第 11 章　統計估計-區間估計

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

學習目的

1.了解統計學的性質、重要性、學習統計學的目的及一些基本觀念如母體、樣本、參數、樣本統計量等。

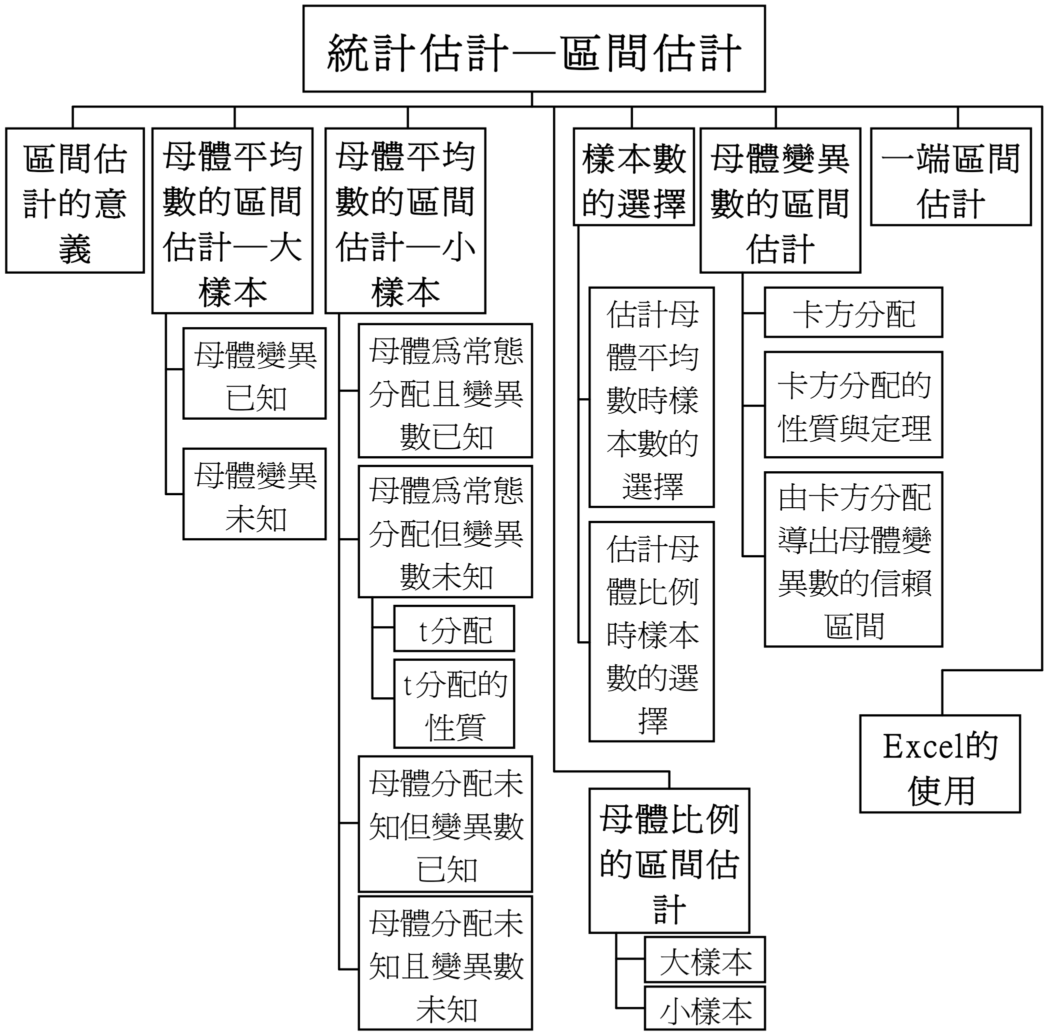
2.了解統計學的應用與誤用。

3.了解敘述統計及推論統計的基本觀念及其相互間的關係。

4.了解歸納法與演繹法的基本觀念及其與敘述統計及推論統計間的關係。

5.了解統計方法及其實施步驟以及在經濟、政治、社會及日常生活上的應用。

本章結構



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

11.1 區間估計的意義

Concept

台北市區30-40坪房屋價格的調查 n=36, 點估計 $\overline{X} = 903.92$ 萬

Q: 903.92 萬不會剛好等於母體參數 μ

→ 這個 估計值可靠嗎?

→ 這個 估計值有多精確?

→ 誤差多大?

→ 估計出一個區間, 並指出該區間包含母體平均數的可靠度(機率)

區間估計

對未知的母體參數估計出一個上下限的區間,並指出該區間包含母體參數的可靠度

E X: 以 $\overline{X} = 903.92$ 為中心加減某個數值, 如67,得到 836.92 ~ 970.92萬

陳述: [台北市區30~40坪房屋的平均價格在836.92 ~ 970.92萬元之間]

陳述: [台北市區30~40坪房屋的平均價格(母體平均數)在836.92 ~ 970.92萬元之間的可靠度為95%]

836.92萬元: 區間下限 lower limit of the interval

970.92萬元: 區間上限 upper limit of the interval

Q: 加減什麼樣的數值

Depend on

1. 樣本平均數 $\overline{X}$ 的標準差 $\sigma_{\overline{X}}$ 的大小
2. 區間的信賴水準(confidence level)的高低

❍ 信賴區間

信賴區間是在一個既定的信賴水準下所構成的一個區間。是由樣本統計量及抽樣誤差所構成的一個(包含上限，下限的)區間。

Note: 標準差越大,點估計應加減的數值越大

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

❍ 信賴水準(信賴係數)

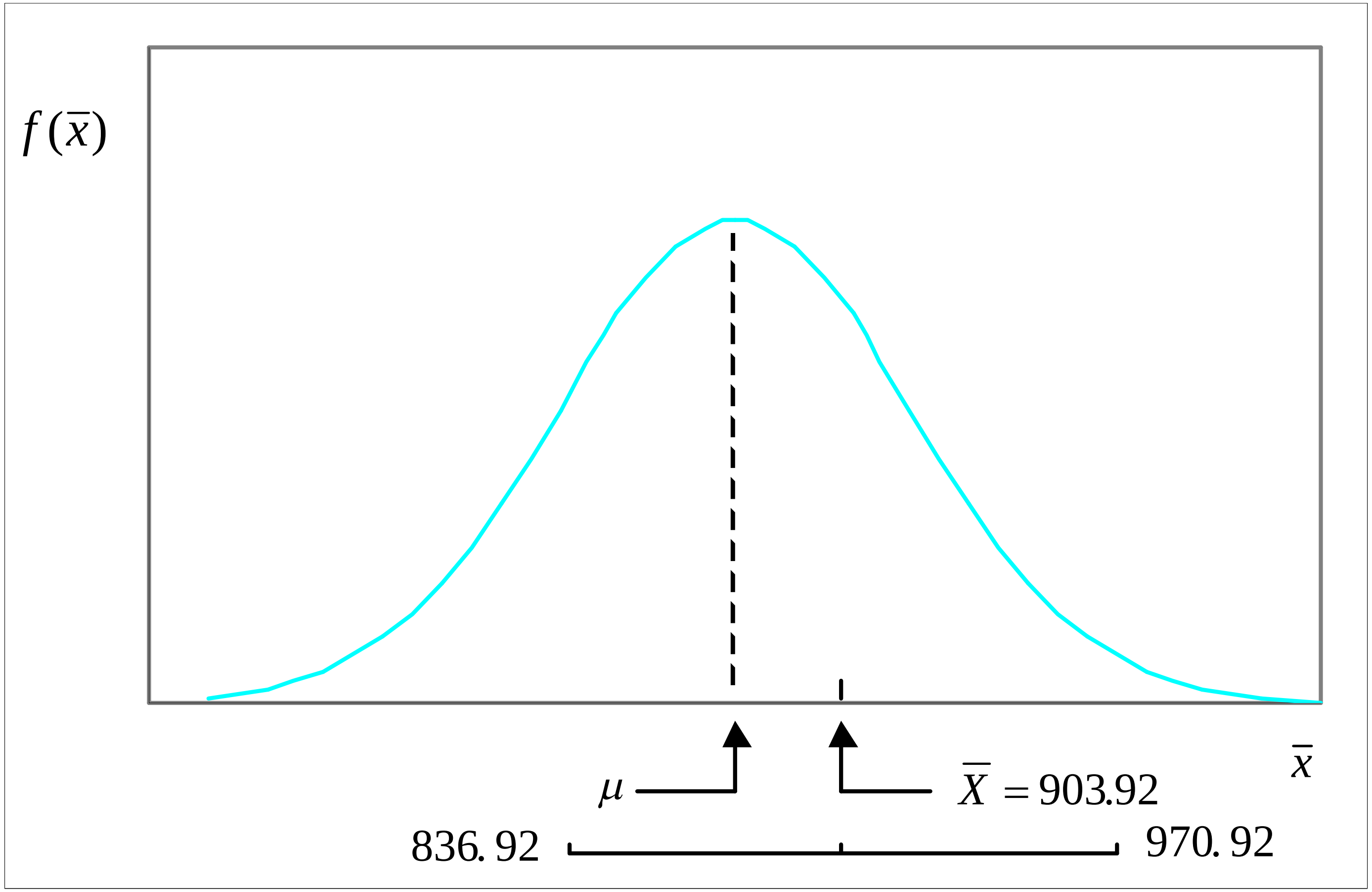
信賴水準是指信賴區間包含母體參數的信心(或稱可靠度，信賴度)。

Note:

信賴水準以1-α表示, α代表錯誤的機率. 例如95%信賴水準是指在此信賴水準下所建立的區間有95%的機會會包含母體參數的真值

統計學常用: 90%, 95%, 99%

圖11.1 母體平均數的信賴區間



11.2 母體平均數μ的區間估計 – 大樣本

母體平均數μ的區間估計通常區分為大樣本與小樣本. 在大樣本(n>=30)下,無論母體分配為何(常態或非常態),均可由中央極限定理得知樣本平均數 $\bar{X}$ 的抽樣分配為近似常態分配

→ 分成母體變異數已知與未知二種情況

11.2.1 母體變異數 σ^2 已知

EX: 楊立委已連任數屆,現在想轉換跑道競選下屆縣長
想了解平時服務的滿意程度
由選民中隨機抽取144人進行問卷調查
已知樣本數n=144以及母體變異數 σ^2 =576

Q: 如何估計縣內全體選民的滿意程度?

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

區間估計

區間估計的步驟

①**步驟1** 選擇較佳的點估計式並計算點估計值

②**步驟2** 取得樣本統計量的抽樣分配

③**步驟3** 導出母體參數的信賴區間

④**步驟4** 求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

※ 估計步驟的注意事項

1. 根據點估計的方法與估計式的判斷標準,選點估計式 $\overline{X}$,並求取點估計值

   EX: 144份問卷計算出滿意程度的平均分數爲80分, $\overline{X}=80$

2. 抽樣誤差 = $\left|\overline{X}-\mu\right|$

   由中央極限定理知, 在大樣本情況下,無論母體分配爲何, $\overline{X}$ 的抽樣分配會趨近於平均數 $\mu_{\overline{X}}=\mu$,變異數 $\sigma_{\overline{X}}^2=\sigma^2/n$, 標準差 $\sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}$ 的常態分配

   $\overline{X}=80$, 母體變異數爲 $\sigma^2=576$,因此樣本平均數的標準差爲

   $\sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}=24/\sqrt{144}=2$

抽樣分配圖下頁

樣本平均數與母體平均數的距離在1.96 $\sigma_{\overline{X}}$ 之內的機率爲0.95

此即表示 $\overline{X}$ 估計 μ 時抽樣誤差小於1.96 $\sigma_{\overline{X}}$ 的機率爲0.95

抽樣誤差爲1.96 $\sigma_{\overline{X}}$ =1.96*2=3.92 (見下下頁)

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖11.2 $\bar{x}$ 的抽樣分配

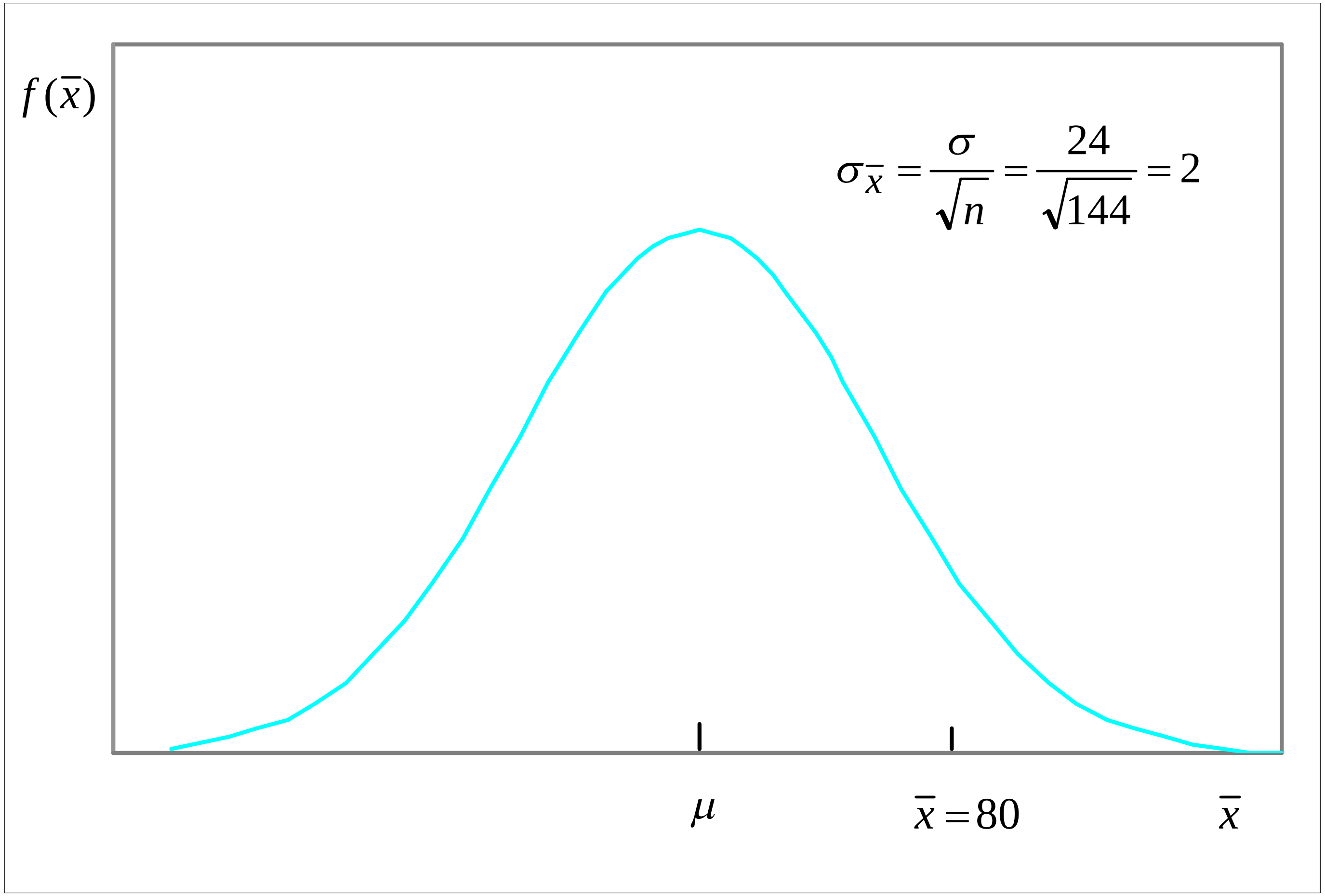
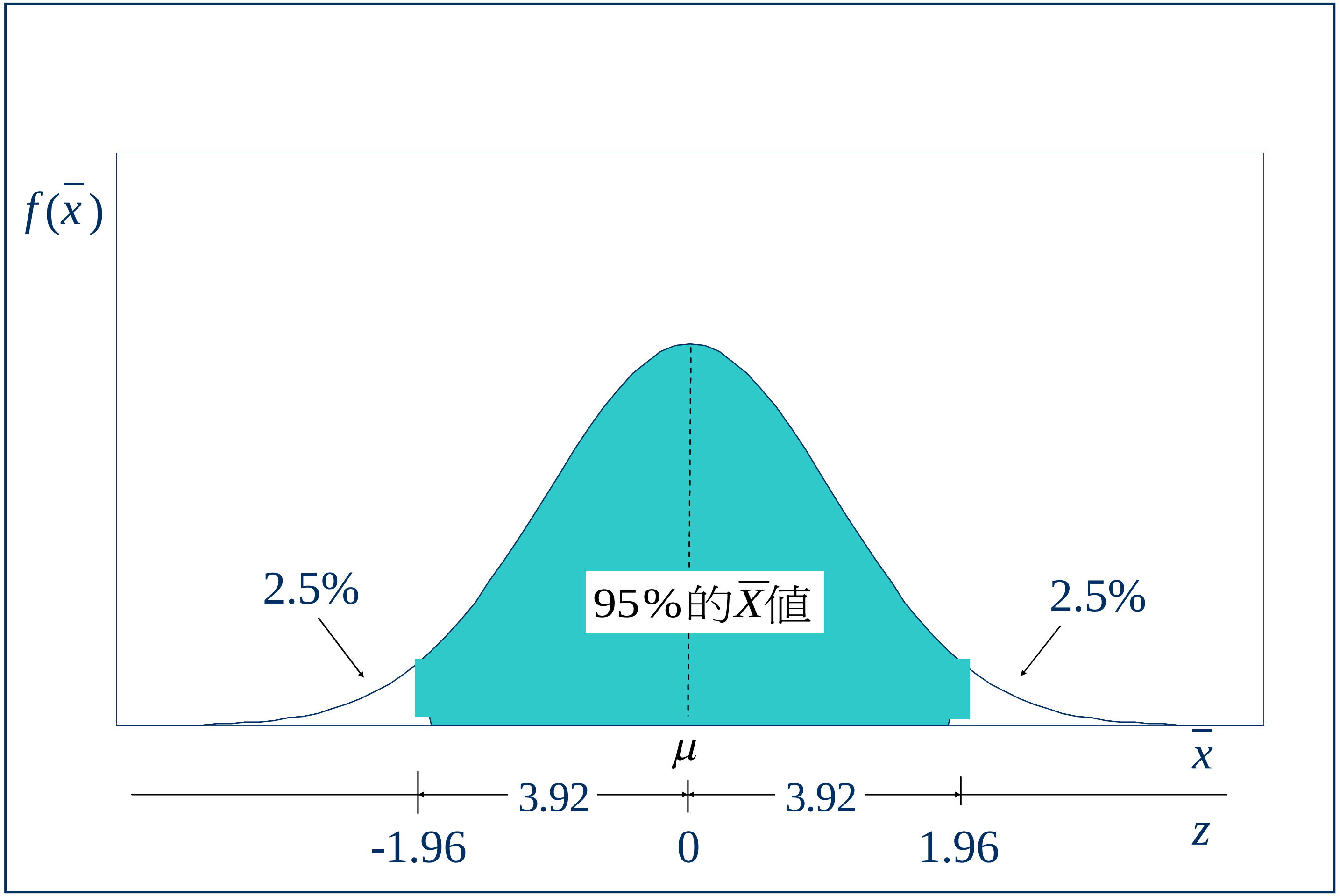


圖11.3 抽樣誤差小於等於1.96 $\sigma_{\overline{X}}$ 的區間



此一抽樣誤差可以機率區間表示如下 $P(|\bar{X}-\mu| \le 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$

或表示為 $P(\mu - 1.96\sigma_{\bar{X}} \le \bar{X} \le \mu + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$

3. 上述的區間稱為信賴區間,它包含母體平均數μ的機率為0.95,表為

$$P(\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$$

95%信賴水準的信賴區間通常表示為

$(\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}}) \sim (\bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}})$ 或 $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$

note:母體參數是一個固定的常數,而信賴區間則是由樣本統計量及抽樣誤差所構成的,是隨機的,亦即信賴區間的上下限值會隨樣本的不同而不同,因此信賴區間是一個隨機區間. 所以我們說信賴區間會 “包含” 母體參數, 而不是說母體參數會落在信賴區間內.

95%信賴水準的含意 (important !!)

信賴水準會隨樣本不同而不同, 若將全部可能的樣本依(11.6)式算出所有的區間, 則在所有的區間中有95%的區間會包含母體平均數μ,有5%的區間不包含母體平均數

見下圖

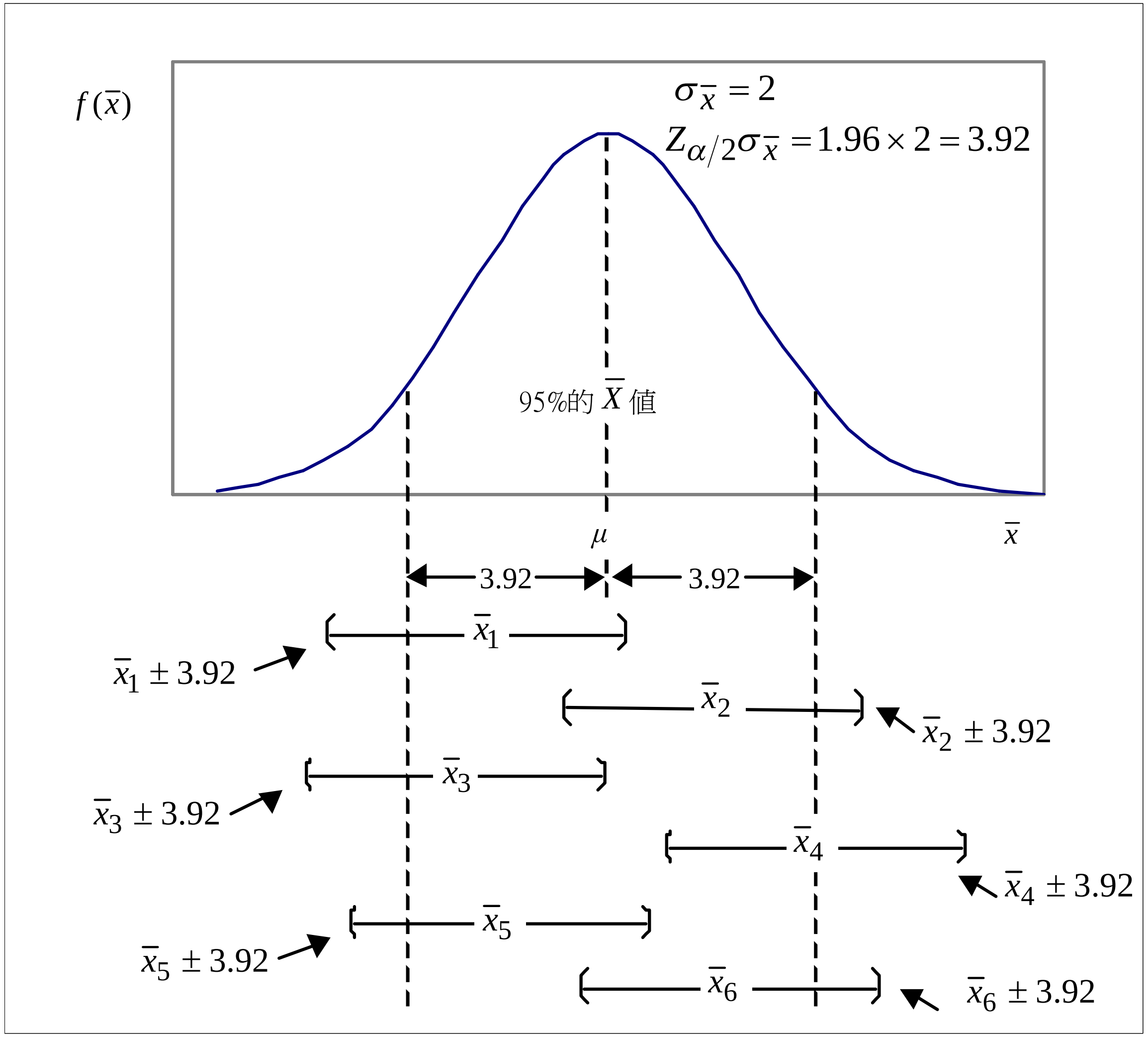
a. 樣本平均數 $\overline{X}$ 有95%會落在圖11.4中的顏色區域,如

$\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_5, \overline{X}_6$,

b. 樣本平均數有5%的機率會落在沒有顏色的區域,如 $\overline{X}_4$
依(11.6)式估計母體平均數所得的區域不包含母體平均數μ

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖11.4 母體平均數μ的信賴區間



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

95%信賴水準

95%信賴水準

95%信賴水準的含意是指隨機抽取一組樣本所得的區間包含母體平均數的機率（或稱可靠度、信賴度）爲 0.95。或區間不包含母體平均數的機率爲 0.05。

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

4. 最後將樣本平均數 $\overline{X}$ 的點代入(11.6)式,可得母體平均數的信賴區間值

故立委服務滿意程度的信賴區間為 $\overline{X} \pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$

現在將 $\overline{X} = 80$ 及 $\sigma_{\overline{X}} = 2$ 代入可得

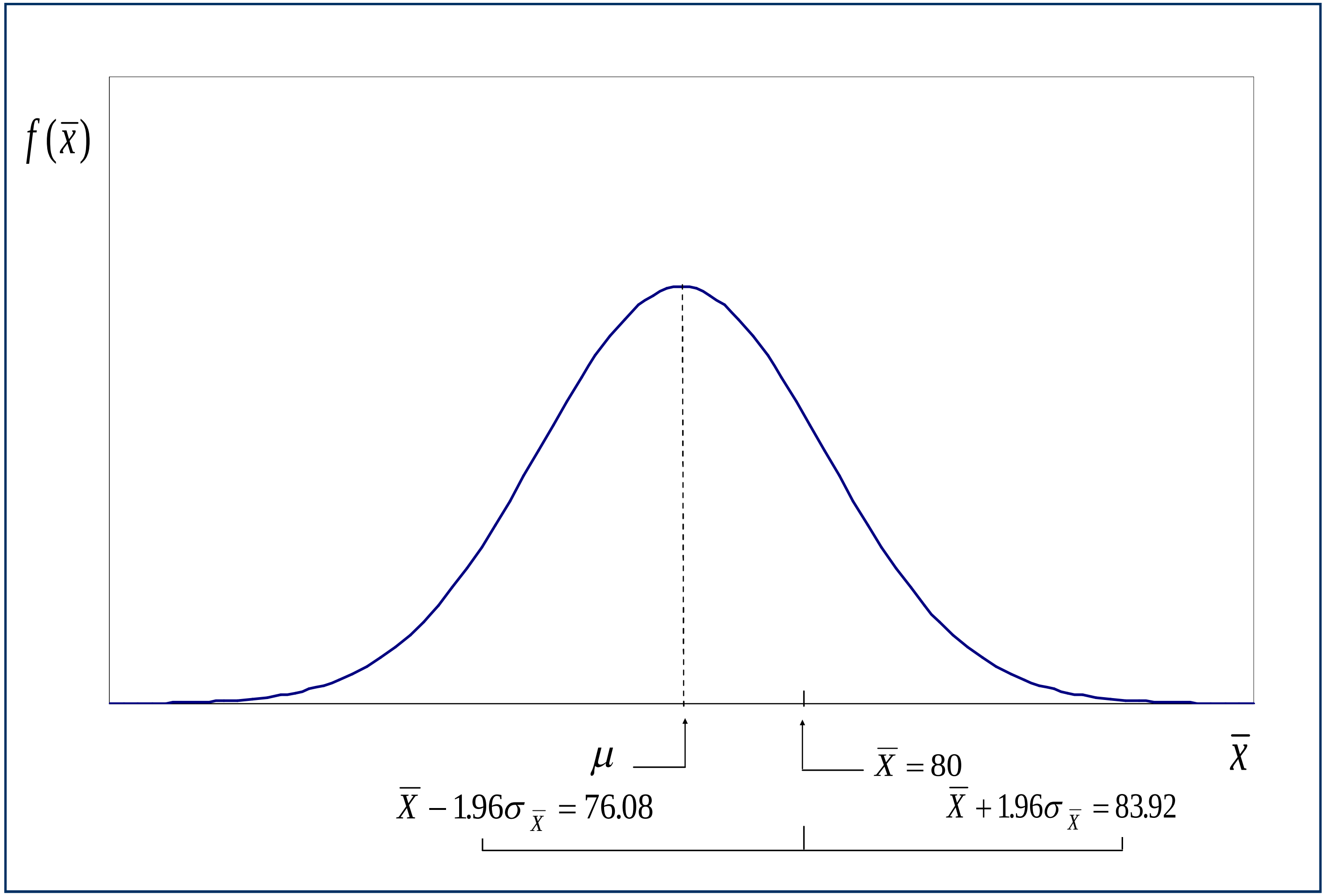
$$\overline{X} \pm 1.96 \times 2 = 80 \pm 3.92$$

即 $$76.08 \le \mu \le 83.92$$

此乃表示 76.08~83.92包含母體平均數μ的可靠度為95%, 如圖11.5

結論: 在95%信賴水準下,縣內全體選民對楊立委的服務滿意分數在 76.08分 ~ 83.92分之間

圖11.5 母體平均數 μ 的信賴區間



- 區間估計的一般化

抽樣誤差 $|\overline{X}-\mu|$ 在 $Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ 範圍內的機率為1-α,其機率區間表為

$$P(|\overline{X}-\mu| \le Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$$

亦可表示為 $P(\mu - Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}} \le \overline{X} \le \mu + Z_{\sigma/2}\sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$

由標準常態的機率值可知

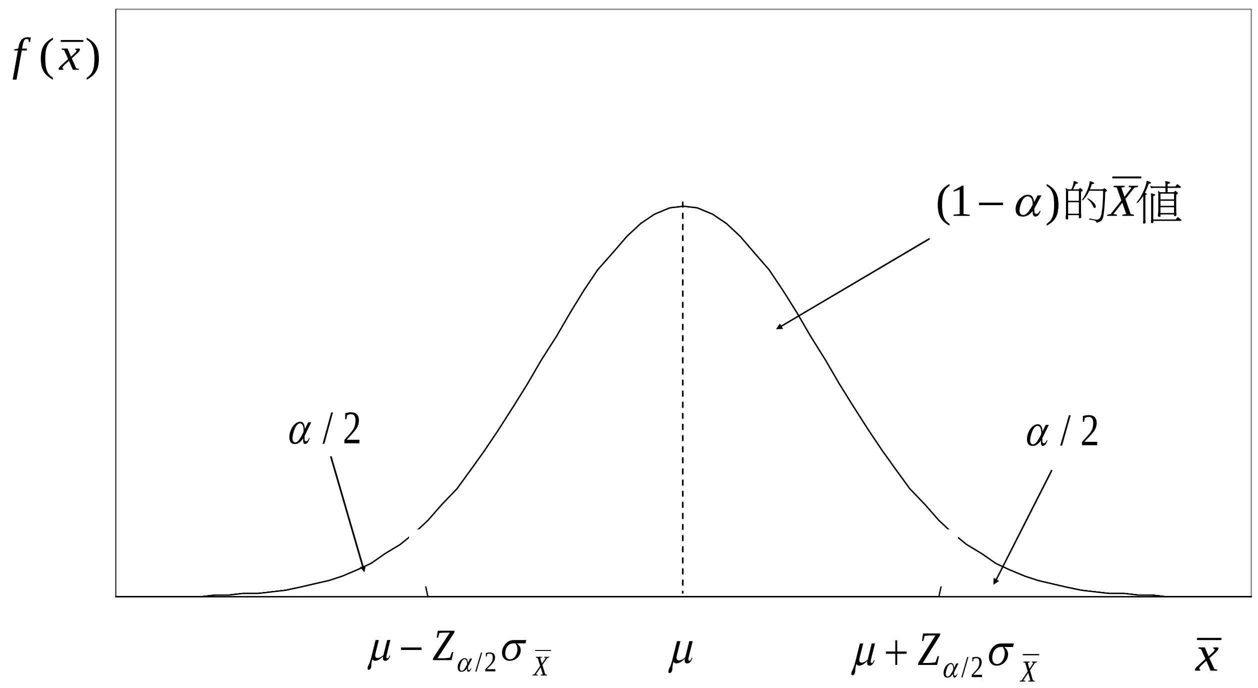
α=10%, $Z_{\alpha/2} = 1.645$ α=5% , $Z_{\alpha/2} = 1.96$ α=1%, $Z_{\alpha/2} = 2.575$

→ 信賴係數不同其所得的信賴區間即不同

→ 若信賴係數 1-α愈大, 則抽樣誤差越大

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖11.6 $(1-\alpha)\ \overline{X}$ 的機率區間



林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

母體平均數的區間估計—大樣本

大樣本變異數已知，母體平均數的信賴區間

信賴水準$1-\alpha$下，以$\overline{X}$估計μ所得的信賴區間為：

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$$

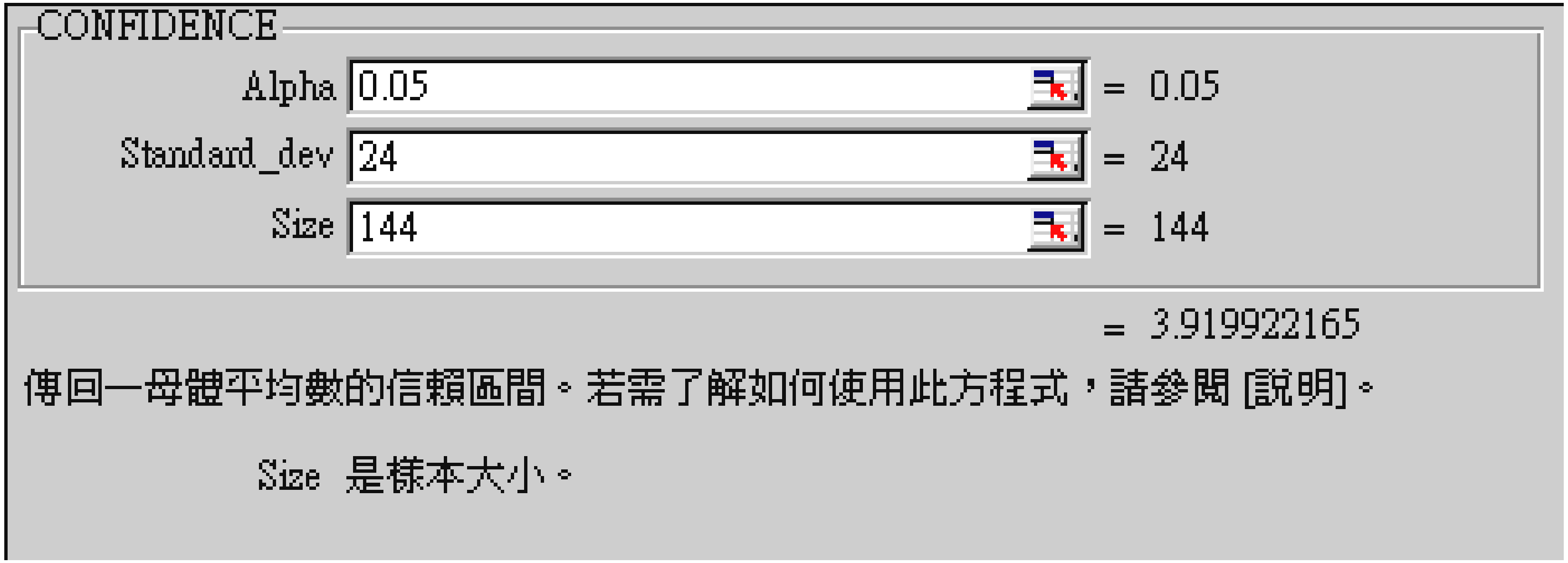
$\overline{X}-Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$稱為信賴區間下限，$\overline{X}+Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$稱為信賴區間上限。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表11.1 不同信賴水準下母體平均數μ的信賴區間

信賴水準$1-\alpha$	α	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$	信賴區間 $\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$
0.90	0.10	0.05	1.645	$\overline{X} \pm 1.645\sigma_{\overline{X}}$
0.95	0.05	0.025	1.96	$\overline{X} \pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$
0.99	0.01	0.005	2.575	$\overline{X} \pm 2.575\sigma_{\overline{X}}$

圖11.7 信賴區間對話方塊



EX11.1 新立傳播公司計劃推出老年人的電視節目. 現新立公司隨機抽取台北市100位老人調查看電視的時數, 結果得知, 每星期看電視的平均時間爲 $\overline{X} = 21.2$ 小時. 假設根據過去數次調查資料, 已知每星期看電視時間的標準差爲8小時, 問:

1. 老年人每星期看電視的平均時間的點估計值爲何?
2. 在95%信賴水準下, 最大估計誤差爲何?
3. 在95%信賴水準下, 每星期看電視平均時間的信賴區間爲何?

Solution:

依題意,信賴水準爲95%, $\overline{X} = 21.2$ 小時, σ=8小時, n=100,估計步驟如下:

1. 選擇 $\overline{X}$ 做爲μ的估計式
2. 在大樣本的情況下, $\overline{X}$ 的抽樣分配爲常態分配 $N \sim (\mu, \sigma_{\overline{X}}^2)$

由常態分配可知 $P(|\overline{X} - \mu| \le 1.96\sigma_{\overline{X}}) = 0.95$. 意即在95%信賴水準下, 樣本平均數與母體平均數的估計誤差不會超過1.96 $\sigma_{\overline{X}}$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0.8$$

因此可知 $|\bar{X} - \mu| \le 1.96 \times 0.8 = 1.568$ 意即在95%信賴水準下,最大估計誤差為1.568小時.

3. 在1-α信賴水準下,母體平均數的信賴區間依(11.8)式為

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}$$

代入

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} = 21.2 \pm 1.96 \times 0.8 = (21.2 - 1.568) \sim (21.2 + 1.568) = 19.632 \sim 22.768$$

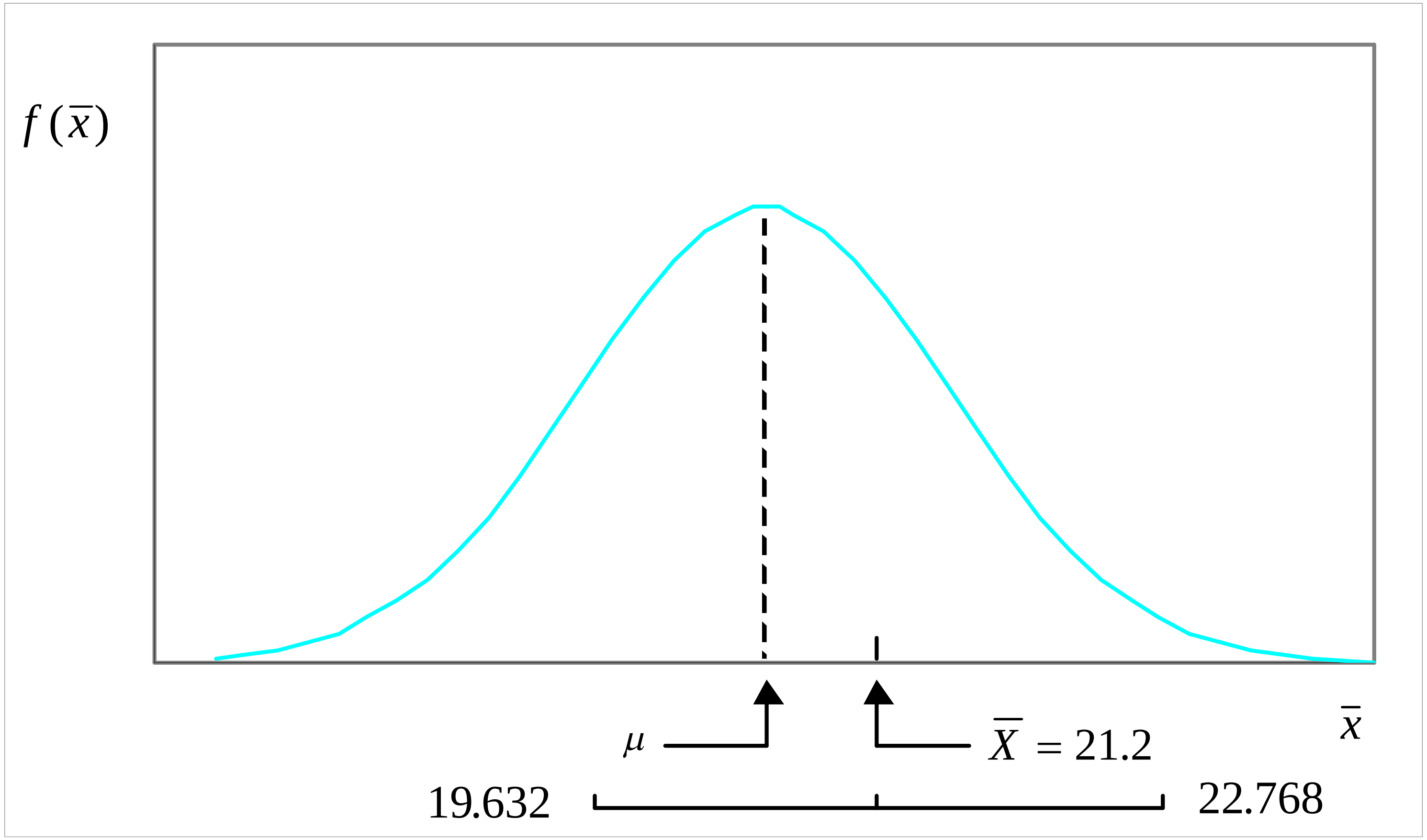
即 $19.632 \le \mu \le 22.768$

此即表示在19.632 ~ 22.768 小時的區間包含母體平均數μ的信賴水準為95%

推論; 老年人每星期平均看電視的時間在19.632 ~ 22.768小時之間,仳依區間的可信度(信賴水準)為95%.

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖11.8 老年人看電視的時間



信賴區間長度的決定因素

①所選擇的點估計式的抽樣分配

若抽樣分配的標準差越大，則信賴區間長度越長，越不精確。

②樣本數

$\bar{X}$ 的標準差為 $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$ ，當 n 愈大時，標準差 $\sigma_{\bar{X}}$ 愈小，區間長度也就愈小。

③機率區間上下限的取法

若上下限的取法不同，則會影響區間長度。

④信賴係數

信賴係數越大其區間長度將越大。

EX11.2 老年人看電視的時間的估計中,現問

1. 若將信賴水準降爲90%,信賴區間將爲何?較95%信賴水準時寬?還是窄?
2. 信賴水準爲95%時,若樣本數增加爲400人,信賴區間將爲何?較100人時爲寬?還是窄?

Solution:

1. $Z_{\alpha/2} = Z_{0.05} = 1.645$

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} = 21.2 \pm 1.645 \times 0.8$$

依(11.8)式信賴區間爲

$$21.2 - 1.645 \times 0.8 \le \mu \le 21.2 + 1.645 \times 0.8$$

較95%信賴區間時爲窄

$$19.884 \le \mu \le 22.516$$

2. n=400, 樣本標準差 $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{8}{\sqrt{400}} = 0.4$

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} = 21.2 \pm 1.645 \times 0.4$$

信賴區間較100人時爲窄

$$21.2 - 1.645 \times 0.4 \le \mu \le 21.2 + 1.645 \times 0.4$$

$$20.416 \le \mu \le 21.984$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

11.2.2 母體變異數未知

- **大樣本變異數未知，母體平均數的信賴區間**

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\bar{X} - Z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$ 稱爲信賴區間下限，$\bar{X} + Z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$ 稱爲信賴區間上限。

EX11.3 房價估計的平均價格區間,而此區間包含母體平均數的機率為95%

Solution:

樣本為大樣本 n=36, 母體標準差未知, 樣本平均數為 $\overline{X} = 903.92$

樣本標準差為s=205, 根據(11.9)式可得μ的信賴區間為

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} = 903.92 \pm 1.96 \times \frac{205}{\sqrt{36}}$$

$$= 903.92 \pm 66.97$$

即 $836.95 \le \mu \le 970.89$

因此可得,在大樣本母體變異數(標準差)未知下,95%信賴水準下,台北市區房屋的平均價格的信賴區間為

$$836.95 \le \mu \le 970.89$$ 萬元

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表11.2 台北縣中永和地區房屋價格的估計

	A	B
1	台北市區房屋的售價	
2		
3	平均數	903.92
4	標準誤	34.17
5	標準差	205.01
6	變異數	42030.31
7	個數	36.00
8	信賴度(95.0%)	69.37

11.3 母體平均數的區間估計 – 小樣本

抽樣成本高,只能小樣本(n<30), 或母體本來就很小. 狀況可分為

1. 常態母體變異數已知
2. 常態母體變異數未知
3. 母體分配未知但變異數已知
4. 母體分配未知且變異數亦未知

11.3.1 母體為常態分配且變異數 σ^2 已知

小樣本常態母體變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX11.4 根據市場調查得知25雙流行女鞋的平均價格 $\bar{X} = 2{,}810$,標準差S=696元. 問今年冬天添購一雙流行女鞋平均價格的95%信賴區間爲何? (設母體爲常態分配且σ=720元)

Solution:

已知流行女鞋價格的分配爲常態分配,且已知σ=720. 小樣本n=25,樣本平均數 $\bar{X} = 2{,}810$,根據(11.10)式可得μ的信賴區間爲

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2810 \pm 1.96\frac{720}{\sqrt{25}} = 2810 \pm 282$$

$$2{,}528 \le \mu \le 3{,}092$$

在95%信賴水準下,估計得到一雙流行女鞋的平均價格介於2,538元至3,092元之間

11.3.2 母體爲常態分配但變異數 σ^2 未知

此時樣本標準差 $S=\sqrt{\dfrac{\sum(X-\overline{X})^2}{n-1}}$ 做爲σ的估計式. 在小樣本時,

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 是一個自由度爲n-1的t分配

→當母體爲常態分配,標準差σ未知,小樣本的情況下,應利用t分配導出μ的信賴區間

※ t分配的意義

母體爲常態分配時, $\overline{X}$ 爲常態分配, 表爲 $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

→ 標準化 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

但當母體標準差 σ 未知, 以樣本標準差S代替上式

→ 新的統計量t分配 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

母體平均數的區間估計—小樣本

- 小樣本常態母體變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

爲自由度$n-1$的t分配。

- t 分配的定理

設 $\overline{X} \sim N(\mu,\sigma^2)$, $U \sim \chi_v^2$,U是自由度爲v的卡方隨機變數,且 X 與 U 獨立, 則隨機變數

$$\frac{(X-\mu)/\sigma}{\sqrt{U/v}} = \frac{(X-\mu)/\sigma}{\sqrt{\chi_v^2/v}} = \frac{Z}{\sqrt{\chi_v^2/v}}$$

爲自由度爲v的t分配

意即標準常態隨機變數 $(X-\mu)/\sigma$ 除以被自由度除後再開根號的卡方隨機變數 $\sqrt{\chi_v^2/v}$ 即可得自由度爲v的t隨機變數

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

t分配的性質

t分配的性質

①t分配為一個以平均數0為中心的對稱分配，不同的自由度v有不同的t 分配。

② t分配不與橫軸相交。t分配曲線下的總面積等於1。

③ t分配決定於自由度v，它是t分配唯一的參數。

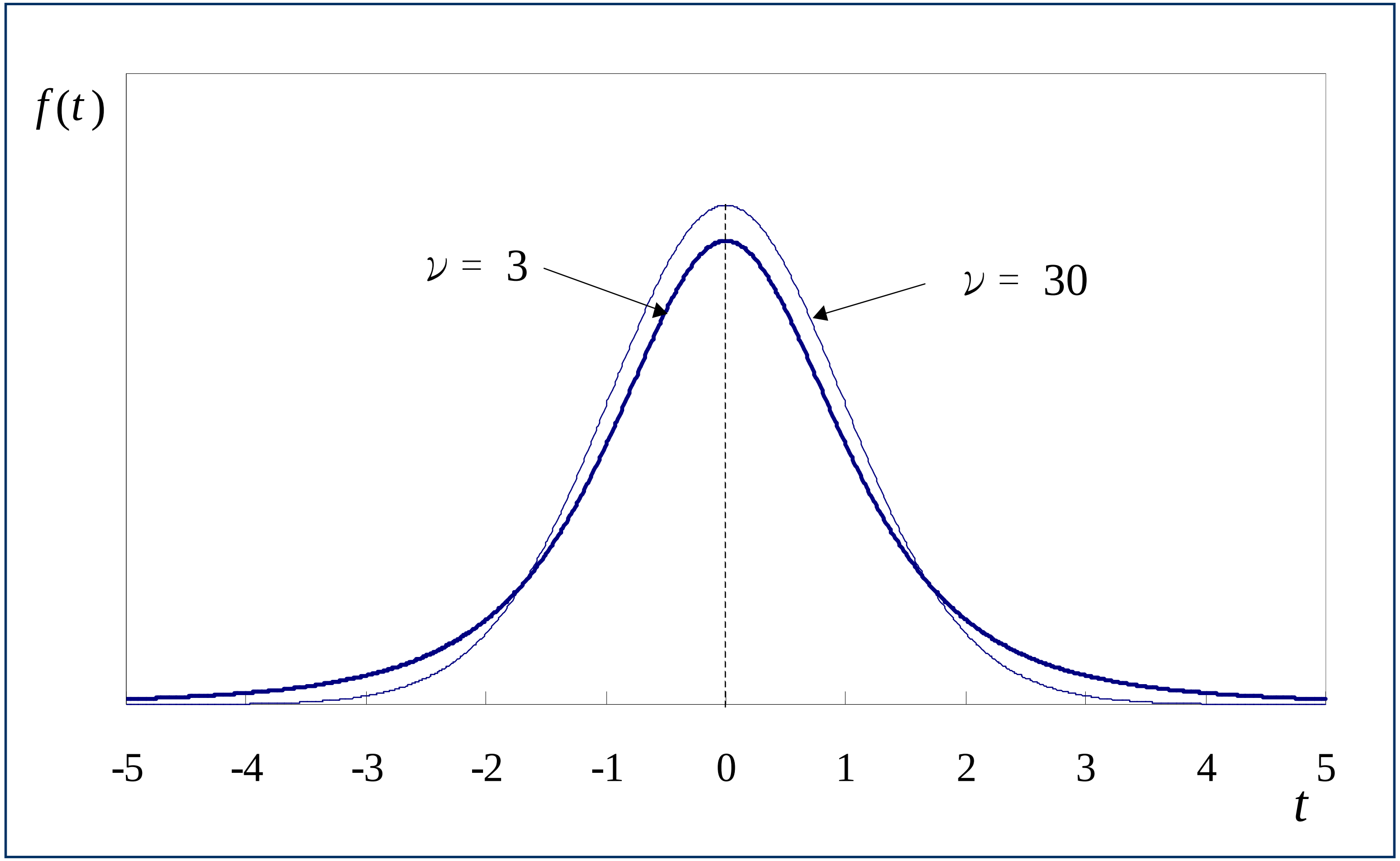
④自由度趨近於無窮大時$(v\to\infty)$，t分配趨近於標準常態分配，即$t_v \sim N(0,1)$。一般若$v\geq 30$，則以標準常態分配代替t分配。

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

說明:

1.

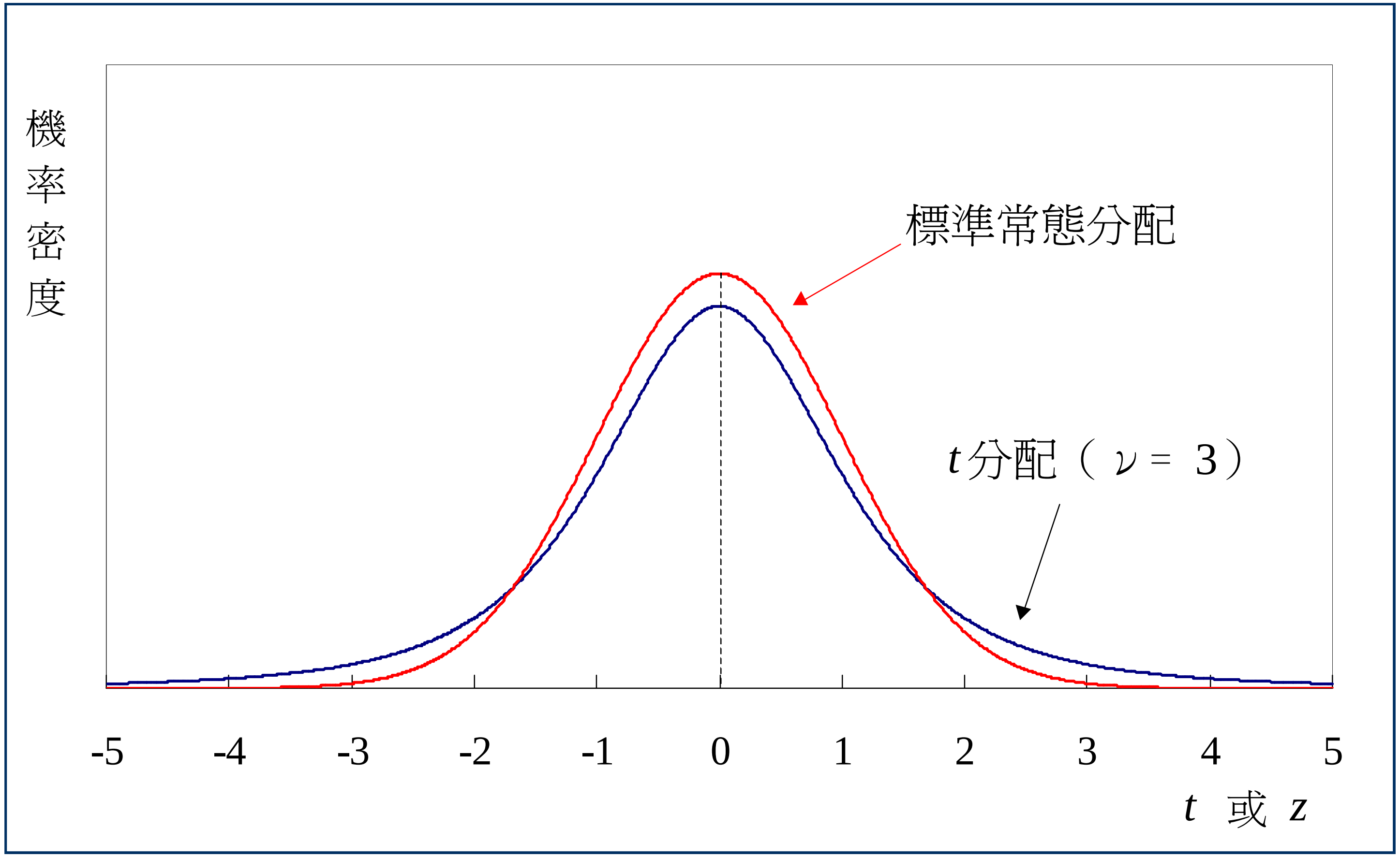
圖11.9　t分配為以0為中心的對稱分配



說明

2. t分配曲線比標準常態為平坦,亦即t分配曲線的高度較低,分散程度較大

圖11.10 標準常態分配與 t 分配



說明

3. t分配的平均數與變異數為

$E(t)=0$, $V(t)= v / v-2$

$V(t)= v / v-2 > 1$. 但當v→∞ (v >30)時, t分配的變異數趨近於1

當v<2時, 變異數不存在

4. 自由度趨近於無窮大時(v→∞), t分配趨近於標準常態分配, 即 $t_v \sim N(0,1)$，一般若 $v \geq 30$ ，則以標準常態分配代替t分配

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

自由度

所謂自由度(degree of freedom)是指統計量中隨機便量可以自由變動的數目(個數). 例如統計量 $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ 可以自由變動的隨機變量有n-1個

WHY？

因爲在S^2中有$\overline{X}$，$\overline{X}$ 必須滿足限制式 $\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$,而$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的n個變量未了滿足 $\overline{X}$ 的限制式，只有n-1個變量$(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})$可以自由變動,最後一個變量X_n 無法自由變動,因此S^2的自由度爲n-1

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

※ T分配的臨界值

表11.3 t 值表（部份）

$d.f.$	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	$d.f.$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	10.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.575	∞

圖11.11 t 分配的機率值

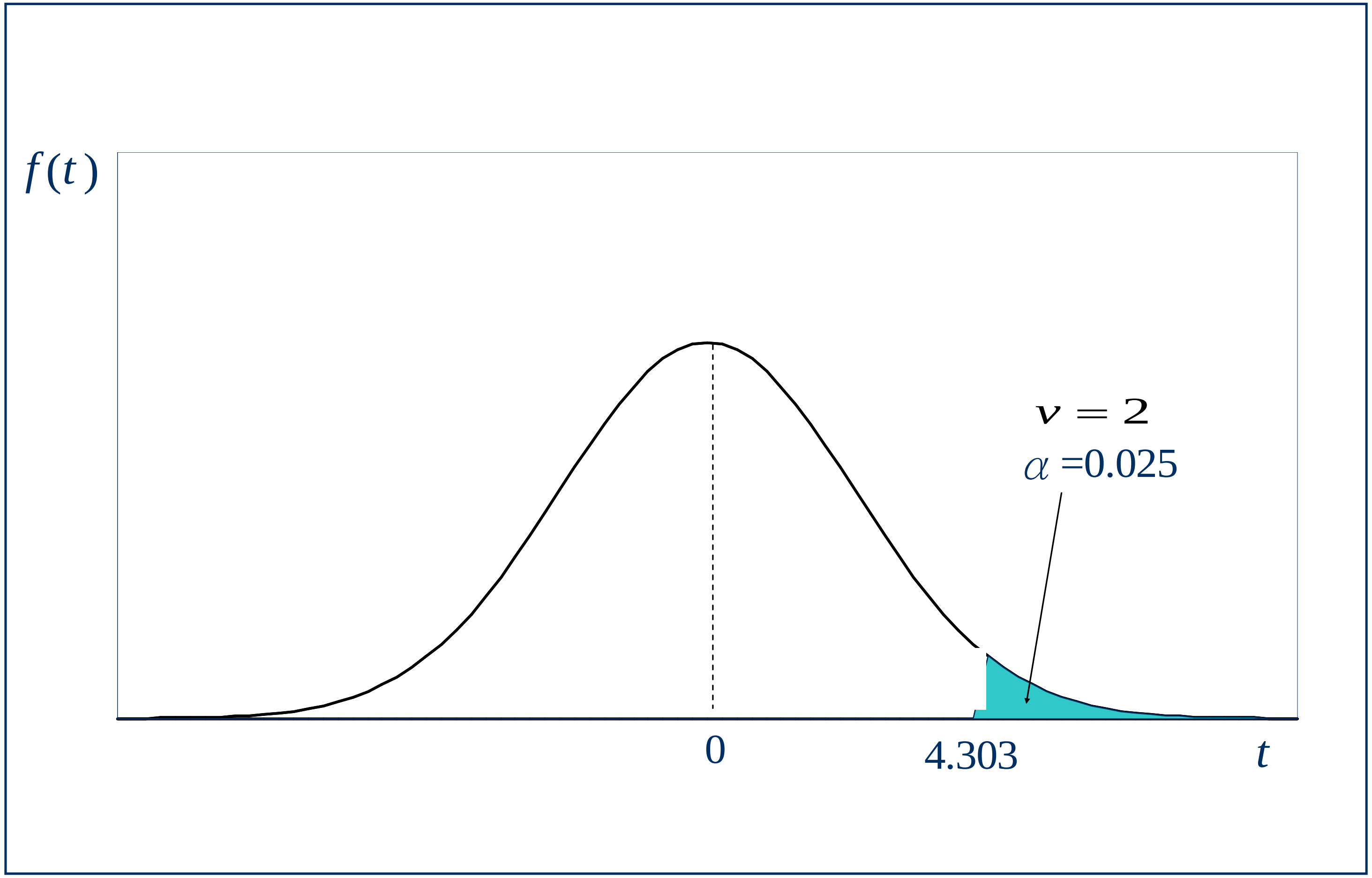
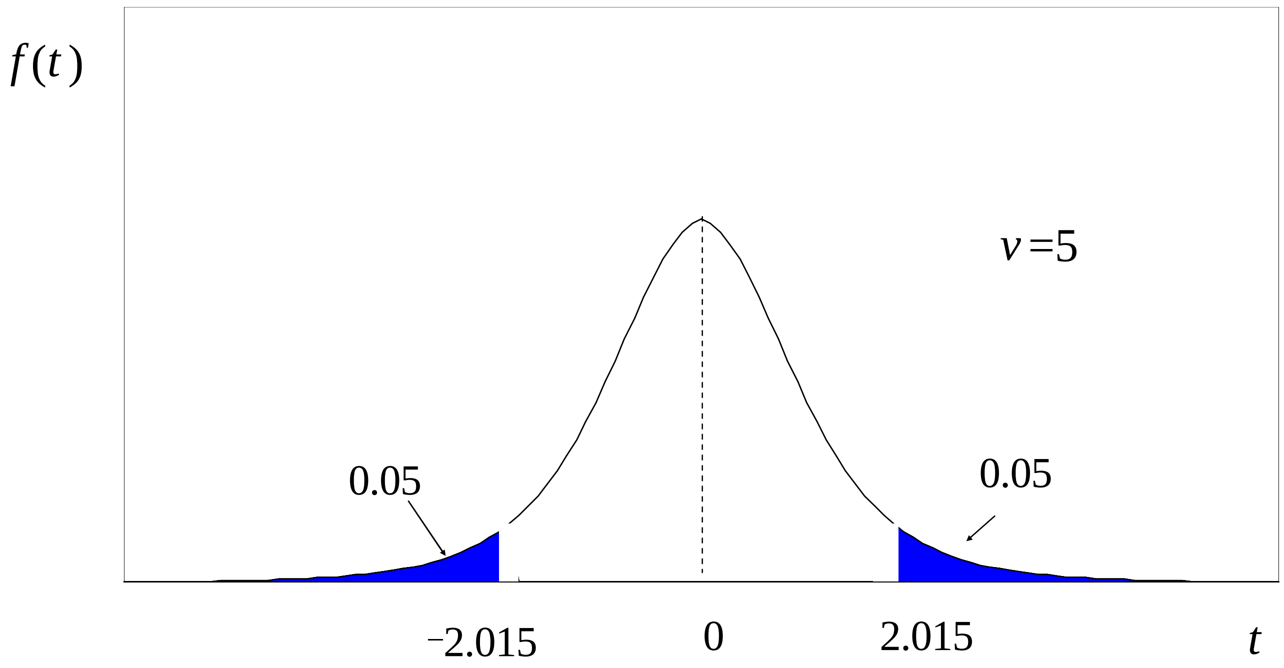
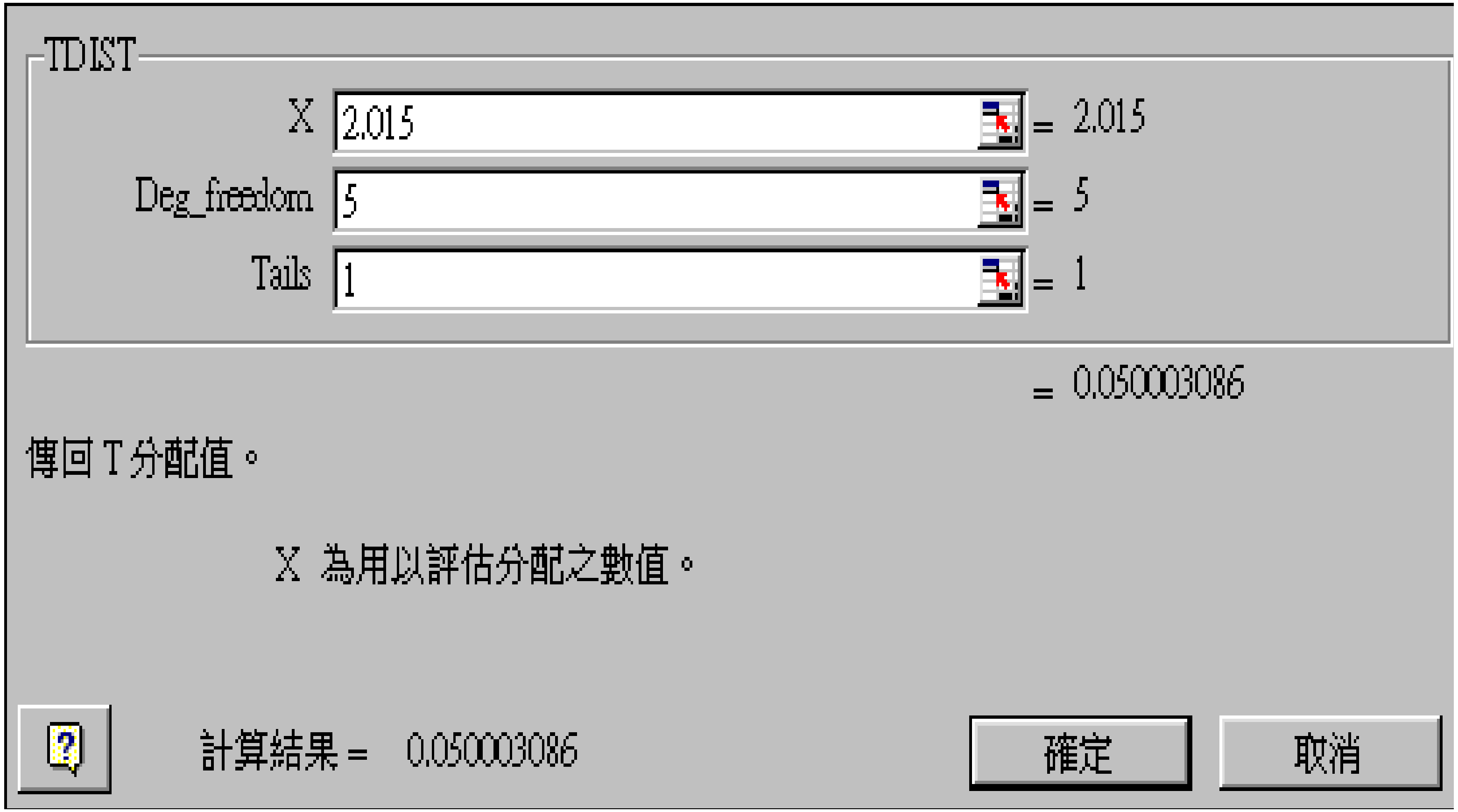


圖11.12　t 值



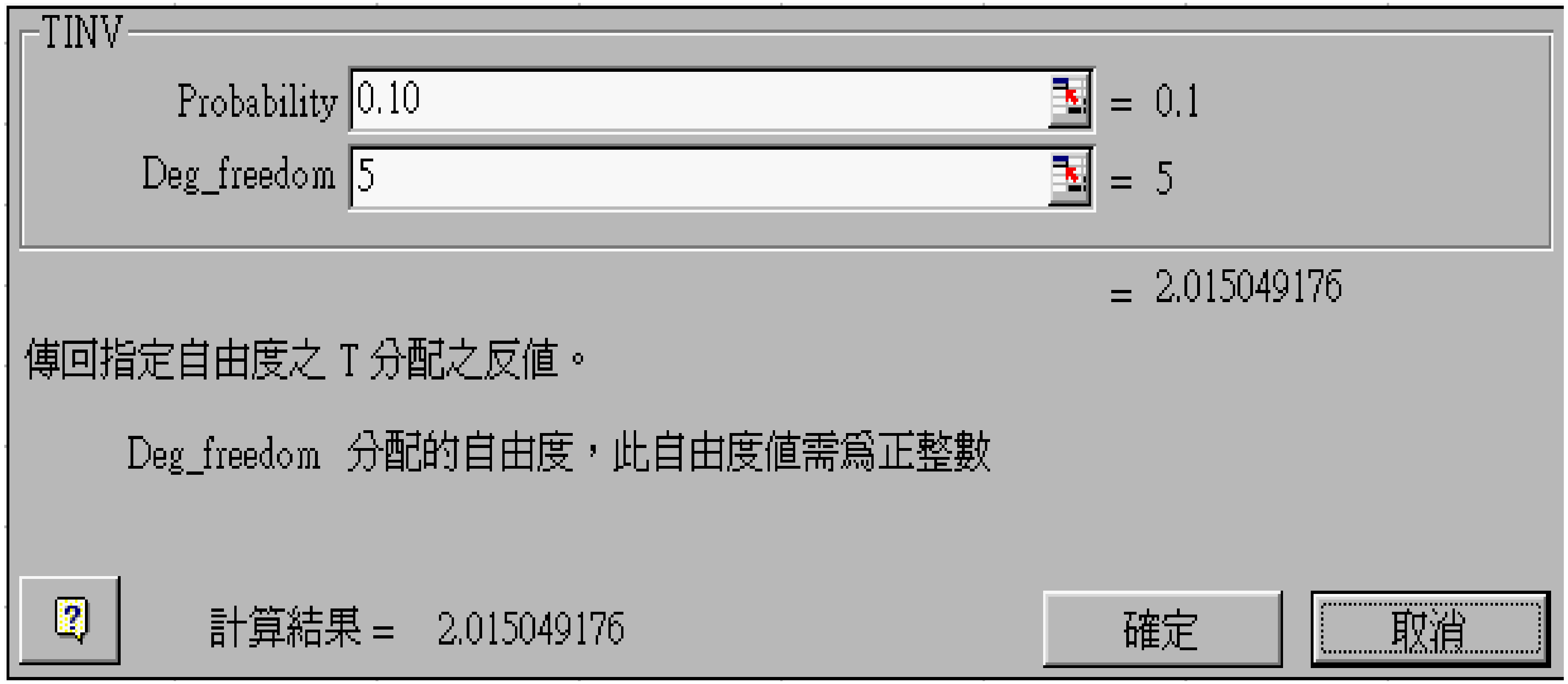
林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖11.13 t 分配的對話方塊



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖11.14 t 值的對話方塊



- 利用t分配球母體平均數的信賴區間

根據t分配 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 在（$-t_{n-1,\alpha/2}, t_{n-1,\alpha/2}$）內的機率為1-α,亦即

$\left|\overline{X}-\mu\right|$ 在 $t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ 距離內的機率為1-α,表為

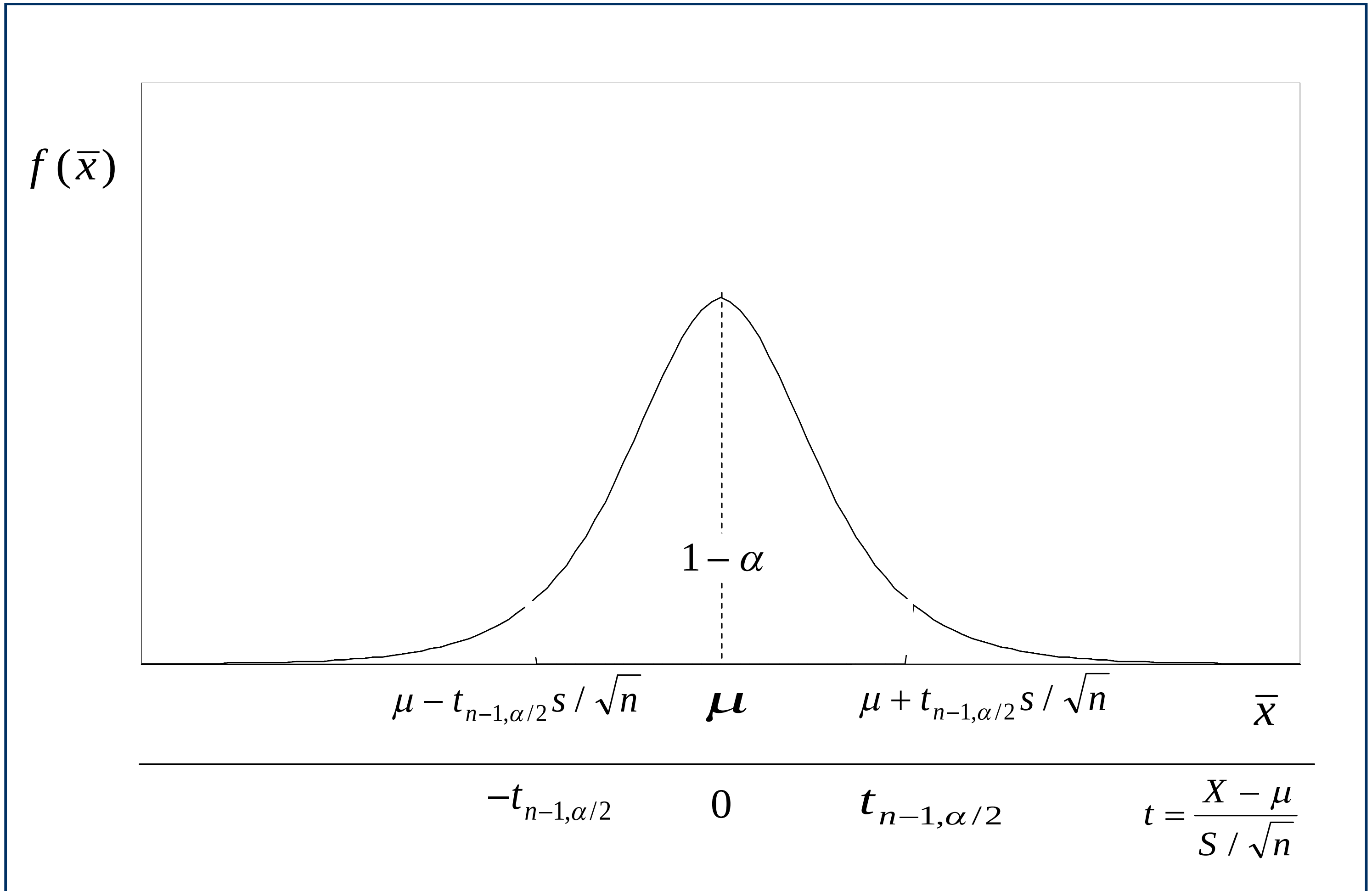
$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \le t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

以圖11.15表示

由上式可得信賴係數(1-α) 下μ的信賴區間為

$$P(\overline{X}-t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}+t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

圖11.15 $(1-\alpha)\,\overline{X}$ 的機率區間



母體平均數的區間估計—小樣本

- **小樣本常態母體變異數未知，母體平均數的信賴區間**

$$\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

為自由度 $n-1$ 的 t 分配。

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

ＥＸ11.15 經略公司請人設計了一套利用電腦模擬的維修訓練計劃, 並預期該計劃將縮短訓練時間並提升維修能力. 設公司隨機由維修人員中抽取16人來受此一訓練, 其平均訓練天數爲46天,標準差爲5.7天. 問利用電腦模擬的維修机器課程訓練計劃平均所需天數爲何? (設信賴水準爲95%)?

Solution:

n=16爲小樣本,體爲常態分配但母體平均數與標準差未知. 根據(11.13)式可求得母體平均數的信賴區間爲

$$\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} = 46 \pm t_{16-1,0.025}\frac{5.7}{\sqrt{16}} = 46 \pm 2.131 \times 1.425 = 46 \pm 3.037$$

其中 $t_{15,0.025}$=2.131, 即 $42.963 \le \mu \le 49.037$

故利用電腦模擬的維修机器課程訓練在95%信賴水準下,平均所需天數的信賴區間爲42.96天到49.04天

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX11.6 當母體爲常態,σ未知,小樣本時,若以標準常態分配來估計μ,則區間估計的結果將爲何?

Solution:

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} = 46 \pm Z_{0..025} \frac{5.7}{\sqrt{16}} = 46 \pm 2.79$$

$$43.21 \leq \mu \leq 48.79$$

此信賴區間小於Ex11.15以t分配所得的信賴區間(42.96~49.07). 換言之, 該信賴區間(43.21 ~48.79)的信賴係數未達95%.

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

11.3.3 母體分配未知,但變異數 σ^2 已知

當樣本爲小樣本且母體分配未知時,其點估計式 $\bar{X}$ 的抽樣分配未知,表爲 $\bar{X} \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. 若母體變異數 σ^2 已知, 則可利用柴比式定理來做區間估計

EX:想求算信賴係數90%時μ地信賴區間, 由柴比式定理知 $(\bar{X} - \mu)$ 的誤差在 $K\sigma_{\bar{X}}$ 之內的機率大於等於 1-(1/K^2), 可表爲

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq K\sigma_{\bar{X}}) \geq 1 - \frac{1}{K^2}$$

EX11.7 喜糖公司的徐老闆想自我檢查一下公司生產的花生糖每包的平均重量.包裝袋標示重量爲200公克,標準差爲10公克. 現隨機抽取10包後稱重, 得平均重量爲每包195公克. 問花生糖平均重量95%的信賴區間爲何?

Solution:

小樣本且母體變異未知,以柴比式定理估計

$$P(|\bar{X}-\mu| \le K\sigma_{\bar{X}}) \ge 1-\frac{1}{K^2}$$

將樣本標準差代入得

$$P(|\bar{X}-\mu| \le K\frac{10}{\sqrt{10}}) \ge 1-\frac{1}{K^2}=0.95$$

而 $1/K^2=0.05$ K= $\sqrt{20}=4.47$, $10/\sqrt{10}=3.16$

故

$$P(|\bar{X}-\mu| \le 4.47(3.16)) \ge 0.95$$

$$P(|\bar{X}-\mu| \le 14.13) \ge 0.95$$

因此μ的信賴區間爲 $X \pm 14.13$

即 $189.87 \le \mu \le 209.13$

11.3.4 母體分配未知且變異數 σ^2 未知

無母數統計,見Ch19

表11.4　米酒容量的區間估計

	A	B
1	紅標米酒容量	
2		
3	平均數	600.1667
4	標準誤	3.2085
5	標準差	7.8592
6	變異數	61.7667
7	個數	6
8	信賴度(95.0%)	8.2477

11.4 母體比例的區間估計

11.4.1 大樣本

在大樣本的情況下,由中央極限定理得知 $\hat{p}$ 的抽樣分配爲一常態分配

that is,

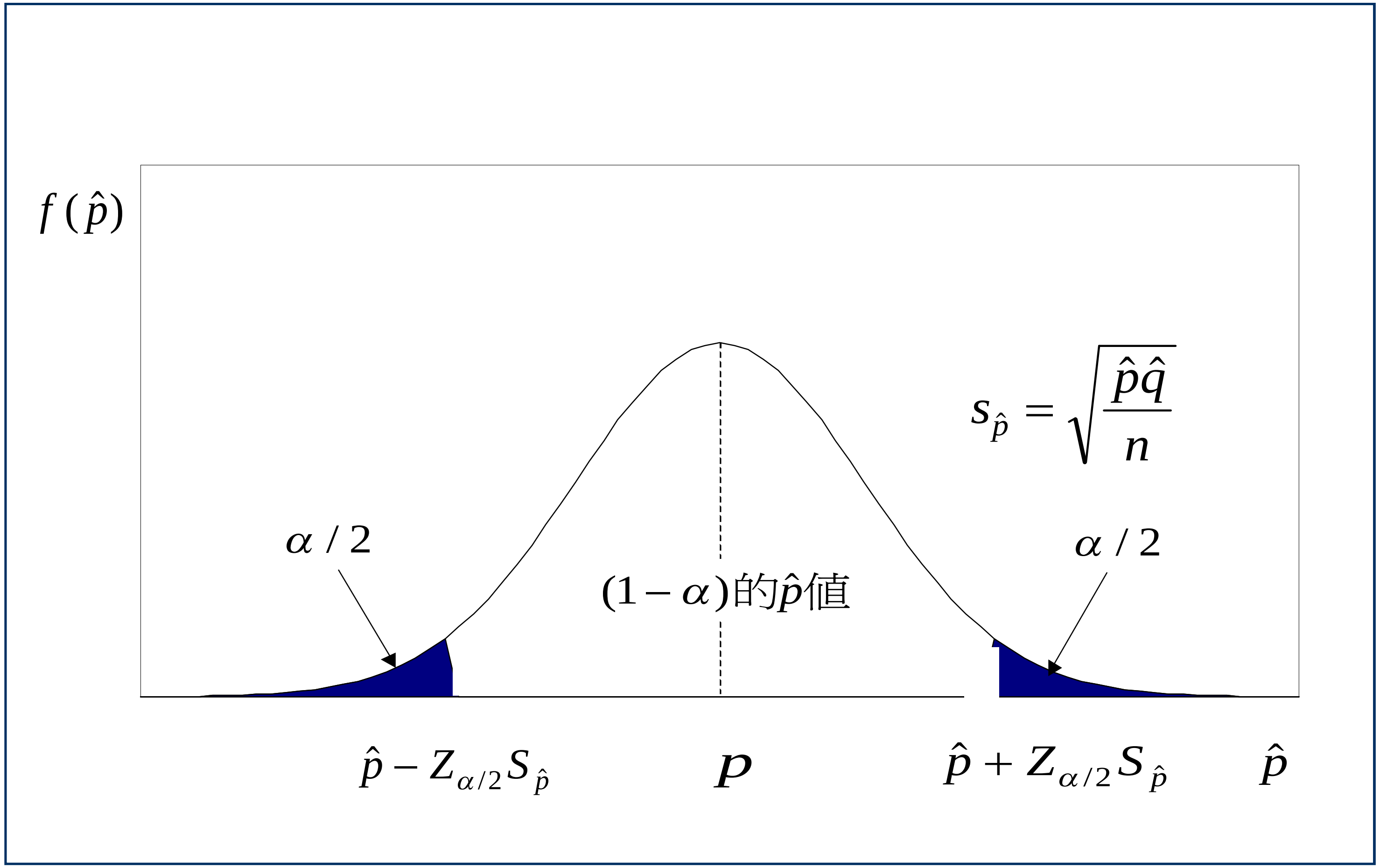
$$\hat{p} \sim N(p, \frac{pq}{n})$$

於是可利用Z分配求得 $\hat{p}$ 與p 的抽樣誤差在 $Z_{\alpha/2}\sqrt{pq/n}$ 的範圍內的機率爲1-α,表爲

$$P(|\hat{p}-p| \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}) = 1-\alpha$$

如下圖所示

圖11.16 $(1-\alpha)\hat{p}$ 的機率區間



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

母體比例的區間估計

- 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- 大樣本母體比例的信賴區間(常用公式)

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{(1/2)*(1/2)}{n}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX11.8 2007年12月的總統民意調查結果: 馬英九的支持率40%, 謝長廷36%. 以電話後四碼隨機抽樣進行電話訪問,共訪問1443位台灣地區20歲以上公民. 在95%的信心水準下,抽樣誤差約爲正負2.5個百分點. 問該民意調查中謝長廷支持率的信賴區間及抽樣誤差是如何計算的?

Solution:

n=1443爲大樣本, 樣本比例 $\hat{p} = 0.36$ 以(11.16)式來估計其信賴區間,可得95%的信賴區間爲

$$\hat{p} \pm Z_{0.025}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}} = 0.36 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{1443}} = 0.36 \pm 0.0258$$

式中的0.0258即爲抽樣誤差. 因此可得謝長廷支持率的信賴區間爲

$$0.3442 \le p \le 0.3558$$

推論: 在95%信賴水準下,謝長廷所獲支持率爲33.42%~38.58%

或: 支持謝長廷的比例爲36%,在95%信賴水準下的誤差爲2.58%

EX11.9 一項青少年調查指出,少年最信任的對象爲父母者全國比例爲 45.24%, 台灣地區的比例爲44.90%, 而台北市的比例只有40.78%(台北市抽選359位少年). 此一結果顯示: 都市化程度較高地區的少年信任父母的比例低於都市化程度較低的地區. 問台北市的少年中,以父母爲最信任對象者所佔比例的95%信賴區間爲何?

Solution:

樣本數n=359爲大樣本, 樣本比例 $\hat{p}=0.4078$,故 $\hat{q}=0.5922$

95%信賴區間爲

$$\hat{p}\pm Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}\times\hat{q}}{n}}=0.4078\pm(1.96)\sqrt{\frac{(0.4078)(0.5922)}{359}}=0.4078\pm0.0508$$

亦即台北市的少年對父母信任比例的區間估計在95%信賴水準下爲

$$0.3570\leq\hat{p}\leq0.4586$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

11.4.2 小樣本

當小樣本(N<30)時, $\hat{p}$ 的抽樣分配分為兩種情況

1. 無限母體

$\hat{p}$ ~ 二項分配 (p, pq/n)

2. 有限母體

$\hat{p}$ ~ 超幾何分配 $(p, \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1})$

11.5 樣本數的選擇

Concept

抽取樣本: 1. 好的抽樣方法

2. 樣本數

多, 抽樣成本高, 但可獲得較多資訊,估計誤差小

→ 成本效益考量

→ 最適樣本數

先設定一個可容忍的估計誤差,在此誤差下,選擇樣本數

11.5.1 估計母體平均數時樣本數的選擇

- 估計誤差不超過*d*值

$$\bar{X}-\mu=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq d$$

- 估計母體平均數時的樣本數

$$n\geq\frac{Z_{\alpha/2}^{2}\sigma^{2}}{d^{2}}$$

- 估計母體平均數時的樣本數(母體變異數未知)

$$n\geq\frac{Z_{\alpha/2}^{2}S^{2}}{d^{2}}$$

EX11.10 在EX11.5中,經略公司的洪經理對估計結果42.96 ~ 49.04的精確度不滿意. 希望 "估計誤差有95%的機率會小於等於2天." 問如要達到這個目標至少應抽多少個樣本才行?

Solution:

估計誤差不超過2天爲 $\bar{X}-\mu \le Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 2$

因母體標準差未知,依(11.19)式求算可得(S=5.7)

$$n \ge \frac{Z_{\alpha/2}^2 S^2}{d^2} = \frac{(1.96)^2(5.7)^2}{2^2} = 31.203$$

取整數得n>=32

由此知, 至少應抽取32個維修人員,亦即如果洪經理想要在95%信賴水準下得到2天的估計誤差時,必須增加16個維修人員的測試資料才行

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

11.5.2 估計母體比利時樣本數的選擇

若欲使母體比例的估計誤差不超過d值,同樣的,可利用Z分配

$$\hat{p} - p = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \le d$$

$$\rightarrow \quad n \ge \frac{Z_{\alpha/2}^2 pq}{d^2}$$

由於p, q未知, 此時有二種選擇

1. 以過去的樣本比例 $\hat{p}, \hat{q}$ 代替p,q 可得估計母體比例時的樣本數

$$n \ge \frac{Z_{\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

2. 若無樣本比例資料採保守估計可以p=1/2, q=1/2代替p,q

$$n \ge \frac{Z_{\alpha/2}^2 (0.25)}{d^2}$$

因p=1/2, q=1/2, 使變異數pq最大, 故上式爲最保守的估計

eX11.11 茂得利公司新安裝一部製造鏡框的機器,該公司要估計該機器生產的瑕疵品的比例. 老闆希望在95%的信賴水準下, 估計誤差不超過0.03. 問最保守的估計應抽取多少樣本數才行?

Solution:

抽樣估計誤差不超過0.03

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 (0.25)}{d^2} = \frac{Z_{0.025}^2 (0.25)}{(0.03)^2} = \frac{(1.96)^2 (0.25)}{0.0009} = 1067.1$$

取整數得 n>= 1068

由此知, 至少應取1068個樣本

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

11.6 母體變異數的區間估計

Concept

在許多情況下,人們對於母體變異數或標準差可能比對母體平均數及比例來得關心

EX: 汽車零件墊片直徑長度的標準差

→ 直徑的變異數代表精密度

→ 母體變異數通常未知, 必須利用樣本變異數

→ 樣本變異數的抽樣分配, 卡方分配 (χ^2 分配, chi-square distribution)

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

11.6.1 卡方分配

- 樣本變異數

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

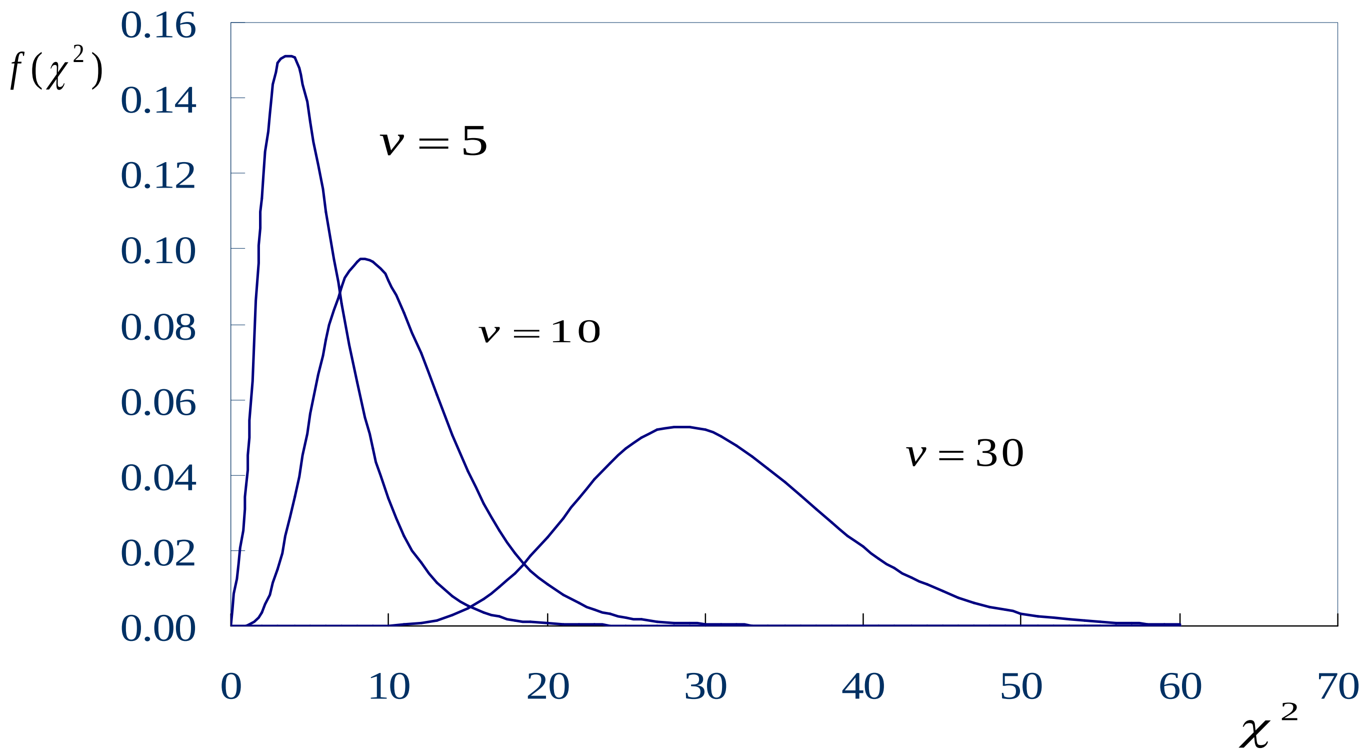
- 卡方統計量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

該統計量爲自由度 $(n-1)$ 的卡方分配

11.6.2 卡方分配的性質與定理 (有8點說明)

1.卡方分配爲一定義在大於等於0(正數)範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。



2.卡方分配只有一個參數即自由度，表爲*v*。卡方分配的平均數與變異數爲：

$$E(\chi_v^2)=v \quad , \qquad V(\chi_v^2)=2v$$

亦即自由度爲v的卡方隨機變數,其平均數恰等於其自由度v,變異數爲2倍的自由度

3.卡方分配當自由度增加而逐漸對稱，當自由度趨近於無窮大時，(v→∞)卡方分配會趨近於常態分配。

$$\chi_v^2 \sim N(v,2v)$$

4. χ^2 分配的定理

設 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,令 $Z^2=\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$,則Z^2爲自由度1的卡方分配

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

5.卡方分配的加法定理

二個獨立的卡方隨機變數相加所得之隨機變數仍爲卡方隨機變數，其卡方分配的自由度爲二個卡方分配的自由度之和。

卡方分配的加法定理

設隨機變數U ~ $\chi^2_{v_1}$, W ~ $\chi^2_{v_2}$,且U與W獨立,則

$$(U+W) \sim \chi^2_{v_1+v_2}$$

6. $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right]^2$ 爲自由度n的卡方分配

7. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 爲自由度n-1的卡方分配

8. 當X爲常態分配時,利用卡方分配求 E(S²)與V(S²)

$$E(S^2)=\sigma^2 \quad , \quad V(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

※卡方分配的臨界值

表11.5 卡方值

$d.f$	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.005}$	$d.f$
1	.0000393	.0039321	.0157908	2.70554	3.84146	7.87944	1
2	.0100251	.102587	.210720	4.60517	5.99147	10.5966	2
3	.0717212	.351846	.584375	6.25139	7.81473	12.8381	3
4	.206990	.710721	1.063623	7.77944	9.48773	14.8602	4
5	.411740	1.145476	1.61031	9.23635	11.0705	16.7496	5
6	.675727	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	18.5476	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	5.69724	8.67176	10.0852	24.7690	27.5871	35.7185	17
18	6.26481	9.39046	10.8649	25.9894	28.8693	37.1564	18
19	6.84398	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	38.5822	19
20	7.43386	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	39.9968	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

資料來源：摘錄自附表表六。

- 說明

我們想求自由度v=5, 右尾機率α=0.05的卡方值

→ 在1行自由度找到5, 第一列找到 $\chi^2_{0.10}$

→ 兩者相交可得到 $\chi^2_{5,0.10}=9.23635$ (見下頁圖11.18)

→ 利用卡方值表可求算卡方值落在某一範圍的機率值爲1-α

$$P(\chi^2_{1-(\alpha/2)} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

EX: v =17, α=0.10, 則 $\chi^2_{1-(0.1/2)}=\chi^2_{0.95}=8.67176$ $\chi^2_{(0.1/2)}=\chi^2_{0.05}=27.5871$

亦即 v=17時, $P(8.67176 < \chi^2 < 27.5871) = 0.9$

如圖11.19 ,

圖11.18 卡方分配機率值

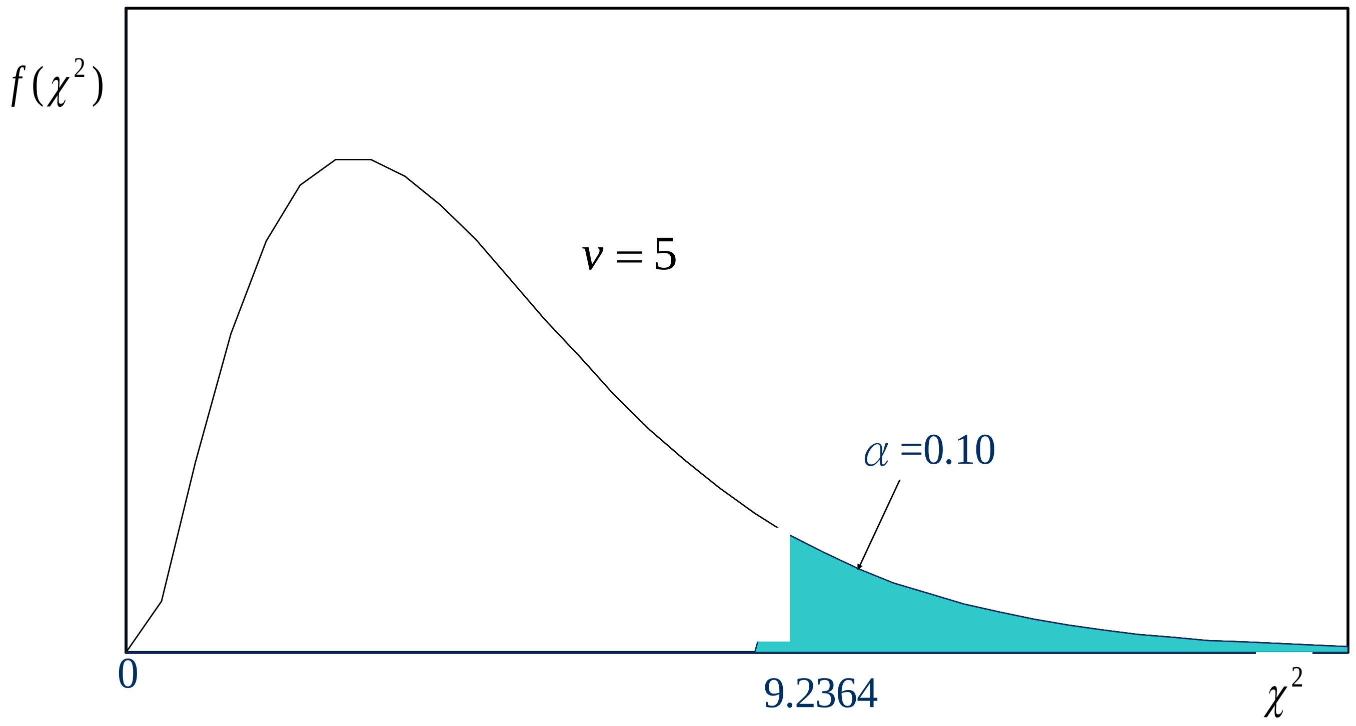
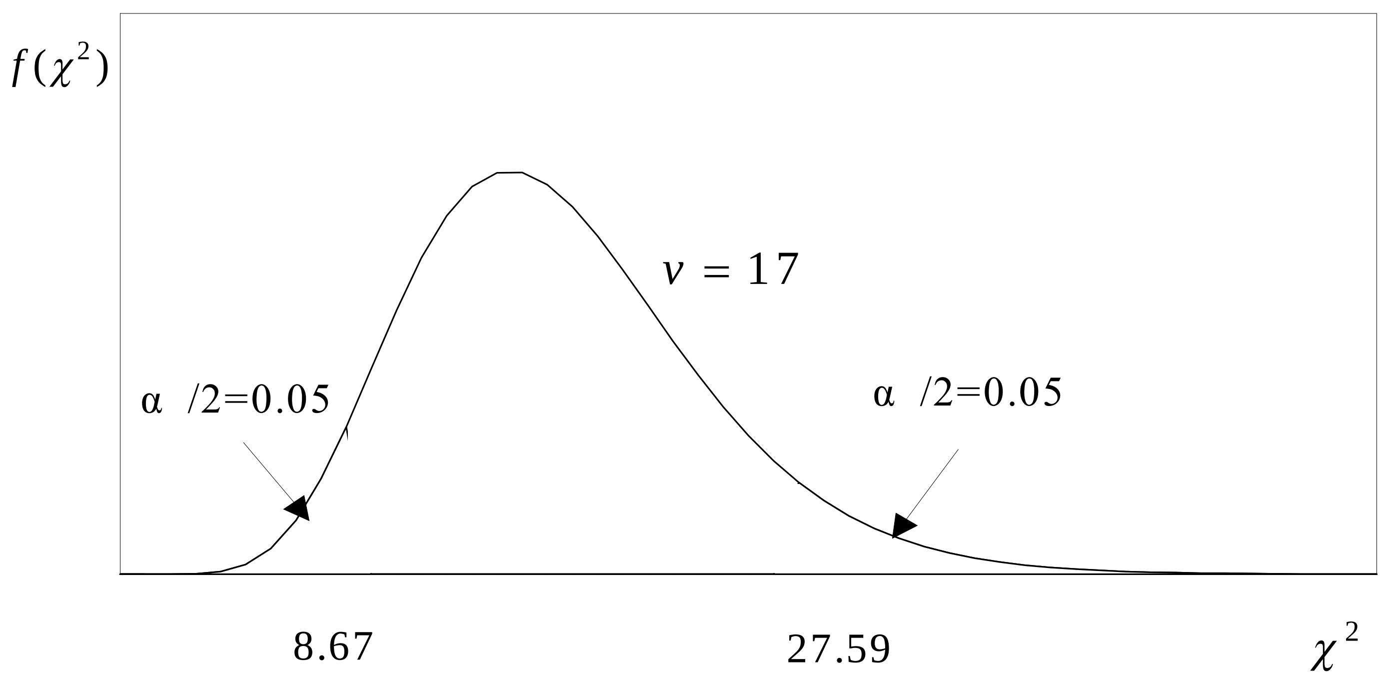


圖11.19 卡方值的機率區間



11.6.3 由卡方分配導出母體變異數的信賴區間

分為兩個步驟

1. 選擇樣本變異數S^2做為母體變異數σ^2的點估計式

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

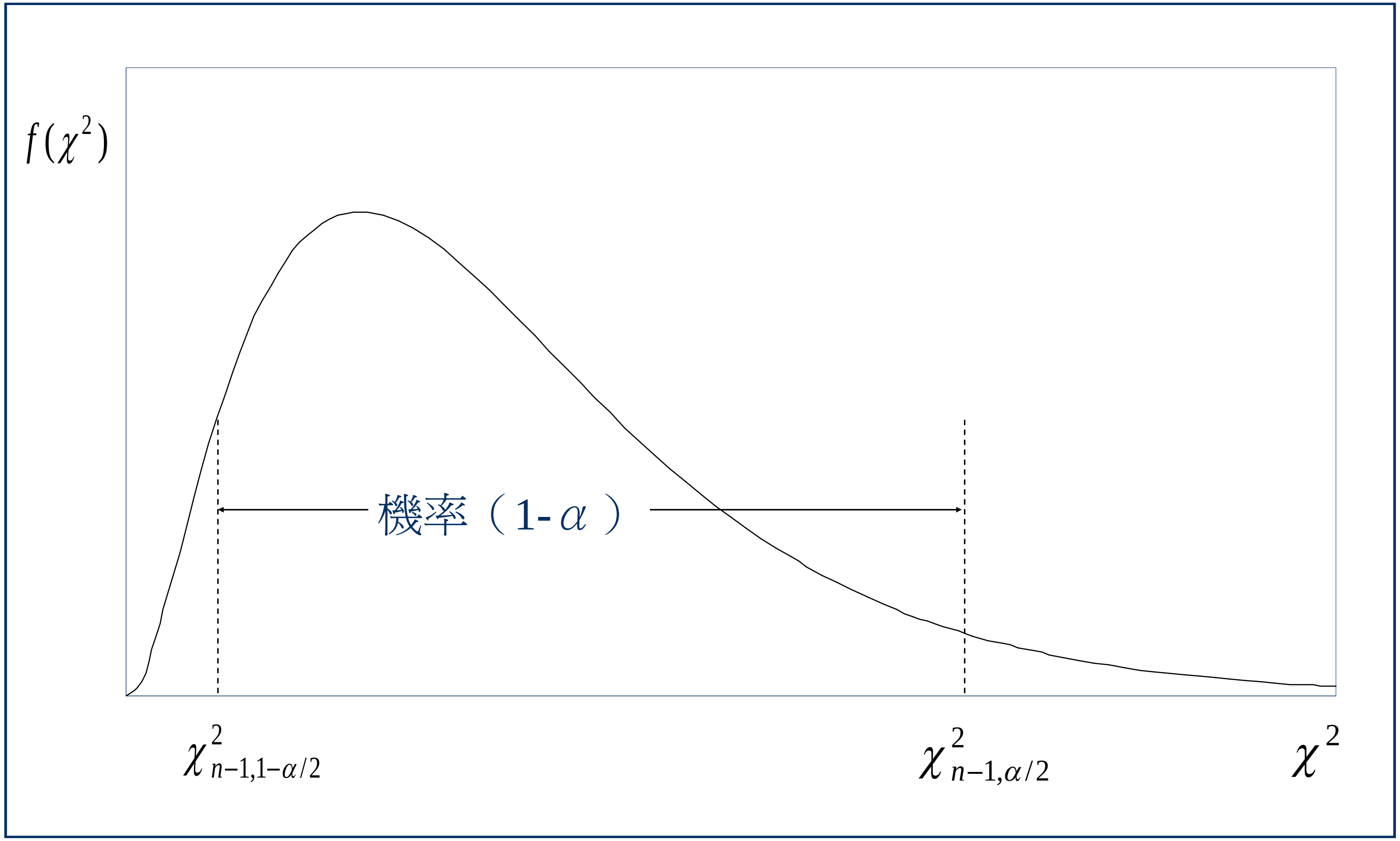
2. 利用卡方分配導出σ^2的信賴區間

$$P\left(\chi^2_{n-1,1-(\alpha/2)} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$ 以圖11.20表示

$$\rightarrow \quad P\left(\le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-(\alpha/2)}}\right) = 1-\alpha$$

σ^2的信賴區間並不對稱於S^2,因此一般表示為(下頁)

圖11.20 $(1-\alpha)\chi^2$值的機率區間



母體變異數的區間估計

- 母體變異數的信賴區間

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

- 母體標準差的信賴區間

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}$$

EX11.12 抽驗16罐空氣清新劑,發現每罐容量的樣本標準差爲5cc,據此推測每罐空氣清新劑容量的母體變異數及標準差95%信賴區間爲何?

Solution:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

$$\frac{15(5)^2}{27.49} \le \sigma^2 \le \frac{15(5)^2}{6.26}$$

因此可得95%信賴水準下母體變異數信賴區間爲 $13.64 \le \sigma^2 \le 59.90$

因此, 95%信賴水準下母體標準差信賴區間爲 $\sqrt{13.64} \le \sigma \le \sqrt{59.90}$

$\rightarrow$ 3.69 < σ < 7.74

- σ^2的信賴區間的應注意事項

1. 因爲卡方爲非對稱分配,因此σ^2信賴區間非以S^2爲中心,不能表爲"$S^2 \pm$ 抽樣誤差" 的方式

2. 當樣本數n增大時 (n→∞), χ^2_{n-1}會趨近於常態分配, 其平均數爲 $E(\chi^2_{n-1}) = n-1$, 變異數爲 $V(\chi^2_{n-1}) = 2(n-1)$,亦即

$$\chi^2_{n-1} \sim N(n-1, 2(n-1))$$

因此可利用Z分配求σ^2的信賴區間爲

$$\frac{S^2}{1+Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}} \le \sigma^2 \le \frac{S^2}{1-Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}}$$

3. 若母體平均數已知, σ^2的點估計式應選擇 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$

此時 $\hat{\sigma}^2$ 統計量並未失去自由度

因此 $\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ 為服從自由度n的卡方分配，亦即

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

→可得 $\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ 在 $(\chi^2_{n,1-(\alpha/2)}, \chi^2_{n,\alpha/2})$ 範圍的機率為1-α如下

$$P(\chi^2_{n,1-(\alpha/2)} \le \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n,\alpha/2}) = 1-\alpha$$

因此信賴區間為 $$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

當樣本數n增大時 (n→∞),則

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim N(n,2n)$$

可利用Z分配求算信賴區間

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{1+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n}}} \le \sigma^2 \le \frac{\hat{\sigma}^2}{1-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n}}}$$

EX11.13 中大公司進口鎳合金一批,每桶標示淨重200公斤,現隨機抽取4桶稱重, 其重量分別爲 202, 201, 196, 194

假設標示重量爲母體平均重量. 問母體變異數95%的信賴區間爲何?

Solution:

因母體平均數已知, μ=200公斤,故

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X-\mu)^2}{n} = 14.25$$

依(11.30)式可得信賴區間爲(其中 $\chi^2_{4,0.025} = 11.1433, \chi^2_{4,0.975} = 0.4844$)

$$\frac{4(14.25)}{11.1433} \le \sigma^2 \le \frac{4(14.25)}{0.4844}$$

即 $5.12 \le \sigma^2 \le 117.67$

推論: 鎳合金重量的母體變異數95%的信賴區間爲5.12 ~ 117.67

Ex11.14 超硬精密公司編號15的螺絲其標準直徑爲3.5cm, 現抽取150個做精密度檢定,得樣本變異數 $\hat{\sigma}^2$ 爲27.85mm.問母體變異數95%的信賴區間爲何?

Solution:

n=150相當大, 該樣本趨近於常態分配

$$\chi^2_{150} \sim N(150,2(150))$$

依(11.31)式可得

$$\frac{(27.85)}{1+1.96\sqrt{\frac{2}{150}}} \le \sigma^2 \le \frac{(27.85)}{1-1.96\sqrt{\frac{2}{150}}}$$

故螺絲直徑變異數的信賴區間爲 $22.71 \le \sigma^2 \le 36.00$

11.7 一端區間估計

Concept

在某些情況下,研究者只需估計母體參數不超過某最高值($\theta \le \hat{\theta}_U$)
如貸款上限

有時只需要知道母體參數最低為某個值 ($\theta \ge \hat{\theta}_L$)
如公司估計新產品的最低需求量

→一端之信賴區間

一端區間估計

❍ 母體平均數$1-\alpha$最高限值的信賴區間

母體平均數$1-\alpha$最高限值的信賴區間為：

$$\mu \le \overline{X} + Z_{\alpha}\sigma_{\overline{X}}$$

或

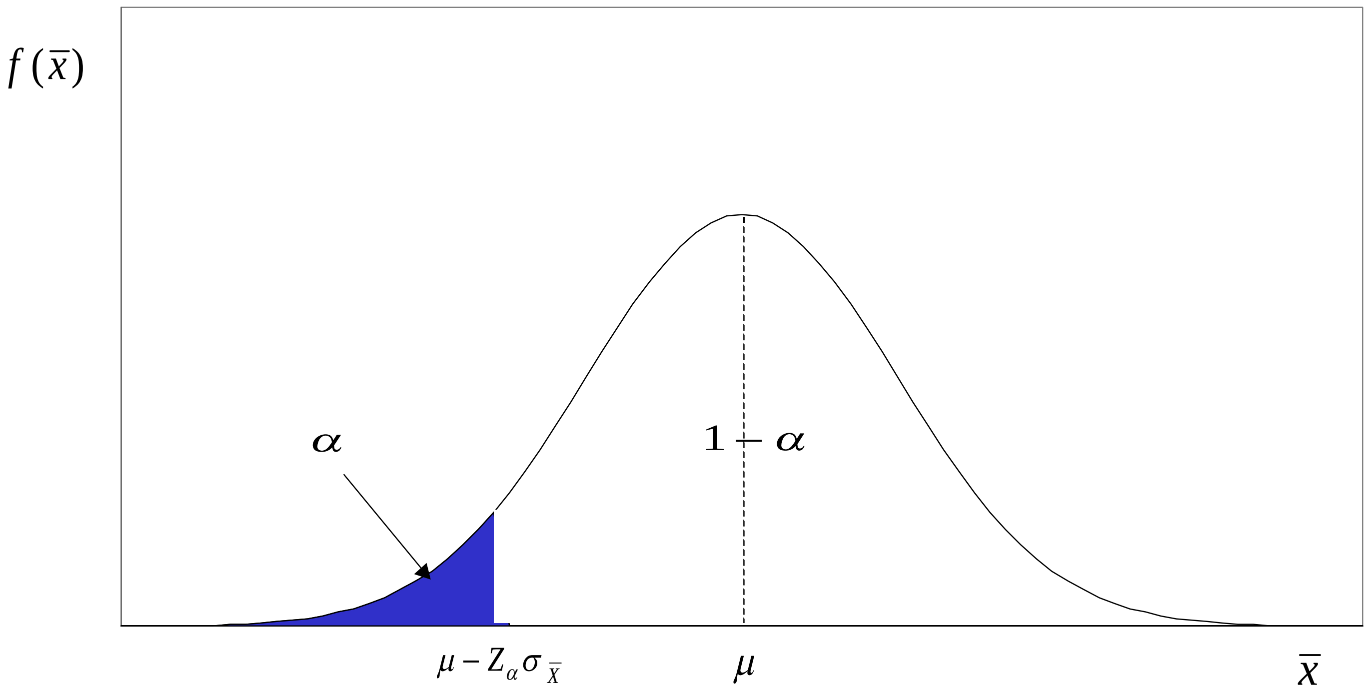
$$(-\infty, \overline{X} + Z_{\alpha}\sigma_{\overline{X}})$$

一端區間估計

- 母體均數$1-\alpha$最低限值的信賴區間

$$\mu \geq \overline{X} - Z_{\alpha}\sigma_{\overline{X}} \quad \text{或表爲} \quad (\overline{X} - Z_{\alpha}\sigma_{\overline{X}}, \infty)$$

圖11.21 $(1-\alpha)\overline{X}$ 右尾機率區間



EX11.15 正新公司想買一套自動化機器設備. 若此設備的每單位生產成本的節省不低於20,000元,則公司將購買; 反之, 則不購買. 該公司測試該機器一星期,試用期間生產了36件產品,平均省下21,000元, 標準差爲1,050元. 現問正新公司決策爲買或不買?

Solution:

因σ未知,以S=1050元估計σ,得最低限值信賴區間爲

$$\mu \geq \bar{X} - Z_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} = 21{,}000 - 1.645\frac{1{,}050}{\sqrt{36}} = 21{,}000 - 1.645 \times 175 = 20{,}712$$

因此, 95%最低值得信賴區間爲(20,712 ~ ∞)元, 因此正新公司可下決策: 因爲單位成本節省大於20,000元,所以可購買該自動化機器設備

EX11.16 旅行社考慮收費底限時是以美人的最高支出來計算. 正和旅行社根據過去900個旅客的資料,上海四日遊的每人平均成本(團費)為15,000元,標準差為6,000元. 現黃經理欲估計平均成本95%最高限的信賴區間,以作為新年度收費的參考. 試問平均成本95%最高限值得信賴區間為何?

Solution:

因σ未知,以S=6,000元估計σ,得最低限值信賴區間為

$$\mu \le \overline{X} + Z_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} = 15{,}000 + 1.645\frac{6{,}000}{\sqrt{900}} = 15{,}000 + 1.645 \times 329 = 15{,}329$$

因此 ,95%最高限值的信賴區間為(0 ~15,329)元, 因此正和旅行社的黃經理可下決策: 上海旅遊每人成本不超過15,329元

Q:團費多少?

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

eX11.17 高露潔進行市場調查顧客對新口味牙膏的接受率,隨機抽取360顧客 ,發現有0.7的顧客喜歡該口味.該公司劉經理欲估計接受率99%最低限值得信賴區間,以作爲保守估計新口味牙膏的需求量.式求接受率99%最低限值得信賴區間.

Solution:

根據中央極限定理已知樣本接受率 $\hat{p}$ 爲一常態分配,標準差爲

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{360}} = 0.024$$

於是可得99%最低限值得信賴區間爲

$$p \geq \hat{p} - Z_{\alpha}\hat{\sigma}_{\hat{p}} = 0.7 - 2.33 \times 0.024 = 0.7 - 0.056 = 0.644$$

因此,可知高露潔牙膏新口味的接受率99%的最低限值得信賴區間爲 (0.644 ~ 1)

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004