^1)}{f'(k^2)} = \left(\frac{k^2}{k^1}\right)^{1-\alpha} = \frac{(r+\delta) + (1-\delta)\phi p}{(r+\delta) - \phi[(1+r) - (1-\delta)q]}。$$

代入轉變機率 $p = 0.5, q = 0.9$, 得到

$$\frac{k^2}{k^1} = \left(\frac{0.13 + 0.9(0.02)(0.5)}{0.13 - 0.02(1.03 - 0.81)}\right)^{1.5} \cong 1.16。$$

資本存量上升 16%。與上題相比, 刺激效果下降了 7%。

6a 廠商於 t 期多投資一單位 (即 $\Delta i_t = 1$) 可購得性能更爲優越的機器設備, 有效資本投入增加 $\Delta k_t = (1+z)$, 故邊際產出是 $(1+z)f'(k_t)$。以商品單位衡量, 資本的殘餘價值是 $(1-\delta)\Delta k_t/(1+z) = (1-\delta)$。請留意, $(1-\delta)\Delta k_t$ 必須除以 $(1+z)$ 才能得到以商品單位衡量的殘餘價值。以上兩項相加即爲投資的邊際報酬。最適選擇要求邊際成本等於邊際報酬, 故一階條件是

$$1 = \frac{(1+z)f'(k_t) + (1-\delta)}{1+r_t},$$

整理後也可寫成

$$(1+z)f'(k_t) = r_t + \delta。$$

顯然, 資本創新對廠商投資選擇的影響與生產力衝擊極爲相似。

6b 資本創新顯然會使期待資本存量 k_t 上升, 但投資需求的變動方向不確定。根據資本移動方程式, 投資支出是

$$i_t = \frac{k_t - (1-\delta)k_{t-1}}{1+z}。$$

當 z 上升時, 分子分母同步上升, 但相對變動幅度無法判斷, 故投資支出可能增加或減少。直觀上, 當機器設備變得更有效率時, 廠商不必

投資太多, 因爲一方面可降低資金成本, 另一方面亦可增加現金流量。不過正常情形下, z 上升會使投資支出增加 (見下小題)。

6c 代入生產函數, 一階條件可寫成

$$(1+z)\alpha k_t^{\alpha-1} = r_t + \delta \quad \Rightarrow \quad k_t = \left[\frac{\alpha(1+z)}{r_t+\delta}\right]^{1/(1-\alpha)}。$$

以自然對數表達,

$$\ln k_t = \frac{\ln\alpha}{1-\alpha} + \frac{\ln(1+z)}{1-\alpha} - \frac{\ln(r_t+\delta)}{1-\alpha}。$$

根據上式, z 上升使 k_t 以比例幅度 (即彈性) $1/(1-\alpha) > 1$ 上升, 故投資需求必然上升。本題也可利用微分求算, 但較爲複雜, 並無必要。

7a 我們先以直觀推導最適決策的一階條件。假設廠商於 t 期啟動一單位的投資計畫 (即 $\Delta x_t = 1$), 則本期的投資支出是 θ, 下期是 $(1-\theta)$。以投資當期的商品單位衡量, 此一投資計畫的邊際成本 MC 是

$$MC = \theta + \frac{1-\theta}{1+r}。$$

直觀上, 這也是此一投資計畫完工後的清算價值, 因爲廠商若於 $t+1$ 期期末或 $t+2$ 期期初生產前隨即出售這一單位的資本, 將可獲得相當於 $\theta + (1-\theta)/(1+r)$ 單位的 t 期商品。換言之, 上式即是資本 k_t 的 t 期商品價格。

廠商累積了 $\Delta k_t = 1$ 的資本進入 $t+2$ 期, 這可以使該期的產出, 以現值衡量, 增加 $f'(k_t)/(1+r)^2$。此外, 我們還必須考慮殘餘資本 $(1-\delta)$ 的清算價值。在這裡, 讀者必須小心, 因爲正如上段所述, 耗時投資情形下的資本價格不再等於一。事實上, 站在 $t+2$ 期, 一單位資本設備的折算價格 (以 t 期商品單位衡量) 即是上面的 MC 除以 $(1+r)$, 故 $(1-\delta)$ 殘餘資本的清算價值是

$$\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)\left(\theta + \frac{1-\theta}{1+r}\right)。$$

直觀上,我們可將殘餘資本 $(1-\delta)$ 的價值拆成兩個部分: (1) $\theta(1-\delta)$ 屬於完工前 (即 $t+1$ 期) 的殘餘價值,想像我們可於此時清算資本 (例如,台北大巨蛋雖未完工,但也可打包出售),則現值是 $\theta(1-\delta)/(1+r)$,這是第一個部分; (2) 剩下的 $(1-\theta)(1-\delta)$ 是完工後 (即 $t+2$ 期) 的殘餘資本,以 t 期商品單位衡量,現值是 $(1-\theta)(1-\delta)/(1+r)^2$,這是第二個部分。以上兩項加總即得到 $(1-\delta)$ 的現值。

綜合上述,投資的邊際報酬 MR 等於邊際產出加資本的殘餘價值,故

$$MR = \frac{f'(k_t)}{(1+r)^2} + \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)\left(\theta + \frac{1-\theta}{1+r}\right)。$$

最適選擇要求 $MC = MR$,整理化簡後可得 (請自行驗證)

$$f'(k_t) = (r+\delta)(1+r\theta)。 \tag{7a}$$

請注意,因爲各期利率 $r_t = r$,各期的最適或期待資本存量必然相等,即 $k_t = k, \forall t$。

7b 令 $q_t = 1/(1+r)^{t-1}$,則廠商極值問題的拉氏函數可寫成

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} q_t[f(k_{t-2}) - (1-\theta)x_{t-1} - \theta x_t] + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t[x_t + (1-\delta)k_{t-1} - k_t]。$$

直觀上,拉氏乘數 λ_t 即是 x_t 的邊際價值,也是 k_t 的設算價格。考慮任意 t 期,廠商選擇 x_t 的一階條件是

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_t = \theta q_t + (1-\theta)q_{t+1}。 \tag{7b}$$

上式要求投資 x_t 的邊際價值 λ_t 等於對應的邊際成本,包括首期的購買支出 θq_t 及次期的支出 $(1-\theta)q_{t+1}$。與上小題的 MC 比較,這裡我們用現值價格 q_t 及 q_{t+1} 衡量兩期的支出成本。給定各期投資計畫滿足 (7b) 式,廠商選擇資本存量 k_t 的一階條件是

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_t = q_{t+2}f'(k_t) + (1-\delta)\lambda_{t+1}。 \tag{7c}$$

上式要求 k_t 的邊際成本 λ_t 等於邊際產出 $q_{t+2}f'(k_t)$ 再加上殘餘價值 $(1-\delta)\lambda_{t+1}$。利用 (7b) 式將 (7c) 式兩邊的 λ 代掉, 整理後即得到上小題的一階條件 (7a) 式。

7c k^1 及 k^2 分別滿足 $f'(k^1) = r+\delta$ 及 $f'(k^2) = (r+\delta)(1+r\theta)$。顯然, 耗時投資情形下的邊際成本較高, 故 $f'(k^2) > f'(k^1)$。根據邊際產出遞減性質, 可得 $k^2 < k^1$。當 $\theta = 0$ 時, $f'(k^1) = f'(k^2)$, 故 $k^1 = k^2$。圖 13.10 中, 耗時投資下的邊際成本較高, 故期待資本存量 $k^2 < k^1$。當

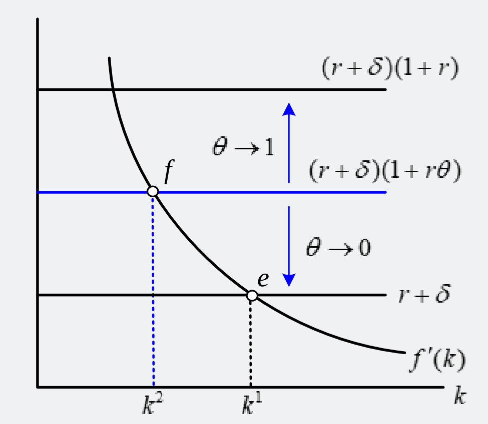

圖 13.10: 耗時投資模型

$\theta = 0$ 時, 全部投資支出都發生在第二期, 這形同本期投資, 次期即可生產收成, 模型退化成一期投資模型, 故 $k^2 = k^1$。當 $\theta = 1$ 時, 首期已經支付了全部的購買成本, 但要等到兩期之後才能生產, 這形同資金閒置不用, 故廠商損失的利息最高, 而期待資本存量也最低。

7d 利用生產函數, 一階條件 (7a) 式以自然對數表達, 可得

$$\ln k = \frac{\ln \alpha}{1-\alpha} - \frac{\ln(r+\delta) + \ln(1+r\theta)}{1-\alpha}。$$

對 r 微分, 得到期待資本存量的利率彈性是

$$\frac{d\ln k}{dr} = \frac{-1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{r+\delta} + \frac{\theta}{1+r\theta}\right)。$$

當 θ 上升時, 投資的利率彈性較高 (以絕對值衡量)。直觀而言, 這是因爲資金閒置的利息成本較高, 故廠商對利率變動也更爲敏感。

8a 拉氏乘數 μ 可用來衡量廠商因爲投資不可逆所必須承受的邊際成本, 或者倒過來說, 給定 $(1-\delta)k_0$, 廠商若增加一單位 k_1 (即放鬆不可逆條件), 則邊際價值會增加 μ 單位。

拉氏函數對 k_1 微分, 一階條件是

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_1} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{Af'(k_1) + (1-\delta)}{1+r} = 1-\mu。 \tag{8a}$$

此外, 互補鬆弛條件要求

$$\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \mu[k_1 - (1-\delta)k_0] = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 若\ k_1 > (1-\delta)k_0, 則\ \mu = 0, \\ 若\ k_1 = (1-\delta)k_0, 則\ \mu > 0。\end{cases}$$

直觀上, 若最適資本存量 $k_1 > (1-\delta)k_0$, 則不可逆條件形同虛設, 此時的廠商價值不受影響, 故 $\mu = 0$。反之, 若 $k_1 < (1-\delta)k_0$, 則廠商企圖選擇小於 $(1-\delta)k_0$ 的資本規模, 換言之, 廠商不但試圖出售殘餘資本, 還想「偷吃」, 但因爲投資不可逆轉, 只好被迫選擇 $k_1 = (1-\delta)k_0$ 的角解, 此時的不可逆成本大於零, 故 $\mu > 0$。

8b 廠商的最適選擇有兩種情形。首先, 若 $k_1 > (1-\delta)k_0$, 則根據互補鬆弛條件, 邊際成本 $\mu = 0$, 故一階條件 (8a) 式變成

$$\frac{Af'(k_1) + (1-\delta)}{1+r} = 1 \quad\Rightarrow\quad Af'(k_1) = r+\delta。 \tag{8b}$$

此一條件與不存在非負限制的情形相同, 可單獨決定期待資本存量 k_1。其次, 若 $k_1 = (1-\delta)k_0$, 則 $\mu > 0$, 一階條件 (8a) 式化簡後可得

$$Af'(k_1) + (1+r)\mu = (r+\delta)。 \tag{8c}$$

因爲 $k_1 = (1-\delta)k_0$, 上式可單獨決定邊際成本 μ。

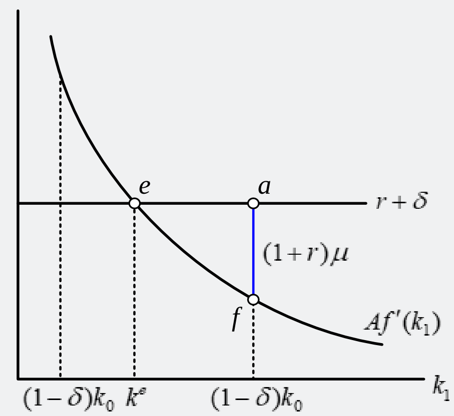

圖 13.11: 不可逆投資與最適選擇

圖 13.11 中, e 點是投資可以逆轉情形下的最適選擇, 對應的資本存量是 k^e。若 $k^e > (1-\delta)k_0$, 則不可逆成本 $\mu = 0$, 故 e 點仍然是最適選擇, 但若 $k^e < (1-\delta)k_0$, 則最適選擇會被擠到 $k_1 = (1-\delta)k_0$ 的 f 點, 對應的邊際產出低於 $(r+\delta)$, 兩者的差距 $(1+r)\mu$ 即是廠商因爲投資不可逆轉而衍生的成本。顯然, 利率越高, 不可逆條件對廠商造成的成本壓力也越大。

8c 假設廠商原來被迫在 f 點生產, 資本存量是 $k_1 = (1-\delta)k_0$。此時若預期 A 上升, 導致 MPK 曲線右移。由上圖可知, 只要 MPK 曲線仍然落在 a 點左側, 則最適選擇仍是 f 點, 但邊際成本 μ 下降。顯然, 生產力 A 或 MPK 要夠高, 廠商才會增加投資。反之, 若 A 下降, 則情況將更

爲「悽慘」, 此時廠商仍然被迫選擇 f 點, 但邊際成本 μ 上升。同樣的道理, 若市場利率 r 上升或期初資本存量 k_0 較高, 則投資毛額仍然爲零, 但不可逆成本 μ 上升。簡單的說, 不可逆投資迫使廠商必須面對可能的沈沒成本, 故投資活動會變得較爲「遲緩」。

8d 首先求解投資不受限制時的資本存量 k^e。利用一階條件 (8b) 式, 代入生產函數, 可得

$$k^e = \left(\frac{\alpha A}{r+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}。$$

若 $k^e > (1-\delta)k_0$, 則最適解是 $k_1 = k^e$, $\mu = 0$。其次, 若 $k^e < (1-\delta)k_0$, 則最適解是 $k_1 = (1-\delta)k_0$。利用一階條件 (8c) 式, μ 的解是

$$\mu = \frac{(r+\delta) - \alpha A\big[(1-\delta)k_0\big]^{\alpha-1}}{1+r} > 0。$$

顯然, A 上升會導致 μ 下降, 而 r 或 k_0 上升會使 μ 上升, 與上小題的分析一致。

第 13 章

1a 資本移動方程式兩邊同除 k_{t-1}, 移項後得到資本的成長率是

$$k_t/k_{t-1} - 1 = i_t/k_{t-1} - \delta。$$

代入 $i_t/k_{t-1} = 4\%, \delta = 2\%$, 成長率是 $4\% - 2\% = 2\%$。若 $i_t/k_{t-1} = 6\%$, 則成長率升至 $6\% - 2\% = 4\%$。決定資本成長速度的關鍵因素是**淨投資**, 而淨投資等於毛投資減折舊。顯然, 當投資毛額大於資本耗損時, 即 $i_t > \delta k_{t-1}$, 資本存量上升, 反之則下降。

1b 利用資本移動方程式, 將期初資本逐期向前疊代至 k_0, 可得

$$\begin{aligned} k_t &= x + (1-\delta)[x + (1-\delta)k_{t-2}] \\ &= [1 + (1-\delta)]x + (1-\delta)^2 k_{t-2} = \cdots \\ &= [1 + (1-\delta) + \cdots + (1-\delta)^{t-1}]x + (1-\delta)^t k_0 \\ &= x/\delta + (1-\delta)^t (k_0 - x/\delta)。 \qquad \text{[請自行驗證]} \end{aligned}$$

從任何 $k_0 > 0$ 開始, 這是 t 期之後的資本存量。顯然, 當 $t \to \infty$ 時, 因爲 $(1-\delta)^t \to 0$, 故 $k_t \to k^* = x/\delta$, 與 k_0 無關。

1c 根據上小題, 恆定資本存量是 $k^* = 0.1/0.05 = 2$, 大於起始的 $k_0 = 1$, 故資本存量會逐漸上升, 並收斂至 $k^* = 2$。直觀而言, 當 $k_0 = 1$ 時, 投資毛額 0.1 大於折舊 0.05, 此時的淨投資大於零, 資本存量因之成長, 但隨著資本上升, 折舊也上升, 淨投資逐期遞減, 資本存量收斂至恆定水準。當 $\delta = 0.1$ 時, 全部的投資支出剛好補足資本耗損, 淨投資等於零, 資本存量不變。$k_0 = 3$ 的情形與 $k_0 = 1$ 時相反。圖形略。

2a 根據資本移動方程式, $di_t/dr_t = dk_t/dr_t$, 亦即, 投資的變動量等於期待資本存量的變動量, 這是當然之理。利用 $d\ln y/dx = dy/ydx$, 投資

的利率彈性是

$$\frac{d\ln i_t}{dr_t} = \frac{1}{i_t}\frac{di_t}{dr_t} = \left(\frac{k_t}{i_t}\right)\left(\frac{1}{k_t}\frac{dk_t}{dr_t}\right) = \left(\frac{k_t}{i_t}\right)\left(\frac{d\ln k_t}{dr_t}\right)。$$

2b 一階條件 $f'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1} = r_t + \delta$ 以自然對數表達, 可寫成

$$\ln k_t = \frac{\ln\alpha}{1-\alpha} - \frac{\ln(r_t+\delta)}{1-\alpha}。$$

對 r_t 微分, 資本的利率彈性是

$$\frac{d\ln k_t}{dr_t} = \frac{-1}{(1-\alpha)(r_t+\delta)} = \frac{-1}{(1-1/3)(0.05+0.2)} = -6。$$

用白話說, 利率自 5% 升至 6%, 期待資本存量會下降 6%。

投資在景氣循環過程中波動極爲劇烈, 無論台灣或美國, 民間投資的波動標準差大約是產出的 3.8 倍 (見上冊第 3 章)。理解本題後, 這種現象就不足爲怪了。

4a 給定期初資本存量 k_{t-1}, 廠商若於 t 期提高一單位的資本利用率, 則當期產出可增加 $A_t f'(x_t k_{t-1})k_{t-1}$, 但折舊耗損也增加 $\delta'(x_t)k_{t-1}$, 故廠商選擇資本利用率 x_t 的一階必要條件是

$$A_t f'(x_t k_{t-1}) = \delta'(x_t)。\tag{4a}$$

給定各期資本利用率必須滿足上式, 廠商選擇最適資本存量 k_t 的一階必要條件是

$$A_{t+1} f'(x_{t+1}k_t)x_{t+1} = r_t + \delta(x_{t+1})。\tag{4b}$$

除了資本利用率及折舊率可能變動外, 上式與固定折舊率情形下的一階條件相同。數學推導從略。

圖 13.12(a) 根據 (4a) 式畫出利用率 x_t 的最適選擇。給定期初資本 k_{t-1}, 邊際產出 $A_t f'(x_t k_{t-1})$ 隨 x_t 上升而遞減, 但折舊率 $\delta'(x_t)$ 隨 x_t 上升

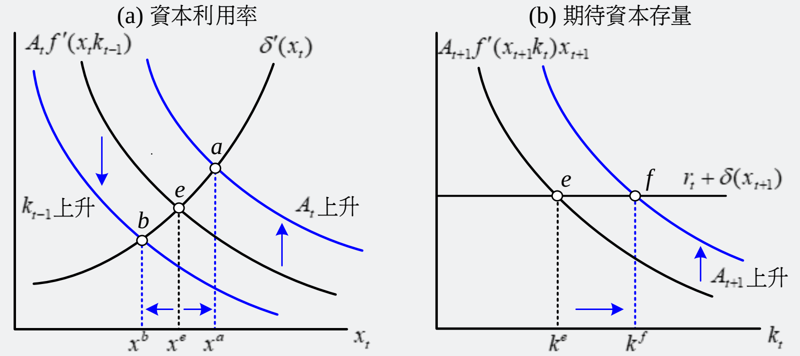

圖 13.12: 資本利用率與期待資本存量

而遞增, 兩者交於 e 點, 最適資本利用率是 x^e。圖 (b) 中, 給定資本利用率 x_{t+1}, 投資的預期邊際產出 $A_{t+1}f'(x_{t+1}k_t)x_{t+1}$ 與對應的機會成本 $r_t + \delta(x_{t+1})$ 交於 e 點, 最適資本存量是 k^e。請留意, 當期的資本利用率 x_t 可單獨由 (4a) 式決定, 但下期的資本使用率 x_{t+1} 與期待資本存量 k_t 並非互相獨立, 兩者必須同時決定。

4b 圖 13.12(a) 中, 當 A_t 上升時, 邊際產出曲線上移, $\delta'(x_t)$ 曲線不動, 最適選擇自 e 點移向 a 點, 資本利用率增爲 x^a。直觀的說, 景氣繁榮時的資本生產力較高, 故廠商會提高資本利用率。其次, 給定 A_t 不變, 若廠商擁有較多的期初資本設備, 則邊際產出曲線下移, 新的選擇落於 b 點, 資本利用率降爲 x^b。此一結果也相當合乎直觀。當廠商擁有較多的期初資本時, 降低資本利用率可以節省折舊費用; 同理, 若地震使期初資本存量下降, 則廠商必須善加利用資本設備。

4c 根據一階條件 (4a) 式, $t+1$ 期的資本利用率 x_{t+1} 滿足 $A_{t+1}f'(x_{t+1}k_t) = \delta'(x_{t+1})$, 代入 (4b) 式可得

$$\delta'(x_{t+1})x_{t+1} = r_t + \delta(x_{t+1})。 \tag{4c}$$

上式可用來決定 $t+1$ 期的資本使用率 x_{t+1}。因爲 A_{t+1} 並未出現在上式中, 故 $\partial x_{t+1}/\partial A_{t+1} = 0$, 這表示: 不論 A_{t+1} 如何變動, 資本利用率 x_{t+1} 均不受影響。此一結果的背後直觀容後再說。其次, 上式對利率 r_t 全微分, 整理後可得

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial r_t} = \frac{1}{\delta''(x_{t+1})x_{t+1}} > 0。$$

上式表示: 利率上升會刺激廠商善加利用資本設備, 這相當合乎直觀, 因爲利率是投資的成本, 提高資本使用率可以節省資金成本。利用以上結果, 我們即可根據 (4a) 式的 $A_{t+1}f'(x_{t+1}k_t) = \delta'(x_{t+1})$ 求出 r_t 及 A_{t+1} 變動對 k_t 的影響。爲了簡潔, 令 $\tilde{k}_t = x_{t+1}k_t$ 表示有效資本投入。假設 A_{t+1} 不變, 則 r_t 變動對 k_t 的影響是 (請自行驗證)

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_t}{\partial r_t} &= \left[\frac{\delta''(x_{t+1}) - A_{t+1}f''(\tilde{k}_t)k_t}{A_{t+1}f''(\tilde{k}_t)x_{t+1}}\right]\left(\frac{\partial x_{t+1}}{\partial r_t}\right)\\ &= \left[\frac{\delta''(x_{t+1}) - A_{t+1}f''(\tilde{k}_t)k_t}{A_{t+1}f''(\tilde{k}_t)\delta''(x_{t+1})x_{t+1}^2}\right] < 0。\end{aligned}$$

同理, 若 r_t 不變, 則 A_{t+1} 變動對 k_t 的影響是 (利用 $\partial x_{t+1}/\partial A_{t+1} = 0$)

$$\frac{\partial k_t}{\partial A_{t+1}} = \frac{-f'(\tilde{k}_t)}{A_{t+1}f''(\tilde{k}_t)x_{t+1}} > 0。$$

歸納以上結果, 我們發現當利率 r_t 上升時, 期待資本存量 k_t 下降, 而資本利用率 x_{t+1} 上升。正如前述, 實質利率是投資的成本, 故利率上升會降低廠商的投資意願, 也會刺激廠商提高資本利用率以節省資金成本。其次, 未來生產力 A_{t+1} 上升使資本利用率上升, 但期待資本存量也增加, 導致資本利用率下降。這兩股力量相互抵銷, 故 A_{t+1} 變動不影響資本利用率 x_{t+1}。

圖 13.12(b) 中, 廠商原來選擇 e 點, 最適資本存量是 k^e。當 A_{t+1} 上升時, 因爲 x_{t+1} 不變, 成本線 $r_t + \delta(x_{t+1})$ 不動, 但邊際產量線上移, 導致最適選擇移向 f 點, 期待資本存量增爲 k^f。

4d 根據 (4a) 式, 代入生產函數及折舊函數, 整理後可得

$$x_t = \left[\alpha A_t k_{t-1}^{\alpha-1}\right]^{1/(2-\alpha)}。 \tag{4d}$$

以自然對數表達, 資本利用率 x_t 的解是

$$\ln x_t = 常數項 + \frac{\ln A_t}{2-\alpha} - \frac{(1-\alpha)\ln k_{t-1}}{2-\alpha}。$$

根據上式, A_t 上升使 x_t 上升, 而 k_{t-1} 上升使 x_t 下降, 與圖 13.12(a) 的分析一致。

根據 (4d) 式, x_{t+1} 滿足 $x_{t+1} = (\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1})^{1/(2-\alpha)}$, 而利用 (4c) 式, x_{t+1} 的解是 $x_{t+1} = (2r_t)^{1/2}$。兩式合併, 整理後可得

$$k_t = \left[\alpha A_{t+1}(2r_t)^{(\alpha-2)/2}\right]^{1/(1-\alpha)}。$$

以自然對數表達, 期待資本存量 k_t 的解是

$$\ln k_t = 常數項 + \frac{\ln A_{t+1}}{2-\alpha} - \frac{(2-\alpha)\ln r_t}{2(1-\alpha)}。$$

當 A_{t+1} 上升時, k_t 上升, 而 r_t 上升時, k_t 下降, 與前面的分析一致。

9a 全面均衡要求廠商利潤極大, 消費者終身效用極大及市場結清。首先, 廠商利潤極大的一階條件是

$$\begin{aligned} \mathrm{MPL}_t &= A_t F_n(k_{t-1}, n_t) = w_t, \\ \mathrm{MPK}_t &= A_t F_k(k_{t-1}, n_t) = r_t^k。 \end{aligned} \tag{9a}$$

以上兩式決定廠商的勞動需求 n_t^d 及資本需求 k_{t-1}^d。其次, 消費者終身效用極大的一階條件是

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1})(1+r_t), \\ u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1})(1-\delta+r_{t+1}^k)。 \end{aligned} \tag{9b}$$

以上兩式及預算限制共同決定消費者的消費需求 c_t^d, 投資需求 i_t^d 及債券需求 b_t^d。最後, 四個市場的結清條件分別是

$$\begin{aligned}
\text{商品市場:} &\quad c_t^d + i_t^d = y_t^s,\\
\text{債券市場:} &\quad b_t^d = 0,\\
\text{勞動市場:} &\quad n_t^d = 1,\\
\text{租賃市場:} &\quad k_{t-1}^d = k_{t-1}\text{。}
\end{aligned}$$

以上 8 式加上資本移動方程式共可決定 $\{c_t, i_t, y_t, b_t, n_t, k_{t-1}, w_t, r_t, r_t^k\}$ 等 9 個內生變數。

9b 將廠商的利潤定義式代入消費者的預算限制, 整理後可得

$$(c_t^d + i_t^d - y_t^s) + b_t^d + w_t(n_t^d - 1) + r_t^k(k_{t-1}^d - k_{t-1}) = 0\text{。}$$

顯然, 四個市場的超額需求加總等於零。

9c 商品市場及債券市場的供需均衡與圖 13.7 相同, 從略。圖 13.13 畫出勞動市場及資本租賃市場的供需均衡。在勞動市場中, 勞動需求 n_t^d 是

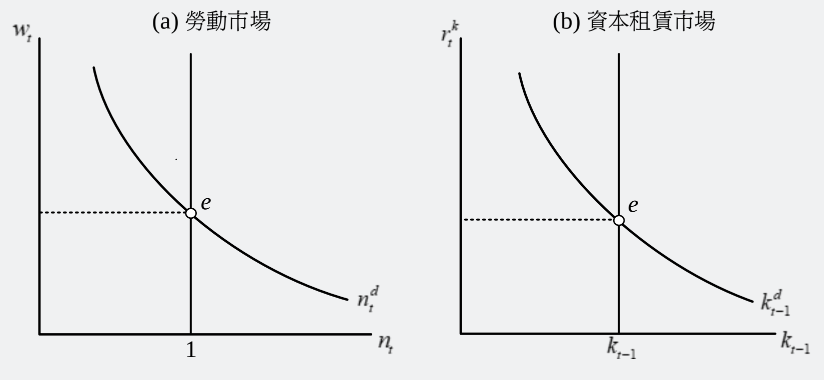

圖 13.13: 勞動市場及資本租賃市場

工資率 w_t 的負向函數, 與固定一單位的勞動供給交於 e 點, 決定均衡工資率。在租賃市場中, 資本需求 k^d_{t-1} 是租金率 r^k_t 的負向函數, 與消費者供給的期初資本存量 k_{t-1} 交於 e 點, 決定均衡租金率。

9d 除 (9a) 及 (9b) 兩式外, 此一經濟社會的均衡條件與本文完全相同。然而根據 (9a) 式, 資本租金率 $r^k_{t+1} = \text{MPK}_{t+1}$, 代入 (9b) 式, 可得 Crusoe 選擇問題的一階條件 (13.15) 式。顯然, 此一經濟社會的競爭均衡即爲柏拉圖最適狀態, 滿足福利第一及第二定理。

9e 顯然, 兩個供需模型的競爭均衡完全相同。正因爲如此, 我們可以根據分析目的建立對應的市場供需模型, 分析結果不會因爲多了或少了幾個市場而有不同。例如, 有些學者特別關心要素市場的變化, 因此採用本題的設定進行分析, 但這並非絕對必要, 因爲根據 (9a) 式, MPK_t 即是期初資本存量 k_{t-1} 的影子價格 r^k_t, 不必藉助租賃市場才能決定均衡租賃價格。

請注意, Ramsey 模型中的勞動恆爲定值, 故工資率及資本租賃率都是前定變數, 與其他內生變數無關。要素市場要在以後的實質循環模型中才有較具意義的討論空間。