14 Ramsey 模型的均衡分析

阿達活在一個沒有生產活動的世界, 每天靠椰樹落下的椰果為生。椰果不能儲存, 如果數量太多, 他可以貸放, 數量太少, 他可以賒借, 這是上冊第 8–11 章考慮的稟賦經濟。在這樣一個簡單的世界中, 椰果短暫豐收會有什麼樣的後果? 讀者如果不健忘, 這個問題的分析非常簡單。直觀上, 面對短暫的所得增加, 你我皆知好景不常, 因此都想儲存一些以備不時之需。對整體經濟而言, 當人人都想增加儲蓄時, 其結果必然是無人能夠得逞。用正式的語言說, 當商品市場存在超額供給時, 債券市場必然出現超額需求, 這表示借貸市場的資金過於寬鬆, 市場利率因之下跌, 而消費需求也隨之上升。最終, 掉下的椰果還是要被全數消費! 這個結論的重點是: 在稟賦經濟中, 國民儲蓄恆為零, 因此整體經濟不能儲蓄, 而未來的消費也不會因為今天人們想要儲蓄而有任何改變。

如果阿達能夠爬樹摘果, 以上的結論是否仍然成立? 這要視阿達如何生產而定。在上冊的最後一章中, 我們允許阿達爬樹摘果, 但不能「累積果種, 栽種椰樹」。這種生產經濟就如同稟賦經濟一樣, 所有產出都必須在當下消費殆盡, 因此今天和明天仍然沒有管道互通有無。相對地, Ramsey 模型中的阿達使用資本進行生產, 面對短暫的所得增加, 個人儲蓄意願上升, 國民儲蓄變成明天的資本投入, 因此未來的生產和消費得以增加。反

之, 若預期未來所得上升, 則國民儲蓄及投資下降, 導致未來的產出下降, 而今天的消費上升。簡單的說, 透過資本存量的變動, 整體經濟就如同個人一樣, 可以將外來干擾的影響「傳導」或「分散」到不同期間, 因此今天和未來的經濟活動不再互相獨立。

本章要延續上一章的分析, 爲讀者解說外生衝擊對總體經濟的影響。根據福利第一及第二定理, 我們可以從分權經濟的角度切入, 也可以從集權式經濟的角度切入; 前者是讀者熟悉的市場供需模型, 後者是 Crusoe 的荒島模型。學術文獻大多從荒島經濟的角度切入, 但使用到初學者可能不熟悉的分析工具, 觀念也稍微抽象, 適合研究生閱讀, 我們將在本章後半段爲讀者介紹。

14.1 恆定狀態 – 長期均衡

Ramsey 模型的勞動是外生給定的, 爲了簡單, 我們假設恆等於一, 故生產函數可寫成 $y_t = A_t f(k_{t-1})$。延續上一章的討論, 模型的均衡條件包括:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_t), \tag{14.1}$$

$$A_{t+1} f'(k_t) = r_t + \delta, \tag{14.2}$$

$$c_t + [k_t - (1 - \delta)k_{t-1}] + G_t = A_t f(k_{t-1})。 \tag{14.3}$$

前兩式分別是消費者及廠商最適選擇的一階條件, 最後一式是商品市場的結清條件。嚴格的說, 除以上三式外, 資本的極限價值也必須等於零, 這是廠商最適決策的橫截條件。令 q_t 表示 t 期商品的折現價格, 則橫截條件要求 $\lim q_t k_t = 0$。利用 (14.1) 式, 此一條件也可表達成 (請自證)

$$\lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} u'(c_t) k_t = 0。$$

有關上式的直觀意義請參考上一章 13.2 節。本章主要內容與橫截條件無直接關聯, 讀者如果不熟悉, 可放心略過。

給定各期要素生產力 $\{A_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及政府消費支出 $\{G_t\}_{t=1}^{\infty}$, 以上各式共同決定消費, 資本存量及實質利率的均衡時間軌跡 $\{c_t, k_t, r_t\}_{t=1}^{\infty}$。當外生變數改變時, 消費, 投資, 產出及市場利率也會隨之變動, 本章的主要目的便是要分析外來干擾對內生變數的動態影響。

讓我們先考慮一種最簡單的情況。假設各期要素生產力及政府消費固定不變, 即 $A_t = A, G_t = G, \forall t$。這是一個外生變數靜止不動的世界, 對應的均衡狀態當然沒有理由變動, 因此各期消費, 資本存量及實質利率理應都是定值, 寫成 $c_t = c^*, k_t = k^*, r_t = r^*, \forall t$。這種靜止不動的均衡狀態, 稱爲**恆定狀態** (steady state)。讀者可將這種靜止狀態想成是經濟社會的長期均衡, 只要外生變數不動, 則長期均衡也不動。

Ramsey 模型的恆定狀態必然存在。首先, 根據 (14.1) 式, 當各期消費相等時 (即 $c_t = c^*, \forall t$), 實質利率滿足下式:

$$1 = \beta(1 + r^*) \quad \Rightarrow \quad r^* = \rho。$$

對於此一結果, 讀者一定不陌生。根據上冊第 9 章的分析, 當 $r^* = \rho$ 時, 儲蓄的實質報酬率剛好等於時間偏好率, 此時的各期消費相等。倒過來說, 恆定狀態要求各期消費相等, 上式表示: 市場利率必須調整到時間偏好率的水準, 才能引導消費者在這樣的水平軌跡上消費。

給定各期 $A_t = A$ 及 $r^* = \rho$, (14.2) 式可寫成

$$Af'(k^*) = \rho + \delta。 \tag{14.4}$$

這是一個簡單但重要的條件, 稱爲**修正後資本累積金律** (modified golden rule of capital accumulation)。累積金律 (或稱**黃金法則**) 首見於成長理論, 我們稍後再爲讀者介紹。(14.2) 式或 (14.4) 式要求資本的預期邊際產出等於投資的機會成本, 包括實質利率及資本折舊率, 這是廠商最適決策的必要條件, 無論是否處於恆定狀態, 都必須成立。

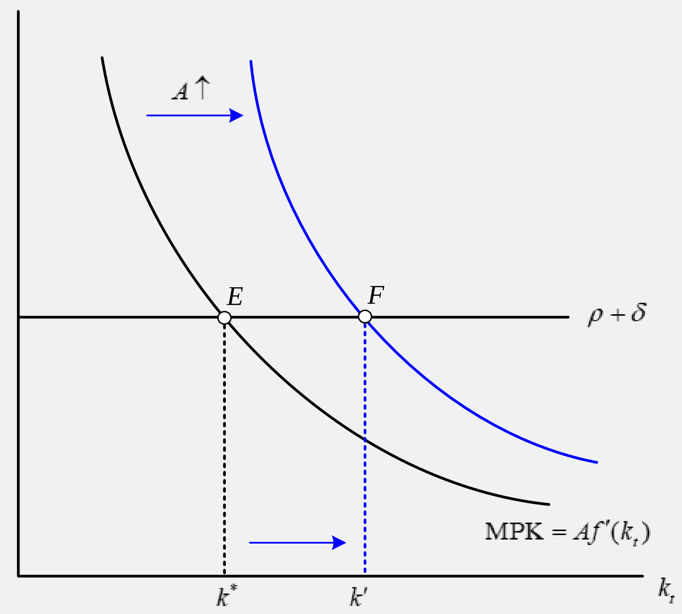

圖 14.1: 恆定狀態下的資本存量

(14.4) 式可單獨決定恆定狀態下的資本存量。圖 14.1 中, 給定各期要素生產力固定不變, 邊際產出曲線 MPK 與成本線 $\rho+\delta$ 交於 E 點, 恆定資本存量是 k^*, 對應的產出水準是 $y^* = Af(k^*)$。根據資本移動方程式, 投資滿足 $i_t = (k_t - k_{t-1}) + \delta k_{t-1}$。因爲各期資本存量相等, 第一項的淨投資等於零, 故恆定投資等於折舊支出 (即 $i^* = \delta k^*$), 這是保證資本存量固定不變的必要投資支出。最後, 給定各期 $G_t = G$, 市場結清條件 (14.3) 式決定恆定消費水準 $c^* = Af(k^*) - \delta k^* - G$。爲保證 c^* 恆大於零, 我們假設 $G < y^* - \delta k^*$。因爲恆定狀態下的消費及資本存量靜止不動, 故橫截條件必然滿足。至此, 我們關心的內生變數已全數解出。

由以上的分析可知, 資本存量是決定恆定狀態的關鍵變數; 只要決定了 k^*, 其他變數也迎刃而解。觀察 (14.4) 式, 影響恆定資本存量的唯一外

生變數是要素生產力 A。圖14.1 中, 當 A 上升時, MPK 曲線右移, 但實質利率仍然等於時間偏好率, 恆定狀態自 E 點移向 F 點, 資本存量增至 k', 產出也隨之上升。恆定狀態下的消費是 $c^* = Af(k^*) - \delta k^* - G$, 利用修正後金律 (14.4) 式, A 變動對 c^* 的影響是

$$\frac{dc^*}{dA} = f(k^*) + [Af'(k^*) - \delta]\frac{dk^*}{dA} = f(k^*) + \rho\frac{dk^*}{dA} > 0。 \tag{14.5}$$

顯然, A 上升也會使恆定消費上升。直觀上, 一個生產力較高的經濟社會當然能夠享受較高的產出及消費水準。請注意, 因爲實質利率固定不變, 跨期替代效果不存在, 因此恆定消費上升全然是因爲財富效果所致。事實上, 上式正是 A 變動對恆常所得的影響 (爲什麼?)。

模型中的另一個外生變數是政府消費支出 G。此類支出不影響廠商的生產能力, 故當 G 上升時, 資本的邊際生產力不受影響, 因此恆定資本不變, 產出也不變。既然產出不變, 根據市場結清條件, 恆定消費必然隨 G 上升而等幅下降。此一結論也相當合乎直觀; 當 G 上升時, 恆常所得等幅下降, 財富效果導致各期消費等幅下降。

恆定狀態當然也受時間偏好率 ρ 及資本折舊率 δ 這兩個參數影響。當 ρ 上升時, 經濟社會對時間比較「缺乏耐性」, 人們相對偏好當下消費, 儲蓄意願較低, 故長期的資本, 產出及消費水準也較低。同理, 折舊率 δ 上升會打擊投資意願, 導致長期的資本, 產出及消費下降。

讀者或許好奇: 當恆定狀態因生產衝擊而改變時, 我們怎能確知經濟社會一定會走向新的恆定狀態? 這是一個完全正確而且值得追究的問題。如果恆定狀態「不穩定」, 一旦遭受干擾便「上天下地, 永無回頭之日」, 則以上的分析即失去意義。相反的, 如果恆定狀態是「穩定」的, 那麼經濟社會又是透過什麼力量「收斂」到新的恆定狀態? 這是動態經濟學的分析焦點, 我們將在本章中爲讀者解說。基本上, Ramsey 模型的恆定狀態是穩定的, 一旦遭受外來干擾, 透過市場供需力量及均衡利率的調整, 資本存

量會逐漸收斂到原來或新的恆定狀態。讀者可能懷疑: 恆定狀態下的實質利率難道不是固定不變, 永遠等於時間偏好率嗎? 不錯, 但這意思不是說, 面臨外生衝擊, 當下的市場利率不會改變。我們暫且按下不表, 留待後文再爲讀者解說。

實例

考慮以下的實例。假設生產函數是 $y = Ak^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$。此時的 (14.4) 式可寫成 $\alpha A k^{\alpha-1} = \rho + \delta$, 移項整理並代回生產函數, 恆定資本存量及產出水準分別是

$$k^* = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{及} \quad y^* = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}。$$

正如前述, A 上升會使 k^* 及 y^* 上升, 而 ρ 上升或 δ 上升使兩者下降。進一步觀察, 我們發現 A 變動導致 k^* 及 y^* 等比例變動, 故恆定狀態下的**資本產出比** (capital-output ratio) 與 A 無關, 兩者的比值是

$$\frac{k^*}{y^*} = \frac{\alpha}{\rho+\delta}。$$

這是一個重要的總體指標, 在成長理論中扮演關鍵角色。根據資料, 台灣及美國的資本份額約爲 $\alpha = 40\%$。若時間偏好率 $\rho = 3\%$, 折舊率 $\delta = 10\%$, 則資本產出之比約爲 $0.4/0.13 \cong 3$, 這表示三單位的有形資本大約可以創造一單位的產出。此一預測與台灣及美國的歷史經驗頗爲一致。

14.2 生產衝擊的均衡分析

本節要利用市場供需模型分析生產衝擊的均衡效果。模型中包括商品, 勞動及債券等三個市場, 但因爲均衡勞動恆等於一, 我們可忽略勞動市場。此外, 根據 Walras 市場法則, 若商品市場達成均衡, 則債券市場也必然處

於均衡狀態,因此真正關鍵的是商品市場結清條件:

$$c_t^d(\underset{(-)}{r_t}, \underset{(+)}{a_t}, \cdots) + i_t^d(\underset{(-)}{r_t}, \underset{(+)}{A_{t+1}}, \underset{(-)}{k_{t-1}}, \cdots) + G_t = A_t f(k_{t-1})。$$

上式左邊的商品需求包括消費需求 c_t^d, 投資需求 i_t^d 及政府消費支出 G_t。首先,消費需求及投資需求是利率的負向函數,這不必再多說。其次,當外生所得 a_t (即股利所得減定額稅淨額) 上升時, 消費需求上升, 這是財富效果。除利率外, 影響投資需求的還有未來的要素生產力 A_{t+1} (請注意, 不是當期的 A_t); 唯有未來生產力上升才會刺激廠商的投資意願。最後, 若期初資本存量 k_{t-1} 上升, 則投資需求下降。給定 A_t 及 k_{t-1}, 上式右邊的商品供給 $y_t = A_t f(k_{t-1})$ 是一個外生的前定 (predetermined) 變數。此一特徵與稟賦模型類似,但因爲存在資本投入,未來的商品供給和投資需求會受今天廠商投資的影響,因此今天和未來的市場均衡不再互相獨立,這是 Ramsey 模型的關鍵特徵。

要素生產力短暫上升的當期效果

讓我們先考慮要素生產力 A_t 短暫上升的均衡效果。爲方便討論, 假設經濟社會原來處於恆定狀態, 各期要素生產力 $A_t = A$, 市場均衡落於圖 14.2(a) 的 E 點, 產出及利率分別是 $y^* = Af(k^*)$ 及 $r^* = \rho$。面對此一均衡利率, 廠商的最適選擇也落於右圖的 E 點, 期待資本存量是 k^*。

假設 t 期的要素生產力從 A 升至 A', 但未來各期維持不變。給定期初資本存量 k^*, 此一短暫衝擊使當期產出增加, 商品供給右移至 $A'f(k^*)$ 的藍線位置。商品需求方面, 由於未來的生產力並未改變, 廠商沒有理由改變他們的投資選擇, 因此投資需求不變。對消費者而言, 產出增加導致股利所得增加, 但因爲持續時間極爲短暫, 恆常所得或消費需求的增幅有限, 我們忽略不計。綜合上述, 短暫的生產衝擊不影響商品需求, 因此在原利率水準下, 商品市場出現 ES 的超額供給, 造成利率下降壓力。從消費

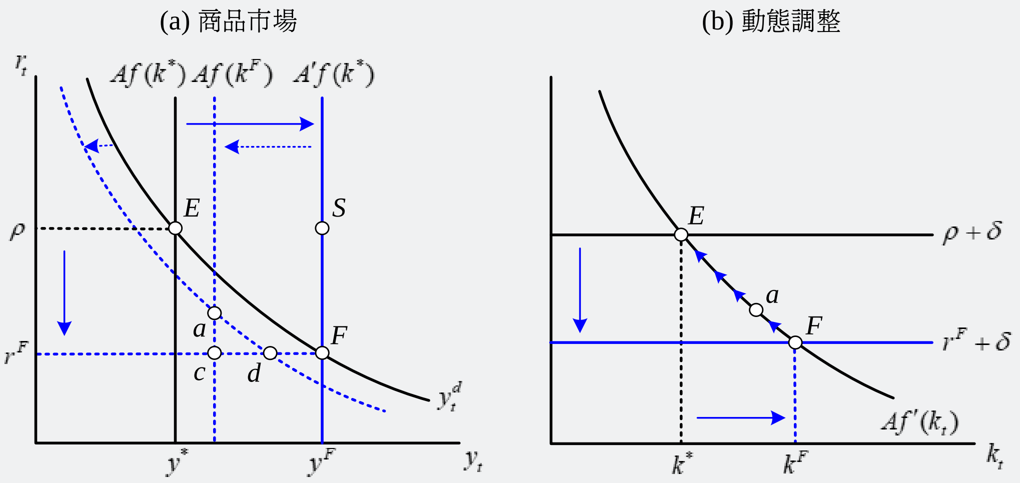

圖 14.2: 要素生產力短暫上升的均衡效果

者的角度看, 面對所得短暫增加, 儲蓄意願上升, 導致借貸市場資金寬鬆, 利率因而下跌。隨著利率下跌, 消費及投資需求上升, 商品需求量沿著 y_t^d 曲線自 E 點移向 F 點, 利率水準降爲 r^F。與原均衡比較, 產出, 消費及投資均上升。圖14.2(b) 中, 生產力短暫上升不影響資本的預期邊際產出, 但因爲利率下降了, 資本存量從 k^* 增至 k^F。

我們不斷強調, **利率水準反映產出的相對稀少性**。在本例中, 生產力短暫上升導致商品供過於求, 市場透過利率下跌引導消費者及廠商增加支出, 直到均衡恢復。此一結論與稟賦模型相似, 但存在一個關鍵不同。在稟賦經濟中, 商品不能累積, 如果落下的椰果太多, 利率必須降至相當水準才能引導消費者消化掉多餘的椰果, 而在 Ramsey 的世界裡, 除消費需求外, 廠商的投資需求也可以消化椰果。根據上一章的分析, 我們知道投資對利率變動極爲敏感, 因此當利率下降時, 商品的超額供給將主要由廠商投資吸收。本質上, 廠商投資有如一個避震器, 可以緩衝外來干擾對消費者的影響, 這是活在稟賦經濟的阿達多麼期盼擁有的能力!

明天過後: 資本累積與動態調整

廠商累積了 $k_t = k^F > k^*$ 的資本存量進入 $t+1$ 期, 此時生產力降回原來水準, 但資本投入增加了。正常情形下, 資本增加對產出的影響相對較小, 故商品供給會從藍線左移到 $Af(k^F)$ 的虛線位置, 亦即, 產出雖因衝擊消失而下降, 但仍高於原始的恆定水準。另一方面, 期初資本存量上升也會使 $t+1$ 期的投資需求下降, 但不影響消費需求。讀者或許疑惑: 爲什麼消費需求不受影響? 或者更正確的說, $t+1$ 期的消費需求曲線不因期初資本存量改變而移動? 這是因爲恆常所得變動導致**各期**消費需求**等幅**變動, 此一財富效果已在昨天衝擊發生時充分反映, 更何況本例的衝擊極爲短暫, 財富效果小到可忽略不計。綜合上述, 經濟社會進入 $t+1$ 期後, 商品需求也會和商品供給一樣, 左移到圖中的藍色虛線位置。

期初資本變動對商品供給及需求的影響方向相反, 一般情形下約略抵銷, 故生產力回降是影響 $t+1$ 期商品市場的主要力量, 導致市場出現 cd 的超額需求, 利率因之上升, 均衡自 F 點移向 a 點。隨著利率上升, 廠商的最適選擇也從圖 (b) 中的 F 點移向 a 點, 資本存量回降。明天過後, 要素生產力固定不變, 但隨著資本存量下降, 商品供給線逐漸左移, 而商品需求線逐漸右移, 導致利率持續上升, 而資本存量也隨之沿著 MPK 曲線繼續下降, 最後回到原來的恆定狀態 E 點。文獻中, 這種漸進的收斂過程稱爲**過渡期間調整過程** (transitional dynamics)。

讀者看到, Ramsey 模型的恆定狀態是穩定的; 面對短暫的生產干擾, 市場供需力量會引導經濟社會回到原來的恆定狀態。這種收斂過程究竟要花多少時間才能完成? 此一問題取決於外生衝擊的持續性, 也與廠商的生產技術及消費者偏好有關, 我們留待適當時機再爲讀者補充 (見習題 3f 及 9c)。以下要考慮永久性生產衝擊對市場均衡的影響。讀者知道, 這種干擾會改變恆定狀態。

要素生產力永久上升的當期效果

圖 14.3 中, 經濟社會原來處於恆定狀態, 市場均衡及廠商的最適選擇分別落於圖 (a)-(b) 的 E 點。假設從 t 期開始, 因爲技術進步, 要素生產力從 A 永久上升至 A'。給定期初資本存量 k^*, 此一衝擊對當期產出的影響與短暫衝擊沒有什麼不同, 同樣會使商品供給線右移至 $A'f(k^*)$ 的藍線位置, 產出增加 ES 單位。

永久性生產力衝擊對商品需求的影響與短暫衝擊截然不同。首先, 圖 14.3(b) 中, A 上升使預期 MPK 曲線右移至 $A'f'(k_t)$ 的藍線位置, 在原利率水準下, 期待資本存量從 k^* 增至 k', 廠商的投資需求上升 $\Delta k_t = k' - k^*$ 單位。其次, 對消費者而言, 衝擊發生當期的股利所得 $d_t = y_t - i_t$ 可能增加, 也可能減少, 因爲廠商投資支出的增幅可能大於或小於產出的增幅。然而從第一節的分析可知, A 永久上升會使消費者的終身財富增加, 因此不論短期所得如何變化, 消費需求必然上升。事實上, 利用 (14.5) 式, 在原利率水準 $r_t = \rho$ 下, A 上升對恆常所得或消費需求的影響約爲

$$\Delta c_t^d \cong f(k^*)\Delta A + \rho\Delta k_t。$$

對應到圖 14.3(a), 上式的第一項即是產出的增幅 ES, 而第二項大於零, 故 $\Delta c_t^d > ES$。直觀而言, 若資本存量永遠維持在原來的恆定水準 k^*, 則各期所得等幅增加 ES 單位, 然而 A 永久上升會使恆定資本存量及所得上升, 因此恆常所得或消費需求的增幅**必然大於** ES 單位。綜上所述, 即使不考慮廠商的投資需求, 商品市場已經出現了超額需求。用白話說, 這是一個「今天日子好過, 但未來更好過」的美好世界, 消費者爲增加消費會減少儲蓄, 試圖挪移一些未來所得到今天享受。

既然消費需求及投資需求都增加, 而消費需求的增幅又大於產出的增幅, 因此商品市場必然供不應求。圖 14.3(a) 中, y_t^d 曲線右移至 D 點的藍線位置, 在原利率水準下, 商品市場出現 SD 的超額需求。讀者還記得,

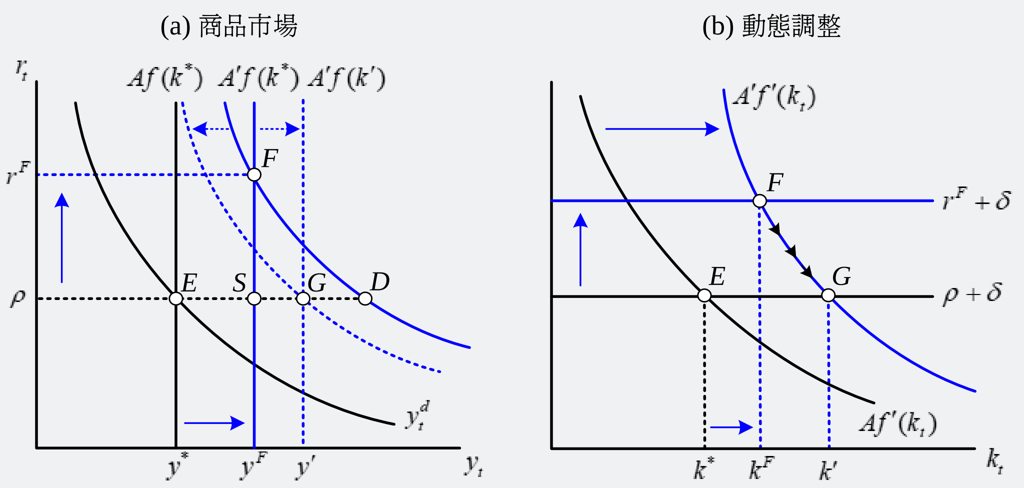

圖 14.3: 要素生產力永久上升的均衡效果

生產力短暫上升使商品供過於求, 而此處的永久性上升卻會使商品供不應求, 這是兩者的主要不同。既然商品市場存在超額需求, 則利率會開始上升, 而消費及投資也會沿著商品需求線下降, 直到新的均衡點 F 爲止, 利率水準升至 r^F。從儲蓄的角度看, 利率之所以上升是因爲「未來的日子實在太好過了」, 消費者減少儲蓄, 造成借貸市場資金緊俏, 導致利率上升。讀者請自行繪圖補充債券市場的供需變動。

生產力上升使產出增加, 給定政府支出固定不變, 消費及投資的加總量必須等幅增加, 否則均衡無法維持, 但因爲利率上升了, 消費及投資的個別變動方向似乎難以確定。首先, 財富效果使消費需求上升, 而利率上升的跨期替代效果卻使消費需求下降。若財富效果大於替代效果, 則均衡消費上升, 反之則下降。同樣的, 資本生產力上升使投資需求上升, 而利率上升卻使投資需求下降, 因此投資如何變化似乎也無從得知。然而, 利率上升對投資只有部分的抵銷效果, 因爲利率之所以上升, 反映的正是生產力上升後的資本變得更具有吸引力 (即 MPK 上升), 資金從債券市場

流向商品市場購買資本設備, 故最後的投資仍會增加。後面的 14.4 節還會針對投資及消費的變動進一步補充。圖 14.3(b) 中, 在原利率水準下, 廠商想要增加 $(k' - k^*)$ 的投資, 但卻無法如願, 利率上升後, 最適選擇落於 F 點, 資本存量只能從 k^* 增至 $k^F < k'$ 的水準。

明天過後: 過渡期間調整過程

廠商累積了 $k_t = k^F > k^*$ 的資本存量進入 $t+1$ 期, 此時的要素生產力仍然是 A', 但因爲資本投入增加了, 產出會進一步上升, 導致商品供給線右移。此外, 期初資本存量增加也會使 $t+1$ 期的投資需求下降, 但不影響消費需求 (因爲財富效果已在衝擊發生時充分反映), 導致商品需求線左移。既然商品供給增加而需求減少, 故市場利率會開始下降, 而廠商的期待資本存量也會沿著 MPK 曲線上升, 直到新的恆定狀態 G 點爲止。在商品市場中, 以上的資本累積過程使商品供給線持續右移, 而商品需求線持續左移, 直到最後的藍色虛線位置爲止。此時, 市場均衡落於 G 點, 整體經濟收斂到新的恆定狀態, 市場利率再度等於時間偏好率, 資本存量及產出分別增至 k' 及 $y' = A'f(k')$, 消費當然也上升。

時間軌跡: 衝擊反應函數

圖 14.4 畫出資本存量, 消費及實質利率對生產干擾的動態反應, 稱爲**衝擊反應函數** (impulse response function)。假設經濟社會原來處於恆定狀態。根據本節的分析, 當要素生產力短暫上升時 (黑色實線), 因爲產出供過於求, 消費者的儲蓄意願上升, 導致利率下跌, 消費及投資因而上升。衝擊消失後, 利率回升, 資本存量及消費也逐漸回到原來的恆定狀態。如圖所示, 廠商投資有如一個避震器, 可以將今天的生產力衝擊傳導到未來, 使各期消費均能「雨露均沾」。顯然, 透過資本累積, 消費者更容易平滑消費。在稟賦經濟中, 這種**傳導機制** (propagation mechanism) 不存在; 今

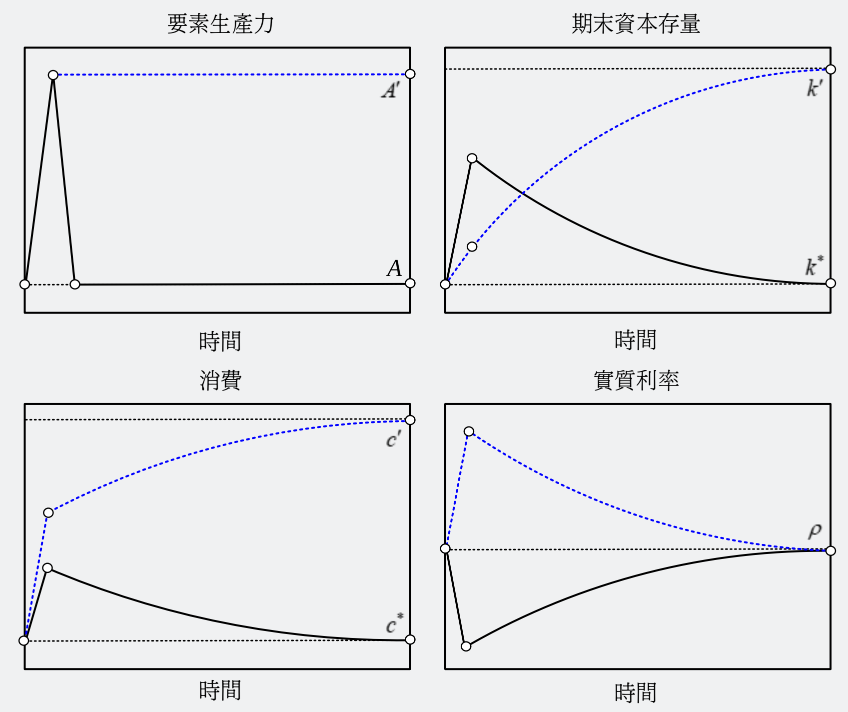

圖 14.4: 衝擊反應函數: 生產衝擊的動態效果

天椰果豐收, 你我都想儲存一些, 但整體經濟卻沒有管道吸納這些儲蓄, 最後只好全數落入肚中。

當要素生產力永久上升時 (藍色虛線), 恆定或長期的資本存量及產出上升; 這是一個「今天好過, 但未來更好過」的世界。爲了增加今天的消費, 人們企圖向未來舉借, 而廠商也想增加投資, 但當下的產出卻無法支應, 導致市場利率上升。假設財富效果對消費的影響大於市場利率上升的跨期替代效果, 則消費及資本存量 (投資) 同步上升。請注意, 因爲利率上升了, 經濟社會還無法立即進入新的恆定狀態。當投資的列車開動後, 資本存量逐漸上升, 導致邊際生產力及實質利率回降, 透過跨期替代效果, 消費逐漸上升, 直到收斂至新的恆定狀態。

圖14.4 淸楚顯示: Ramsey 模型的恆定狀態是穩定的; 一旦受到干擾, 市場均衡會自動向恆定狀態趨近。這是一種漸進的收斂過程, 無須外力刻意操弄, 也沒有什麼「蹊徑小道」, 就像上了付費高速公路, 總有一天會抵達終點, 傳統文獻將這種特徵稱爲**大道性質** (Turnpike Property)。有些學者質疑: 市場經濟真的像 Ramsey 模型描繪得那麼「美妙」嗎? 晚近的**混屯理論** (Chaos Theory) 甚至認爲: 經濟世界是一個極端混亂, 幾乎無可預測的動態體系, 哪有什麼恆定狀態可言? 這些饒富興味的問題已經超出本書範圍, 有興趣的讀者可參考其他文獻。

生產衝擊與景氣波動

本節的分析對我們理解當代景氣波動有幾點值得一提。首先, 根據上冊第 3 章的實證分析, 民間消費及投資在景氣波動過程中屬於順向循環變數, 兩者與產出同向變動, 而實質利率爲逆向循環變數, 與產出反向變動。以台灣爲例, 消費及投資與實質 GDP 的相關係數約爲 0.6, 實質利率約爲 −0.3。造成以上現象的原因當然不只一端, 但讀者知道, 供給面衝擊是導致各國 70 年代以來景氣波動的主要原因。本節的理論模型預測: 生產力衝擊會使消費, 投資及產出同向變動, 但實質利率的變動要看衝擊的持久性而定; 短暫的生產力衝擊 (如油價波動) 使利率與產出反向變動, 而永久性衝擊 (如技術進步) 使兩者同向變動。現實世界中,「天晴天雨, 時而短暫, 時而持久」, 因此利率與產出僅呈現中度的負相關。綜合言之, 理論模型對變數相關性具有相當的解釋能力。

其次, 在景氣波動過程中, 民間投資的波動幅度最爲劇烈, 實質產出次之, 民間消費則最爲平穩。以標準差衡量, 台灣民間投資的波動幅度大約是實質 GDP 的 4 倍, 而非耐久財及服務消費僅爲 60%。此一現象也與本節的理論預測一致。簡單的說, 投資需求對利率變動極爲敏感, 在景氣波動過程中扮演緩衝角色, 不但可以吸收「震波」, 減緩消費的波動, 也可以

將衝擊的影響分散到未來。正因爲這種資本累積的傳導機制, 我們的模型也預測, 景氣波動具有相當的持續性, 這是各國景氣波動的另一個定型特徵。以台灣爲例, 實質 GDP, 民間消費及民間投資的一階自我相關係數約爲 0.8, 實質利率更高, 約爲 0.9。

14.3 政府消費增加的均衡分析

除供給面衝擊外, 影響景氣波動的因素還有諸多來自需求面的干擾, 其中最常見的便是政府提振內需的政策手段。仿照上節, 本節也要利用市場供需模型分析政府消費增加的動態效果。

圖 14.5 中, 經濟社會原來處於 E 點的恆定狀態, 政府於 t 期增加消費支出, 但其他各期維持不變; 這是一個暫時性的提振內需政策。首先, 給定期初資本存量 k^* 及要素生產力 A 不變, 此一政策不影響當期產出, 故商品供給線不動。其次, 政府消費不影響資本的邊際生產力, 故在原利率水準下, 廠商的投資需求不變。最後, 政府支出增加導致消費者的終身財富下降, 但因爲持續時間極爲短暫, 恆常所得或消費需求的變動微乎其微, 我們忽略不計。讀者當記得, 政府支出增加對恆常所得的影響不因融通手段而有不同; 定額稅融通使消費者的當期所得下降, 但未來所得不變, 而赤字融通不影響當期所得, 但未來所得下降。換言之, 無論今天繳稅或未來繳稅, 消費者恆常所得的下降幅度都相同。綜合上述, 政府消費短暫增加不影響民間的投資及消費需求, 但因爲政府的商品購買量增加了, 商品需求曲線右移至 D 點的藍線位置。

如圖所示, 在原利率水準下, 商品市場出現 ED 的超額需求, 造成利率上升壓力。從儲蓄的角度看, 政府若採取租稅融通手段, 則消費者的儲蓄意願下降, 但若採取赤字融通手段, 則消費者的儲蓄意願雖然上升, 但仍不及政府儲蓄的下降 (爲什麼?)。因此, 不論政府採取哪種融通手段, 國

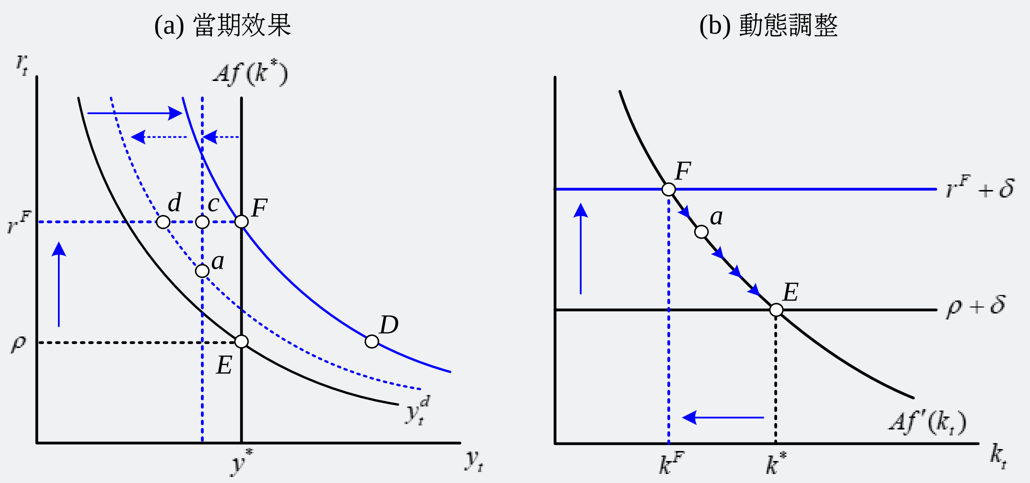

圖 14.5: 政府消費短暫上升的均衡效果

民儲蓄 (即民間儲蓄加政府儲蓄) 都會下降, 造成借貸市場資金緊俏, 市場利率因而上升。隨著利率上升, 消費和投資下降, 商品需求量沿著 y_t^d 曲線從 D 點移向 F 點, 利率水準升至 r^F。與原均衡比較, 產出水準不變, 但民間消費及廠商投資都下降。圖 14.5(b) 中, 廠商原來選擇 E 點, 利率上升後, 期末資本存量從 k^* 降爲 k^F。

讀者當記得, 政府支出增加導致民間支出減少的現象, 稱爲**排擠效果** (crowding-out effect)。以上的結論指出: 政府消費增加不但會排擠民間消費, 也會排擠廠商的投資支出。此一排擠效果對廠商投資尤其明顯, 因爲投資需求對利率變動極爲敏感。在 Ramsey 模型中, 因爲各期產出是一個前定變數, 政府支出增加不影響當期產出, 但因爲投資被排擠了, 今天的提振內需政策反而會使未來的產出下降。

經濟社會進入 $t+1$ 期, 政府消費降回原來水準, 但因爲期初資本存量下降了, 投資需求略升, 導致商品需求移至虛線位置, 而商品供給也同步左移。一般情形下, 資本存量變動對商品供需的相反影響約略抵銷, 故市

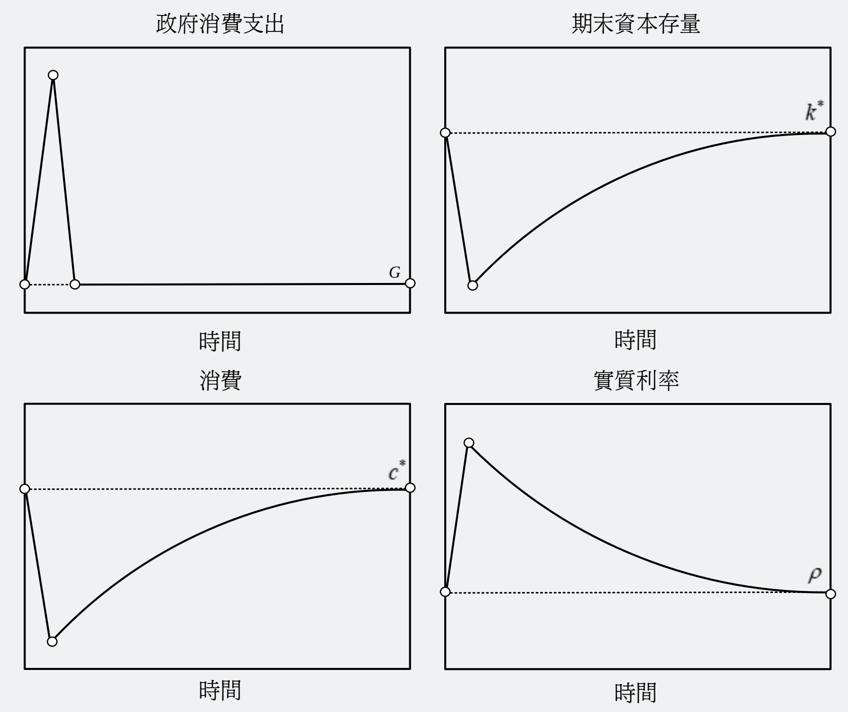

圖 14.6: 衝擊反應函數: 政府消費短暫上升的動態效果

場出現 cd 的超額供給, 利率因之下跌, 均衡自 F 點移向 a 點。圖 (b) 中, 廠商的資本存量也隨利率下降而開始回升。明天過後, 資本存量變動是影響市場供需的唯一因素, 隨著資本存量回升, 商品供給線逐漸右移, 商品需求線逐漸左移, 最後回到原來的 E 點。

總結以上分析, 圖 14.6 畫出政府消費短暫變動的衝擊反應函數。當政府消費短暫增加時, 市場利率因爲商品供不應求而上升。面對此一政策, 民間不但減少消費, 同時也減少投資, 試圖將消費者的「痛苦」分散到以後各期。讀者看到, 投資在這裡也扮演避震功能, 減緩衝擊對消費的影響。在過渡期間, 因爲資本存量下降, 商品產出低於長期恆定水準。此一結論或許會令讀者「不安」; 政府提振內需不能刺激生產也就罷了, 竟然還導

致未來的產出下降! 現實世界裡的政府「頭殼壞了嗎」? 其實, Ramsey 模型有其侷限, 不完全適合用來爲這個問題定調。政府增加消費的產出刺激效果要納入勞動選擇後才有討論空間, 我們留待以後的實質循環模型再爲讀者補充。

讀者一定也想問: 政府消費永久增加會有什麼後果? 特別是, 與短暫增加的效果有何不同? 在 Ramsey 模型中, 這個問題的分析簡單到不行, 容作者賣個關子, 當作習題讓諸位思考 (見習題 2)。

14.4 荒島經濟的動態均衡分析*

本節要從荒島經濟的角度分析 Ramsey 模型的動態均衡, 這是一個沒有市場的經濟社會, 所有經濟活動, 包括生產, 消費及投資, 都聽命於一位無所不能的「真主阿拉」, 或由一位代表性個人獨立完成。讀者還記得, 這個代表性決策者的最適選擇即是福利極大的柏拉圖狀態, 也是市場經濟的競爭均衡。本節稍微抽象但不難, 初學者也應試試看。

爲了簡單, 我們不考慮政府消費, 同時假設各期要素生產力爲一定值。給定起始資本存量 $k_0 > 0$, 荒島上 Crusoe 的跨期選擇問題是

$$\max_{\{c_t,k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$$

$$\text{subject to} \quad c_t + [k_t - (1-\delta)k_{t-1}] = Af(k_{t-1}), \ \forall t。 \tag{14.6}$$

上述問題的最適解要求 Crusoe「累積果種, 延後消費」的效用成本等於效用增益, 爲方便後文討論, 我們以落後一期表示:

$$u'(c_{t-1}) = \beta u'(c_t)\left[1 - \delta + Af'(k_{t-1})\right], \ \forall t。 \tag{14.7}$$

這是最適選擇的一階條件, 又稱**歐勒方程式** (Euler equation)。除 (14.6)-(14.7) 兩式外, 最適解也必須滿足橫截條件:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} u'(c_t) k_t = 0。 \tag{14.8}$$

用白話說,橫截條件要求資本存量沒有極限效用價值,這表示資本的價值已經被「榨乾」了,沒有再利用的空間,這是保證 Crusoe 終身效用已達極限的充分條件 (請見上一章 13.2 節的討論)。

相位圖

(14.6)-(14.7) 兩式形成一組包括消費及資本存量的動態體系,我們可以利用所謂的**相態圖**或**相位圖** (phase diagram) 分析這兩個變數的變動方向。相位圖是一種定性的分析工具,可用來判斷體系的變化趨勢,在動態經濟學中應用廣泛。

首先,爲方便判斷,讓我們將歐勒方程式 (14.7) 移項,改寫成

$$\frac{u'(c_{t-1})}{u'(c_t)} = \frac{1-\delta + Af'(k_{t-1})}{1+\rho}。$$

觀察上式,前後兩期消費的關係取決於期初資本存量 k_{t-1},可分三種情形討論: (1) 若 k_{t-1} 剛好落於恆定水準 k^*,則根據修正後累積金律 (14.4) 式,$Af'(k^*) = \rho + \delta$,上式右邊等於一。此時的 $u'(c_t) = u'(c_{t-1})$,故前後期消費必然相等,寫成 $\Delta c_t = c_t - c_{t-1} = 0$; (2) 若 $k_{t-1} < k^*$,則根據邊際產出遞減性質,$Af'(k_{t-1}) > Af'(k^*) = \rho + \delta$,上式右邊大於一,此時的邊際效用隨時間遞減,表示消費隨時間遞增,故 $c_t > c_{t-1}$ 或 $\Delta c_t > 0$; (3) 同理,若 $k_{t-1} > k^*$,則 $\Delta c_t < 0$,消費隨時間而下降。

對於以上結果,讀者應該不陌生。事實上,荒島上 Crusoe 的行爲與面對市場利率的消費者並無不同。在市場經濟中,若實質利率大於時間偏好率,則消費者會選擇不斷成長的消費型態,這道理不必再多說。荒島上雖然沒有價格,但 $Af'(k_{t-1}) - \delta$ 其實就是資本的**影子利率**,這是 Crusoe 消費的機會成本或投資的邊際報酬。當 $k_{t-1} < k^*$ 時,此一邊際報酬大於時間偏好率,Crusoe 自然會延遲消費,選擇不斷成長的消費型態,這種行爲與消費者面對 $r > \rho$ 時的反應完全相同。

圖14.7(a) 在 (k_{t-1}, c_t) 空間中畫出消費的變動趨勢, 橫軸是任意 t 期的起始資本存量 k_{t-1}, 縱軸是該期的消費水準 c_t。從以上的分析可知, 當 $k_{t-1} = k^*$ 時, 前後期消費相等, 故 $\Delta c_t = 0$ 是一條垂直線。請注意, 此時我們唯一能確定的是 $c_t = c_{t-1}$, 但 c_t 會落於何處仍然未知, 這要等到考慮資源限制及橫截條件後才能確定。其次, 若 $k_{t-1} < k^*$, 則 $\Delta c_t > 0$, 此時的消費隨時間而上升, 我們以向上遞增符號表示消費的變動方向。最後, 若 $k_{t-1} > k^*$, 則 $\Delta c_t < 0$, 消費隨時間而下降。綜合上述, 期初資本存量的相對位置決定跨期消費的變化趨勢, 但資本存量如何變動則必須借助另一個均衡條件, 即資源限制式 (14.6)。

仿照前面的步驟, 讓我們將 (14.6) 式中的淨投資 $\Delta k_t = k_t - k_{t-1}$ 移到左邊, 改寫成

$$\Delta k_t = k_t - k_{t-1} = \left[Af(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}\right] - c_t。$$

用白話說, 淨投資等於產出減資本折舊再減消費。顯然, 給定任何期初資本存量 k_{t-1}, 淨投資 Δk_t 或期末資本存量 k_t 的變動方向取決於消費水準 c_t, 同樣可分三種情形討論: (1) 當 $c_t = Af(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}$ 時, 淨投資 $\Delta k_t = 0$, 這表示資本存量固定不變; (2) 當 $c_t < Af(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}$ 時, 荒島上仍有多餘的產出可供累積資本, 故 $\Delta k_t > 0$; (3) 當 $c_t > Af(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}$ 時, 淨投資 $\Delta k_t < 0$, 資本存量隨時間而下降。

圖 14.7(b) 同樣在 (k_{t-1}, c_t) 空間中畫出資本存量的變動趨勢。首先, 假設 $\delta > 0$, 則 $\Delta k_t = 0$ 或 $c_t = Af(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}$ 是一條先升後降的曲線 (請自行驗證)。給定任何 k_{t-1}, 只要 c_t 落在這條曲線上, 則 $k_t = k_{t-1}$, 資本存量維持不變。其次, 若 $c_t < Af(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}$, 則 c_t 落於 $\Delta k_t = 0$ 曲線的內側, 此時 $\Delta k_t > 0$, 資本存量隨時間而上升, 我們以右增符號表示資本存量的變動方向。最後, 若 $c_t > Af(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}$, 則 c_t 落於 $\Delta k_t = 0$ 曲線的外側, 此時 $\Delta k_t < 0$, 資本存量隨時間而下降。

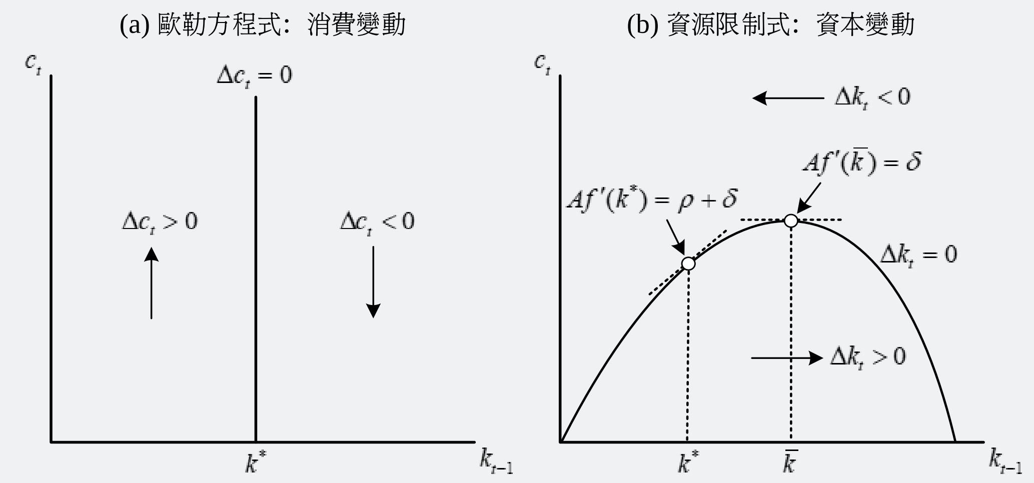

圖 14.7: 相位圖分析

累積金律 (黃金法則) 與修正後金律

繼續分析之前, 我們要暫時岔開話題, 爲讀者介紹累積金律或黃金法則的觀念。圖 14.7(b) 標示兩個特殊的資本存量水準 k^* 及 $\bar{k}$。首先, 若 $k = k^*$, 則 $Af'(k^*) = \rho + \delta$, 這是保證福利極大的修正後金律。其次, 當 $k = \bar{k}$ 時, 消費達到最高點, 此時的資本邊際產出 $Af'(\bar{k})$ 等於折舊率 δ, 這是消費極大的一階條件。直觀而言, 若 $k < \bar{k}$, 則邊際產出大於資本折舊, 消費仍有增加空間, 而當 $k > \bar{k}$ 時, 邊際產出小於資本折舊, 消費隨資本增加而下降。顯然, 當 $Af'(\bar{k}) = \delta$ 時, 長期消費達到極大水準, 此即傳統文獻所稱的**資本累積金律**或**黃金法則**。根據邊際產出遞減性質, 因爲 $Af'(k^*) = \rho + \delta > Af'(\bar{k})$, 故 $\bar{k}$ 必然大於 k^*。

黃金法則源自早期的 Solow-Swan 成長模型。當時的經濟學家追問一個在今天看來仍然深具意義的問題: 如果我們想爲後代子孫謀求最大的經濟福祉, 究竟應累積或留下多少生產性資本? 這個問題或許與西方的基督教精神有關。聖經說:「你要人如何待你, 便應如何待人」, 推而廣

之, 這種「愛人如己」的金律當然也應該適用於尚未出生的未來世代。基於這種信念, 追求未來消費極大的黃金法則曾被奉爲政府諸多成長政策 (特別是獎勵儲蓄) 的終極目標, 但時至今日, 已經沒有多少經濟學家還堅持這種論調了, 主要理由有二。

第一, 黃金法則要人「推己及人, 己所欲應施於人」, 這種無私的道德準則固然可貴, 但東方的儒家也說:「己所不欲, 勿施於人」, 後人的享受難道不必體恤前人的犧牲? 黃金法則完全未考慮後人消費乃是以前人的消費爲代價, 對整體經濟社會而言, 今天消費和未來消費應該要同時考慮才是持平之論。政府若透過政策手段硬將資本存量挪至黃金法則水準, 則整體社會的福利必然下降。第二, 黃金法則忽略了投資的機會成本 (即實質利率), 因此資本會過度累積, 導致長期資本存量 $\overline{k}$ 高於社會福利極大時的 k^*。根據前兩節的分析, 我們知道修正後累積金律保證社會福利極大, 而且是市場經濟的唯一長期均衡, 因此黃金法則的境界有如「海市蜃樓」, 不但荒島上的 Crusoe 吝於選擇, 在市場經濟中也不可能實現。有關黃金法則, 我們還會在以後的成長模型補充。

馬鞍路徑

回到主題, 讓我們合併前面的 (a)-(b) 兩圖, 同時考慮消費及資本存量的變動。圖 14.8 中, 當 $\Delta c_t = \Delta k_t = 0$ 時, 體系落於 E 點的恆定狀態, 消費及資本存量靜止不動。如圖所示, 以 $\Delta c_t = 0$ 及 $\Delta k_t = 0$ 兩線爲界, 平面空間可以隔成四個區域, 分別以箭頭標示消費及資本存量的變動方向。例如, 考慮東北區域的 A 點。此時的 $\Delta c_t < 0$ 且 $\Delta k_t < 0$, 故消費及資本存量隨時間遞減, 然而一旦越過 $\Delta c_t = 0$ 進入左側的 $\Delta c_t > 0$ 區域, 則資本存量持續下降, 但消費卻開始上升。同理, 若從 B 點開始, 則消費及資本終將穿越 $\Delta k_t = 0$ 進入 $\Delta k_t > 0$ 區域, 此時的消費持續下降, 但資本存量開始上升。這些動態路徑全都滿足歐勒方程式及資源限制式。

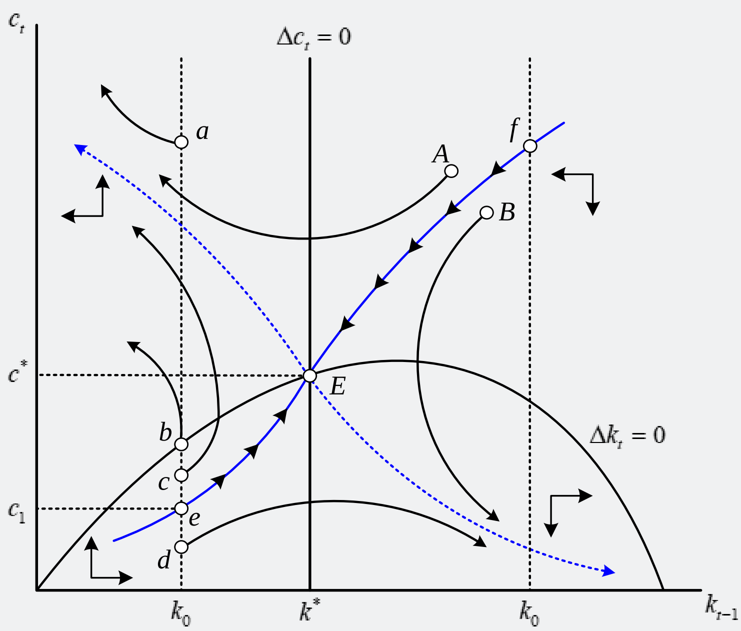

圖 14.8: 相位圖分析: 馬鞍路徑

荒島經濟從 $t = 1$ 開始, 假設 Crusoe 的起始資本存量 k_0 仍然低於恆定水準 k^*。爲了決定消費及資本存量的動態路徑, 我們必須知道 Crusoe 在 $t = 1$ 時究竟吃掉了多少椰果, 即起始期的消費水準 c_1。假設 c_1 落於西北區域的 a 點位置, 此時的 $c_1 > Af(k_0) - \delta k_0$, 故 $k_1 < k_0$, 這表示 Crusoe 一漂流到荒島即開始「吃老本」。從 a 點開始, 因爲 $\Delta k_t < 0$ 且 $\Delta c_t > 0$, 資本存量隨時間而遞減, 但消費卻不斷增加! 如果 Crusoe 能夠「倒債」, 資本存量終將全數耗盡, 甚至變成負值。這種情形不可能發生, 因爲資本不是債券, 可以變成負值, 而且資本不斷下降, 產出也不斷下降, 消費豈能持續增加? 事實上, 從 a 點開始的動態路徑, 各期消費的折現總值將**大於**產出的折現總值, 終身預算不允許 Crusoe 選擇 a 點 (見習題 14)。其次, 考慮落於 $\Delta k_t = 0$ 曲線上的 b 點。此時的資本存量雖然不變, 但消費仍會上

升, 從而進入西北的發散區域, 因此 b 點也不可能。如果 c_1 落於略低的 c 點, 則資本存量及消費隨時間遞增, 但因爲 c 點非常接近 $\Delta k_t = 0$, 故消費上升的力量相對較強, 動態路徑終將穿越 $\Delta k_t = 0$ 進入「資本下降, 消費上升」區域。顯然, a, b, c 三點對應的 c_1 都太高了, Crusoe 想要選擇, 但生產技術及終身預算不允許!

最後, 考慮 c 點下方的 d 點。此時的消費及資本存量隨時間上升, 但因爲資本成長的力量相對較強, 動態路徑終將穿越 $\Delta c_t = 0$ 進入右側的 $\Delta c_t < 0$ 區域, 導致資本存量持續增加, 但消費卻不斷下降。Crusoe 不是「守財奴」, 這種情形也不可能發生。想像荒島上椰樹滿山遍野, Crusoe 累積了堆積如山的椰果, 卻吝於消費, 這怎麼可能是他的最適選擇? 直觀上, 在這些路徑上, 他只要多吃一些 (不必多, 一點點就足夠) 就能提升他的終身效用。事實上, 任何動態路徑只要進入「資本上升, 消費下降」的東南區域, 就必然違反橫截條件 (14.8) 式。

更嚴謹的說, 讓我們利用 (14.7) 式將 (14.8) 式改寫成

$$\lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} u'(c_t) k_t = u'(c_1) \lim_{t\to\infty} q_t k_t = 0,$$

其中的影子折現價格 q_t 是 (請自行驗證)

$$q_t = \frac{1}{\left[1-\delta + Af'(k_1)\right] \cdots \left[1-\delta + Af'(k_{t-1})\right]}。$$

若動態路徑進入東南區域, 則資本存量隨時間成長。根據邊際產出遞減性質, 當 k_t 越過黃金法則水準 $\overline{k}$ 後, $Af'(k_t) < \delta$ 或 $1-\delta+Af'(k_t) < 1$, 上式分母的連乘積將隨時間遞減, 故 q_t 隨時間遞增。顯然, $\lim q_t k_t > 0$, 違反橫截條件。簡單的說, 從 d 點開始的動態路徑, 各期消費的折現總值會**小於**產出的折現總值 (見習題 14), 這表示終身效用仍有增加空間, Crusoe 不可能「笨」到選擇這樣的消費路徑。

綜合上述, a, b, c 三點技術上不可能, 而 d 點違反效用極大的橫截條件, 故起始期的最適消費 c_1 必然落於 c, d 兩點之間, 如 e 點。從該點開

始, 消費及資本存量逐期遞增, 最後收斂至恆定狀態 E 點, 這是唯一滿足資源限制式 (14.6), 歐勒方程式 (14.7) 及橫截條件 (14.8) 式的動態路徑。顯然, 以上的推論也適用於其他起始資本水準。如圖所示, 若 $k_0 > k^*$, 則起始最適消費 c_1 會落於東北區域的 f 點。從該點開始, 消費及資本存量逐期下降, 最後也收斂至 E 點。

讀者清楚看到, 通過 E 點夾著兩條性質截然不同的動態路徑, 情形有如 Crusoe 跨坐馬背, E 點是**鞍點** (saddle point), 一條從 e 點或 f 點向鞍點收斂, 這是穩定的**馬鞍路徑** (saddle path), 另一條則從鞍點向外發散, 這是不穩定的馬鞍路徑。從以上的分析可知, 指向西北的路徑違反終身預算限制, 而指向東南的路徑違反橫截條件, 故最適消費及資本存量必然落於穩定的「東北-西南」馬鞍路徑上。

生產衝擊的相位圖分析

本節最後要利用相位圖分析生產衝擊的動態效果。圖 14.9(a) 中, 荒島原來處於 E 點的恆定狀態, 想像某日「風調雨順」, 要素生產力 A_t 上升, 但次期即降回原來水準。此一衝擊使 $\Delta k_t = 0$ 曲線暫時外移至藍色虛線位置, 但因爲持續時間極爲短暫, 恆定資本存量 k^* 不受影響, 故 $\Delta c_t = 0$ 線不動, 原來的馬鞍路徑 AB 也不動。給定起始資本存量 $k_{t-1} = k^*$, 荒島上的椰果增加 EF 單位, 可用於消費及投資。顯然, Crusoe 的最適選擇會落於 E, F 兩點之間, 例如 a 點, 這表示衝擊當期的消費 c_t 增加 (因爲財富效果), 期末資本存量 k_t 也增加。直觀而言, Crusoe 知道好景不常, 吃掉所有落果顯然不是最佳選擇。

荒島進入 $t+1$ 期, 此時生產干擾消失, $\Delta k_t = 0$ 曲線移回原來位置, 但因爲期初資本存量 k_t 增加了, Crusoe 的最適選擇會從 a 點移至馬鞍路徑上的 b 點。明天過後, 消費及資本存量順著馬鞍路徑自 b 點逐期下降, 最後收斂回原來的恆定狀態 E 點。根據邊際產出遞減性質, 荒島上的影

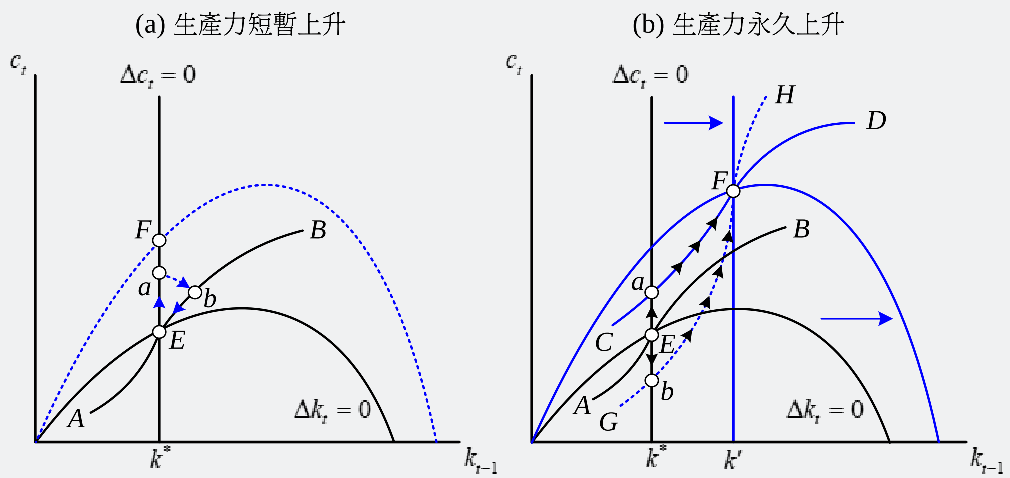

圖 14.9: 相位圖分析: 生產衝擊的動態效果

子利率 $r_t = Af'(k_t) - \delta$ 隨資本存量上升先下降, 然後再隨著資本下降而逐漸回升。顯然, Crusoe 透過資本累積將部分新增產出挪至未來享用, 此一行爲與圖 14.4 的衝擊反應函數完全相同。

永久性生產衝擊的分析也非常類似。圖14.9(b) 中, 要素生產力永久上升使 $\Delta c_t = 0$ 及 $\Delta k_t = 0$ 兩線同時外移, 恆定狀態自 E 點移至 F 點, 資本存量及消費水準都較高。如圖所示, 新的馬鞍路徑通過 F 點, 但可能從 E 點上方穿過, 如 CD 路徑, 也可能從 E 點下方穿過, 如 GH 路徑。直觀上, 如果 Crusoe 不特別在意極端的跨期消費型態, 只要未來能夠「吃香喝辣」, 今天少吃一些也無妨, 則馬鞍路徑會如 GH 路徑所示, 顯得較爲陡峭 (見習題 4b)。面對要素生產力或預期資本報酬變動, 這種情形下的跨期替代效果大於財富效果。

給定起始資本存量 $k_{t-1} = k^*$, 生產力永久上升使 Crusoe 的最適選擇從 E 點直接跳到新的馬鞍路徑上。如果財富效果大於跨期替代效果, 則最適選擇會落於 CD 路徑上的 a 點, 消費上升, 反之則落於 GH 路徑上

的 b 點, 消費下降。顯然, 不論消費上升或下降, 資本存量或投資必然上升。從 $t+1$ 期開始, 消費及資本存量順著馬鞍路徑逐漸上升, 最後收斂至新的恆定狀態 F 點。生產力永久上升使一開始的實質利率上升, 但隨著資本存量上升, 邊際產出逐漸下降, 實質利率開始回降, 最後再度等於時間偏好率。以上結論也與 14.2 節的市場供需分析一致。

相位圖從單一決策者的角度分析整體經濟的動態行為, 這種分析方法的優點是「直接而快速」, 但根據作者的經驗, 初學者經常在「繪圖求解」過程中忽略背後的直觀意義。其實, 相位圖分析也是植基於決策者的選擇行為, 與前面的市場供需模型並無不同, 這兩種分析方法應該要搭配一起使用才能得到最大的學習效果。最後, 相位圖也可用於分析政府支出變動的動態效果, 我們當作習題讓讀者思考 (見習題 2)。

14.5 應用分析: 銷售稅

本節要分析政府對廠商課徵產出稅或銷售稅的動態效果。直觀上, 這種稅等於是對資本的邊際報酬課稅, 因此會打擊廠商的投資意願, 降低長期的產出及消費。為了簡單, 我們不考慮無關分析的生產衝擊及政府消費, 故生產函數是 $y_t = f(k_{t-1})$, 各期政府消費 $G_t = 0$。

假設政府對廠商課徵固定比例 $\tau \in (0,1)$ 的銷售稅, 稅收 τy_t 全部以定額方式 v_t (如年金) 移轉給消費者, 故各期預算滿足 $v_t = \tau y_t$。我們不考慮赤字預算, 因為根據李嘉圖等值定理, 是否存在公債不重要。面對銷售稅, 廠商的股利等於稅後銷售收入減投資支出, 即 $d_t = (1-\tau)y_t - i_t$。消費者自廠商分配股利 d_t, 並從政府獲得移轉收入 v_t, 故其外生所得仍然是 $a_t = d_t + v_t = y_t - i_t$。請注意, 因為存在定額移轉, 政府課徵銷售稅不直接影響消費者的可支配所得, 但這不表示政策對消費者沒有財富效果, 因為當稅率改變時, 廠商的投資也會改變, 進而影響股利所得。

加入銷售稅後的全面均衡與 14.1 節並無本質不同。首先, 消費者終身效用極大的一階條件仍是 (14.1) 式; 其次, 因爲不存在政府消費, 商品市場結清條件是 $c_t + i_t = y_t$。最後, 廠商的最適選擇要求投資的**稅後**邊際報酬 $(1-\tau)f'(k_t)$ 等於對應的機會成本 $r_t + \delta$, 這是投資決策的一階條件。顯然, 稅率上升會使廠商的期待資本存量下降 (請自行繪圖補充), 故投資需求是稅率 τ 的負向函數。

爲方便參考, 均衡條件重寫於下:

$$
\begin{aligned}
\text{消費者最適選擇:}\quad & u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1+r_t),\\
\text{廠商最適選擇:}\quad & (1-\tau)f'(k_t) = r_t + \delta,\\
\text{市場結清條件:}\quad & c_t + [k_t - (1-\delta)k_{t-1}] = f(k_{t-1})。
\end{aligned}
$$

根據第一式, 恆定狀態仍然要求實質利率等於時間偏好率; 根據第二式, 資本累積金律是 $(1-\tau)f'(k^*) = \rho + \delta$。顯然, 稅率上升會使恆定資本存量及產出水準下降。此外, 恆定消費是 $c^* = f(k^*) - \delta k^*$, 利用第二式, 稅率變動對 c^* 的影響是 (利用 $dk^*/d\tau < 0$)

$$
\frac{dc^*}{d\tau} = [f'(k^*) - \delta]\frac{dk^*}{d\tau} = \left(\frac{\rho+\delta}{1-\tau} - \delta\right)\frac{dk^*}{d\tau} < 0。 \tag{14.9}
$$

直觀而言, 稅率上升使恆定資本下降, 導致產出及折舊投資同時下降, 但因爲邊際產出遞減, 產出的下降幅度大於折舊的下降, 故恆定消費下降。銷售稅率上升雖然使恆定消費下降, 但短期下, 消費反而會上升。以下分別利用市場供需模型及相位圖爲讀者解說。

市場供需分析

圖 14.10(a) 中, 經濟社會原來處於 E 點的恆定狀態, 稅率從 t 期開始永久上升。給定起始資本存量 k^*, 當期產出 $f(k^*)$ 不受影響, 故商品供給線不動。商品需求方面, 稅率永久上升導致廠商的投資需求下降。對消費者而

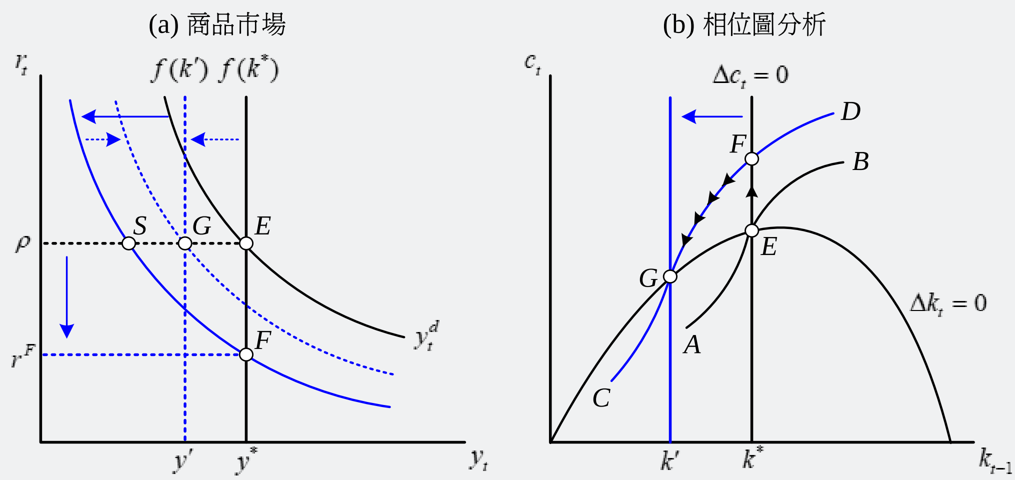

圖 14.10: 銷售稅率上升的均衡分析

言, 稅率上升使未來所得下降, 但當期所得 $a_t = d_t + v_t = f(k^*) - i_t$ 卻會因爲廠商投資支出下降而暫時上升。換言之, 在資本存量還未開始調整前, 消費者面對的所得變化是先升後降, 綜合考慮後, 終身財富雖然下降, 但消費需求的變動應該不明顯。事實上, 假設原始稅率 $\tau = 0$, 則利用 (14.9) 式, 稅率上升對恆常所得或消費需求的影響約爲

$$\Delta c_t^d \cong \left(\frac{\rho + \delta}{1 - \tau} - \delta \right) \Delta k_t \xrightarrow{\tau = 0} \rho \Delta k_t < 0。$$

讀者看到, 消費需求雖然下降, 但與投資需求的降幅 Δk_t 相較, 幅度極爲有限, 可忽略不計。綜上所述, 投資需求下降是影響商品需求的主要力量, 導致 y_t^d 曲線左移到藍線位置, 在原利率水準下, 商品市場出現 ES 的超額供給, 造成利率下降壓力。從消費者的角度看, 今天所得上升, 而未來所得下降, 儲蓄意願上升使債券供不應求, 利率因之下跌。隨著利率下跌, 消費及投資需求上升, 最後的均衡落於 F 點。因爲產出不變而消費增加, 故均衡投資必然下降, 這是稅率永久上升的當期效果。

當廠商開始調整生產規模後, 商品供給線隨資本存量下降逐漸左移, 而商品需求線右移, 最後收斂至新的恆定狀態 G 點, 產出及消費都下降。總結以上分析, 當稅率永久上升時, 短期下, 產出從投資流向消費, 導致消費上升, 但長期下, 因爲資本存量及恆常所得下降, 消費也下降。

相位圖分析*

存在扭曲性租稅的競爭均衡不再是柏拉圖最適狀態, 但我們仍可利用相位圖分析政策的動態效果。事實上, 合併消費者及廠商的一階條件, 消費及資本存量的動態行爲滿足以下兩式:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left[1 - \delta + (1 - \tau) f'(k_t)\right],$$
$$c_t + \left[k_t - (1 - \delta) k_{t-1}\right] = f(k_{t-1})。$$

除考慮稅後邊際產出外, 此一動態體系與 14.4 節的模型並無不同, 故前面的相位圖仍然適用。

圖 14.10(b) 中, 經濟社會原來處於 E 點的恆定狀態, 稅率永久上升不影響 $\Delta k_t = 0$ 曲線, 但使恆定資本存量下降, 故 $\Delta c_t = 0$ 線左移, 新的恆定狀態落於 G 點, 資本存量及消費水準都較低。如圖所示, 新的馬鞍路徑 CD 通過 G 點, 而且從 E 點上方穿過。給定起始資本存量 k^*, 稅率上升使當期消費從 E 點直接跳升到 CD 路徑上的 F 點。因爲產出不變, 但消費上升, 故投資及資本存量下降, 這是稅率上升的短期效果, 與前面的供需分析一致。從選擇行爲的角度看, 投資的稅後報酬因稅率上升而下降, 跨期替代效果使消費需求上升, 而財富效果使消費需求下降。如前所述, 稅率永久變動的財富效果不明顯, 導致跨期替代效果大於財富效果, 故當期消費上升, 而投資下降。在過渡期間, 資本存量及消費順著馬鞍路徑從 F 點逐期下降, 最後收斂至 G 點。

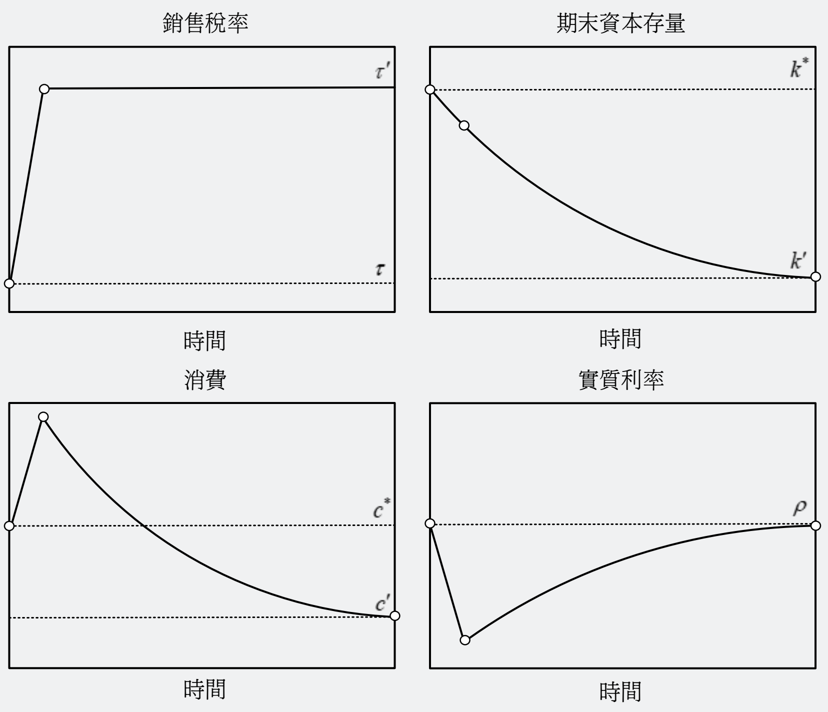

圖 14.11: 衝擊反應函數: 銷售稅率上升的動態效果

圖 14.11 畫出銷售稅率變動的衝擊反應函數。當稅率永久上升時, 投資的稅後報酬下降, 導致資本存量下降。短期下, 消費者因爲當期所得上升, 未來所得下降, 儲蓄意願上升使市場利率下跌, 消費因而上升。在過渡期間, 隨著資本存量持續下降, 市場利率逐漸回升, 透過跨期替代效果, 消費也遞減到最後而且較低的恆定水準 c'。

14.6 應用分析: 最適國防支出與軍備累積*

Crusoe 在荒島上靠栽種椰果爲生, 每日溜猴摘果, 日子雖然愜意, 但島上土人三不五時便越界掠奪, 令 Crusoe 神經緊張, 寢食難安。苦思之下, Crusoe 發現椰果也可製成「雄三椰彈」, 用以自衛, 頗具神效, 他的問題

是: 椰果收成中有多少應挪作自衛之用? 每個國家都有特殊的國防需求, 本節要用這個簡單的隱喻思考國防支出的經濟效果。

荒島上的椰果有三種用途, 除食用及栽種外, 也可用於製造「椰彈」。假設 Crusoe 於 t 期期初擁有 x_{t-1} 的椰彈, 若當期又製造了 G_t 的椰彈, 則期末的椰彈存量是 $x_t = G_t + (1-\delta)x_{t-1}$, 這是荒島的軍備累積方程式。爲了簡單, 我們假設椰彈與資本存量一樣, 折舊率同爲 δ。此一假設不影響分析結論。我們不考慮無關分析的生產干擾, 故椰果產出是 $y_t = f(k_{t-1})$。綜上所述, 荒島的資源限制滿足 $c_t + i_t + G_t = f(k_{t-1})$。

椰彈不能用於生產, 但能爲 Crusoe 帶來「相對安全感」。假設土人擁有 z 的武器存量, 則 Crusoe 從期初椰彈存量 x_{t-1} 獲得的效用是 $v(x_{t-1}, z)$。此一效用函數滿足 (1) $v_x > 0, v_{xx} < 0$, 這表示椰彈可增加安全感, 但邊際效用遞減; (2) 土人的武器越多, 則 Crusoe 的安全感越低, 故 $v_z, v_{zz} < 0$; (3) 土人的武器越多, 椰彈的邊際效用也越高, 故 $v_{xz} > 0$; 這是關鍵假設, 表示外敵威脅上升會使 Crusoe 對自衛更爲殷切。Crusoe 的效用除受敵我的武器存量影響外, 也從椰果消費獲得 $u(c_t)$ 的滿足, 故效用函數可寫成 $u(c_t) + v(x_{t-1}, z)$。我們假設消費的效用 $u(c_t)$ 與外敵威脅 z 無關, 此一簡化假設不影響主要分析結論。

給定起始資本存量 $k_0 > 0$, 椰彈存量 $x_0 > 0$ 及土人的武器裝備 $z > 0$, Crusoe 的跨期選擇問題是

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{c_t, k_t, x_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\left[u(c_t) + v(x_{t-1}, z)\right] \\
&\text{subject to} \quad c_t + \left[k_t - (1-\delta)k_{t-1}\right] + \left[x_t - (1-\delta)x_{t-1}\right] = f(k_{t-1}), \ \forall t。
\end{aligned}
$$

上述問題看似複雜, 但與 14.4 節的模型並無本質不同。首先, 最適投資決策仍然要滿足歐勒方程式:

$$
u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[1 - \delta + f'(k_t)\right]。
$$

最適國防支出的一階條件也不難推導。想像 Crusoe 於 t 期減少一單位消費轉而製造一顆椰彈 (即 $\Delta x_t = 1$), 則當期的效用損失是 $u'(c_t)$。這一顆椰彈能爲明天帶來額外的安全感 $v_x(x_t, z)$, 剩下的 $(1 - \delta)$ 單位椰彈也可食用, 效用價值是 $u'(c_{t+1})(1 - \delta)$。最適選擇要求 Crusoe 累積椰彈的效用損失等於效用增益, 故一階條件是

$$u'(c_t) = \beta v_x(x_t, z) + \beta u'(c_{t+1})(1 - \delta)。$$

合併以上兩式, 因爲資本存量及椰彈有相同的殘餘價值, 最適投資與最適國防支出之間滿足下式:

$$v_x(x_t, z) = u'(c_{t+1}) f'(k_t)。 \tag{14.10}$$

簡單的說, 最適選擇要求一單位產出無論用於投資 (等式右邊) 或國防 (等式左邊), 效用價值必須相等, 否則即存在套利空間。

(14.10) 式移項後也可表達成

$$\mathrm{MRS}_{x,c} = \frac{v_x(x_t, z)}{u'(c_{t+1})} = f'(k_t)。$$

上式右邊的 $f'(k_t)$ 是一顆椰果從投資挪爲自衛而損失的次期消費量, 這是國防支出的機會成本; 左邊的邊際效用之比是椰彈與消費之間的邊際替代率, 這是 Crusoe 爲了自衛而願意放棄的消費量。上式要求 Crusoe 針對國防安全的主觀願付價格 $\mathrm{MRS}_{x,c}$ 等於製造椰彈的機會成本 $f'(k_t)$。讀者對此類條件想必已相當熟悉。除一階條件外, Crusoe 的最適選擇也要滿足橫截條件, 即 $\lim \beta^{t-1} u'(c_t) k_t = \lim \beta^{t-1} u'(c_t) x_t = 0$, 這表示資本存量及椰彈沒有極限效用價值。

恆定狀態

上述模型的恆定狀態不難決定。首先, 根據歐勒方程式, 資本累積金律仍然是 $f'(k^*) = \rho + \delta$。顯然, 恆定資本存量與 z 無關, 亦即, 當土人的武

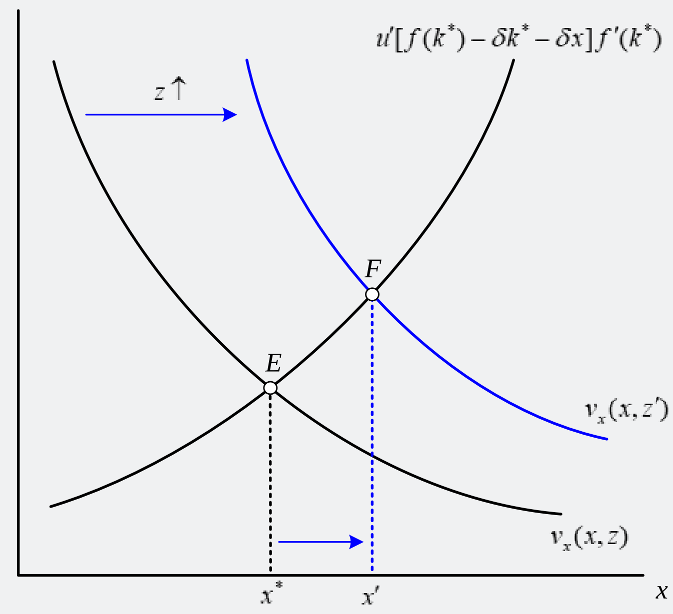

圖 14.12: 恆定椰彈存量

器存量 z 增加時, 長期資本存量 k^* 不變, 產出水準 $f(k^*)$ 也不變。唯一會受 z 影響的是消費及椰彈存量。根據資源限制式, 恆定消費滿足 $c^* = f(k^*) - \delta k^* - \delta x^*$, 代入一階條件 (14.10) 式可得

$$v_x(x^*, z) = u'\left[f(k^*) - \delta k^* - \delta x^*\right] f'(k^*)。$$

因爲恆定資本存量 k^* 已由累積金律決定, 且不受外生變數 z 影響, 上式可單獨決定椰彈存量 x^*。圖 14.12 中, 上式左邊的 $v_x(x,z)$ 隨 x 增加而遞減 (因爲 $v_{xx} < 0$), 這是椰彈的邊際效用, 右邊的邊際成本隨 x 增加而遞增 (因爲 $u'' < 0$)。若土人的武器存量 z 不變, 則恆定狀態落於兩者相交的 E 點, 椰彈存量是 x^*。當土人的武器存量從 z 增至 z' 時, v_x 曲線外移 (因爲 $v_{xz} > 0$), 但邊際成本曲線不動, 最適選擇移至 F 點, 椰彈存量增至 x'。因爲資本存量及產出不受 z 影響, 恆定消費必然下降, 且降幅等於

$\delta(x' - x^*)$。以上結論相當合乎直觀; 當外敵威脅上升時, Crusoe 對安全的需求也更爲殷切, 故長期軍備上升, 而消費下降。

外敵威脅上升的動態效果

在本節的簡化設定下, 土人威脅上升不影響 Crusoe 的長期投資決策, 但這不表示短期投資也不受影響。基本上, z 變動的動態效果也可利用相位圖進行分析, 但這裡的相位圖牽涉到消費, 資本存量及椰彈存量等三個變數, 必須在立體空間中表示。這種三維度的相位圖相當費事, 對問題的分析也無特別幫助, 我們留給有興趣的讀者傷腦筋。以下要利用荒島的資源限制思考 z 上升的短期效果。

假設荒島原來處於恆定狀態, 土人的武器存量突然於 t 期從 z 永久增至 z'。面對此一威脅, 我們知道恆定資本存量 k^* 不受影響, 但椰彈存量增至 x', 折舊增至 $\delta x'$, 而恆定消費降爲 $c' = f(k^*) - \delta k^* - \delta x'$, 這是長期均衡的變動, 但不可能是短期均衡。理由很簡單。給定期初椰彈存量 $x_{t-1} = x^*$, 衝擊當期的軍備折舊 δx^* 不變, 如果椰果投資也不變, 則國防支出增加 $\Delta x_t = (x' - x^*)$ 單位, 但消費僅下降 $\Delta c_t = \delta \Delta x_t$ 單位, 故 Crusoe 對椰果的總需求增加 $\Delta x_t - \Delta c_t = (1 - \delta)\Delta x_t$ 單位。給定期初資本存量 k^*, 若椰果投資不變, 則當期產出 $y_t = f(k^*)$ 顯然無法滿足 Crusoe 對自衛的需求。我們由此得知, 衝擊當下的椰果投資必須下降, 否則即違背荒島的資源限制。

綜上所述, 當外敵威脅上升時, 短期下, 爲了增加國防支出, 消費及投資必須同時下降, 此即排擠效果。令 $r_t = f'(k_t) - \delta$ 表示荒島的影子利率, 則期末資本存量下降會使實質利率上升。此一結論的背後直觀與前面政府消費增加的情形相同。簡單的說, 當經濟社會的產出供不應求時, 不論基於何種原因, 實質利率必然上升。與 14.3 節的政府消費比較, 此處的國防支出是內生變數, 這種表面差異不影響問題本質。

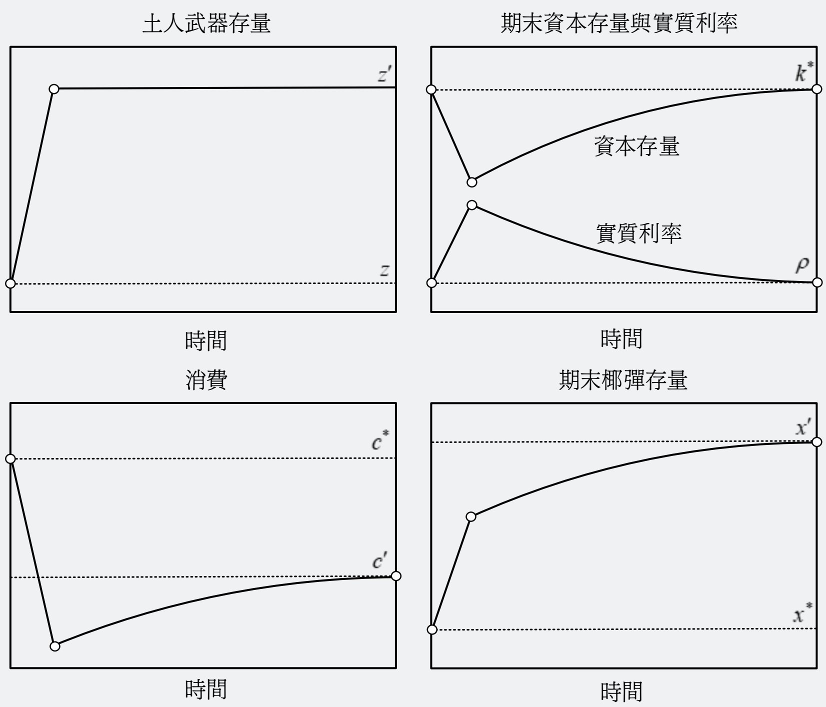

圖 14.13: 衝擊反應函數: 外敵威脅上升的動態效果

圖 14.13 畫出外敵威脅上升的衝擊反應函數。荒島原來處於恆定狀態, 當土人的武器從 z 增至 z' 時, 恆定資本存量不變, 椰彈存量從 x^* 增至 x', 而消費也從 c^* 降至 c', 這是長期均衡的變動。短期下, 利率因國防需求增加而上升, 導致投資下降。正因爲利率上升了, 短期消費及椰彈存量會低於最後的恆定水準。在過渡期間, 資本存量逐漸回升, 導致實質利率下降, 而消費及椰彈存量也收斂到新的恆定狀態。

14.7 延伸模型: 人口成長*

從理論發展的歷史看, Ramsey-Cass-Koopmans 模型延伸早期的 Solow-Swan 成長模型, 將消費者及廠商的選擇行爲納入考慮, 因此又稱最適成

長模型。讀者可能納悶, 在前面的幾個衝擊反應圖形中, 我們並未看到真正的經濟成長, 憑什麼 Ramsey 模型可稱之爲成長模型? 其實, 早期有關成長的分析, 重點在釐清資本累積的本質, 經濟爲何成長或真正導致成長的原因要到 1990 年代以後才有較爲深刻的討論, 我們留待以後的內生成長模型再爲讀者介紹。本章最後要考慮外生人口成長, 這是在 Ramsey 模型中「製造」或「掰出」成長現象最簡單的手段。其他因素, 如持續的技術進步, 容後再補充 (見習題12)。

假設經濟社會的勞動力或總人口以固定比率 $\lambda > 0$ 成長。若起始人口總量 $N_1 = 1$, 則 t 期的總人口是 $N_t = (1+\lambda)^{t-1}$。令 K_{t-1} 表示 t 期的起始資本總量, 則該期的總產出是 $Y_t = F(K_{t-1}, N_t)$。我們以大寫字母表示總量, 以別於小寫字母的人均量。爲了簡單, 不考慮要素生產力及政府消費, 故各期 $A_t = 1$ 及 $G_t = 0$。

利用固定規模報酬性質, 生產函數可用**人均形式** (intensive form) 表達。令 $y_t = Y_t/N_t$ 及 $k_{t-1} = K_{t-1}/N_t$ 分別表示 t 期的人均產出及人均期初資本存量, 則生產函數兩邊同除總人口 N_t, 可得

$$Y_t/N_t = F(K_{t-1}/N_t, 1) \equiv f(K_{t-1}/N_t) \quad \Rightarrow \quad y_t = f(k_{t-1})。$$

顯然, 總產出可寫成人均產出乘上人口總量, 即 $Y_t = N_t f(k_{t-1})$。對 K_{t-1} 偏微分, 則總合資本的邊際產出是 (利用連鎖律)

$$\text{MPK}_{t-1} = \partial Y_t/\partial K_{t-1} = N_t \cdot \partial f(k_{t-1})/\partial K_{t-1} = f'(k_{t-1})。$$

讀者看到, 人均資本的邊際產出 $f'(k_{t-1})$ 即是總合資本的邊際產出。這是一個方便的性質, 因爲 MPK 僅受人均資本影響, 與人口總量無關。顯然, $f' > 0, f'' < 0$。爲方便參考, 邊際勞動產出也可表達成人均資本的函數。利用歐勒性質 (見上冊第 4 章), 總產出滿足 $Y_t = \text{MPK}_{t-1} K_{t-1} + \text{MPL}_t N_t$,

兩邊同除 N_t, 移項後可得

$$\mathrm{MPL}_t = \partial Y_t / \partial N_t = f(k_{t-1}) - k_{t-1} f'(k_{t-1})。$$

上式也可直接對 $Y_t = N_t f(k_{t-1})$ 偏微分求得 (請自證)。

對整體經濟社會而言, 總投資滿足 $I_t = K_t - (1-\delta)K_{t-1}$。仿照以上的步驟, 兩邊同除 N_t, 並利用 $K_t/N_t = (N_{t+1}/N_t)(K_t/N_{t+1}) = (1+\lambda)k_t$, 則人均投資 $i_t = I_t/N_t$ 滿足 (請注意, $k_t = K_t/N_{t+1}$)

$$i_t = (1+\lambda)k_t - (1-\delta)k_{t-1}。 \tag{14.11}$$

當人口成長率 $\lambda = 0$ 時, 上式退化成固定勞動情形下的資本累積方程式。最後, 總產出等於總消費加總投資, 故人均產出也等於人均消費加人均投資, 即 $c_t + i_t = f(k_{t-1})$。

隨著人口成長, 整體經濟有如一個規模會不斷擴大的世代家庭。在這個大家庭中, 代表性決策者追求的不是個人, 而是所有家庭成員終身福祉之極大。因爲每個人的偏好 $u(c_t)$ 都相同, 故整個家庭的終身效用是

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) N_t = \sum_{t=1}^{\infty} \left[\beta(1+\lambda)\right]^{t-1} u(c_t)。$$

我們假設人口成長率 $\lambda < \rho$ 或 $\beta(1+\lambda) \in (0,1)$, 否則終身效用沒有上界, 失去分析意義。

給定起始人均資本存量 $k_0 > 0$ 及人口成長率 $\lambda > 0$, 代表性決策者的選擇問題可寫成

$$\max_{\{c_t, k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{t-1} u(c_t), \;\; \tilde{\beta} = \beta(1+\lambda),$$
$$\text{subject to} \quad c_t + \left[(1+\lambda)k_t - (1-\delta)k_{t-1}\right] = f(k_{t-1}), \; \forall t。$$

除考慮外生人口成長外, 上述問題與 14.4 節的模型並無不同。觀察資源限制式, 若 t 期的期末人均資本存量 k_t 增加一單位, 則當期的人均消費

下降 $\Delta c_t = (1+\lambda)$ 單位。請注意, 因爲人口成長率 $\lambda > 0$, 下期的總人口是 $N_{t+1} = (1+\lambda)N_t$。爲了保證 $\Delta k_t = \Delta K_t/N_{t+1} = 1$, 當期人均消費必須下降 $(1+\lambda)$ 單位。顯然, 效用極大的一階條件是

$$(1+\lambda)u'(c_t) = \tilde{\beta}u'(c_{t+1})\left[1-\delta+f'(k_t)\right]。$$

兩邊同除 $(1+\lambda)$ 並利用 $\tilde{\beta} = \beta(1+\lambda)$, 以上條件也可寫成

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[1-\delta+f'(k_t)\right]。$$

讀者看到, 考慮人口成長後, 一階條件並未改變, 故恆定人均資本存量仍然滿足 $f'(k^*) = \rho+\delta$。顯然, k^* 與人口成長率無關。根據 (14.11) 式, 恆定狀態下的人均投資是 $(\lambda+\delta)k^*$。因爲人口以固定比率 $\lambda > 0$ 成長, 爲了維持 k^* 固定不變, 每期的必要投資除了要填補折舊 δk^* 外, 還要加上因人口成長而新增的資本需求 λk^*。最後, 根據資源限制式, 人均消費是 $c^* = f(k^*) - (\lambda+\delta)k^*$。顯然, 能使長期人均消費極大的資本存量 $\bar{k}$ 滿足 $f'(\bar{k}) = \lambda+\delta$, 這是考慮人口成長後的黃金法則。因爲 $\lambda < \rho$, 故 $f'(k^*) > f'(\bar{k})$ 或 $k^* < \bar{k}$。綜合上述, 模型的基本性質不因納入外生人口成長而改變, 因此前面的分析仍然適用。

平衡成長

在恆定狀態下, 所有人均量, 包括資本存量, 產出及消費, 都靜止不動, 但隨著人口成長, 這些變數的總量也會不斷成長, 而且成長率剛好等於人口成長率。更清楚的說, 恆定狀態下的各期人均資本存量是 $k_t = K_t/N_{t+1} = k^*$, 故 $K_t = k^*N_{t+1} = k^*(1+\lambda)^t$, 換言之, 總合資本存量以比率 $\lambda > 0$ 成長。同理, 總產出及總消費也會以 $\lambda > 0$ 成長, 寫成 $Y_t = y^*(1+\lambda)^{t-1}$ 及 $C_t = c^*(1+\lambda)^{t-1}$。這種所有數量變數都以相同速度成長的現象, 稱爲**平衡成長** (balanced growth)。

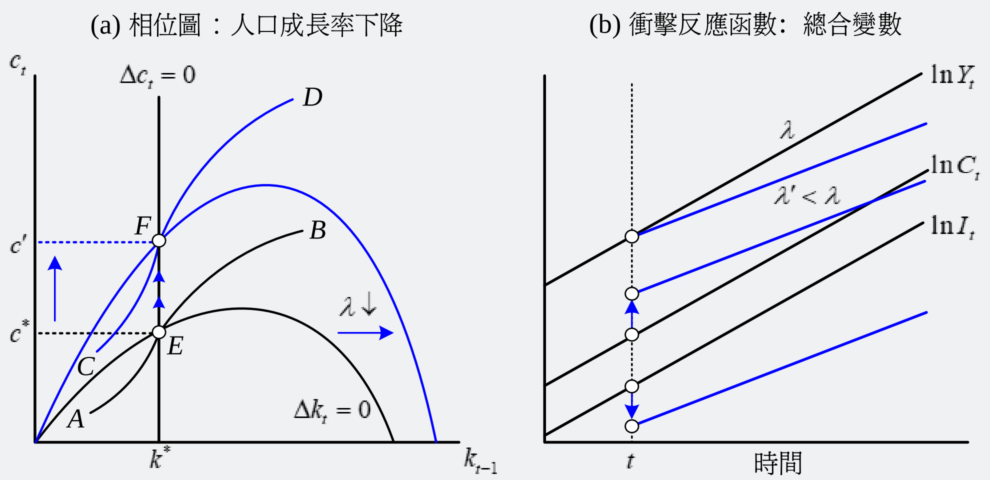

圖 14.14: 人口成長率下降的均衡效果

平衡成長是古典成長模型的基本性質。除外生人口成長外, 如果要素生產力也以固定比率成長 (如持續的技術進步), 則不但總合變數會成長, 人均資本, 產出, 消費及投資也會以相同速度成長。有關技術進步的分析, 我們當作習題讓讀者思考 (見習題 12)。

人口成長率下降的均衡效果

本節最後要利用相位圖分析人口成長率變動的均衡效果。由前面的分析可知, 考慮人口成長後的歐勒方程式與 14.4 節相同。表面上, 資源限制稍有不同, 但我們若將 $(1+\lambda)k_t$ 留在左邊, 移項後兩邊同減 $(1+\lambda)k_{t-1}$, 則資源限制式也可寫成

$$(1+\lambda)\Delta k_t = [f(k_{t-1}) - (\lambda+\delta)k_{t-1}] - c_t。$$

觀察上式, 人均資本存量的變動方向取決於人均消費, 同樣有三種情形。首先, 當 $c_t = f(k_{t-1}) - (\lambda+\delta)k_{t-1}$ 時, $\Delta k_t = 0$, 人均資本固定不變; 其次,

若 $c_t < f(k_{t-1}) - (\lambda + \delta)k_{t-1}$, 則 $\Delta k_t > 0$, 人均資本隨時間成長; 最後, 若 $c_t > f(k_{t-1}) - (\lambda + \delta)k_{t-1}$, 則 $\Delta k_t < 0$, 人均資本隨時間下降。顯然, 前面的相位圖仍然適用。

圖 14.14(a) 中, 經濟社會原來處於 E 點的恆定狀態, 人均消費及資本存量分別是 c^* 及 k^*。假設人口成長率從 λ 永久下降爲 λ', 因爲 k^* 不受影響, 故 $\Delta c_t = 0$ 線不動, 但 $\Delta k_t = 0$ 曲線向外移動, 新的恆定狀態落於 F 點。如圖所示, 人口成長率下降使最適選擇從 E 點移到 F 點, 人均消費直接從 c^* 增至 c', 經濟社會立刻進入新的恆定狀態, 沒有所謂的過渡期間動態調整過程。其中道理不難理解。當人口成長率下降時, 因爲恆定人均資本不變, 每期的必要投資下降 $(\lambda - \lambda')k^*$ 單位, 故消費者的恆常所得及各期消費等幅上升。

綜合以上分析, 圖 14.14(b) 畫出總產出, 總消費及總投資的時間軌跡。以比例刻度或自然對數單位衡量, 這三個變數的時間軌跡互相平行, 成長率都是 λ。人口成長率下降使當期投資下降而消費上升, 但產出不變, 成長率降爲 λ', 但仍然互相平行。

本章摘要

- 透過資本累積, 整體經濟可以將產出在不同期間挪移, 因此今天和未來的市場均衡不再互相獨立, 這是 Ramsey 模型的關鍵特徵。
- 恆定狀態是一種內生實質變數靜止不動的長期均衡狀態。Ramsey 模型存在唯一而且穩定的恆定狀態。面對外來干擾, 市場均衡會向恆定狀態收斂, 稱爲大道性質。
- 在基準 Ramsey 模型中, 恆定狀態要求實質利率等於時間偏好率, 這是保證人均消費靜止不動的充分且必要條件。
- 修正後累積金率要求資本的邊際產出等於時間偏好率加資本折舊率,

寫成 $Af'(k^*) = \rho + \delta$。此一條件可單獨決定恆定資本存量 k^*。

- 黃金法則要求 $Af'(\bar{k}) = \delta$, 此一條件保證長期消費水準極大。黃金法則忽略了投資的利息成本, 因此資本會過度累積, 導致長期資本存量 $\bar{k}$ 大於社會福祉極大時的水準。
- 當要素生產力永久上升時, 恆定資本存量, 產出及消費都上升。因爲實質利率不變, 恆定消費上升全部源自財富效果。
- 政府消費永久性增加不影響恆定資本存量及產出水準, 但恆定消費會因爲財富效果而下降。
- 當要素生產力短暫上升時, 短期下, 因爲產出供過於求, 實質利率下降, 導致消費及投資上升。在過渡期間, 實質利率回升, 資本, 產出及消費也逐漸降回原來的恆定狀態。
- 當要素生產力永久上升時, 短期下, 因爲產出供不應求, 實質利率上升。若財富效果大於跨期替代效果, 則均衡消費上升, 反之則下降。不論消費如何變動, 均衡投資必然上升。在過渡期間, 實質利率回降, 資本, 產出及消費也遞增到新的的恆定狀態。
- 短暫的生產力衝擊使實質利率與產出反向變動, 持續性生產力衝擊則使兩者同向變動。
- 政府消費短暫增加使產出供不應求, 實質利率上升, 導致均衡消費及投資同時下降, 稱爲排擠效果。
- 利率水準反映產出的相對稀少性。當商品供不應求時, 不論是因爲供給減少或需求增加, 整體社會享用產出 (即消費和投資) 的機會成本較高, 故實質利率上升。
- 廠商投資有如緩衝器, 可以將外來干擾的影響分散到不同期間, 幫助消費者平滑消費。在稟賦經濟中, 這種傳導機制不存在。

- Ramsey 模型的動態均衡必然落在穩定的馬鞍路徑上。此一路徑同時滿足歐勒方程式, 資源限制式及橫截條件。
- 政府以銷售稅支應定額年金會導致長期資本存量, 產出及消費下降。短期下, 因爲商品供過於求, 市場利率下降, 產出從廠商投資流向民間消費。長期下, 因爲恆常所得下降, 消費也下降。
- 國防支出具有特殊的外部性, 在 14.6 節的模型中, 外敵威脅上升不影響恆定資本及產出水準, 但長期軍備上升而消費下降。短期下, 因爲商品供不應求, 實質利率上升, 導致消費及投資下降。
- 當人口以固定比例成長時, 資本, 產出, 投資及消費總量也會以相同比率成長, 這種現象稱爲平衡成長。
- 在 Ramsey 模型中, 人口成長率下降使各期人均消費上升, 人均投資下降, 總產出, 總投資及總消費的成長率等幅下降。

習題

1. **生產衝擊**: 現實世界裡的生產衝擊形形色色, 有些會影響要素生產力, 有些則是單純的產出變動。假設生產函數是 $y_t = f(k_{t-1}) + B_t$, B_t 是外生衝擊。此類干擾不影響要素生產力。

   (a) 請利用市場供需模型分析 B_t 短暫下降的短期 (即當期) 效果。

   (b) 假設原來各期 $B_t = B$, 請利用市場供需模型分析 B 永久下降的動態效果, 包括當期效果及過渡期間調整過程。你的結論與要素生產力永久下降有何不同?

   (c) 請利用相位圖重新回答上題。[初學者可略過]

   (d) **預期未來干擾**: 假設原來各期 $B_t = B$, 消費者及廠商預期 B 將從下期開始永久下降, 請利用市場供需模型分析此一預期干擾對當期均衡的影響。你的結論與 (b) 小題有何不同? 請解釋。

(e) 請利用相位圖分析上小題的動態效果, 並畫出衝擊反應函數。你的結論與 (c) 小題有何不同? [初學者可略過]

2. **政府消費支出**: 本題要繼續 14.3 節有關政府消費變動的分析, 相位圖部分, 讀者如果不熟悉, 可略過。

   (a) 請利用相位圖分析政府消費短暫增加的動態效果。你的結論是否與 14.3 節的供需分析一致?
   (b) 請分別利用市場供需模型及相位圖分析政府消費永久性等幅上升的動態效果。
   (c) **預期未來政策**: 假設原來各期 $G_t = G$, 政府宣布消費支出從下期開始永久等幅上升。請利用市場供需模型分析此一預期政策對當期均衡的影響。
   (d) 請利用相位圖分析上題的動態效果。
   (e) 假設政府以發行公債支應政府支出 (即赤字融通), 請問以上各題的結論會改變嗎? 為什麼?

3. **公式解**: Ramsey 模型在特殊情形下存在簡單的公式解。假設 (1) 各期政府消費 $G_t = 0$, (2) 折舊率 $\delta = 1$, (3) 效用函數 $u(c_t) = \ln c_t$, (4) 生產函數 $y_t = A_t k_{t-1}^{\alpha}, \alpha \in (0, 1)$。

   (a) 請求解消費 c_t 及期末資本存量 k_t 的均衡解。[提示: (1) c_t 及 k_t 同為 y_t 或外生變數 A_t 及 k_{t-1} 的函數, 又稱**決策法則**或**策略函數** (policy function), (2) 令 $k_t = \pi y_t$, 然後求解未知係數 π。]
   (b) 請根據上題求算實質利率 r_t 的公式解。請分別討論 A_t 上升及 A_{t+1} 上升對實質利率的影響。直觀何在?
   (c) 請在 (k_{t-1}, k_t) 空間中畫出 k_t 的策略函數。從恆定狀態開始, 假設 A_t 短暫上升一期, 請利用你的圖形畫出資本存量及實質利率

的時間軌跡, 並以直觀解釋。

(d) 假設各期要素生產力等幅上升, 請重新回答上題。

(e) 公式解雖然方便, 但存在特殊性質, 不見得適用於一般情形。請指出本題的公式解有何「特殊」之處?

(f) **收斂速度**: 經濟社會原來處於恆定狀態, 地震導致期初資本存量下降。假設 $\alpha = 0.4$。請問經濟社會要花多久時間才能重建 90% 因地震而損失的資本存量? 若 $\alpha = 0.1$, 結果有何改變? 請以直觀解釋兩者差異。[提示: 以自然對數表達策略函數。]

(g) 假設 $G_t = gy_t$, $g \in (0,1)$ 爲一固定常數。請重新回答 (a)-(b) 兩小題。政府消費比例 g 永久上升對實質利率有何影響? 請解釋。[提示: 爲保證消費恆爲正值, 假設 $\alpha\beta + g < 1$。]

4. **偏好改變***: 本題要請讀者思考消費者偏好改變的影響。

(a) **時間偏好**: 消費者一覺醒來突然覺得未來變得更重要, 時間偏好率 ρ 自此永遠下降。請利用相位圖分析此種偏好改變的動態效果。請畫出資本存量, 消費及實質利率的時間軌跡。

(b) **跨期替代**: 假設效用函數是 CRRA 形式:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma},\ \gamma > 0。$$

當 $\gamma = 1$ 時, $u(c_t) = \ln c_t$。請討論參數 γ 會如何影響相位圖及馬鞍路徑。[提示: $1/\gamma$ 是消費的跨期替代彈性。]

5. **年金的融通手段**: 在 14.5 節的銷售稅模型中, 我們假設政府對廠商產出課徵固定稅率 τ, 稅收 τy_t 全部以定額方式 v_t 移轉給消費者。這種移轉性支付有如現實世界中的定額年金。本題要追問: 消費者究竟能享受多少年金收入? 假設生產函數是 $f(k_{t-1}) = k_{t-1}^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$。本題僅考慮恆定狀態, 不會用到效用函數。

(a) 請計算恆定資本存量。假設 $\alpha = 0.4$, 原始稅率是 $\tau = 20\%$。若稅率上升爲 $\tau = 21\%$, 請問恆定資本存量會變動多少?

(b) 請計算恆定狀態下的政府稅收, 即消費者的年金收入。當稅率上升時, 年金收入會如何變化? 請繪圖說明。政府若追求最高年金給付, 稅率應等於多少?

(c) 政府想要提高年金給付, 但又不希望因而影響廠商的生產活動, 請問你有何「撇步」能讓政府, 廠商及消費者都滿意?

6. **投資租稅扣抵**: 假設政府對廠商淨投資 $(k_t - k_{t-1})$ 給予比例 $\phi \in (0,1)$ 的租稅扣抵。爲維持預算平衡, 政府向消費者課徵定額稅 T_t, 故預算滿足 $\phi(k_t - k_{t-1}) = T_t$。簡言之, 政府向消費者課稅並補貼廠商。面對各期利率 $\{r_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及租稅扣抵 ϕ, 代表性廠商的選擇問題是

$$\begin{aligned}
\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad & \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{d_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \right] \\
\text{subject to} \quad & d_t = f(k_{t-1}) - i_t + \phi(k_t - k_{t-1}), \ \forall t, \\
& i_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1}, \ \forall t。
\end{aligned}$$

消費者的預算滿足 $c_t + b_t = (d_t - T_t) + (1 + r_{t-1})b_{t-1}$, 選擇問題與本文相同, 不再重複。[補充說明: 一般情形下, 政府僅在廠商有淨投資支出時 (即 $k_t - k_{t-1} > 0$) 才給予補貼, 因此租稅扣抵政策是非對稱的。這種情形必須使用 Kuhn-Tucker 定理求解廠商的決策問題。爲了簡單, 本題不考慮。]

(a) 請寫下全面均衡條件, 並討論 ϕ 上升對恆定狀態的影響, 包括資本存量, 產出及消費。

(b) 請利用市場供需模型分析 ϕ 永久上升的當期及動態效果。

(c) 請利用相位圖重新回答上小題。[初學者可略過]

7. **資本創新**: 上一章的習題曾請讀者思考資本創新對廠商投資需求的影響, 本題要繼續追問資本創新的均衡效果。爲方便參考, 廠商的決策問題重述於下。令 $z > 0$ 表示資本創新率, 則資本移動方程式可寫成 $k_t = (1-\delta)k_{t-1} + (1+z)i_t$。簡單的說, 每單位投資支出能夠買得效能更優越的的資本設備。廠商的決策問題是

$$\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{f(k_{t-1}) - i_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \right]$$
$$\text{subject to} \quad k_t = (1-\delta)k_{t-1} + (1+z)i_t, \ \forall t。$$

消費者的選擇問題與本文相同, 不再重複。爲了簡單, 不考慮政府購買, 故商品市場結清要求 $c_t + i_t = f(k_{t-1})$。

(a) 請寫下全面均衡條件, 並分析 z 上升對恆定狀態的影響, 包括資本存量, 產出, 投資及消費。

(b) 請利用市場供需模型分析 z 上升的當期效果。

(c) 請利用相位圖分析 z 上升的動態效果。[初學者可略過]

8. **政府投資支出***: 政府的投資支出爲經濟社會提供必要的基礎建設, 這些公共資本也是廠商的生產投入。假設廠商的生產函數可寫成 $y_t = F(k_{t-1}, x_{t-1})$, x_{t-1} 是 t 期的起始公共資本存量。此一生產函數滿足 $F_k, F_x > 0, F_{kk}, F_{xx} < 0$ 及 $F_{kx} > 0$, 亦即, k 及 x 具有互補性質。令 G_t 表示政府投資支出, 則 x_t 滿足 $x_t = G_t + (1-\delta)x_{t-1}$, 這是公共資本的累積方程式。我們假設公共資本的折舊率也是 δ。此外, 政府無消費支出, 全部投資支出均以定額稅支應, 故政府預算滿足 $G_t = T_t$。消費者的選擇問題與本文相同, 不再重複。

(a) 假設 (1) 生產函數是 $y_t = k_{t-1}^{\alpha} x_{t-1}^{\theta}, \alpha, \theta \in (0,1)$, (2) 折舊率 $\delta > 0$, (3) 各期 $G_t = G$, (4) 參數值及政府支出保證恆定消費大於零。請計算恆定狀態的公式解, 包括民間資本, 公共資本, 產出及消費。

(b) 請根據上題討論政府投資支出永久上升對恆定狀態的影響。你的結論與參數 θ 有何關係? 請以直觀解釋。

9. **地震的均衡分析**: 地震摧毀資本設備, 這也是一種供給面衝擊。本題要請讀者思考這類自然災害的影響。

   (a) 假設經濟社會原來處於恆定狀態, 地震使期初資本存量突然下降。請利用市場供需模型分析此一衝擊的動態效果。請畫出資本存量, 消費及實質利率的時間軌跡。
   (b) 請利用相位圖重新回答上題。[初學者可略過]
   (c) **收斂速度**: 考慮 (4b) 小題的 CRRA 效用函數。你認爲參數 γ 會如何影響地震的效果, 特別是資本的收斂速度? 請以直觀說明。
   (d) **預期災難**:「氣象達人」預測地震將於下期發生, 人人都信以爲真。請利用市場供需模型分析此一預期災難的當期效果。

10. **軍備競賽***: 14.6 節中, Crusoe 爲了自衛必須製造「雄三椰彈」。假設「雄三威力強大」, 土人也備感威脅。本題要請讀者思考雙方進行軍備競賽的後果。假設 (1) Crusoe 與土人之間沒有交易, (2) 雙方的生產函數都是 $y_t = f(k_{t-1}) = k_{t-1}^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$, (3) 資本和武器不會耗損, 故折舊率 $\delta = 0$, (4) Crusoe 及土人的時間偏好率分別是 ρ_1 及 ρ_2。面對敵方的武器存量, 兩造分別求解 14.6 節所述的選擇問題, 請自行寫下, 不再重複。效用函數給定如下 (變數定義同 14.6 節):

$$\text{Crusoe}: \quad \ln c_t + \ln(x_{t-1} - \theta_1 z),\ \theta_1 > 0。$$
$$\text{土人}: \quad \ln c_t + \ln(z_{t-1} - \theta_2 x),\ \theta_2 > 0。$$

假設雙方在進行選擇時, 唯一可觀測的資訊是對方的武器存量, 彼此不知對方的偏好及生產技術。本題僅針對恆定狀態分析, 不考慮敵對雙方的動態調整策略。

(a) 請求解恆定狀態下 Crusoe 的反應函數 $x = g(z)$ 及土人的反應函數 $z = h(x)$。

(b) **納許均衡** (Nash equilibrium): 若 (x^*, z^*) 同時滿足 $x^* = g(z^*)$ 及 $z^* = h(x^*)$, 且 $x^*, z^* > 0$, 則荒島處於長期均衡狀態。此時, 雙方都安於現狀, 不會再改變各自的策略, 稱爲納許均衡。請問在哪個條件下, 本題的納許均衡存在而且唯一? 請在 (z, x) 空間中畫出雙方的反應函數, 並以直觀解釋你的條件。

(c) 若上題的條件不成立, 荒島會發生什麼情形? 請用白話敘述。

(d) 假設 Crusoe 的效用參數 θ_1 上升, 但土人的 θ_2 不變。請分析納許均衡會如何變動。背後直觀何在?

(e) 假設 Crusoe 的時間偏好率 ρ_1 上升, 但土人的 ρ_2 不變。請分析納許均衡會如何變動。背後直觀何在?

11. **污染稅***: 我們曾在靜態模型中分析過政府對廠商污染課稅的福利效果 (見上冊第 6 章習題), 本題要在 Ramsey 模型中考慮同一問題。假設廠商在生產過程中製造了 $z_t = g(k_{t-1})$ 的污染物 (如廢水), 函數 g 滿足 $g' > 0$ 且 $g'' > 0$, 亦即, 邊際污染量隨投入增加而遞增。政府對每單位污染課徵 τ_t 數量的商品稅 (又稱單位稅), 稅收 $\tau_t z_t$ 全部以定額方式 v_t 補貼受害的消費者, 故政府預算滿足 $v_t = \tau_t z_t = \tau_t g(k_{t-1})$。面對污染稅, 廠商的決策問題是 (令 δ_k 表示資本折舊率)

$$\max_{\{k_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{d_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \right]$$

$$\text{subject to} \quad d_t = f(k_{t-1}) - i_t - \tau_t g(k_{t-1}), \ \forall t,$$

$$i_t = k_t - (1-\delta_k)k_{t-1}, \ \forall t。$$

廠商排放的污染物會隨時間累積。令 x_{t-1} 表示期初污染水準, 則污染累積方程式可寫成 $x_t = (1-\delta_x)x_{t-1} + g(k_{t-1})$, 其中, $\delta_x \in (0,1]$ 是污

染衰減率 (rate of decay)。現實世界中, 有些污染物的衰減速度甚爲緩慢 (如核廢料) , 此時 $\delta_x \to 0$, 而像噪音這種干擾, 只要除去污染源即完全消失, 此時 $\delta_x \to 1$。本題假設 $\delta_x > 0$。

消費者是污染的受害者。假設效用函數是 $u(c_t) - v(x_t)$, 函數 v 滿足 $v', v'' > 0$, 亦即, 污染使效用下降, 且邊際痛苦隨污染增加而遞增。面對廠商製造的污染 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ 及政府的定額補貼 $\{v_t\}_{t=1}^{\infty}$, 代表性消費者的選擇問題是

$$\begin{aligned}
&\max_{\{c_t, b_t\}_{t=1}^{\infty}} && \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[u(c_t) - v(x_t) \right] \\
&\text{subject to} && c_t + b_t = d_t + v_t + (1 + r_{t-1}) b_{t-1}, \ \forall t。
\end{aligned}$$

(a) **競爭均衡**: 請推導廠商最適選擇的一階條件, 並討論污染稅上升對廠商選擇的影響。請列出競爭均衡的全部條件。

(b) **柏拉圖最適狀態**:「真主阿拉」不能變污染於無形, 但能爲經濟社會決定最適的消費, 產出及污染水準, 其選擇問題是

$$\begin{aligned}
&\max_{\{c_t, k_t, x_t\}_{t=1}^{\infty}} && \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[u(c_t) - v(x_t) \right] \\
&\text{subject to} && c_t + \left[k_t - (1 - \delta_k) k_{t-1} \right] = f(k_{t-1}), \ \forall t, \\
& && x_t = (1 - \delta_x) x_{t-1} + g(k_{t-1}), \ \forall t。
\end{aligned}$$

上述問題的最適解保證社會福利極大, 即柏拉圖最適狀態。請問柏拉圖狀態必須滿足哪些條件? 背後直觀何在?

(c) **最適污染稅**: 請問政府應如何決定最適污染稅 $\{\tau_t\}_{t=1}^{\infty}$? 背後直觀何在? [提示: 比較競爭均衡及柏拉圖最適狀態。]

(d) **租稅改革**: 假設原來各期 $\tau_t = 0$, 經濟社會處於恆定狀態。爲了抑制過度的污染, 政府實施上小題的最適污染稅政策。請根據直觀

畫出 $\{c_t, k_t, x_t, \tau_t\}$ 的時間軌跡。[提示: 課徵最適污染稅對恆定狀態有什麼影響?]

(e) **參數改變**: 請問時間偏好率 ρ 及污染衰減率 δ_x 會如何影響最適污染稅? 背後直觀何在?

12. **技術進步***: 本題要考慮生產技術持續改善的均衡效果。令總產出 $Y_t = F(K_{t-1}, A_t N_t)$, N_t 及 A_t 是 t 期人口及外生技術水準, 函數 F 滿足固定規模報酬。假設人口及技術水準分別以固定比率 $\lambda > 0$ 及 $\mu > 0$ 成長。若 $N_1 = A_1 = 1$, 則 t 期人口總量及技術水準分別是 $N_t = (1+\lambda)^{t-1}$ 及 $A_t = (1+\mu)^{t-1}$。令 $\widetilde{N}_t = A_t N_t$ 表示**有效勞動投入** (effective labor input), 則生產函數可寫成 $Y_t = F(K_{t-1}, \widetilde{N}_t)$。這種技術進步使有效勞動投入不斷擴大, 勞工有如「無敵鐵金剛, 一人可抵數人」, 因此又稱**勞動擴張型技術進步** (labor-augmenting technical progress)。這是文獻最常採用的設定形式。

代表性消費者追求世代家庭終身效用極大, 故目標函數與 14.7 節相同, 仍是 $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) N_t$。請注意, $c_t = C_t / N_t$ 是人均消費。假設 (1) $u(c_t) = c_t^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, $\gamma > 0$, (2) $\tilde{\beta} = \beta(1+\lambda)(1+\mu)^{1-\gamma} \in (0,1)$。

(a) 令 $\tilde{y}_t = Y_t / \widetilde{N}_t$, 這是以有效勞動單位衡量的平均產出, 稱爲**有效人均產出** (output per effective worker), 其他變數也以相同方式定義。請仿照 14.7 節寫下代表性消費者的選擇問題, 並推導最適選擇的一階必要條件。[提示: 將終身效用函數以有效人均消費 $\tilde{c}_t = C_t / \widetilde{N}_t = c_t / A_t$ 表達。]

(b) **平衡成長**: 恆定狀態下的人均資本存量, 產出, 消費及對應的總量有何特徵? 實質利率等於多少? 請討論。

(c) 請利用相位圖分析 μ 上升的動態效果, 並畫出資本存量, 消費及實質利率的時間軌跡, 包括有效人均量, 人均量及總量。

13. **股票價格**: 本題要將股票市場納入 Ramsey 模型。假設代表性廠商發行固定一單位股權在完全競爭的股票市場中交易。廠商的生產函數是 $y_t = A_t f(k_{t-1})$, 股利是 $d_t = y_t - i_t$, 選擇問題與本文相同, 不再重複。面對各期股票價格 q_t 及實質利率 r_t, 消費者除了選擇各期消費 c_t 及債券持有量 b_t 外, 還必須決定應購買多少股權 z_t。代表性消費者的選擇問題是

$$\begin{aligned}
&\max_{\{c_t,b_t,z_t\}_{t=1}^{\infty}} && \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \\
&\text{subject to} && c_t + b_t + q_t z_t = (1 + r_{t-1}) b_{t-1} + (q_t + d_t) z_{t-1}, \ \forall t, \\
& && b_0 = 0,\ z_0 > 0。
\end{aligned}$$

[提示: 請回去複習上冊第 11 章的資產定價模型。]

(a) 請寫下全面均衡的所有條件, 並討論均衡股價如何決定。
(b) 請證明 Walras 市場法則。本題的競爭均衡是否與 Ramsey 模型相同? 請討論其中意義。
(c) 令各期 $A_t = A$, 請決定恆定狀態下的股票價格。生產力 A 永久上升對恆定股價有何影響?
(d) 經濟社會原來處於恆定狀態, 請分析生產力短暫上升對均衡股價的動態影響。你的結論與第 11 章有何不同?
(e) 經濟社會原來處於恆定狀態, 假設當期生產力不變, 但未來生產力永久上升。請分析此一預期衝擊對全面均衡的動態影響, 包括消費, 投資, 實質利率及股票價格。
(f) 考慮題 3 的設定, 請計算均衡股價的公式解。你的解是否與前面兩小題的分析結論一致? 請解釋。

14. Crusoe **的終身預算限制**: 14.4 節利用 Crusoe 的終身預算限制及橫截條件排除不穩定的馬鞍路徑, 但作者賣了個小小關子, 並未逐步推導

終身預算限制。本題要請讀者將 Crusoe 的預算限制以現值或折現加總形式表達。

荒島的椰果產出 $y = f(k)$ 即是 Crusoe 的所得。利用 Euler 性質, 此一所得可拆解成 $y = \text{MPL} + kf'(k)$, 第一項是 Crusoe 的勞動所得, 第二項是資本所得。令 $w = \text{MPL}$ 及 $r = f'(k) - \delta$ 分別表示影子工資率及影子利率, 則荒島的資源限制可以改寫成

$$c_t + [k_t - (1-\delta)k_{t-1}] = f(k_{t-1}) = w_t + f'(k_{t-1})k_{t-1},$$
$$\Rightarrow \quad c_t + k_t = w_t + (1 + r_{t-1})k_{t-1}, \ \forall t。$$

上式即爲 Crusoe 的預算限制, 與面對市場價格的消費者並無不同。

(a) **跨期預算限制**: 令折現價格 $q_t = 1/(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})$。請證明: 對任一固定時點 $T < \infty$, 下式成立:

$$q_T k_T = \sum_{t=1}^{T} q_t(w_t - c_t) + (1 + r_0)k_0。$$

請用白話敘述上式的直觀意義。

(b) **不可倒債條件**: 荒島上的 Crusoe 能夠倒債嗎? [提示: 不能倒債的條件是什麼?]

(c) **橫截條件**: 爲什麼橫截條件是終身效用極大的充分條件? 請根據上面的預算限制解釋。

部分習題解答

1a B_t 下降使生產函數平行下移, 導致當期產出下降。因爲持續時間極爲短暫, 且不影響資本生產力, 故消費需求及投資需求都不受影響。在原利率水準下, 產出供不應求, 導致市場利率上升, 消費及投資下降。直觀上, 所得短暫下降使消費者的儲蓄意願下降, 造成借貸市場資金緊俏, 市場利率因而上升。圖形略。

1b 圖 14.15(a) 中, 市場均衡原來落於 e 點的恆定狀態, 生產函數永久平行下移使商品供給線左移, 產出下降 ef 單位。此一衝擊不影響恆定資

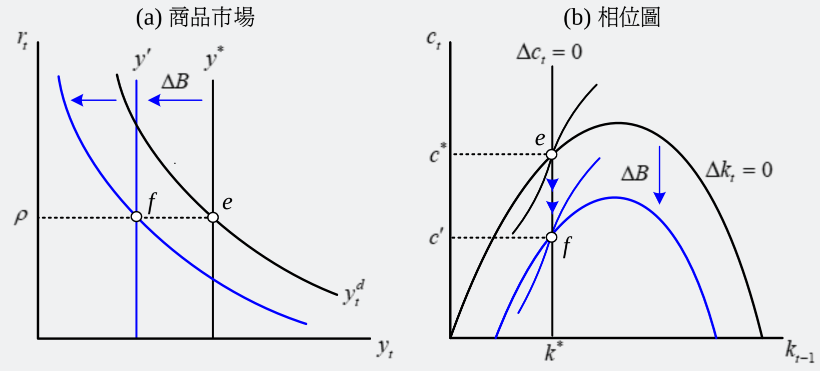

圖 14.15: 生產函數永久平行下移的均衡效果

本存量, 故 ef 即是消費者恆常所得的下降幅度, 導致消費需求或商品需求曲線等幅左移。在原利率水準下, 供需仍然相等, 均衡從 e 點直接移至 f 點, 沒有過渡期間調整過程, 各期產出及消費等幅下降, 投資及實質利率不變。

生產力永久下降使生產函數比例下移, 導致產出供過於求, 均衡利率下降。若財富效果大於替代效果, 則消費下降, 反之則上升。不論消費如何變動, 投資必然下降。分析過程與圖 14.3 相反, 請自行補充。

1c 圖 14.15(b) 中, 經濟社會原來處於 e 點的恆定狀態, 生產函數永久平行下移不影響恆定資本存量, 故 $\Delta c_t = 0$ 線不動, 但 $\Delta k_t = 0$ 曲線等幅平行下移, 新的恆定狀態落於 f 點。B 永久下降使最適選擇從 e 點直接移至 f 點, 消費降爲 c'。因爲是平行移動, 影子利率不受影響。以上結論與市場均衡分析相同。

1d 圖 14.16(a) 中, 預期未來生產函數平行下移不影響本期產出, 也不影響廠商的投資需求, 但消費者預知未來所得下降, 故消費需求或商品需求曲線左移。在原利率水準下, 產出供過於求, 導致市場利率下跌,

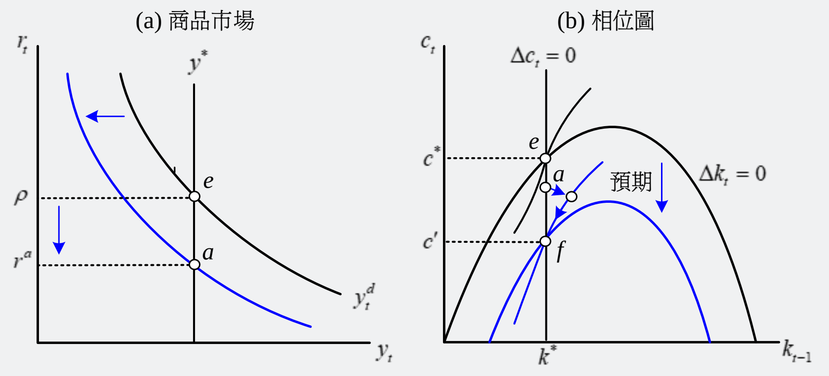

圖 14.16: 預期未來生產衝擊的均衡效果

均衡自 e 點移至 a 點。隨著利率下跌, 投資上升, 但因產出並未改變, 均衡消費下降。與 (b) 小題比較, 這裡的財富效果較小, 因爲消費者可以「未雨綢繆」, 透過儲蓄及投資來降低未來衝擊的影響。

1e 圖 14.16(b) 中, 經濟社會原來處於 e 點的恆定狀態, 未來 B 下降使下期的 $\Delta k_t = 0$ 曲線平行下移至藍線位置, 新的恆定狀態落於 f 點。站在今天, 產出並未改變, 均衡不可能如圖 14.15(b) 一樣, 從 e 點直接跳到 f 點, 因爲這表示當期消費下降但投資卻不變, 違反資源限制。顯

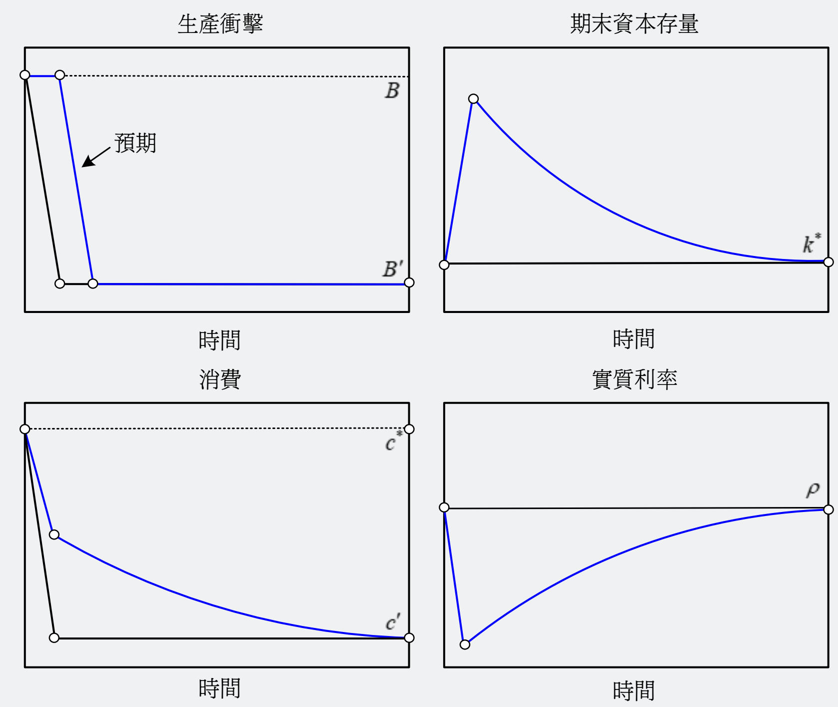

圖 14.17: 生產函數平行下移的動態效果

然, 當期均衡會落於 e, f 兩點之間的 a 點, 表示當期消費下降而投資或期末資本存量上升。直觀而言, 這是因爲 Crusoe 知道苦日子即將到來, 因此會減少消費, 增加儲蓄。經濟社會進入下期, 均衡從 a 點移到右側的馬鞍路徑上。明天過後, 資本存量及消費順著馬鞍路徑逐漸下降, 直到最後的恆定狀態 f 點。

圖 14.17 畫出對應的衝擊反應函數。當 B 從 $t = 1$ 開始下降時 (黑線), 消費等幅下降, 但資本存量及實質利率不變。若 B 從 $t = 2$ 才開始下降 (藍線), 則當期消費下降, 導致產出供過於求, 市場利率下降, 投資上升。在過渡期間, 利率回升, 資本存量回到原恆定水準, 消費因利率回升而持續下降, 最後收斂至較低的恆定水準。

3a 最適解滿足歐勒方程式及資源限制式:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[1 - \delta + A_{t+1} f'(k_t)\right],$$
$$c_t + \left[k_t - (1-\delta)k_{t-1}\right] = A_t f(k_{t-1}) = y_t。$$

當 $\delta = 1$ 時, 資源限制滿足 $c_t + k_t = y_t$。令 $k_t = \pi y_t$, 則 $c_t = (1-\pi)y_t$。利用 $u'(c_t) = 1/c_t$ 及 $A_{t+1}f'(k_t) = \alpha y_{t+1}/k_t$, 歐勒方程式可寫成

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \alpha\beta\frac{y_{t+1}}{k_t} \quad\Rightarrow\quad \frac{y_{t+1}}{y_t} = \alpha\beta\frac{y_{t+1}}{k_t} \quad\Rightarrow\quad k_t = \alpha\beta y_t。$$

顯然, 未知係數 $\pi = \alpha\beta \in (0,1)$。將生產函數代入上式, k_t 的公式解可以表達成 A_t 及 k_{t-1} 的函數 (即 k_t 的策略函數):

$$k_t = \alpha\beta y_t = \alpha\beta A_t k_{t-1}^{\alpha}。\tag{3a}$$

以自然對數表達, 上式也可寫成

$$\ln k_t = \ln\alpha\beta + \alpha\ln k_{t-1} + \ln A_t。\tag{3b}$$

這是一條 $\ln k_t$ 的線性一階差分方程式, 在動態均衡模型中極爲常見。最後, 消費的策略函數是 $c_t = (1-\alpha\beta)y_t = (1-\alpha\beta)A_t k_{t-1}^{\alpha}$。

3b 利用上題的解及 $A_{t+1}f'(k_t) = 1 + r_t$ (因爲 $\delta = 1$), 實質利率滿足

$$1 + r_t = \alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} = \alpha A_{t+1}\left[\alpha\beta A_t k_{t-1}^{\alpha}\right]^{\alpha-1}。$$

取自然對數並利用 $\ln(1 + r_t) \cong r_t$, 均衡利率的公式解是

$$r_t \cong \text{參數項} + \ln A_{t+1} - (1-\alpha)\ln A_t - \alpha(1-\alpha)\ln k_{t-1}。\tag{3c}$$

均衡利率也可利用一階條件 $u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1+r_t)$ 求解, 請自行驗證。提醒讀者, 均衡解必須表達成外生變數的函數才算完成。

觀察上式, 當 A_t 上升時, 實質利率下降。這是當然之理, 因爲產出短暫增加使商品市場供過於求, 借貸市場資金相對寬鬆, 導致實質利率下降。反之若 A_{t+1} 上升, 則未來所得上升, 消費者的儲蓄意願下降, 導致市場利率上升。

3c 圖 14.18(a) 在 (k_{t-1}, k_t) 空間中畫出資本存量的策略函數 (3a)。給定各期 $A_t = A$, 恆定狀態落於策略函數與 45° 線相交的 e 點, 恆定資本存量是 k^*。A 短暫上升使策略函數暫時上移至虛線位置, 資本存量從

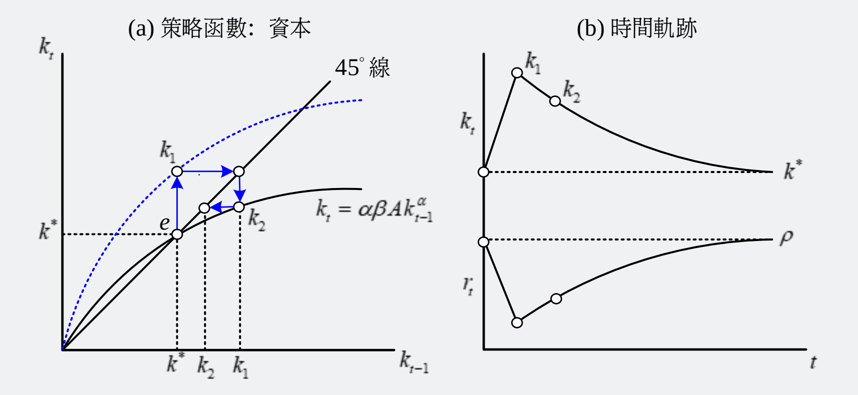

圖 14.18: 公式解: 生產力短暫上升的動態效果

k^* 增至 k_1。下期的 A 回降, 策略函數移回原來位置。給定期初資本 k_1, 期末資本降至 k_2。繼續此一過程, 資本存量逐漸回到原來的恆定狀態。均衡利率的調整也非常容易決定。根據 (3c) 式, A_t 上升使當期 r_t 下降, 然後隨著資本存量下降逐漸回升。

圖 14.18(b) 畫出對應的時間軌跡。資本存量先升後降, 而實質利率則相反。以上結論與 14.2 節的分析完全一致。簡言之, 當生產力短暫上升時, 產出供過於求, 導致市場利率下降, 投資及消費上升。

3d 圖 14.19(a) 中, 當 A 永久上升時, 資本存量會如箭頭所示, 從原來的 e

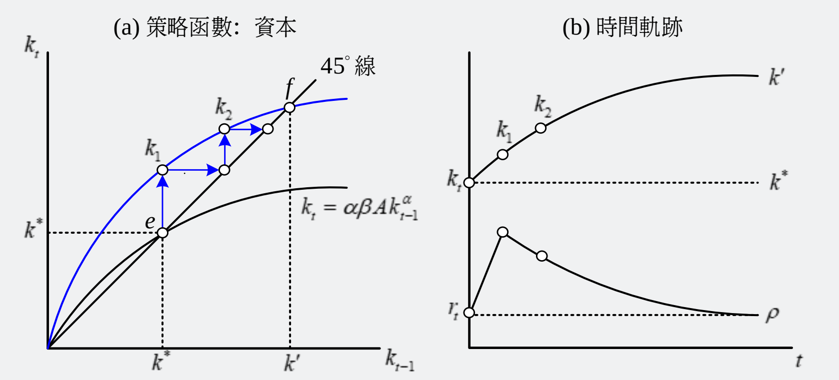

圖 14.19: 公式解: 生產力永久上升的動態效果

點收斂到新的恆定狀態 f 點, 對應的資本存量 $k' > k^*$。根據 (3c) 式, A 永久上升使一開始的實質利率上升, 但隨著資本存量上升, 利率逐漸回降, 直到收斂至時間偏好率。時間軌跡見圖 14.19(b))。以上結論也與 14.2 節的分析一致, 不再重複。

3e 觀察本題的公式解, 我們發現 c_t 及 k_t 僅受當期 A_t 影響, 與未來生產力無關, 亦即, 當未來生產力上升時 (不論短暫或持久), 本期消費及投資都不受影響。直觀上, 未來生產力上升會使本期的消費及投資需求上升, 導致均衡利率上升, 故消費及投資的變動方向無法確定。顯然在本題的設定下, 利率上升對消費及投資的負向影響剛好與生產力上升的正向影響抵銷, 導致最後的消費及投資不變。

3f 令 $\tilde{k}_t = \ln k_t - \ln k^*$ 表示 k_t 與恆定狀態 k^* 的比例差距。利用 (3b) 式, $\tilde{k}_t = \alpha\tilde{k}_{t-1}$, 向前解至起始期, 可得

$$\tilde{k}_t = \alpha\tilde{k}_{t-1} = \alpha^2\tilde{k}_{t-2} = \cdots = \alpha^t\tilde{k}_0。$$

地震使 $\tilde{k}_0 < 0$, 根據上式, T 期之後, 資本存量與恆定狀態的距離是

$|\tilde{k}_T| = \alpha^T|\tilde{k}_0|$。移項整理, T 滿足 (請注意, $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_T < 0$)

$$\alpha^T = \tilde{k}_T/\tilde{k}_0 \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ln(\tilde{k}_T/\tilde{k}_0)}{\ln \alpha} > 0。$$

本題要求恢復 90% 的資本存量損失, 故 $\tilde{k}_T/\tilde{k}_0 = 1 - 0.9 = 0.1$。當 $\alpha = 0.4$ 時, 所需時間是 $T = \ln(0.1)/\ln(0.4) \cong 2.5$ 年。若 $\alpha = 0.1$, 則收斂速度加快, 所需時間降爲 $T = \ln(0.1)/\ln(0.1) = 1$ 年。

直觀上, 資本存量的收斂速度與邊際產出的遞減速度有關, 我們可以利用 MPK 的彈性判斷。在 Cobb-Douglas 生產函數下, 此一彈性是

$$-\frac{f''(k)k}{f'(k)} = 1 - \alpha。$$

顯然, α 的值越大, $f'(k)$ 遞減的速度越慢。倒過來說, 地震摧毀資本設備, 若 α 的值較小, 則邊際產出的升幅相對較大, 此時廠商有更強的誘因增加投資, 導致重建或收斂速度加快。

3g 令 $k_t = \pi y_t$, 則根據資源限制式, $c_t = (1 - g - \pi)y_t$。本題也可假設 $k_t = \pi(1 - g)y_t$, 結果不變。仿照 (a) 小題, k_t 的解仍是 $k_t = \alpha\beta y_t$, 故 $c_t = (1-g-\alpha\beta)y_t$。顯然, 實質利率的解與 (b) 小題相同。觀察 (3c) 式, g 上升不影響實質利率, 這是因爲政府消費永久上升不影響商品供給, 也不影響商品需求 (見 2b 小題), 故均衡利率不變。

5a 在恆定狀態下, 廠商最適選擇的一階條件是 $(1 - \tau)f'(k) = \rho + \delta$, 代入 $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$, 整理後可得

$$k = \left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho + \delta}\right]^{1/(1-\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \ln k = \text{參數項} + \frac{\ln(1-\tau)}{1-\alpha}。$$

根據上式, 恆定資本存量的稅率彈性是

$$\frac{d\ln k}{d\tau} = \frac{-1}{(1-\alpha)(1-\tau)}。$$

令 $\alpha = 0.4$, $\tau = 0.2$, 資本存量約下降 $1/(1-0.4)(1-0.2) \cong 2.1\%$。

5b 根據上題, 政府稅收或定額年金是

$$v(\tau) = \tau f(k) = \tau\left[\frac{\alpha(1-\tau)}{\rho+\delta}\right]^{\alpha/(1-\alpha)}。$$

圖 14.20 畫出以上的稅收函數。當稅率逐步上升時, 因爲扭曲效果逐漸加大 (見上題的稅率彈性), 稅收會先增加然後下降。顯然, 銷售稅

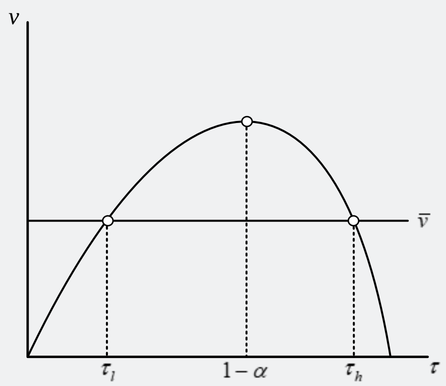

圖 14.20: 銷售稅的 Laffer 曲線

也有 Laffer 效果。如圖所示, 政府若要籌措 $\bar{v}$ 的年金 , 則低稅率 τ_l 及高稅率 τ_h 都能如願。以自然對數表示, 政府稅收可寫成

$$\ln v(\tau) = \text{參數項} + \ln\tau + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\ln(1-\tau)。$$

稅收極大的一階條件是

$$\frac{d\ln v}{d\tau} = \frac{1}{\tau} - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{1-\tau}\right) = \frac{(1-\alpha)-\tau}{(1-\alpha)\tau(1-\tau)} = 0。$$

根據上式, 當稅率 $\tau = 1-\alpha$ 時, 年金給付最高。

5c 如果政府能夠訴諸定額融通, 問題當然迎刃而解, 但課徵定額稅, 又發放定額年金, 顯然多此一舉。如果定額稅不可行, 則政府可選擇發行公

債, 這等於是用未來定額稅支應當下定額年金, 根據李嘉圖等值定理, 也是多此一舉。最後, 政府可以選擇消費稅融通。令 ϕ 表示消費稅率, 則政府及消費者的預算分別滿足 $v_t = \phi c_t$ 及

$$(1+\phi)c_t + b_t = d_t + v_t + (1+r_{t-1})b_{t-1}。$$

因爲各期稅率相等, 消費者決策的一階條件仍是

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1+r_t)。$$

廠商的最適條件仍是 $f'(k_t) = r_t + \delta$。顯然, 在 Ramsey 模型中, 消費稅具有中立性質, 對消費者及廠商的最適選擇不產生任何影響。這是消費稅被學界青睞的主要原因。

7a 廠商累積一單位 k_t 只需要 $\Delta i_t = 1/(1+z) < 1$ 的商品支出, 這是邊際成本。以商品單位衡量, 邊際報酬是 $f'(k_t) + (1-\delta)/(1+z)$。請小心, $(1-\delta)$ 必須除以 $(1+z)$ 才能得到以商品單位衡量的殘餘價值。最適選擇要求邊際成本等於邊際報酬, 故一階條件是

$$\frac{1}{1+z} = \frac{f'(k_t) + (1-\delta)/(1+z)}{1+r_t} \quad \Rightarrow \quad (1+z)f'(k_t) = r_t + \delta。$$

全面均衡還必須滿足以下三式:

$$\begin{aligned} \text{消費者效用極大：} \quad & u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1+r_t), \\ \text{資本移動方程式：} \quad & (1+z)i_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1}, \\ \text{商品市場結清條件：} \quad & c_t + i_t = f(k_{t-1})。 \end{aligned}$$

在恆定狀態下, 實質利率仍然等於時間偏好率, 故恆定資本存量 k^* 滿足 $(1+z)f'(k^*) = \rho+\delta$。顯然, z 上升會使 k^* 及產出 $y^* = f(k^*)$ 上升, 效果與要素生產力上升相同。根據資本移動方程式, 恆定投資支出是

$i^* = \delta k^*/(1+z)$。當 z 上升時, 因爲 k^* 也上升, i^* 的變動方向無法確定, 不過一般情形下, 恆定投資會上升 (見上章習題)。

不論恆定投資如何變動, 資本創新必然會使恆定消費上升。利用市場結清條件, 恆定消費滿足 $c^* = f(k^*) - \delta k^*/(1+z)$, 對 z 微分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{dc^*}{dz} &= \left[f'(k^*) - \frac{\delta}{1+z}\right]\frac{dk^*}{dz} + \frac{\delta k^*}{(1+z)^2}\\ &= \left(\frac{\delta}{1+z}\right)\frac{dk^*}{dz} + \frac{\delta k^*}{(1+z)^2} > 0。\left[\text{利用 } f'(k^*) = \frac{\rho+\delta}{1+z}\right]\end{aligned}$$

直觀上, 資本創新使恆常所得上升, 故恆定消費上升。

7b 性質上, 資本創新雖與生產力上升相似, 但均衡效果不完全相同。關鍵在於 z 上升不影響商品供給 $y_t = f(k_{t-1})$, 故衝擊發生當期的總需求不能改變, 這表示均衡消費與均衡投資的變動方向相反。根據上題的分析, z 上升會使消費需求上升, 而一般情形下, 投資需求也上升, 故商品市場將出現超額需求, 導致均衡利率上升。

如果資本創新使資本報酬大幅上升, 或者, 消費者不特別在意極端的消費型態, 則利率上升的跨期替代效果會大於恆常所得上升的財富效果, 導致均衡消費下降。因爲短期產出不變, 故均衡投資上升。反之, 若財富效果大於跨期替代效果, 則均衡消費上升, 但均衡投資下降。供需圖形略, 請自行補充。

7c 根據均衡條件, 消費及資本存量的變動由以下兩式決定:

$$u'(c_{t-1}) = \beta u'(c_t)\left[1 - \delta + (1+z)f'(k_{t-1})\right],$$
$$\Delta k_t = k_t - k_{t-1} = (1+z)\left[f(k_{t-1}) - c_t\right] - \delta k_{t-1}。$$

第一式與本文完全相同, 而根據第二式, 若 $c_t \lesseqgtr f(k_{t-1}) - \delta k_{t-1}/(1+z)$, 則 $\Delta k_t \gtreqless 0$。顯然, z 上升的相位圖與正文的圖 14.9(b) 完全相同, 無須

再另外作圖。當 z 上升時, $\Delta c_t = 0$ 及 $\Delta k_t = 0$ 兩線同時外移, 導致恆定消費及資本存量上升。根據上題的分析, 短期下, 若跨期替代效果大於財富效果, 則最適選擇會從 E 點移至 b 點, 消費下降而投資上升, 反之, 若財富效果大於跨期替代效果, 則最適選擇移至 a 點, 消費上升而投資下降。在過渡期間, 消費及資本存量沿著馬鞍路徑收斂至新的恆定狀態 F 點。z 上升使一開始的實質利率上升, 但隨著資本存量上升而回降。衝擊反應圖形略。

9a 圖 14.21(a) 中, 原始均衡落於 e 點的恆定狀態, 地震摧毀資本存量, 導致當期產出下降, 商品供給左移至藍線位置。對廠商而言, 期初資本下降使投資需求上升, 但家計單位的消費需求卻會因爲財富效果而下降。理論上, 商品需求的變化方向無法確定, 但所得下降是暫時的, 消

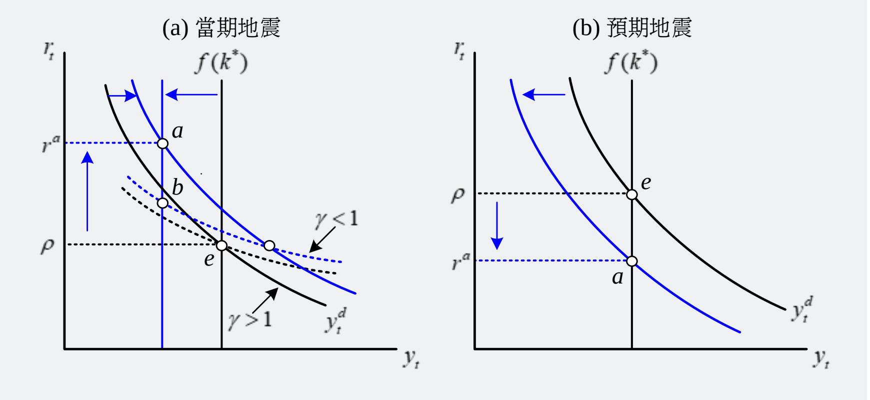

圖 14.21: 地震的均衡效果

費者試圖將地震帶來的「痛苦」分散到未來, 故一般情形下, 消費需求的降幅相對較小, 導致商品需求右移至藍線位置。在原利率水準下, 產出供不應求, 均衡移向 a 點, 市場利率升至 r^a。利率上升使消費需求進一步下降, 故均衡消費必然下降。正常情形下, 淨投資或期末資本會上升, 因爲利率之所以上升反映的正是地震後的重建需求。在過渡

期間, 資本存量逐漸回升, 實質利率下降, 而消費也逐漸回升, 最後回到原來的恆定狀態。時間軌跡略, 請自行補充。

9b 此即本文圖 14.8 討論的情形, 地震使資本存量從 k^* 降至 k_0。分析結論與上小題的市場供需模型相同, 請自行補充。

9c 參數 γ 是跨期替代彈性的倒數, 數值越小, 消費需求及儲蓄的利率彈性越大, 故資本的調整速度會越快。圖 14.21(a) 中, 當 $\gamma > 1$ 時, 商品需求的利率彈性較小, 斜率相對陡峭, 地震使利率升至 r^a, 但當 $\gamma < 1$ 時, 彈性較大, 需求曲線相對平緩, 利率升至 b 點位置, 幅度相對較小。正因爲利率水準相對較低, 資本重建的速度也會較快。直觀的說, 如果消費者不特別在意極端的消費型態 (即 γ 相對較小), 則地震發生時, 他們也比較能夠忍受短暫的消費下降, 此時經濟社會有相對充足的資源流向廠商投資, 故資本重建或收斂速度會較快。

9d 圖 14.21(b) 畫出預期地震的當期效果。因爲災難尚未發生, 本期產出不受影響。對廠商而言, 預期地震不影響最適資本規模, 故投資需求不變, 但消費者預期未來所得下降, 故消費需求下降。顯然, 預期地震會使商品需求下降, y_t^d 曲線左移至藍線位置。在原利率水準下, 產出供過於求, 均衡移至 a 點, 利率降至 r^a。利率下降使投資及資本存量上升, 因爲產出不變, 均衡消費必然下降。直觀而言, 面對即將來臨的「災難」, 消費者會「未雨綢繆, 增加儲蓄」, 經濟社會透過利率下跌引導廠商增加投資, 減輕災難果真降臨時的衝擊。

10a 首先求解 Crusoe 的反應函數。因爲 $\delta = 0$, 恆定狀態滿足

$$f'(k) = \rho_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha k^{\alpha-1} = \rho_1 \quad \Rightarrow \quad k = (\alpha/\rho_1)^{1/(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad c = y = k^\alpha = (\alpha/\rho_1)^{\alpha/(1-\alpha)}。$$

因爲折舊率 $\delta = 0$, 恆定狀態下的投資等於零, 故資源限制滿足 $c = y$。最後, 一階條件 (14.10) 式可寫成

$$\frac{v_x(x,z)}{u'(c)} = f'(k) \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{x - \theta_1 z} = \alpha \frac{y}{k}。$$

利用 $c = y$ 並代入 k 的解, 移項整理後可得 Crusoe 的反應函數:

$$x = g(z) = \underline{x} + \theta_1 z, \ \ \underline{x} = \left(\frac{\alpha^\alpha}{\rho_1}\right)^{1/(1-\alpha)} > 0。 \tag{10a}$$

土人的選擇問題與 Crusoe 對稱, 故反應函數是

$$z = h(x) = \underline{z} + \theta_2 x, \ \ \underline{z} = \left(\frac{\alpha^\alpha}{\rho_2}\right)^{1/(1-\alpha)} > 0。 \tag{10b}$$

10b 納許均衡 (x^*, z^*) 是 (10a)-(10b) 兩式的聯立解。假設 $\theta_1\theta_2 \neq 1$, 則 x^* 及 z^* 的解是

$$x^* = \frac{\underline{x} + \theta_1 \underline{z}}{1 - \theta_1\theta_2}, \qquad z^* = \frac{\underline{z} + \theta_2 \underline{x}}{1 - \theta_1\theta_2}。$$

我們要求 $x^* > 0$ 及 $z^* > 0$, 故納許均衡存在且唯一的充分必要條件是 $\theta_1\theta_2 < 1$。直觀上, 參數 θ 可用來衡量 Crusoe 及土人面對彼此的主觀威脅感或不滿程度。例如, 土人武器 z 上升對 Crusoe 效用的影響是 $v_z = -\theta_1/(x - \theta_1 z) < 0$; 顯然, θ_1 的值越大, 則 Crusoe 的威脅感越大, 而椰彈的邊際效用 $v_{xz} = \theta_1/(x - \theta_1 z)^2$ 也越高。反之, θ_1 的值越小, 則威脅感越低。條件 $\theta_1\theta_2 < 1$ 表示: 即使雙方「劍拔弩張」, 但只要有一方不特別覺得受到威脅或特別「不爽」, 則納許均衡存在。當然, 如果雙方都願接受那「四個說不出的字」, 則均衡也必能維持。

圖 14.22(a) 畫出 Crusoe 及土人的反應函數, 兩式交於 e 點, 武器存量各爲 x^* 及 z^*。如圖所示, 若土人的原始武器存量是 z_1, 則 Crusoe 會選擇 x_1, 而面對 x_1, 土人又選擇 z_2, 直到收斂至 e 點。

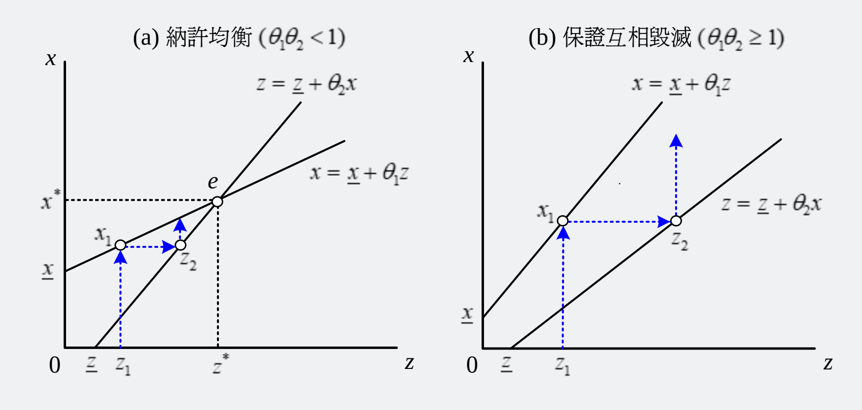

圖 14.22: 軍備競賽

10c 圖14.22(b) 畫出 $\theta_1\theta_2 \geq 1$ 的情形。直觀上, 只要有一方「非常恐懼」或「非常不爽」以致 $\theta_1\theta_2 \geq 1$, 則雙方會進入無止境的軍備競賽, 情形有如美蘇冷戰時期的**保證互相毀滅** (Mutually Assured Destruction, 簡稱 MAD)。例如, 從 z_1 開始, Crusoe 會選擇 $x_1 > z_1$, 而土人又會選擇 $z_2 > x_1$, 永無終止。這種「只要核子, 不要褲子」的瘋狂競賽顯然無法永遠持續, 或許正如凱因斯說的: 'In the long run, we are all dead!'

10d 圖 14.23(a) 中, Crusoe 的恐懼或不爽參數 θ_1 上升會使反應函數的斜率變陡, 導致雙方的長期軍備上升。背後直觀顯而易見, 無須贅述。

10e 時間偏好率 ρ_1 上升表示 Crusoe 比較不在意未來, 他的行爲會像宋高宗趙構的「暖風薰得遊人醉, 直把杭州作汴州」。觀察 (10a) 式, ρ_1 上升使截距 $\underline{x}$ 下降但斜率不變。據此, 圖 14.23(b) 中, ρ_1 上升使 Crusoe 的反應函數平行下移, 導致雙方的長期軍備下降。

談到歷史, 讀者或許會問: 趙構無道, 殘害忠良, 終至滅國, 此一結果似與上面的預測衝突; 面對強敵而示弱, 難道不會鼓勵對方「躁進」嗎? 這是個好問題! 爲了簡單, 本題假設唯一可觀測的資訊是對手的武器

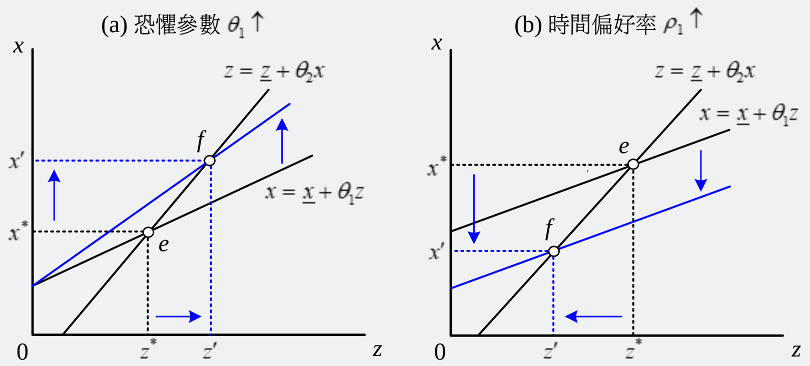

圖 14.23: 軍備競賽: 恐懼參數與時間偏好率變動

裝備, 金人或蒙古人完全不知南宋君臣竟然如此懦弱昏庸! 這是一個重要的簡化假設。如果對手的偏好及生產技術也已知, 則進行選擇時, 會將對方的行爲納入考慮, 換言之, 對方的反應函數會變成各自選擇問題的制約條件。在動態模型中, 此一問題相當複雜, 最適解也不一定存在, 有待進一步思考。

11a 廠商若於 t 期增加一單位投資, 則當期利潤下降一單位, 這是邊際成本。邊際報酬包括下期新增產出 $f'(k_t)$, 資本殘餘價值 $(1-\delta_k)$, 再扣掉新增污染稅 $\tau_{t+1}g'(k_t)$, 故一階條件是

$$1 = \frac{f'(k_t) + (1-\delta_k) - \tau_{t+1}g'(k_t)}{1+r_t}。$$

上式化簡後亦可寫成

$$f'(k_t) = r_t + \delta_k + \tau_{t+1}g'(k_t)。$$

請注意, 影響廠商決策的是未來污染稅 τ_{t+1}, 與本期稅賦 τ_t 無關。當 τ_{t+1} 上升時, 廠商預期未來邊際租稅負擔增加, 故投資需求及期待資本存量下降。

消費者的一階條件是 $u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1+r_t)$, 與上式合併後可得競爭均衡的關鍵條件:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[1 - \delta_k + f'(k_t) - \tau_{t+1} g'(k_t)\right]。 \tag{11a}$$

除上式外, 競爭均衡還必須滿足:

$$\begin{aligned} \text{市場結清條件:} \quad & c_t + [k_t - (1-\delta_k)k_{t-1}] = f(k_{t-1}), \\ \text{污染累積方程式:} \quad & x_t = (1-\delta_x)x_{t-1} + g(k_{t-1})。 \end{aligned}$$

給定各期污染稅, 以上條件共可決定 $\{c_t, k_t, x_t, r_t\}$ 等四個內生變數。請注意, 污染水準是市場交易的最後結果, 一旦決定了資本存量, 污染水準亦同時決定, 故可忽略不計。此外, 政府預算限制 $v_t = \tau_t g(k_{t-1})$ 必然成立, 也可忽略不計。

11b 令 λ_t 及 μ_t 分別爲對應於資源限制式及污染累積方程式的拉氏乘數, 則「真主阿拉」的拉氏函數可寫成

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}[u(c_t) - v(x_t)] + \\ & \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\lambda_t[f(k_{t-1}) + (1-\delta_k)k_{t-1} - k_t - c_t] + \\ & \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\mu_t[x_t - (1-\delta_x)x_{t-1} - g(k_{t-1})]。 \end{aligned}$$

直觀上, 乘數 λ_t 是產出的邊際社會價值, 而乘數 μ_t 是污染的邊際社會成本。社會福利極大除必須滿足資源限制式 ($\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_t = 0$) 及污染累積方程式 ($\partial\mathcal{L}/\partial\mu_t = 0$) 外, 還包括下列一階條件:

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{L}/\partial c_t = 0 \quad & \Rightarrow \quad u'(c_t) = \lambda_t, \\ \partial\mathcal{L}/\partial k_t = 0 \quad & \Rightarrow \quad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}\left[1 - \delta_k + f'(k_t)\right] - \beta\mu_{t+1}g'(k_t), \\ \partial\mathcal{L}/\partial x_t = 0 \quad & \Rightarrow \quad \mu_t = v'(x_t) + \beta(1-\delta_x)\mu_{t+1}。 \end{aligned}$$

合併前兩式可得柏拉圖最適狀態的關鍵條件:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left[1-\delta_k + f'(k_t)\right] - \beta\mu_{t+1}g'(k_t)。 \tag{11b}$$

第三個條件表示: 污染的邊際社會成本 μ_t 等於當期效用損失 $v'(x_t)$ 加殘餘污染量的社會成本 $\beta(1-\delta_x)\mu_{t+1}$。利用此一關係, 我們可以將 μ_{t+1} 向未來逐期疊代, 得到

$$\begin{aligned}\mu_t &= v'(x_t) + \beta(1-\delta_x)\left[v'(x_{t+1}) + \beta(1-\delta_x)\mu_{t+2}\right] = \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\beta(1-\delta_x)\right]^j v'(x_{t+j})。\end{aligned} \tag{11c}$$

顯然, 污染的邊際社會成本即是各期效用損失的折現總值。此一社會成本與污染的衰減率 δ_x 密切相關; 衰減速度越慢 (如核廢料), 社會成本越高。此外, μ_t 也與消費者的時間偏好有關; 消費者越重視未來, β 的值越大, 污染的社會成本也越高。

11c 競爭均衡與柏拉圖狀態的主要差別是 (11a)-(11b) 兩式。令兩式相等並求解 τ_t, 即得到社會福利極大時的污染稅:

$$\tau_t = \frac{\mu_t}{u'(c_t)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty}\left[\beta(1-\delta_x)\right]^j v'(x_{t+j})}{u'(c_t)},\ \forall t。 \tag{11d}$$

上式右邊是污染的邊際社會成本 μ_t 與產出的邊際社會價值 $u'(c_t)$ 之比, 這是消費者為了降低污染所願意支付的代價, 即消費與環境品質之間的邊際替代率。直觀而言, 當污染稅等於消費者的願付價格時, 污染的社會成本**內化**成生產者的租稅負擔, 對整體社會而言, 此時的福利損失已達極小, 沒有再調整的空間, 此即著名的**庇古稅** (Pigouvian tax)。我們在靜態模型中也得到類似結論。

11d 圖 14.24 中, 原來各期 $\tau_t = 0$, 恆定資本存量, 消費及污染水準各為 c^*, k^* 及 $x^* = g(k^*)/\delta_x$。因為沒有污染稅, 資本及產出水準較高, 經

濟社會可以享受較高的消費水準, 但也必須忍受較嚴重的污染。請注意, 我們假設 $\delta_x > 0$, 故 $x^* < \infty$, 否則污染無限累積, 消費者「痛苦不堪」, 政府的任何手段都將無效, 失去分析意義。

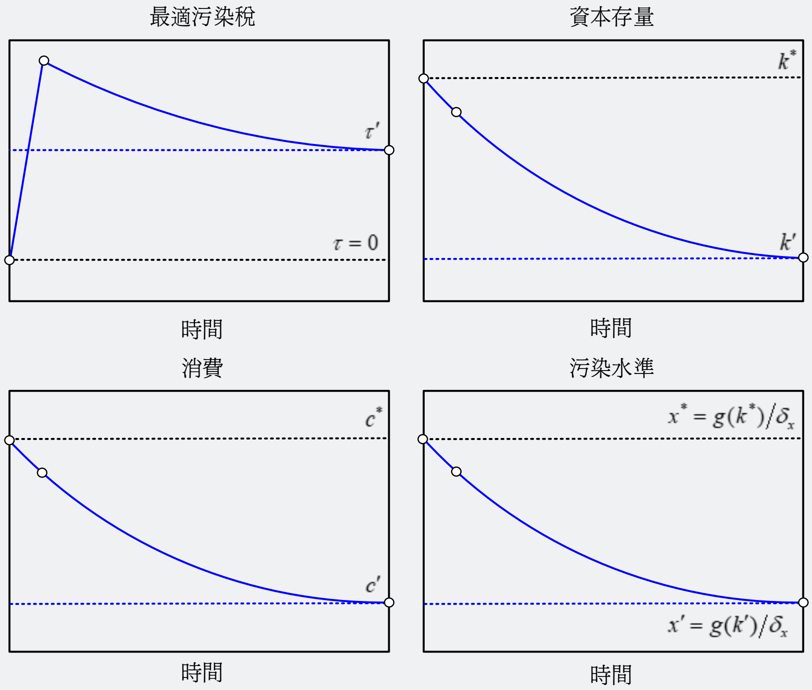

圖 14.24: 最適污染稅的動態效果

最適污染稅是內生變數, 必須在模型內與其他變數共同決定。根據前面的分析, 在恆定狀態下, 柏拉圖狀態滿足以下條件 (請自行驗證):

$$\begin{aligned}
&\text{(11b) 式} && \Rightarrow && f'(k) = \rho + \delta_k + \mu g'(k),\\
&\text{(11c) 式} && \Rightarrow && \mu = v'(x)/[1 - \beta(1 - \delta_x)],\\
&\text{(11d) 式} && \Rightarrow && \tau = \mu/u'(c),\\
&\text{資源限制式} && \Rightarrow && c = f(k) - \delta_k k,\\
&\text{污染累積方程式} && \Rightarrow && x = g(k)/\delta_x\text{。}
\end{aligned}$$

以上五式共可決定 $\{k, c, x, \mu\}$ 及最適污染稅 $\tau > 0$ 等五個內生變數。顯然, 實施最適污染稅會導致長期資本存量, 消費及污染水準下降; 此時的產出及消費水準較低, 但整體社會得以享受較佳的環境品質。讀者清楚看到,「經濟發展」與「環境品質」有如「魚與熊掌不可得兼」, 從福利的角度看, 兩者之間的取捨取決於人們究竟願意用多高的代價換取乾淨的環境。

最適污染稅政策是一個動態的過程, 不是將單位稅直接調到長期最適水準即可了事。根據 (11d) 式, 最適污染稅等於消費與污染之間的邊際替代率 $\mu_t/u'(c_t)$。從 $\tau = 0$ 開始, 因爲消費及污染水準相對較高, 故 $u'(c_t)$ 較低 (因爲 $u'' < 0$), 而 μ_t 較高 (因爲 $v'' > 0$)。顯然, 消費者爲了抑制污染的願付價格較高, 故如圖所示, 一開始的單位稅應高於長期最適水準 τ', 但隨著污染及消費下降, 社會成本及願付價格逐漸下降, 稅賦也應隨之調整, 直到長期最適水準。

11e 觀察 (11d) 式, 時間偏好率 ρ 下降表示未來越重要, 污染的社會成本也越高, 故污染稅應較高。同理, 若衰減率 δ_x 下降, 則污染存在時間越長, 最適污染稅也應提高。

12a 以有效人均單位衡量, 生產函數可寫成 $\tilde{y}_t = f(\tilde{k}_{t-1}), f' > 0, f'' < 0$。其次, 資本累積方程式兩邊同除 $\widetilde{N}_t$, 可得

$$\tilde{i}_t = (1+\lambda)(1+\mu)\tilde{k}_t - (1-\delta)\tilde{k}_{t-1}。$$

上式用到 $K_t/\widetilde{N}_t = (\widetilde{N}_{t+1}/\widetilde{N}_t)\tilde{k}_t = (1+\lambda)(1+\mu)\tilde{k}_t$。最後, 資源限制滿足 $\tilde{c}_t + \tilde{i}_t = \tilde{y}_t = f(\tilde{k}_{t-1})$。

根據定義, $\tilde{c}_t = C_t/\widetilde{N}_t = c_t/A_t$, 故 $c_t = A_t\tilde{c}_t$, 代入 CRRA 效用函數, 則終身效用也可用有效人均消費表達:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(\frac{A_t^{1-\gamma}\tilde{c}_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) N_t = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{t-1} \left(\frac{\tilde{c}_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)。$$

本題假設 $\tilde{\beta} = \beta(1+\lambda)(1+\mu)^{1-\gamma} \in (0,1)$, 否則終身效用沒有上界, 失去分析意義。綜合上述, 代表性消費者的決策問題可寫成

$$\begin{aligned} &\max_{\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_t\}_{t=1}^{\infty}} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{t-1} u(\tilde{c}_t), \quad u(\tilde{c}_t) = \tilde{c}_t^{1-\gamma}/(1-\gamma), \\ &\text{subject to} \quad \tilde{c}_t + \left[(1+\lambda)(1+\mu)\tilde{k}_t - (1-\delta)\tilde{k}_{t-1}\right] = f(\tilde{k}_{t-1}), \ \forall t。\end{aligned}$$

除了變數的衡量單位不同外, 上述問題與本文並無不同, 故一階條件也非常類似。此時, 決策變數是有效人均消費 $\tilde{c}_t$ 及有效人均資本 $\tilde{k}_t$。顯然, 終身效用極大要求

$$(1+\lambda)(1+\mu)u'(\tilde{c}_t) = \tilde{\beta}u'(\tilde{c}_{t+1})\left[1-\delta+f'(\tilde{k}_t)\right]。$$

兩邊同除 $(1+\lambda)(1+\mu)$, 一階條件也可寫成

$$(1+\mu)^{\gamma}u'(\tilde{c}_t) = \beta u'(\tilde{c}_{t+1})\left[1-\delta+f'(\tilde{k}_t)\right]。 \tag{12a}$$

12b 恆定狀態下的有效人均消費及資本存量均爲定值, 故 (12a) 式變成

$$\begin{aligned} & (1+\mu)^{\gamma} = \beta\left[1-\delta+f'(\tilde{k}^*)\right] \\ \Rightarrow \quad & (1+\rho)(1+\mu)^{\gamma} = f'(\tilde{k}^*) + 1 - \delta。 \end{aligned} \tag{12b}$$

上式可單獨決定 $\tilde{k}^*$; 一旦 $\tilde{k}^*$ 決定了, 其他變數亦隨之而解, 不再重複。請注意, 當技術進步率 $\lambda = 0$ 時, $\tilde{k}^* = k^*$, (12b) 式退化成標準的修正後累積金率, 即 $f'(k^*) = \rho + \delta$。

根據定義, 有效人均資本 $\tilde{k}_t = K_t/\widetilde{N}_{t+1} = k_t/A_{t+1}$, 故恆定狀態下的人均資本滿足 $k_t = \tilde{k}^* A_{t+1} = \tilde{k}^*(1+\mu)^t$。顯然, k_t 的成長率等於技術進步率 μ。同理, 人均產出及人均消費也會以相同速度成長, 寫成 $y_t = \tilde{y}^*(1+\mu)^{t-1}$ 及 $c_t = \tilde{c}^*(1+\mu)^{t-1}$。最後, 總產出 $Y_t = \widetilde{N}_t\tilde{y}^*$, 故成長毛率是 $Y_t/Y_{t-1} = \widetilde{N}_t/\widetilde{N}_{t-1} = (1+\lambda)(1+\mu)$。一般情形下, $\lambda\mu \cong 0$, 故

總產出的成長率約爲 $\lambda + \mu$, 即人口成長率加技術進步率。顯然, 總資本及總消費的成長率也是 $\lambda + \mu$。總結以上分析, 技術進步不但會使變數總量以相同速度成長, 也會使人均量等速成長, 而且成長率等於技術進步率, 此即平衡成長。

恆定利率水準不難決定。根據 (12b) 式, 恆定狀態下的實質利率滿足 (利用 $f'(\tilde{k}_t) = r_t + \delta$)

$$1 + r^* = (1+\rho)(1+\mu)^\gamma \quad \Rightarrow \quad \ln(1+r^*) \cong r^* \cong \rho + \gamma\mu。$$

當技術進步率 $\mu > 0$ 時, 實質利率大於時間偏好率。這是必然之理, 因爲此時的人均消費隨時間不斷成長, 而唯有 $r > \rho$ 才能引導消費者在這樣的成長軌跡上消費。

12c (12b) 式可用來決定恆定人均資本存量。圖 14.25(a) 中, 假設原來技術進步率 $\mu = 0$, 恆定狀態落於 e 點, 有效人均資本 $\tilde{k}^*$ 滿足 $f'(\tilde{k}^*) = \rho + \delta$。當 μ 上升時, 成本線上移, 恆定狀態移向 f 點, 有效人均資本降

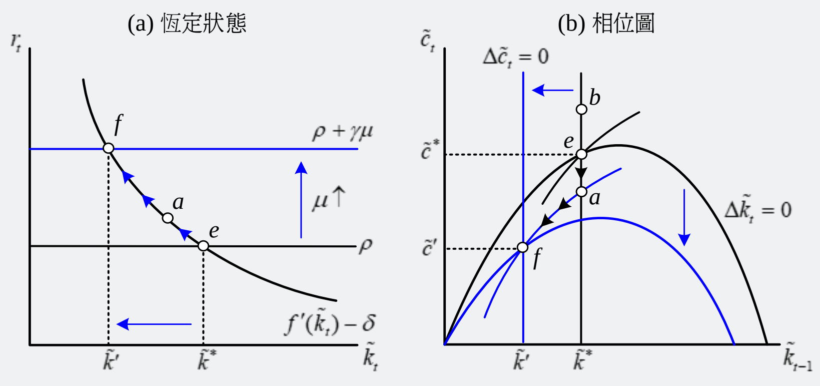

圖 14.25: 技術進步率上升的均衡效果

爲 $\tilde{k}'$。顯然, 有效人均產出 $\tilde{y}^*$ 及有效人均消費 $\tilde{c}^*$ 也下降。讀者或許疑惑: 技術進步竟然會使長期產出及消費下降, 這真是豈有此理! 請注

意, 這裡的產出及消費是以**有效勞動**單位衡量的人均量。技術進步使 $\widetilde{N}_t$ 上升, 導致有效人均量下降, 但實際的人均產出及人均消費卻會隨時間成長 (見上題)。

模型的動態行為由歐勒方程式 (12a) 及資源限制式決定, 分別可寫成 (第二式用到 $\lambda\mu \cong 0$)

$$\frac{u'(\tilde{c}_{t-1})}{u'(\tilde{c}_t)} = \left(\frac{\tilde{c}_t}{\tilde{c}_{t-1}}\right)^{\gamma} = \frac{1-\delta+f'(\tilde{k}_{t-1})}{(1+\rho)(1+\mu)^{\gamma}},$$

$$(1+\lambda)(1+\mu)\Delta\tilde{k}_t \cong \left[f(\tilde{k}_{t-1}) - (\lambda+\mu+\delta)\tilde{k}_{t-1}\right] - \tilde{c}_t。$$

以上兩式的外觀雖然醜陋, 但模型的基本性質並未改變, 故本文的相位圖仍可適用。圖 14.25(b) 中, e 點是原來的恆定狀態。μ 上升使 $\tilde{k}^*$ 下降, 導致 $\Delta\tilde{c}_t$ 線左移, 同時, $\Delta\tilde{k}_t = 0$ 曲線下移, 恆定狀態移至 f 點, 有效人均資本及消費都較低。如圖所示, 新的馬鞍路徑通過 f 點, 但可能從 e 點下方穿過, 如 a 點, 也可能從 e 點上方穿過, 如 b 點。馬鞍路徑的斜率受參數 γ 影響; γ 的值越大, 斜率越平緩, 反之則越陡峭, 相關討論請見習題 4b。以下假設馬鞍路徑通過 e 點下方, 即 γ 的值相對較大, 這也是文獻的通常假設。

短期下, μ 上升使有效人均消費從 $\tilde{c}^*$ 降至 a 點位置, 而有效人均資本也下降, 因為 a 點仍然落於新 $\Delta\tilde{k}_t = 0$ 曲線的外側。在過渡期間, $\tilde{c}_t$ 及 $\tilde{k}_t$ 沿著馬鞍路徑逐期下降, 直到最後的恆定狀態 f 點。左邊的圖 (a) 標示對應的動態調整過程。如圖所示, 隨著 $\tilde{k}_t$ 遞減到新的恆定狀態, 均衡利率也逐漸上升, 直到 $r \cong \rho + \gamma\mu$。

圖 14.26 畫出技術進步率上升的衝擊反應函數。當 $\mu = 0$ 時, 有效人均資本 $\tilde{k}_t$ 固定不變, 時間軌跡為一水平線。當 μ 上升時, $\tilde{k}_t$ 隨時間遞減至 $\tilde{k}'$, 而實質利率也從 ρ 逐漸升至 $\rho + \gamma\mu$。直觀而言, 技術進步率上升使有效勞動投入增加, 導致資本的邊際產出 MPK 上升, 為了累積資本, 利率必須上升才能引導消費者增加儲蓄。

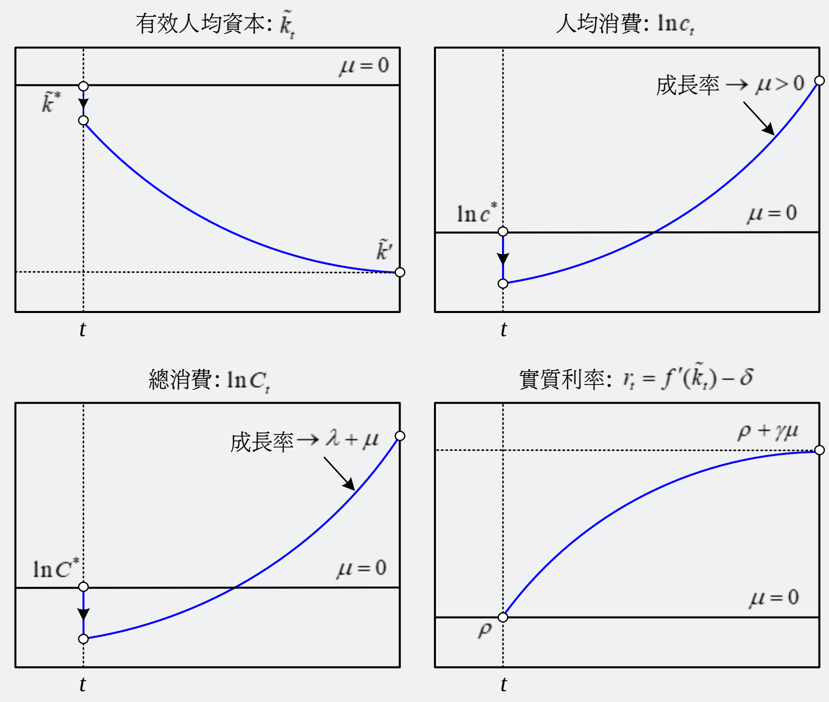

圖 14.26: 時間軌跡: 技術進步率上升

人均消費原來固定不變, μ 上升使當期人均消費下降。如圖所示, 人均消費會低於原來的恆定水準一段時間, 但隨著時間, 人均消費逐漸成長, 最終收斂至較高的成長率 μ。總消費 $\ln C_t$ 的時間軌跡與人均消費 $\ln c_t$ 相同, 但長期成長率是 $\lambda+\mu$。其他變數請自行補充。

13a 全面均衡要求以下條件同時成立:

$$\begin{aligned} \text{消費者效用極大：}\quad & u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1+r_t), \\ & q_t u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(q_{t+1}+d_{t+1}), \qquad \text{(13a)} \\ \text{廠商價值極大：}\quad & A_{t+1} f'(k_t) = r_t + \delta, \\ \text{市場結清條件：}\quad & c_t + i_t = A_t f(k_{t-1}),\ b_t = 0,\ z_t = 1。 \end{aligned}$$

仿照第 11 章的推導過程, 利用 (13a) 式將未來股價逐期疊代, 則均衡股價可以表示成**未來**各期股利的折現總值:

$$q_t = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\beta^j u'(c_{t+j})}{u'(c_t)}\right] d_{t+j}。 \tag{13b}$$

與第 11 章的稟賦模型比較, 上式中的股利及消費並非外生變數, 必須代入最後的均衡值才能得到均衡股價。利用商品市場結清條件, 均衡消費滿足 $c_t = y_t - i_t$, 剛好等於股利 d_t, 代回上式, 則均衡股價的形式與第 11 章完全相同。此外, 利用第一式, 上式也可寫成

$$q_t = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{d_{t+j}}{(1+r_t)\cdots(1+r_{t+j-1})}\right]。$$

13b 站在任何 t 期, 期初資產餘額必然滿足 $b_{t-1} = 0, z_{t-1} = 1$。將廠商股利 $d_t = y_t^s - i_t^d$ 代回消費者的預算限制, 整理後可得

$$\left[(c_t^d + i_t^d) - y_t^s\right] + b_t^d + q_t\left[z_t^d - 1\right] = 0。$$

三個市場的超額需求加總等於零, Walras 市場法則成立, 這是任何全面均衡模型都必須滿足的最低要求。

觀察全面均衡條件, 除 (13a) 式及股票市場結清條件外, 其他條件與 Ramsey 模型完全相同。這表示 Ramsey 模型的均衡特徵不因加入了股票市場而有任何改變, 我們可以在 Ramsey 模型中決定均衡消費及股利, 然後再利用 (13a) 或 (13b) 式決定均衡股價。我們曾在上一章的習題中考慮資本租賃市場, 也得到相同結論。理論模型應該要「越小越好」, 而 Ramsey 模型正是這樣一個「小而美」的模型, 我們可以根據需要加入其他市場, 模型的基本性質不會因此而改變。

13c 在恆定狀態下, 消費 $c^* = y^* - \delta k^* = d^*$, 利用 (13b) 式, 恆定股價是

$$q^* = \sum_{j=1}^{\infty}\beta^j d^* = \left(Af(k^*) - \delta k^*\right)/\rho。$$

顯然, 生產力 A 上升會使長期股價上升。直觀上, 要素生產力永久上升使長期股利水準上升, 但折現率或實質利率仍然等於時間偏好率, 故長期股價水準必然較高。

13d 根據 14.2 節的分析, 要素生產力短暫上升使未來消費及股利上升 (高於恆定水準), 但實質利率下降, 故當期均衡股價必然上升。在過渡期間, 股利回降而利率回升, 股價也會逐漸收斂回原來的恆定狀態。從市場供需的角度看, 當所得短暫上升時, 消費者的儲蓄意願上升, 導致股票需求及股價上升。在第 11 章的稟賦模型中, 國民儲蓄等於零, 股價當天即充分反映, 沒有動態調整過程。

13e 未來生產力上升使消費及投資需求上升, 導致利率上升。因爲當期產出並未改變, 消費及投資如何變化無法確定。若跨期替代效果大於財富效果, 則消費下降, 投資上升, 反之則消費上升, 投資下降。在過渡期間, 消費及資本存量逐漸收斂至較高的恆定水準, 利率則回降至時間偏好率。短期下, 因爲利率上升了, 股價的變動方向也不能確定, 但長期下, 隨著利率回降而股利繼續上升, 股價會收斂到較高的恆定水準。

13f 利用題 3 的公式解, 均衡股利是 $d_t = c_t = (1 - \alpha\beta) y_t$, 代入 (13b) 式, 得到均衡股價的公式解是

$$q_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j d_t = \left[\frac{\beta(1-\alpha\beta)}{1-\beta}\right] A_t k_{t-1}^{\alpha}。$$

觀察上式, A_t 上升使股價上升, 與前面的分析結論一致。因爲未來的要素生產力並未出現在上式中, 故未來生產力變動不影響當期股價, 這是因爲在對數效用函數下, 利率上升的跨期替代效果剛好與生產力上升的財富效果抵銷, 故市場利率雖然上升, 但當期消費, 投資及股價都不受影響。這是本例的特殊之處。

第 14 章

2a 政府消費增加與生產函數平行下移的情形非常類似。圖 14.27 中, G_t 短暫增加使 $\Delta k_t = 0$ 曲線暫時下移至虛線位置, 可供民間消費及投資的產出減少 $\Delta G_t = ef$ 單位。此一衝擊使消費需求下降, 但因持續時

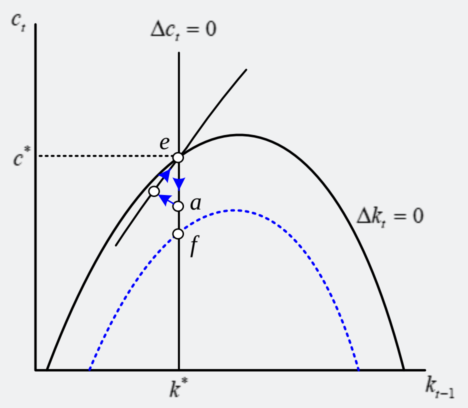

圖 14.27: 政府消費短暫增加的動態效果

間極為短暫, 財富效果小, 消費的下降幅度小於 ΔG_t, 均衡從 e 點移至 e, f 兩點之間的 a 點, 這表示投資也必須下降。根據邊際產出遞減性質, 期末資本存量下降使衝擊當期的實質利率上升。

經濟社會進入次期, $\Delta k_t = 0$ 曲線移回原來位置, 但因為期初資本下降了, 均衡會從 a 點移至左側的馬鞍路徑上, 消費開始回升。在過渡期間, 消費及資本存量沿著馬鞍路徑持續上升, 而實質利率也從高點回降, 最後收斂至原來的恆定狀態 e 點。以上結論與 14.3 節的市場供需分析完全一致。

2b 圖 14.28(a) 中, 市場均衡原來落於 e 點的恆定狀態, 政府消費永久等幅增加使商品需求曲線右移 ΔG 單位。此一衝擊不影響廠商的投資需求, 但消費者的恆常所得或各期消費需求等幅下降, 導致商品需求

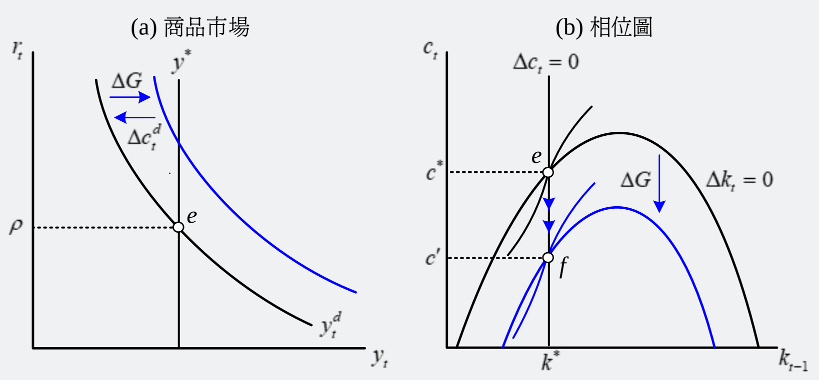

圖 14.28: 政府消費永久增加的均衡效果

曲線移回原來位置。顯然, 利率不需調整, 故均衡投資不變, 民間消費則完全被政府消費排擠。圖 14.28(b) 中, 各期政府消費等幅增加使均衡直接從 e 點移到 f 點, 與 1c 小題的生產函數平行移動一樣, 這裡也沒有過渡期間調整過程。

2c 本題的分析與 1d 小題完全相同。

2d 本題的分析與 1e 小題完全相同。

2e 根據李加圖等值定理, 定額融通與赤字融通有相同的經濟效果, 故以上各題的分析結論不變。

4a 時間偏好率下降表示未來變得更爲重要, 消費者的儲蓄意願上升, 導致長期利率下降。根據均衡條件 (14.4) 式, 利率下降使恆定資本存量及產出上升, 透過財富效果, 恆定消費也上升。圖 14.29(a) 中, 時間偏好率下降不影響 $\Delta k_t = 0$ 曲線, 但因爲恆定資本上升, $\Delta c_t = 0$ 線右移, 恆定狀態從 e 點移至 f 點, 資本存量及消費水準都較高。短期下, 儲蓄意願上升使當期消費降至新馬鞍路徑上的 a 點, 因爲產出不變, 資

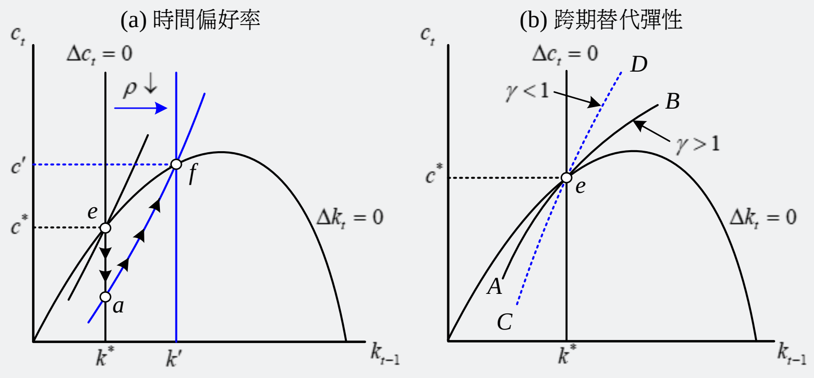

圖 14.29: 偏好改變的均衡效果

本存量上升, 對應的實質利率下降。在過渡期間, 資本及消費沿著馬鞍路徑收斂到 f 點, 而實質利率則隨資本存量上升而逐漸下降至新的時間偏好率。動態軌跡略, 請自行補充。

4b 參數 γ 不影響恆定狀態, 但會影響馬鞍路徑的「斜率」。讀者還記得, γ 是跨期替代彈性的倒數; γ 的值越小, 消費者對利率變動的反應也越強烈, 此時的跨期替代效果較強。更清楚的說, CRRA 效用函數下的歐勒方程式可寫成 (以落後一期表示)

$$\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right)^{\gamma} = \beta\left[1 - \delta + A_t f'(k_{t-1})\right]。$$

以自然對數表達, 消費成長率滿足

$$\ln\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right) = \frac{\ln\beta}{\gamma} + \frac{\ln\left[1 - \delta + A_t f'(k_{t-1})\right]}{\gamma}。$$

顯然, γ 的值越小, 消費也成長得越快。圖 14.29(b) 中, 恆定狀態落於 e 點。當 $\gamma > 1$ 時, 因爲跨期替代效果較弱, 馬鞍路徑 AB 較爲平緩, 而當 $\gamma < 1$ 時, 馬鞍路徑會如路徑 CD 所示, 斜率相對陡峭。

6a 消費者決策的一階條件仍是 $u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_t)$。請注意, 租稅補貼既非政府消費也非投資, 故市場結清條件仍是 $c_t + i_t = f(k_{t-1})$。最後, 全面均衡也要滿足廠商問題的一階條件。爲方便判斷, 我們將廠商股利寫成 (代掉投資支出並整理)

$$d_t = f(k_{t-1}) - (1 - \phi)k_t + (1 - \delta - \phi)k_{t-1}。$$

觀察上式, 廠商若於 t 期增加一單位投資, 則邊際成本是 $(1 - \phi)$, 投資報酬包括下期的邊際產出 $f'(k_t)$ 及新增資本的殘餘價值 $(1 - \delta - \phi)$。請注意, 本期投資會使未來資本的「租稅價值」下降, 故必須減掉 ϕ。最適選擇要求邊際成本等於折現邊際報酬, 故一階條件是

$$1 - \phi = \frac{f'(k_t) + (1 - \delta - \phi)}{1 + r_t}。$$

此一條件與上一章 13.5 節稍有不同, 因爲本題的租稅扣抵不包括折舊投資。移項整理後, 上式也可寫成

$$f'(k_t) = (1 - \phi)r_t + \delta。$$

在恆定狀態下, 資本存量滿足 $f'(k) = (1 - \phi)\rho + \delta$。顯然, 租稅扣抵 ϕ 上升使投資的成本下降, 故長期資本及產出上升。根據市場結清條件, 恆定消費滿足 $c = f(k) - \delta k$, 對 ϕ 微分, 可得

$$\frac{dc}{d\phi} = [f'(k) - \delta]\frac{dk}{d\phi} = (1 - \phi)\rho\frac{dk}{d\phi} > 0。 \tag{6a}$$

顯然, 投資扣抵也會使長期消費水準上升。以上結論與政府降低銷售稅率相同 (見 14.5 節)。

6b 投資扣抵的均衡分析與 14.5 節的銷售稅極爲類似, 簡要說明如下。圖 14.30(a) 中, 均衡原來落於 e 點的恆定狀態, ϕ 上升使投資需求及消費

需求同時上升, 導致 y_t^d 曲線右移至藍線位置。觀察 (6a) 式, 消費需求的增幅相對有限, 故推升商品需求的主要力量來自投資需求。在原利率水準下, 商品市場出現 ed 的超額需求, 均衡移向 a 點, 利率升至 r^a。從儲蓄的角度看, 消費者的當期所得下降 (因爲廠商投資增加使股利下降), 但未來所得上升, 故儲蓄意願下降, 導致市場利率上升。利率上升使投資需求下降, 但只有部分的抵銷效果 (爲什麼?), 故最後的均衡投資仍會上升。短期下, 因爲產出不變而投資上升, 故消費必然下降, 這表示利率上升的跨期替代效果大於財富效果。

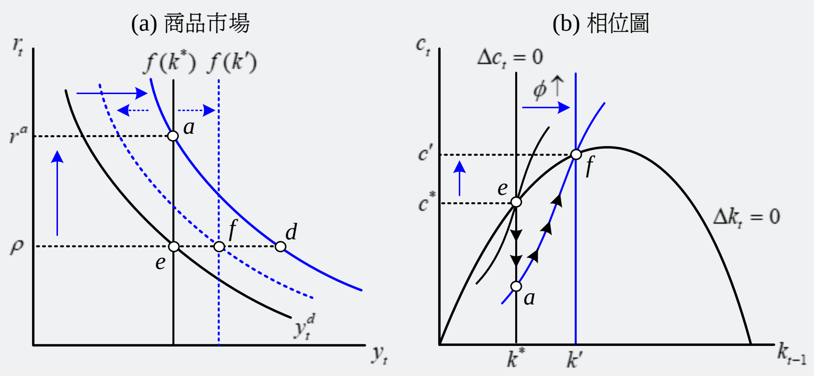

圖 14.30: 投資租稅扣抵上升的均衡效果

以上是政策的短期效果。當廠商開始調整生產規模後, 隨著資本存量上升, 商品供給線逐漸右移, 投資需求或商品需求曲線逐漸左移, 市場利率開始回降, 最後收斂到新的恆定狀態 f 點。與 e 點比較, 資本存量, 產出及消費水準都較高。動態軌跡略, 請自行補充。

6c 投資扣抵的相位圖分析也與銷售稅類似。圖 14.30(b) 中, 經濟社會原來處於 e 點的恆定狀態, ϕ 上升不影響 $\Delta k_t = 0$ 曲線, 但使恆定資本存量上升, 故 $\Delta c_t = 0$ 線右移, 新的恆定狀態落於 f 點, 資本及消費水準都較高。短期下, ϕ 上升使消費直接降至 a 點, 因爲產出不變, 故投資

及期末資本上升。在過渡期間,資本及消費沿著馬鞍路徑上升,最後收斂至 f 點。以上結論與市場供需分析相同。

8a 首先,恆定狀態要求 $F_k(k,x) = \rho + \delta$。利用 $F_k = \alpha y/k$,資本存量與產出維持固定比例:

$$\frac{\alpha y}{k} = \rho + \delta \quad \Rightarrow \quad k = \phi y, \;\; \phi = \frac{\alpha}{\rho + \delta}。$$

其次,恆定狀態下的公共資本滿足 $G = \delta x$ 或 $x = G/\delta, \delta > 0$。將以上的 k 及 x 代回生產函數,移項整理後可得

$$y = \psi G^{\theta/(1-\alpha)}, \;\; \psi = \left[\phi^{\alpha}/\delta^{\theta}\right]^{1/(1-\alpha)} > 0。 \tag{8a}$$

這是恆定產出的最終解,代回 $k = \phi y$,即得到恆定資本存量。最後,利用資源限制式,恆定消費滿足 $c = y - \delta k - G$,故

$$c = (1 - \delta\phi)\psi G^{\theta/(1-\alpha)} - G。 \tag{8b}$$

我們假設 $c > 0$,否則失去分析意義。提醒讀者,恆定狀態必須表達成 G 的函數才算完成。

8b 根據 (8a) 式及 $k = \phi y$, G 變動對恆定產出及民間資本的比例影響是

$$\frac{d\ln y}{d\ln G} = \frac{d\ln k}{d\ln G} = \frac{\theta}{1-\alpha} > 0。$$

觀察上式,當 G 上升 1% 時,k 及 y 等幅上升,但上升幅度取決於參數 θ: 若 $\theta = 1 - \alpha$,則上升幅度是 1%,但若 $\theta < 1 - \alpha$,則上升幅度小於 1%,反之則大於 1%。以下進一步爲讀者解說。

基本上,政府投資使公共資本上升,進而提高民間資本的邊際生產力,這是決定恆定狀態的關鍵因素。在本題的生產函數下,民間資本的邊際生產力 MPK,以自然對數表示,可寫成

$$\ln \text{MPK} = \ln\alpha - (1-\alpha)\ln k + \theta \ln x。$$

當 $\theta = 1-\alpha$ 時, x 上升 1% 使 MPK 上升 $(1-\alpha)$ 比例, 而 k 上升 1% 使 MPK 下降 $(1-\alpha)$ 比例。顯然, 在恆定狀態下, 爲了維持 MPK $= \rho + \delta$ (即 MPK 固定不變), k 必須上升 1% 才能抵銷 x 上升的影響, 換言之, 民間資本與公共資本 (及政府投資) 等比例變動, 此時的 k/x 及 k/G 比率固定不變。請注意, 在 $\theta = 1-\alpha$ 情形下, 生產函數的規模報酬固定, 故恆定產出也會與政府投資等比例變動。

同理, 當 $\theta > 1-\alpha$ 時, x 變動對 MPK 的比例影響大於 k 的影響, 故 x 上升 1% 會使 k 的增幅大於 1%。此時, 生產函數爲規模報酬遞增, 故恆定產出的增幅也大於 1%。

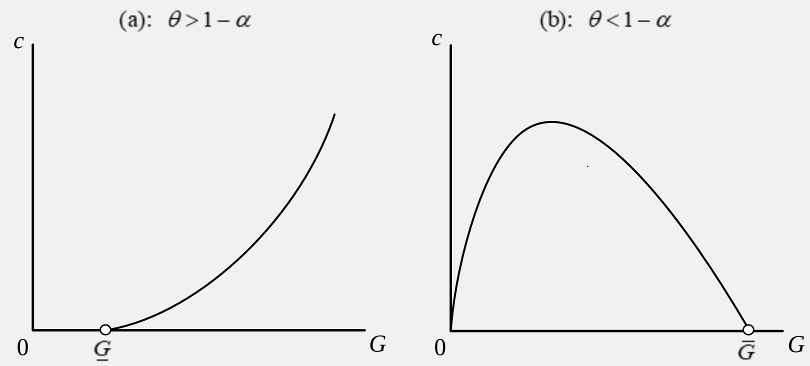

圖 14.31: 恆定消費與政府投資支出

恆定消費的變動方向較爲複雜。觀察 (8b) 式, 當 $\theta = 1-\alpha$ 時, c/G 比率固定不變, 故恆定消費會與政府投資等比例變動。當 $\theta > 1-\alpha$ 時, 恆定產出是 G 的遞增凸函數 (convex function)。爲了保證 $c > 0$, 我們要求 $G > \underline{G}$, $\underline{G} = [(1-\delta\phi)\psi]^{(1-\alpha-\theta)/(1-\alpha)}$ (請自證)。圖 14.31(a) 中, 當 G 上升時, 因爲公共資本的邊際效益夠高 (即 $\theta > 1-\alpha$), 產出的上升速度大於政府支出, 導致恆定消費以遞增速度上升。

圖 14.31(b) 例示 $\theta < 1-\alpha$ 的情形。此時, 政府投資的邊際效益遞減。爲

了保證 $c > 0$, 我們假設 $G \in (0, \overline{G})$。如圖所示, 當 G 上升時, 一開始因爲資本規模 (包括民間及政府) 相對較低, G 的邊際產出雖然遞減, 但仍大於 G 上升的速度, 故 c 漸增, 但隨著 G 上升, 邊際產出終將小於 G 上升的速度, 導致 c 下降。

14a 跨期預算的推導過程與消費者並無不同。利用 $t = 2$ 的預算限制式, $k_1 = (c_2 + k_2 - w_2)/(1 + r_1)$, 代入 $t = 1$ 的預算限制, 整理後可得

$$\left(c_1 + \frac{c_2}{1 + r_1}\right) + \frac{k_2}{1 + r_1} = \left(w_1 + \frac{w_2}{1 + r_1}\right) + (1 + r_0)k_0。$$

繼續以上的代換過程, 可得

$$\sum_{t=1}^{T} q_t c_t + q_T k_T = \sum_{t=1}^{T} q_t w_t + (1 + r_0)k_0。$$

上式右邊是截至 T 期, 各期勞動所得 $\{w_t\}_{t=1}^T$ 的折現總值, 再加上起始資本的商品價值 $(1 + r_0)k_0$, 這是 Crusoe 的終身財富, 可用於購買各期消費 $\{c_t\}_{t=1}^T$ 及期末資本存量 k_T。移項後, 上式亦可表示成

$$q_T k_T = \sum_{t=1}^{T} q_t (w_t - c_t) + (1 + r_0)k_0。$$

用白話說, T 期的期末資本存量 (以現值衡量) 等於起始資本存量再加上存活期間各期儲蓄, 即右邊第一項。

14b 資本存量不能爲負值, 故 $\lim q_T k_T \geq 0$ 恆成立, 這表示 Crusoe 先天上即不能倒債。這是自明之理, 因爲荒島上只住著猴兒, Crusoe 和敵對的土人, 這樣一個封閉的經濟社會何來借貸對象?

14c 若 $\lim q_T k_T > 0$, 則終身財富大於各期消費的折現總值, 這表示效用仍有增加空間。當 $\lim q_T k_T = 0$ 時, 這些空間已經耗盡了, 終身效用

已達極限, 無法再提升。事實上, 當 $\lim q_T k_T = 0$ 時, Crusoe 的終身預算限制可寫成

$$\sum_{t=1}^{\infty} q_t c_t = \sum_{t=1}^{\infty} w_t + (1 + r_0) k_0。$$

橫截條件要求資本沒有極限商品價值, 這表示終身財富在無窮的生命期間已然消費殆盡, 這是保證終身效用極大的充分條件。