Arrow's Impossibility Theorem

Arrow 證明不存在一種歸納衆人偏好的機制得以同時滿足下列五項原則:

1. 柏瑞圖原則 (weakly Paretian, WP): 若所有人都喜歡 A 勝過 B, 則此機制不應選擇 B。
2. 遞移性 (transitivity, TRAN): 若此機制選擇 A 勝過 B, 且 B 勝過 C, 則不應選擇 C 勝過 A。
3. 他項無關 (independece of irrelevant alternatives, IIA): 兩選項 A 與 B 之社會排序不會因爲第三選項 C 的出現而改變。
4. 全域性 (universal domain, UD): 此機制應可適用於任何型態的選民偏好。
5. 非獨裁式 (non-dictatorship, ND): 此機制非僅是反應某一個社會成員的偏好。■

以下我們以兩人 (1, 2) 三選項 (x, y, z) 的例子來說明 Arrow 定理的直覺。首先我們在 [表1] 中將兩人的全部三十六種可能偏好方式全部列出。表中各欄對應選民 1 的六種可能偏好順序, 而各列則是選民 2 的六種可能偏好。每一格中上排爲 1 之偏好, 下排則爲 2 之偏好。

接下來我們對 [表 1] 中每一格的偏好組合施以 WP 與 TRAN 的要求。若兩人對兩個選項的偏好一致, 則依 WP 原則, 任何合理的團體決策機制亦應尊重此一致之排序。例如在第 (2, 1) 格中, 兩人皆喜好 x 勝過 y, 故我們可在 [表 2] 的相對格中寫上 ${}_xP_y$。至於遞移性 (TRAN) 之運用即在於觀察 [表 2] 中, 若有 ${}_xP_y$ 及 ${}_yP_z$, 則我們亦可加上 ${}_xP_z$。爲簡化符號, 我們在 [表 2] 將 ${}_xP_y, {}_yP_z, {}_xP_z$ 合寫做 ${}_xP_yP_z$。

顯然至此我們的工作尚未完成, [表 2] 中仍有許多空白尚待填補。接著我們從「他項無關」(IIA) 下手, 繼續往前做推論。IIA 告訴我們, 如果兩人在兩選項間之偏好維持不變, 則其他 (第三) 選項之出現或地位不應影響此機制對前兩選項之相對評價。以 [表 1] 中第 (6,1) 與 (6,2) 兩格爲例, 在此兩種偏好組合中, 選民 1 皆

喜歡 x 勝過 y , 而選民 2 卻都喜歡 y 高於 x 。因而這兩種情形下 x 與 y 之社會排序亦須相同, 不應受 z 之干擾。我們在 [表 3] 中將此種關係明確標出。[表 3] 上幅中 9 個標記 $\oplus$ 的格子均有相同的個人 x-y 排序 (選民 1 較愛 x, 但選民 2 較愛 y), 因此無論最後是 ${}_xP_y$ 或 ${}_yP_x$, 此 9 格均應一致。類似地, 同表中 9 個標有 $\odot$ 的格子皆表示 1 較愛 y 而 2 較愛 x, 故最後只能全是 ${}_xP_y$ 或全是 ${}_yP_x$。[表 3] 中幅與下幅類似地分別考慮 x-z 與 y-z 之順序。簡單地說, 根據 IIA, [表 3] 各幅中之 9 個相同符號者均應有相同的社會排序 (不同符號之間則未必要相同)。

除了少數兩人偏好完全相同的情形 (如 [表 1] 中之對角線六格) 之外, 絕大部分的選民偏好皆有衝突。顯然 [表 3] 中所有有標記 ($\oplus$ 或 $\odot$) 的格子有個人排序相反的狀況發生, 而任何一個社會決策機制於此皆不免順了姑情逆嫂意, 無法兩人的喜好兼顧。以 [表 3c] 之第 (2,1) 格爲例, 此時 1 喜歡 y 超過 z, 而 2 則相反。在無損於一般性的原則下, 我們考慮社會採取 ${}_yP_z$ 的決策方式。意即在此一特別單獨情形下, 我們順從選民 1 的主張, 而犧牲 2 的偏好。結果將會如何?

出人意料的是, 在第 (2,1) 格的小讓步竟然使情勢江河日下, 從此 1 在所有的事情上皆佔盡上風。欲知何以如此, 我們從 [表 3c] 便發現我們必須在 9 個有 $\oplus$ 的格子都加上 ${}_yP_z$, 如 [表 4a] 所示。所以 [表 4a] 中編號 (1) 的 ${}_yP_z$ 便導致共 9 個相同結果 (源於 IIA 的要求)。現在我們又發現 [表 4a] 編號 (2) 的格子中原已有 ${}_xP_y$ (回頭見 [表 2]), 故引用遞移性, 我們可推出 ${}_xP_z$。再次援引 [表 3b] 的要求, 我們又必須將 [表 4b] 中左下方 9 格全部加上 ${}_xP_z$。依照相似的推論, 利用 [表 4b] 編號 (3) 原有的 ${}_zP_y$, 我們可推出編號 (3) 應具 ${}_xP_y$ 之性質。經由一連串的連鎖反應, 我們將可逐步塡滿此社會機制之空白。實際上, 我們只要再按照 [表 4c] 中的三個步驟 (4)(5)(6) 走下去, 便可以得到 [表 5] 的完整結果: 此社會排序和選民 1 的偏好完全相同; 也就是說 1 可以完全決定所有的事務, 成了唯一的獨裁者。

如果我們在當初 [表 3c] 的第 (2,1) 格不採用 1 之主張, 而聽從 2 之要求, 規定 ${}_zP_y$ 的話結果又會如何? 經由相似的推導, 我們會發現最後 2 將成爲獨裁者, 可以對 1 予取予求。

由這個兩選民三選項的例子, 我們可知在 TRAN, WP , 和 IIA 的要求下, 任何一點點社會對某個人的讓步均無可避免地會導致未來的節節敗退, 終至全盤盡沒。

而既然社會上總有偏好衝突的存在, 也總有人會在衝突中贏得勝利, 堅持 TRAN, WP, 與 IIA 的社會選擇機制只有走入獨裁一途。換言之, 我們也只好承認沒有完美的公共決策方式存在。

1 **2**	(x y z)	(x z y)	(y x z)	(y z x)	(z x y)	(z y x)
(x y z)	x y z x y z	x z y x y z	y x z x y z	y z x x y z	z x y x y z	z y x x y z
(x z y)	x y z x z y	x z y x z y	y x z x z y	y z x x z y	z x y x z y	z y x x z y
(y x z)	x y z y x z	x z y y x z	y x z y x z	y z x y x z	z x y y x z	z y x y x z
(y z x)	x y z y z x	x z y y z x	y x z y z x	y z x y z x	z x y y z x	z y x y z x
(z x y)	x y z z x y	x z y z x y	y x z z x y	y z x z x y	z x y z x y	z y x z x y
(z y x)	x y z z y x	x z y z y x	y x z z y x	y z x z y x	z x y z y x	z y x z y x

Table 1: 兩人對於三選項 (x, y, z) 的三十六種可能偏好

(xPyPz)	xPy xPz	xPz yPz	yPz	xPy	
xPy xPz	(xPzPy)	xPz		xPy zPy	zPy
xPz yPz	xPz	(yPxPz)	yPx yPz		yPx
yPz		yPx yPz	(yPzPx)	zPx	yPx zPx
xPy	xPy zPy		zPx	(zPxPy)	zPx zPy
	zPy	yPx	yPx zPx	zPx zPy	(zPyPx)

Table 2: 利用 WP 與 TRAN (注意此矩陣之對稱性)

		$\odot$	$\odot$		$\odot$
		$\odot$	$\odot$		$\odot$
$\oplus$	$\oplus$			$\oplus$	
$\oplus$	$\oplus$			$\oplus$	
		$\odot$	$\odot$		$\odot$
$\oplus$	$\oplus$			$\oplus$	

$$\text{x-y} : \begin{cases} \oplus : & xP_1y,\ yP_2x \\ \odot : & yP_1x,\ xP_2y \end{cases}$$

			$\odot$	$\odot$	$\odot$
			$\odot$	$\odot$	$\odot$
			$\odot$	$\odot$	$\odot$
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$			
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$			
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$			

$$\text{x-z} : \begin{cases} \oplus : & xP_1z,\ zP_2x \\ \odot : & zP_1x,\ xP_2z \end{cases}$$

	$\odot$			$\odot$	$\odot$
$\oplus$		$\oplus$	$\oplus$		
	$\odot$			$\odot$	$\odot$
	$\odot$			$\odot$	$\odot$
$\oplus$		$\oplus$	$\oplus$		
$\oplus$		$\oplus$	$\oplus$		

$$\text{y-z} : \begin{cases} \oplus : & yP_1z,\ zP_2y \\ \odot : & zP_1y,\ yP_2z \end{cases}$$

Table 3: 利用 IIA 後須有相同排序之偏好組合

(1) yPz		yPz	yPz		
(2) yPz		yPz	yPz		
yPz		yPz	yPz		

xPz	xPz	xPz			
(2) xPz	xPz	xPz			
xPz	(3) xPz	xpz			

			(6)		
(1)					
					(5)
				(4)	
(2)					
	(3)				

Table 4: 1 在單一事件上有決定權

xPyPz	xPzPy	yPxPz	yPzPx	zPxPy	zPyPx
xPyPz	xPzPy	yPxPz	yPzPx	zPxPy	zPyPx
xPyPz	xPzPy	yPxPz	yPzPx	zPxPy	zPyPx
xPyPz	xPzPy	yPxPz	yPzPx	zPxPy	zPyPx
xPyPz	xPzPy	yPxPz	yPzPx	zPxPy	zPyPx
xPyPz	xPzPy	yPxPz	yPzPx	zPxPy	zPyPx

Table 5: 最終結果 1 爲獨裁者