

國立臺灣大學工學院工程科學與海洋工程研究所



碩士論文

Department of Engineering Science and Ocean Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

水體運動對氣-水耦合剪流場穩定性的影響

The Effect of Aqueous Motion on the Instability of
Air-Water Coupled Flow

郭緯心

Wei-Hsin Kuo

指導教授：蔡武廷 博士

Advisor: Wu-Ting Tsai, Ph.D.

中華民國 109 年 7 月

July, 2020

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

水體運動對氣-水耦合剪流場穩定性的影響

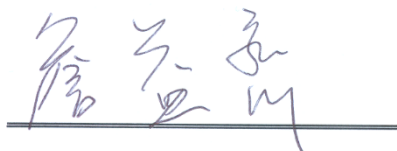
The Effect of Aqueous Motion on the Instability of
Air-Water Coupled Flow

本論文係郭緯心君（學號 R07525020）在國立臺灣大學工程科學及海洋工程學系完成之碩士學位論文，於民國 109 年 7 月 16 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：



（指導教授）

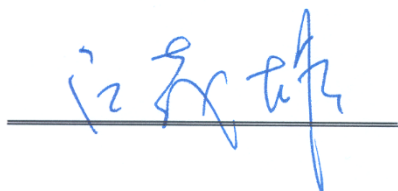








系主任



謝辭

這篇論文能夠順利完成，在過程中得到許多人的幫助，首先特別感謝蔡武廷教授耐心地指導，讓我從一開始無頭蒼蠅似的迷惘，漸漸確立研究的方向與目標，並指正我在研究過程中的錯誤，讓我能夠更精進自己的實力，教授不論在品德上或是學識方面皆是我的模範。實驗室裡的學長姊們不吝於分享經驗，使我對於新的研究方法以及相關知識能夠更快地銜接。實驗室同學們平常時的討論切磋、偶爾的嘻笑怒罵也為研究生活增添一絲趣味。家人們也在我的研究所時期默默的支持、噓寒問暖，為重要之精神支柱，使我能夠全心全意地投入在研究中。多虧了大家一路上的扶持與指教，使我能夠完成這篇論文，謝謝大家。

摘要



根據前人解析氣-水耦合流場的研究，定義了兩個不穩定模態——邁爾斯模態 (Miles mode) 與漣波模態 (Rippling mode)，其中的邁爾斯模態為空氣流場主導之不穩定性，漣波模態則是被水體流場所影響，並且在風速值足夠大的條件下才會產生。本研究單純解析水體流場的部分，忽略空氣流場的擾動，目的在於觀察結果是否能夠對照漣波模態的性質。

本研究在數值方法上採用契比雪夫多項式 (Chebyshev polynomials) 對特徵函數展開，並使用格點配置法來離散計算區間，將控制方程式與邊界條件建構成矩陣形式，進而求解廣義特徵值。

計算結果中得到兩種不穩定模態，定義在低風速時出現的為「第一模態」，增大風速後額外出現的為「第二模態」，其中第一模態之角頻率為負值，與邁爾斯模態和漣波模態性質不符合；第二模態與漣波模態有相似的性質，並依據本研究之比較結果證實漣波模態確實為水體流場影響的不穩定性。

關鍵字：線性穩定性分析、自由液面、契比雪夫配置法、剪流、不可壓縮黏性流

ABSTRACT

According to the stability analysis of air-water coupled flow done by the researchers before, there are two types of unstable mode. The Miles mode results from the air part of the air-water coupled flow, while the rippling mode results from the water part and only occurs at the high wind speed. In this study, we analyze the stability of the water part, and neglects the perturbations of air part. In order to figuring out whether our results can match the rippling mode or not.

We apply Chebyshev polynomials to expand the eigenfunction, and the collocation method to discretize the points in the computational domain. We build matrices composed of the governing equation and the boundary conditions, and then solve the problem to get the generalized eigenvalue.

The results show two types of unstable modes, and we call the one found at a lower wind speed the “first mode” and the other found when the wind speed increases the “second mode.” The angular velocity of the first modes is negative. This property is different from those of the Miles mode and the rippling mode. Our second mode is similar to the rippling mode, and by the comparison with the studies before, we conclude that the rippling mode is affected by the water part of the air-water coupled flow field.

Keywords: Linear stability analysis, free surface, Chebyshev collocation method, shear flow, viscous incompressible flow

目錄



論文口試委員審定書	i
謝辭	ii
摘要	iii
ABSTRACT.....	iv
目錄	v
圖目錄	vii
表目錄	ix
符號表	x
第一章、 前言	1
1.1、 研究背景.....	1
1.2、 論文架構.....	3
第二章、 控制方程式及邊界條件	4
2.1、 穩定動力方程式.....	4
2.2、 邊界條件.....	8

2.3、	背景狀態剪流場之速度分布.....	9
第三章、	數值方法應用.....	11
3.1、	契比雪夫配置法 (Chebyshev Collocation Method)	11
3.2、	數值方法之驗證.....	13
3.3、	格點數之收斂性測試與截斷高度之敏感度測試	17
第四章、	計算結果與討論.....	20
4.1、	結果呈現.....	20
4.2、	結果之比較與討論	27
第五章、	結論	36
	參考文獻.....	37
	附錄一、流體應力關係式	38
	附錄二、邊界條件推導.....	40
	附錄三、特徵方程組矩陣	45
	附錄四、二維尾跡流流場之收斂性測試.....	49
	附錄五、非黏流體成長率不連續問題之探討	51



圖目錄

圖 2.1：背景狀態剪流場速度於垂直方向之變化，在 $u^* = 30$ cm/s。	10
圖 3.1：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 0.5$)。(a) $Re = 100$ ；(b) $Re = 1000$ ；(c) $Re = \infty$ 。	15
圖 3.2：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 2.25$)。(a) $Re = 100$ ；(b) $Re = 1000$ ；(c) $Re = \infty$ 。	16
圖 4.1：不同風速下，發展率隨波長的變化。(a) $u^* = 40$ cm/s；(b) $u^* = 60$ cm/s；(c) $u^* = 100$ cm/s。藍線表示為第一模態、紅線為第二模態。	22
圖 4.2：不同風速下，角頻率隨波長的變化。(a) $u^* = 40$ cm/s；(b) $u^* = 60$ cm/s；(c) $u^* = 100$ cm/s。藍線表示為第一模態、紅線為第二模態。	23
圖 4.3：中性穩定曲線圖。	24
圖 4.4：發展率於不同風速、波長之分布情形。(a) 第一模態；(b) 第二模態。	25
圖 4.5：角頻率於不同風速、波長之分布情形。(a) 第一模態；(b) 第二模態。	26
圖 4.6：不穩定模態之分布範圍比較圖。	29
圖 4.7：發展率隨波長變化比較圖 ($u^* = 80$ cm/s)。	30
圖 4.8：角頻率隨波長變化比較圖 ($u^* = 80$ cm/s)。	30
圖 4.9：水平擾動速度分布圖，在 $u^* = 80$ cm/s、 $\lambda = 5$ cm。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之邁爾斯模態；(b) 沈巧婷之漣波模態；(c) 本研究之第二模態。	31
圖 4.10：垂直擾動速度分布圖，在 $u^* = 80$ cm/s、 $\lambda = 5$ cm。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之邁爾斯模態；(b) 沈巧婷之漣波模態；(c) 本研究之第二模態。	32
圖 4.11：水平擾動速度分布圖，在 $u^* = 80$ cm/s、 $\lambda = 20$ cm。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之漣波模態；(b) 本研究之第二模態。	33
圖 4.12：垂直擾動速度分布圖，在 $u^* = 80$ cm/s、 $\lambda = 20$ cm。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之漣波模態；(b) 本研究之第二模態。	34

圖 C. 1：特徵方程組矩陣與特徵向量之排列方式。	47
圖 C. 2：矩陣 $[A]$ 。	48
圖 C. 3：矩陣 $[B]$ 。	48
圖 E. 1：發展率隨波數的變化 $Fr^2 = 2.25, Re = \infty, N = 500$ 。	53
圖 E. 2：發展率隨波數的變化 $Fr^2 = 2.25, Re = \infty, N = 800$ 。	53
圖 E. 3：發展率隨波數的變化 $Fr^2 = 2.25, Re = \infty, N = 1200$ 。	54
圖 E. 4：發展率隨波數的變化 $Fr^2 = 2.25, Re = \infty, N = 2000$ 。	54
圖 E. 5：發展率隨波數的變化 $Fr^2 = 2.25, Re = \infty, N = 2000$ 。	55
圖 E. 6：發展率隨波數的變化 $N = 600$ 。	56
圖 E. 7：發展率隨波數的變化 $N = 1000$ 。	56
圖 E. 8：發展率隨波長、剪切層厚度變化的三維等值線圖。	57
圖 E. 9：發展率隨波長、剪切層厚度變化的二維等值線圖。	57



表目錄

表 3.1：針對低風速($u^* = 30$ cm/s)，於不同波長時，特徵值之收斂性測試。	18
表 3.2：針對高風速($u^* = 80$ cm/s)、短波($\lambda = 4$ cm)時，特徵值之收斂性測試。	18
表 3.3：針對高風速($u^* = 80$ cm/s)、長波($\lambda = 20$ cm) 時，特徵值之收斂性測試。	18
表 3.4：針對低風速 ($u^* = 30$ cm/s)、不同波長下特徵值之截斷高度收斂性測試。	19
表 3.5：針對高風速($u^* = 30$ cm/s)、短波($\lambda = 4$ cm)時，特徵值之截斷高度收斂 性測試。	19
表 3.6：針對高風速($u^* = 80$ cm/s)、長波($\lambda = 20$ cm)時，特徵值之截斷高度收斂 性測試。	19
表 4.1：在 $u^* = 80$ cm/s、 $\lambda = 5$ cm 的最不穩定之特徵值比較。	35
表 4.2：在 $u^* = 80$ cm/s、 $\lambda = 20$ cm 的最不穩定之特徵值比較。	35
表 D.1：特徵值隨格點數變化之收斂情形($Fr^2 = 0.5$)。	50
表 D.2：特徵值隨格點數變化之收斂情形($Fr^2 = 2.25$ ，分支一)。	50
表 D.3：特徵值隨格點數變化之收斂情形($Fr^2 = 2.25$ ，分支二)。	50

符號表



希臘字母

Δ	剪切層厚度
η	自由液面半波高
λ	波長
μ_w	水體動力黏滯係數
ν 、 ν_w	水體運動黏滯係數
ν_a	空氣運動黏滯係數
ω	特徵值
ω_i	發展率
ω_r	角頻率
ϕ	流函數經正交模展開後之振幅
ψ	流函數
ρ 、 ρ_w	水體密度
ρ_a	空氣密度
τ_a	作用於空氣之界面剪應力
ζ	垂直高度配置點

英文字母

a_n	契比雪夫多項式展開之係數
D	對 z 方向的偏微分運算子
Fr	佛勞德數
g	重力
h	截斷高度
k	波數
$[L]$	特徵長度
M	配置點數
N	契比雪夫多項式數量；格點數
p	動壓力
P	總壓力



P_0	背景壓力
q	半波高經正交模展開後之振幅
Re	雷諾數
t	時間
T	表面張力
T_n	契比雪夫多項式
u	水平速度
u_*	空氣摩擦速度
U	背景速度
U_0	背景狀態表面流速
$[V]$	特徵速度
We	韋伯數
x	水平位置向量
$\{x\}$	特徵向量
z	垂直位置向量
重音符號	
'	擾動項
~	無因次項

第一章、前言



1.1、研究背景

水面上因受到風的作用，而產生了剪應力，致使水體形成一剪流場，並在水與空氣之交界面產生波浪，觀察波浪隨時間和空間的變化情形，可以用來判別此流場是否穩定。對於氣-水耦合流場的穩定性分析這個領域上，已有許多前人的研究結果，讓現今對於不穩定波的現象與成因能更深入了解，但是仍有尚未釐清之處值得討論。

因為水與空氣密度的差異，會使得空氣流場之流速遠大於水體流場之流速，因此會很直覺地認為空氣流場是造成氣-水耦合流場之不穩定性的主要原因，前人解析氣-水耦合流場的結果，與純粹解析空氣流場的結果也大致相符。Zeisel, Stiassnie, and Agnon (2008) 及沈巧婷 (2019) 解析氣-水耦合流場，探討在不同風速、波長條件下不穩定模態的發生情形，並且比前人解析更大的參數範圍，發現在風速超過一個程度之後，有兩種不穩定模態出現，而這兩種模態在特定參數條件下可同時並存。根據 Young and Wolfe (2014) 文中指出，兩不穩定模態之中，「邁爾斯模態」(Miles mode) 出現的風速範圍較廣，主要由空氣流場所影響；而「漣波模態」(rippling mode) 只有在風速較高時出現，主要由水體流場所影響。本研究欲針對水體流場做解析，忽略空氣流場的擾動，探討水體流場的運動對於氣-水耦合流場之不穩定性的影響，如果只解析水體流場的結果，與漣波模態有相符的性質，即可驗證漣波模態是由水體流場主導之不穩定性。

在針對水體流場做解析的領域，也有許多前人的研究可以參考。Stern and Adam (1974) 考慮非黏流水體，受一由風引起之均勻剪應力作用，而產生了不穩定波。其中剪流場以分段線性的速度流場近似 (piecewise-linear approximation)，即速度從水面往下以線性的趨勢衰減至零，並以佛勞德數大小作為判斷流場是否穩定的標準。

Morland, Saffman, and Yuen (1991) 考慮非黏流水體，並以多種不同的流場來做分析，包含 (1) 分段線性流場；(2) 誤差函數流場；(3) 指數函數流場。並透過

分析結果證實在有自由液面 (free surface) 的條件下，水體流場的速度曲線不需要有反曲點也可能有不穩定的模態產生。此結論與 Yih (1972) 的結論是相反的。

Dimas and Triantafyllou (1994) 考慮二維非黏流水體，在水流方向以頻譜空間離散化法 (spectral spatial discretization method) 展開，水深方向以契比雪夫多項式 (Chebyshev polynomials) 展開，以解析尾跡流的雙曲函數流場之穩定性。並在不同參數條件下發現兩分支 (branches)，分支一出現在低波數；分支二出現在低佛勞德數、高波數或是高佛勞德數、低波數的情形。並同樣證實自由液面會影響到流場的不穩定性。

Longuet-Higgins (1998) 使用分段線性流場來簡化曲線流場，使得數值計算上更容易，與 Stern and Adam (1974) 不同的是，此流場在水面處有一表面層，其中的速度與表面流速相同，不隨深度改變。表面層之下才是線性之剪切流層，直到速度衰減至零。以此流場去近似剪流場的結果，同樣可以得出與 Dimas and Triantafyllou (1994) 相似的兩種不穩定分支。藉由調整不同分層的厚度比率，可以近似許多不同種的平滑速度曲線 (smooth profile)。

在上述提到的多個研究中，許多以佛勞德數 $Fr = V/\sqrt{gL}$ 作為變數去討論不穩定性，其中特徵速度 V 之選定多用表面速度，代表風速或是水的表面速度在水體流場的不穩定性扮演著重要的角色；而特徵長度 L 的選定多以剪切層厚度或是波長有關，各個研究不盡相同。本研究與前人文獻中的差異在於，前人研究多在討論非黏流體，求解非黏的穩定性動力方程式 (Rayleigh equation)，本研究則是討論黏性流之穩定性動力方程式 (Orr-Sommerfeld equation)，以線性不穩定理論探討水體剪流場的問題，主要關注不穩定波初生成的時期，所以可以忽略非線性項之影響，並求解不穩定波之發展率。而在背景速度流場的選擇上，選用平滑的指數函數曲線，和 Zeisel *et al.* (2008) 及 沈巧婷 (2019) 的速度曲線相同，並與之結果比較，欲了解純粹解析水體流場之不穩定模態，是否能直接對應到氣水耦合流場之不穩定連波模態，或是在性質上兩者有何異同之處。

1.2、 論文架構

本文在第一章介紹前人在氣-水耦合流場之研究，並說明本研究之研究背景與目的；在第二章於 2.1 節推導出解析問題所需要之控制方程式，即黏性流之穩定性動力方程式 (Orr-Sommerfeld equation)，並於 2.2 節條列出氣-水介面之上邊界條件，以及使用截斷法後之下邊界條件。之後於 2.3 節介紹水體流場之背景速度分布。第三章說明本研究所使用之數值方法，於 3.1 節對契比雪夫配置法之性質作介紹；在 3.2 節以 Zhang (1996) 之結果做比較，以驗證本數值方法之正確性。在 3.3 節對本研究問題之計算區間做收斂性分析，確認數值方法在可應用的範圍內。第四章列出解析的結果，並將結果與前人的研究做比較，最後將結論呈現於第五章。

第二章、 控制方程式及邊界條件



2.1、 穩定動力方程式

考慮一不可壓縮流之二維黏性流場，在水面處受風吹拂，產生一剪應力導致水體運動。在流場尚未受到擾動之前，水體的運動為平行剪切流。以剪切流流向定為 x 軸之正向、垂直向上方向定為 z 軸之正向，將此流場建構在 x - z 座標系統中，並定義平均水面處之垂直座標 $z = 0$ 。

根據以上的條件，水體流場滿足連續方程式及動量方程式 (Navier-Stokes equation)：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1 a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.1 b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.1 c)$$

式中 u 、 w 表示水體總速度， p 為總動壓力， ρ 為水的密度， ν 為運動黏滯係數。其中速度項以及壓力項可再分解成「背景狀態流場」項加上「擾動狀態流場」項，即：

$$u(x, z, t) = U(z) + u'(x, z, t) \quad (2.2 a)$$

$$w(x, z, t) = w'(x, z, t) \quad (2.2 b)$$

$$p(x, z, t) = P_0(x, z, t) + p'(x, z, t) \quad (2.2 c)$$

式中 u' 、 w' 分別代表水平與垂直擾動速度項， p' 為擾動壓力項，背景狀態流場只考慮水平方向速度 U ， P_0 為背景狀態動壓力。將式 (2.2) 代入式 (2.1) 中：

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.3 a)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial(U+u')}{\partial t} + (U+u')\frac{\partial(U+u')}{\partial x} + w'\frac{\partial(U+u')}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P_0+p')}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2(U+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U+u')}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \quad (2.3 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} + (U+u')\frac{\partial w'}{\partial x} + w'\frac{\partial w'}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P_0+p')}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \quad (2.3 \text{ c})$$

背景狀態流場同樣滿足動量方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.4 \text{ a})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial z} \quad (2.4 \text{ b})$$

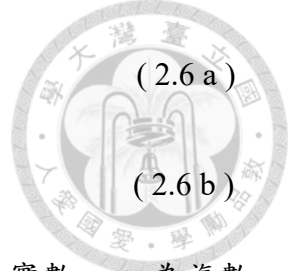
將式 (2.3) 中的背景狀態項以式 (2.4) 消去，並引入微小擾動理論 (small disturbance theory)，假設擾動項的階次比背景狀態項要小很多，並只考慮擾動波形成之初期階段，非線性項之影響不大，因此忽略擾動項相乘之非線性項，之後得到擾動狀態流場的線性化控制方程式：

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.5 \text{ a})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + w'\frac{dU}{dz} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right) \quad (2.5 \text{ b})$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + U\frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) \quad (2.5 \text{ c})$$

不可壓縮流體存在流函數 (stream function)，以此來表示擾動速度構成之擾動波，並假設在 x 方向以波數 k 、角頻率 ω 進行傳播，透過正交模展開 (Normal mode expansion)，流函數可以表示為： $\psi(x, z, t) = \phi(z)e^{i(kx - \omega t)}$ 。再將擾動速度項以流函數之偏微分來表示：



$$u'(x, z, t) = \frac{\partial \psi(x, z, t)}{\partial z} = \frac{d\phi(z)}{dz} e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.6 a)$$

$$w'(x, z, t) = -\frac{\partial \psi(x, z, t)}{\partial x} = -ik\phi(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.6 b)$$

本研究主要討論的是時間上的不穩定性，因此假設 k 為一正實數、 ω 為複數 ($\omega = \omega_r + i\omega_i$)。若 $\omega_i > 0$ ，表示此擾動將以發展率 ω_i 增長，為不穩定擾動波；若 $\omega_i < 0$ ，表示此擾動會隨時間消散，為穩定的擾動波。

將式 (2.6) 代入控制方程式 (2.5)：

$$\left(-i\omega \frac{d\phi(z)}{dz} + ikU \frac{d\phi(z)}{dz} - ik \frac{dU}{dz} \phi(z) \right) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.7 a)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(-k^2 \frac{d\phi(z)}{dz} + \frac{d^3 \phi(z)}{dz^3} \right) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$(-\omega k \phi(z) + k^2 U \phi) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(ik^3 \phi - ik \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.7 b)$$

因引入流函數後會自動滿足連續方程式，故控制方程組剩下二維動量方程式。之後將式 (2.7 a) 對 z 微分、式 (2.7 b) 對 x 微分，兩式相減以消去壓力項 p' ，可以得到水體擾動流場之線性穩定動力方程式：

$$\begin{aligned} kU(D^2 - k^2)\phi - kD^2U\phi + i\nu(D^4 - 2k^2D^2 + k^4)\phi \\ = \omega(D^2 - k^2)\phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

上式即為通稱之 Orr-Sommerfeld 方程式，式中使用運算子 $D \equiv d/dz$ 。

接著選擇適當的特徵尺度對式 (2.8) 做無因次化，在此參考沈巧婷 (2019) 所使用的無因次方法，選用空氣摩擦速度 $u_* = \sqrt{\tau_a / \rho_a}$ 作為特徵速度 $[V]$ 、 $1/k$ 作為特徵長度 $[L]$ ， τ_a 、 ρ_a 表示空氣的剪應力以及密度，本研究雖然只討論水體流場，但目的是與沈巧婷 (2019) 比較，因此在參數的選擇上盡量與其一致，減少差異性。接著以上述特徵尺度對式 (2.8) 做無因次化，並以上標 \sim 表示無因次項：

$$\frac{i}{Re} \bar{D}^4 \tilde{\phi} + \left(\bar{U} \tilde{k} - \frac{2i \tilde{k}^2}{Re} \right) \bar{D}^2 \tilde{\phi} + \left(-\bar{U} \tilde{k}^3 - \tilde{k} \bar{D}^2 \bar{U} + \frac{i \tilde{k}^4}{Re} \right) \tilde{\phi} = \tilde{\omega} (\bar{D}^2 \tilde{\phi} - \tilde{k}^2 \tilde{\phi}) \quad (2.9)$$

上式為無因次之穩定性動力方程式，式中 $Re = [V][L]/\nu$ ，為水體流場之雷諾數。



2.2、 邊界條件

本研究考慮之水體流場存在兩邊界：上邊界為水面，下邊界為截斷高度之假想平面。求解穩定性動力方程式 (2.9) 的同時也須滿足適當的邊界條件。因為動力方程式為線性方程式，邊界條件之階次必須與之一致，所以需要經過線性化的處理。

本節的推導過程中，會先假設上邊界為空氣與水體的界面，兩不同介質在界面處速度與剪應力會連續，利用此性質來簡化方程式，再將空氣流場的擾動項設為零，來達到忽略空氣流場的效果，最後得到水體流場的邊界條件。

水體流場受到風吹拂之後產生波浪，假設氣-水界面 $z = \eta(x, t)$ ， η 為半波高。與流函數相同方式對半波高做正交模展開為 $\eta(x, t) = qe^{i(kx - \omega t)}$ ，其中 q 為振幅。在此界面處需滿足以下物理條件：(1) 空氣與水交界面的運動邊界條件、(2) 界面上切向應力的平衡、(3) 界面上法向應力的平衡。本研究中假設表面張力在界面上均勻分布，為一定值。其中二維應力的詳細推導過程參見附錄一。

在下邊界處本研究做採用「截斷法」(truncation method)，訂定一截斷高度 h ，並假設在水深 $z = -h$ 處存在一假想界面，在此界面上需滿足「自由滑動邊界條件」(free-slip boundary condition)，即 (4) 邊界上擾動速度垂直分量為零、(5) 流體質點的運動與邊界相切。以下為上述五個邊界條件經過線性化及無因次化的結果 (詳細推導過程參見附錄二)，其中式 (2.10) - 式 (2.12) 滿足於 $z = 0$ 、式 (2.13)、式 (2.14) 滿足於 $z = -h$ ：

$$\tilde{k}\tilde{\phi} + \tilde{U}_0\tilde{k}\tilde{q} = \tilde{\omega}\tilde{q} \quad (2.10)$$

$$(\tilde{D}^2 + \tilde{k}^2)\tilde{\phi} + \tilde{D}^2U\tilde{q} = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}\tilde{U}_0\tilde{D}\tilde{\phi} - \tilde{k}\tilde{D}\tilde{U}\tilde{\phi} + i\frac{1}{Re}(\tilde{D}^3\tilde{\phi} - 3\tilde{k}^2\tilde{D}\tilde{\phi}) + \frac{1}{Fr^2}\tilde{k}\tilde{q} + \frac{1}{We}\tilde{k}^2\tilde{q} \\ = \tilde{\omega}\tilde{D}\tilde{\phi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (2.13)$$

$$\tilde{D}^2\tilde{\phi} = 0 \quad (2.14)$$



2.3、 背景狀態剪流場之速度分布

本穩定性分析中之背景流場速度，參照沈巧婷 (2019)文中水體流場之速度分布、以指數函數來表示：

$$U(z) = U_0 e^{\frac{\rho_a u_*^2}{U_0 \mu_w} z} \quad (2.15)$$

式中 U_0 為水體在平均液面 ($z = 0$) 流速、 μ_w 為水之動力黏滯係數、 ρ_a 為空氣密度、 u_* 為空氣摩擦速度。透過在界面處剪應力連續的性質， $\rho_a u_*^2$ 為作用於空氣流場之剪應力，等同於作用於水體表面之剪應力，本研究亦以空氣摩擦速度 u_* 作為參數、來對應水面剪應力之大小，目的是為了方便與前人氣-水耦合流場的研究來做比較。式 (2.15) 中的 U_0 定義為空氣摩擦速度的一半，即 $U_0 = 0.5u_*$ 。

背景流場之速度隨水深之分布如圖 2.1 所示，以 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 為例。在水面處因受剪應力作用，有最大的背景流速。隨著深度越來越深，速度以指數函數趨勢快速衰減。最後將上述流場代入控制方程式以及邊界條件，進而求解廣義特徵值問題。

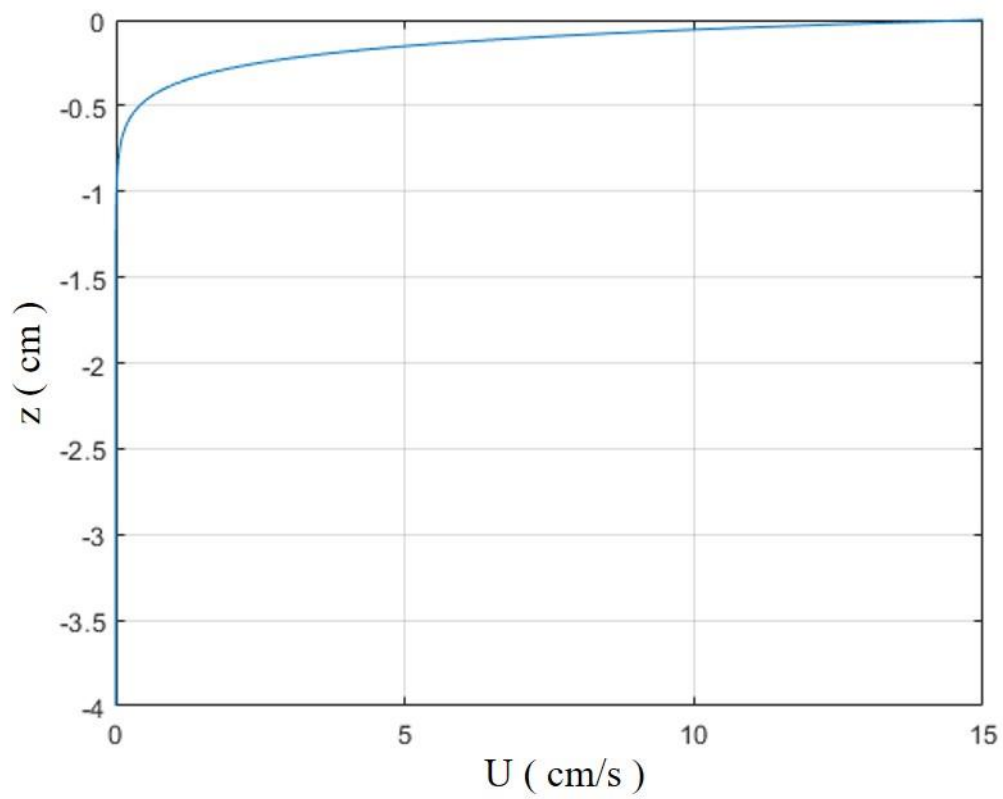


圖 2.1：背景狀態剪流場速度於垂直方向之變化，在 $u_* = 30$ cm/s。

第三章、 數值方法應用



3.1、 契比雪夫配置法 (Chebyshev Collocation Method)

本研究應用第一形式契比雪夫多項式 (first kind of Chebyshev polynomials) 作為基底函數，對特徵函數展開。並在計算範圍 $z \in [-h, 0]$ 使用格點配置法 (collocation method) 對其進行離散化，產生不連續的格點。以下將介紹契比雪夫多項式以及格點配置法。

第一形式契比雪夫多項式的三角函數表示法如下：

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} x), & x \geq 1 \\ (-1)^n \cosh(n \cosh^{-1}(-x)), & x \leq -1 \end{cases} \quad (3.1)$$

本研究計算範圍以無因次參數表示為 $\tilde{z} \in [-\tilde{h}, 0]$ ，透過下式進行座標轉換，

$$\zeta = \frac{2\tilde{z}}{\tilde{h}} + 1, \quad -\tilde{h} \leq \tilde{z} \leq 0 \quad (3.2)$$

將計算範圍映射到 $\zeta \in [-1, 1]$ ，即可套用式 (3.1) 之第一列表示法。利用此函數將特徵函數展開，形式如下：

$$\tilde{\phi}(\zeta) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\zeta) \quad (3.3)$$

式中 a_n 為係數，即為求解廣義特徵值問題的特徵向量，數量共有 $N + 1$ 個。

使用契比雪夫多項式有一優點是能夠利用其三角函數的性質，以遞迴關係式求出其高階微分項，遞迴關係如下所示：

$$\begin{aligned} T_{n+1}^{(j)}(\zeta) &= 2(n+1)T_n^{(j-1)}(\zeta) + \frac{n+1}{n-1}T_{n-1}^{(j)}(\zeta), \quad n \geq 2 \\ T_0^{(j)}(\zeta) &= 0, \quad T_1^{(j)}(\zeta) = T_0^{(j-1)}(\zeta), \quad T_2^{(j)}(\zeta) = 4T_1^{(j-1)}(\zeta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

式中上標 (j) 表示對 ζ 進行 j 次微分。計算出基底函數的導數之後，特徵函數的導數也能夠求得：

$$\frac{d^j \tilde{\phi}(\zeta)}{d\tilde{z}^j} = \left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^j \sum_{n=0}^N a_n T_n^{(j)}(\zeta) \quad (3.5)$$

接著需要將計算的區間離散成不連續的格點，離散方式如下：

$$\zeta_l = \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right), \quad l = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.6)$$

利用餘弦函數來做不等間隔的格點配置，目的是要讓邊界處的格點分布較密集，更能夠捕捉在邊界的變化。在每個配置格點皆會滿足控制方程式 (2.9)，共有 $M-1$ 條方程式，加上式 (2.10)- 式 (2.14) 五條邊界條件，總共有 $M+4$ 條方程式。未知數為係數 a_n ，有 $N+1$ 個，加上波浪的振幅 q ，總共有 $N+2$ 個未知數，為了使方程式數目與未知數數目吻合，取 $M=N-2$ 。

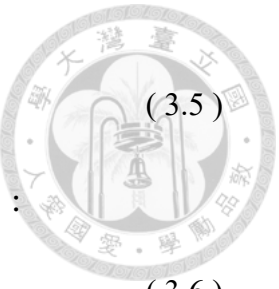
利用第二章推導之邊界條件以及控制方程式可構成一複數特徵方程式組：

$$[A]\{x\} = \tilde{\omega}[B]\{x\} \quad (3.7)$$

其中複數矩陣 $[A]$ 、 $[B]$ 如附錄三所示， $\tilde{\omega}$ 為無因次複數特徵值， $\{x\}$ 為複數特徵向量：

$$\{x\}^T = \{a_0, a_1, \dots, a_N, q\} \quad (3.8)$$

本研究利用 Matlab 之 qz 副程式求解上述之廣義特徵值問題，並找出所有特徵值以及對應之特徵向量，篩選出其中不穩定的模態，即 $\tilde{\omega}_l > 0$ ，觀察並討論此模態之性質。





3.2、 數值方法之驗證

為了測試上一節之數值方法是否適用於求解水體流場的解析，以及驗證程式的正確性，本節將與 Zhang (1996) 的分析結果做比較，並以其文中之圖表來驗證。

Zhang (1996) 使用尾跡流作為背景流場，其數學式如下：

$$\tilde{U}(\tilde{z}) = 1 - \alpha \cosh^{-2}(\sigma\tilde{z}) \quad (3.9)$$

式中取 $\alpha = 0.9988$ 、 $\sigma = 0.8814$ ，使得此流場在深度 $\tilde{z} = -1$ 時，背景流速正好為表面流速的一半，即 $\tilde{U} = 0.5$ 。

同樣考慮黏性流，使用第二章推導出的控制方程式 (2.9) 及邊界條件式 (2.10)– 式 (2.14)，去對式 (3.9) 的流場做穩定性分析，只考慮水體的部分，並忽略表面張力。Zhang (1996) 文中以不同的雷諾數 Re 、佛勞德數 Fr 作為參數，觀察發展率 $\tilde{\omega}_i$ 隨波數 \tilde{k} 的變化。在開始計算發展率之前，先對參數計算範圍內做收斂性的測試，測試結果詳見附錄四。

Zhang (1996) 文中並未列出計算出的特徵值數值，因此本研究主要以其文中之圖片結果來做比較。圖 3.1 為在 $Fr^2 = 0.5$ 時，不同雷諾數的疊圖結果。在 $Re = 100$ 的情形中，波數接近零的部分與 Zhang (1996) 的曲線不太吻合、本研究之結果發展率的峰值較小，且峰值對應的波數較大，如圖 3.1 (a) 所示。 $Re = 1000$ 與 $Re = \infty$ 的曲線與 Zhang (1996) 吻合，如圖 3.1 (a)、圖 3.1 (b)。圖 3.2 為在 $Fr^2 = 2.25$ 時，不同雷諾數的疊圖結果。圖 3.2 (a) 的情形和圖 3.1 (a) 相似，在波數小的區域沒有吻合。 $Re = 1000$ 在 $\tilde{k} > 1$ 出現第二個分支，兩分支的曲線皆與 Zhang (1996) 吻合，如圖 3.2 (b) 所示。在圖 3.2 (c) 中所呈現的是 $Re = \infty$ 的比較結果，波數較小的分支吻合，而波數較大的分支在約 $\tilde{k} > 1.5$ 之後出現發展率不連續的現象。

根據上述之比較結果，本研究使用之數值方法在處理黏性流問題是可行的，至於波數小的位置出現的不吻合推論是 Zhang (1996) 使用有限差分法所造成結果的不同，使用有限差分法不等間距格點之限制為間距之差距不能太大，尾跡流之變化主要集中在接近表面處，以較密之格點數來處理較為適當，而若在整個計算區間中

皆以細小間距之格點來計算，將會耗費許多時間，為較不經濟之作法，Zhang (1996) 文中並未詳細解釋數值方法的使用，若其格點數在邊界處不夠密集，很有可能為產生誤差的原因，而誤差只出現在 $Re = 100$ 的結果上，推論是因為雷諾數在控制方程式中影響四階微分項，且位於倒數，較小的雷諾數會放大整項，同時也會放大誤差。在以 $Re = \infty$ 做計算的案例中，可以類比為處理非黏流體的例子，本文將對發展率不連續的現象作進一步的探討，參見附錄五。提高格點數或是以不同背景流場去求解特徵值皆發生相同現象，代表此數值方法可能不適用於解析非黏系統。

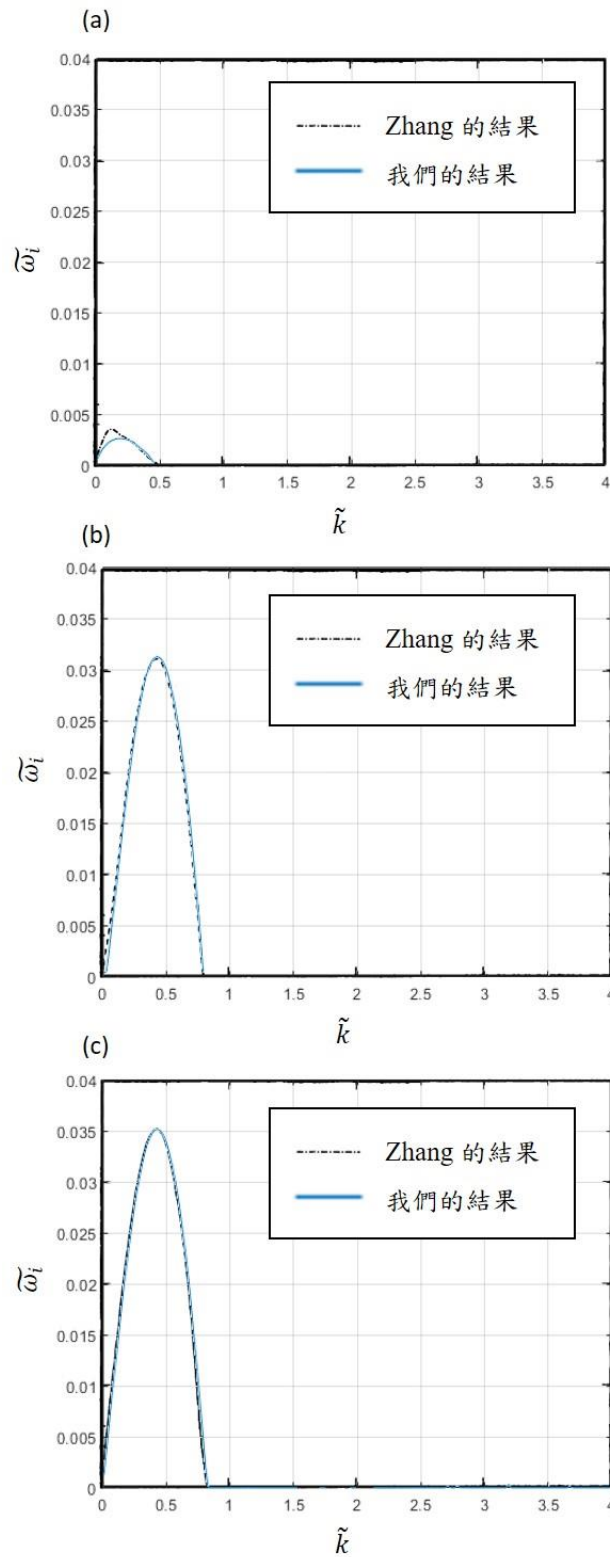


圖 3.1：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 0.5$)。 (a) $Re = 100$; (b) $Re = 1000$; (c) $Re = \infty$ 。

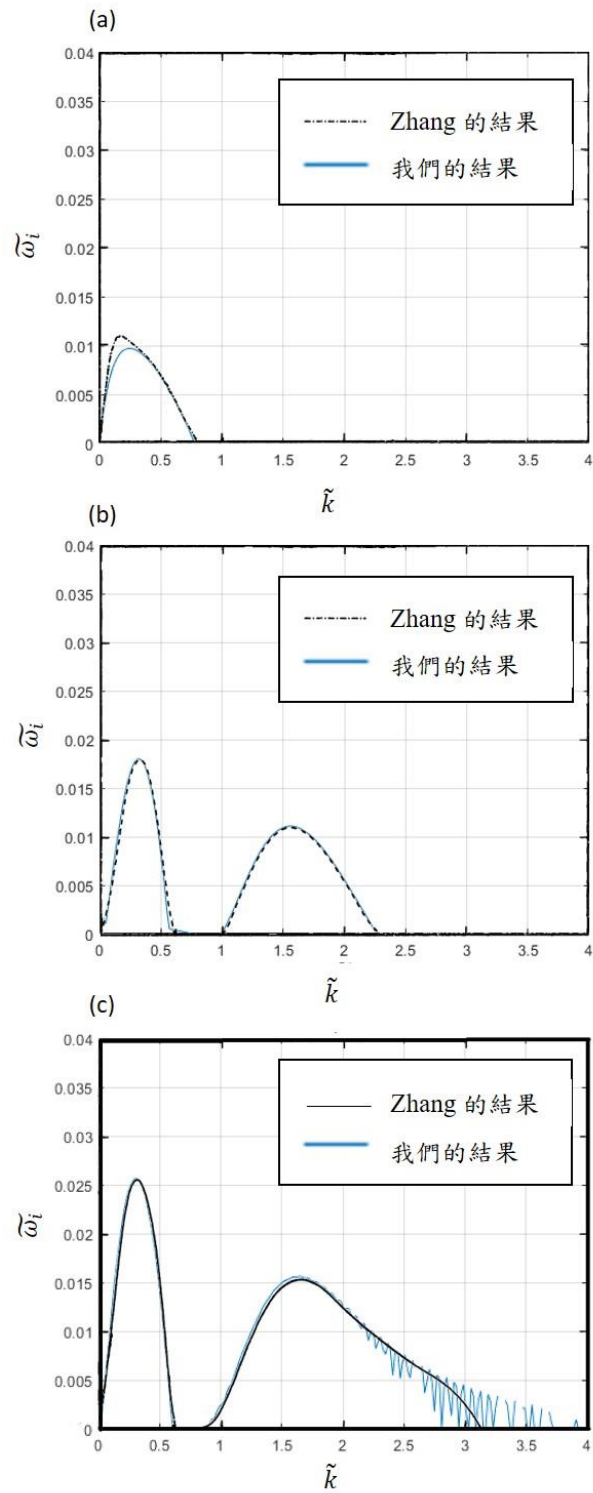


圖 3.2：發展率隨波數的變化($Fr^2 = 2.25$)。(a) $Re = 100$ ；
(b) $Re = 1000$ ；(c) $Re = \infty$ 。



3.3、 格點數之收斂性測試與截斷高度之敏感度測試

本節討論在不同風速以及波長下特徵值的收斂性，目的在於選定合適之格點數以及截斷高度來做之後的運算。

本研究考慮與沈巧婷 (2019)相同之計算區間：

$$u_* \in (0,100] \text{ cm/s}, \quad \lambda \in (0,20] \text{ cm} \quad (3.10)$$

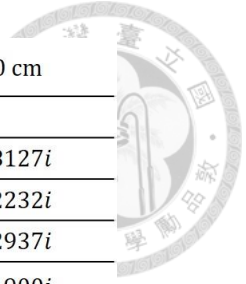
在區間中取四個參數值來計算特徵值，分別為空氣摩擦速度 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 、 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ ；波長 $\lambda = 4 \text{ cm}$ 、 $\lambda = 20 \text{ cm}$ ，觀察在不同參數值條件下，特徵值隨格點數的變化，並找到適合之格點數，避免因格點數太少而造成結果不精確，以及格點數太多造成計算時間的浪費。計算中其餘應用到的物理參數之取值如下：

$$\begin{aligned} \rho_a &= 0.0012 \text{ g/cm}^3, \quad \rho_w = 1 \text{ g/cm}^3, \quad \nu_w = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}, \\ g &= 980 \text{ cm/s}^2, \quad T = 75 \text{ dyne/cm} \end{aligned} \quad (3.11)$$

式中下標 a 表示空氣的性質、下標 w 表示水的性質。

先討論格點數多寡的收斂性分析，其結果如表 3.1-表 3.3 所示，在此固定截斷高度 $\tilde{h} = 2\pi$ 來做計算，此高度為沈巧婷 (2019)中使用的截斷高度。在 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 的狀況下， $\lambda = 4 \text{ cm}$ 只需要 $N = 80$ 即可收斂至小數點後八位， $\lambda = 20 \text{ cm}$ 在 $N = 140$ 收斂至小數點後八位，如表 3.1 所示。在 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 的狀況下，找到了兩個不穩定的模態，由表 3.2、表 3.3 可以看出兩個模態的收斂程度是相同的。 $\lambda = 4 \text{ cm}$ 時在 $N = 100$ 時收斂至小數點後八位； $\lambda = 20 \text{ cm}$ 時收斂性較差，在 $N = 160$ 收斂至小數點後七位。根據以上的結果，本研究選定 $N = 160$ 做之後的運算。

本研究在下邊界採用截斷法，即取一截斷高度 h ，在水深 $z = -h$ 處截斷，計算區間由原本的 $z \in (-\infty, 0]$ 轉變為 $z \in [-h, 0]$ ，而截斷高度的取值會對特徵值有所影響。這裡同樣用四個不同的風速、波長參數來分析，結果如表 3.4- 表 3.6 所示。四種不同的情形取 $\tilde{h} = 2\pi$ 時，至少會收斂至小數點後五位，調高截斷高度後特徵值的變化影響不大，為了方便與沈巧婷 (2019)的結果做比較，訂定截斷高度 $\tilde{h} = 2\pi$ 做之後的運算。



	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 4 \text{ cm}$	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 20 \text{ cm}$
N	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}$
40	$-0.76301202 + 0.00000568i$	$-1.83948172 + 0.00858127i$
60	$-0.76355432 + 0.00024897i$	$-1.83098697 + 0.00382232i$
80	$-0.76355153 + 0.00024897i$	$-1.83023425 + 0.00512937i$
100	$-0.76355153 + 0.00024897i$	$-1.83035160 + 0.00514900i$
120	$-0.76355153 + 0.00024897i$	$-1.83034937 + 0.00514543i$
140	$-0.76355153 + 0.00024897i$	$-1.83034936 + 0.00514547i$
160	$-0.76355153 + 0.00024897i$	$-1.83034936 + 0.00514547i$

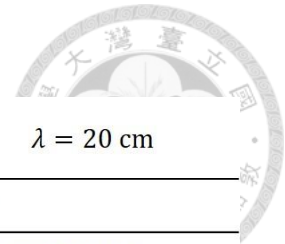
表 3.1：針對低風速($u_* = 30 \text{ cm/s}$)，於不同波長時，特徵值之收斂性測試。

	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 4 \text{ cm}$	
N	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}$
40	$-0.27576888 + 0.00488894i$	$0.30555707 + 0.00976465i$
60	$-0.27417072 + 0.00639702i$	$0.30668672 + 0.00776084i$
80	$-0.27420247 + 0.00641038i$	$0.30674609 + 0.00774989i$
100	$-0.27420249 + 0.00641014i$	$0.30674641 + 0.00775001i$
120	$-0.27420249 + 0.00641014i$	$0.30674642 + 0.00775001i$
140	$-0.27420249 + 0.00641014i$	$0.30674642 + 0.00775001i$
160	$-0.27420249 + 0.00641014i$	$0.30674641 + 0.00775001i$

表 3.2：針對高風速($u_* = 80 \text{ cm/s}$)、短波($\lambda = 4 \text{ cm}$)時，特徵值之收斂性測試。

	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 20 \text{ cm}$	
N	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}$
40	$-0.85812418 + 0.31044837i$	$0.61307044 + 0.05883018i$
60	$-0.75856232 + 0.03889126i$	$0.36276424 + 0.00058676i$
80	$-0.68881095 + 0.02400378i$	$0.39610035 + 0.01907205i$
100	$-0.68510289 + 0.02932408i$	$0.39170918 + 0.01617045i$
120	$-0.68520708 + 0.02979421i$	$0.39169634 + 0.01641522i$
140	$-0.68523659 + 0.02980665i$	$0.39169962 + 0.01639947i$
160	$-0.68523812 + 0.02980599i$	$0.39169913 + 0.01639931i$
180	$-0.68523816 + 0.02980591i$	$0.39169915 + 0.01639932i$

表 3.3：針對高風速($u_* = 80 \text{ cm/s}$)、長波($\lambda = 20 \text{ cm}$)時，特徵值之收斂性測試。



	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 4 \text{ cm}$	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 20 \text{ cm}$
\tilde{h}	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}$
1π	$-0.76196486 + 0.00025505i$	$-1.82688748 + 0.00515566i$
1.5π	$-0.76348581 + 0.00024922i$	$-1.83020584 + 0.00514589i$
2π	$-0.76355153 + 0.00024897i$	$-1.83034936 + 0.00514547i$
2.5π	$-0.76355437 + 0.00024896i$	$-1.83035556 + 0.00514545i$
3π	$-0.76355449 + 0.00024896i$	$-1.83035583 + 0.00514545i$

表 3.4：針對低風速 ($u_* = 30 \text{ cm/s}$)、不同波長下特徵值之截斷高度收斂性測試。

$$u_* = 80 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 4 \text{ cm}$$

h	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}$
1π	$-0.27366835 + 0.00642433i$	$0.30614806 + 0.00766284i$
1.5π	$-0.27418035 + 0.00641073i$	$0.30672161 + 0.00774641i$
2π	$-0.27420249 + 0.00641014i$	$0.30674641 + 0.00775001i$
2.5π	$-0.27420344 + 0.00641011i$	$0.30674749 + 0.00775017i$
3π	$-0.27420348 + 0.00641011i$	$0.30674753 + 0.00775017i$

表 3.5：針對高風速 ($u_* = 80 \text{ cm/s}$)、短波 ($\lambda = 4 \text{ cm}$) 時，特徵值之截斷高度收斂性測試。

$$u_* = 80 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 20 \text{ cm}$$

\tilde{h}	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}$
1π	$-0.68394417 + 0.02984486i$	$0.39138184 + 0.01673897i$
1.5π	$-0.68518451 + 0.02980752i$	$0.39168605 + 0.01641339i$
2π	$-0.68523815 + 0.02980590i$	$0.39169915 + 0.01639932i$
2.5π	$-0.68524048 + 0.02980584i$	$0.39169972 + 0.01639871i$
3π	$-0.68524057 + 0.02980584i$	$0.39169974 + 0.01639868i$

表 3.6：針對高風速 ($u_* = 80 \text{ cm/s}$)、長波 ($\lambda = 20 \text{ cm}$) 時，特徵值之截斷高度收斂性測試。

第四章、 計算結果與討論



4.1、 結果呈現

依 Zeisel *et al.* (2008)和沈巧婷 (2019)的中性穩定曲線 (neutral stability curve) 來看，在解析範圍中： $0 < u_* < 100$ cm/s、 $0 < \lambda < 20$ cm，發現兩種不穩定的模態，分別是低風速時出現的邁爾斯模態以及高風速時才出現的漣波模態，表示不同風速是影響不穩定模態出現的重要因素。因此本節首先觀察在不同風速下，發展率隨波長的變化，如圖 4.1。隨著風速增加，從只有一個不穩定模態，到有兩個不穩定模態的產生，如圖 4.1(c)。

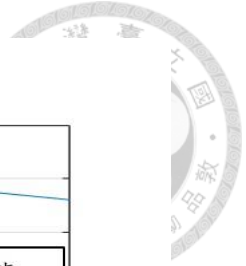
將低風速時出現的模態定義為「第一模態」、高風速時額外出現的模態定義為「第二模態」。由圖 4.1(a)- 圖 4.1(c)觀察到，第一模態與第二模態的最大發展率會隨著風速增加而變大，並且隨著風速的增加，第二模態之發展率最大值會超越第一模態，且其發展率峰值所對應的波長落在短波的區域，第一模態之發展率達到峰值之後以平緩的速度衰減。圖 4.1(c) 出現第二模態，其峰值較第一模態高出很多，且發展率在達到最大值之後衰減的速度較快。

圖 4.2 為不同風速下，角頻率隨波長的變化。第一模態之角頻率為負值，表示該模態之擾動波方向與背景流的方向是相反的，較不符合物理上的直覺；第二模態之角頻率為正值，與背景流同向，屬於比較合理的結果。

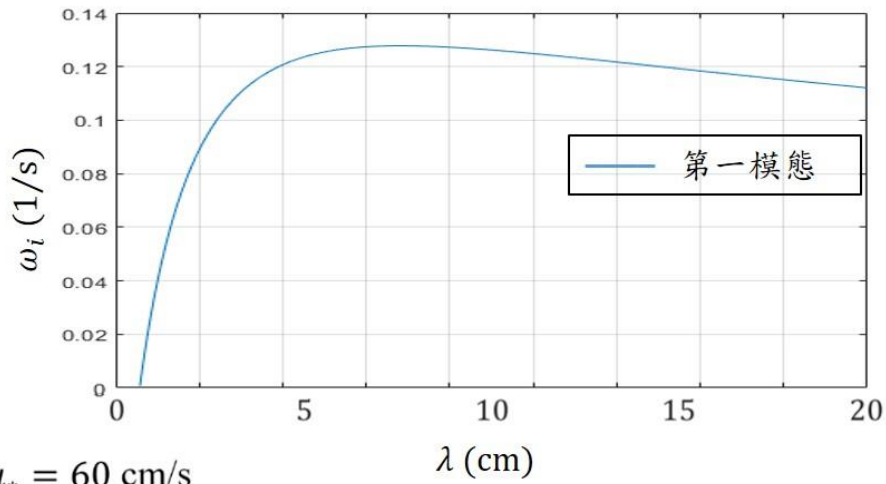
為了瞭解兩模態在計算區間的分布情形，透過找出中性點 ($\omega_i = 0$) 來繪製中性穩定曲線，如圖 4.3 所示。中性穩定曲線分隔出穩定模態與單一不穩定模態區域 (如圖 4.3 之藍線)，以及分隔出單一不穩定模態與雙重不穩定模態區域 (如圖 4.3 之橘線)。找出中性點的方法為利用其發展率由負轉正的性質，在計算區間中找到發展率為零的點，並應用割線法 (secant method) 內插出更精準的焦點。在單一不穩定模態區域的參數下會找到第一模態，而在雙重不穩定模態區域的參數下第一模態與第二模態會同時存在。

個別對兩不穩定模態的發展率與角頻率作等值線圖，並以中性穩定曲線圖中的不穩定區域來呈現，如圖 4.4、圖 4.5。由圖 4.4 中可以觀察到，兩模態的發展

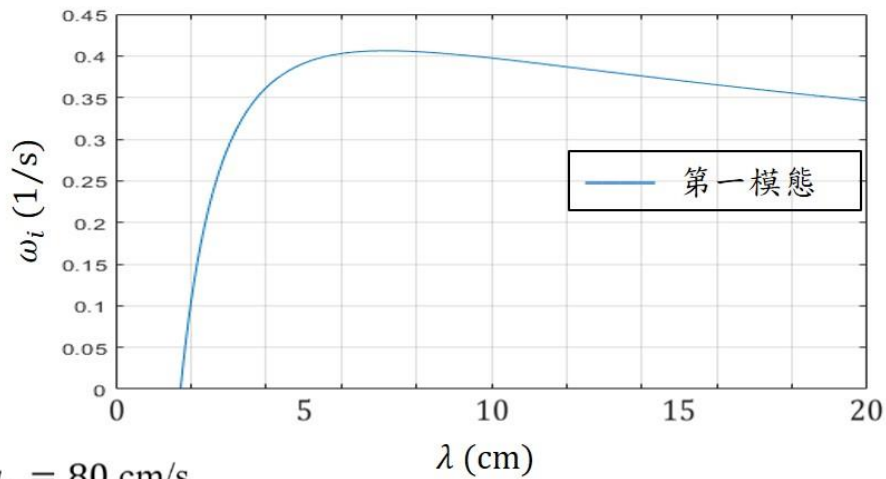
率皆會隨著風速增加而增長，並且在高風速的情況下，第二模態的發展率最大值大於第一模態之發展率最大值。由圖 4.5 可以看出，短波有較大的角頻率，在此也發現第一模態在其出現的範圍角頻率皆為負值，表示此不穩定波行進方向是與水流方向相反的，此一現象較不符合物理的常規，但尚未在其他文獻中發現有學者對類似案例特別做討論，所以之後仍會繼續對此模態作分析。



(a) $u_* = 40$ cm/s



(b) $u_* = 60$ cm/s



(c) $u_* = 80$ cm/s

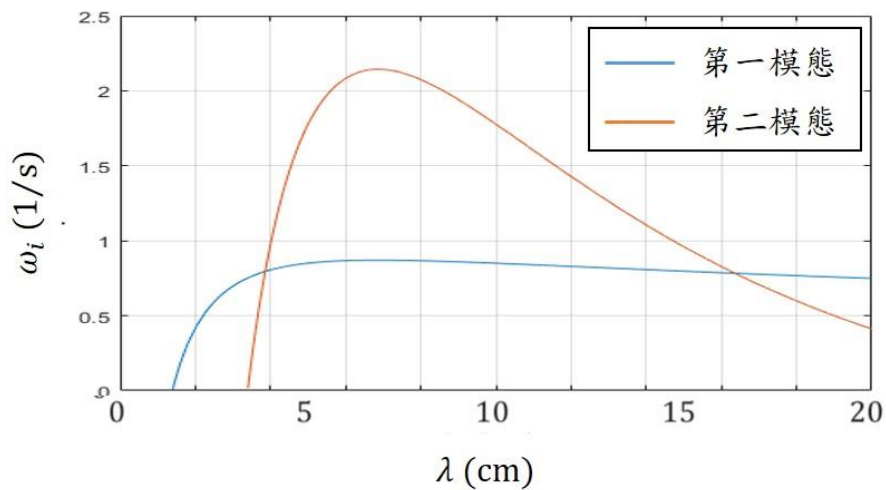
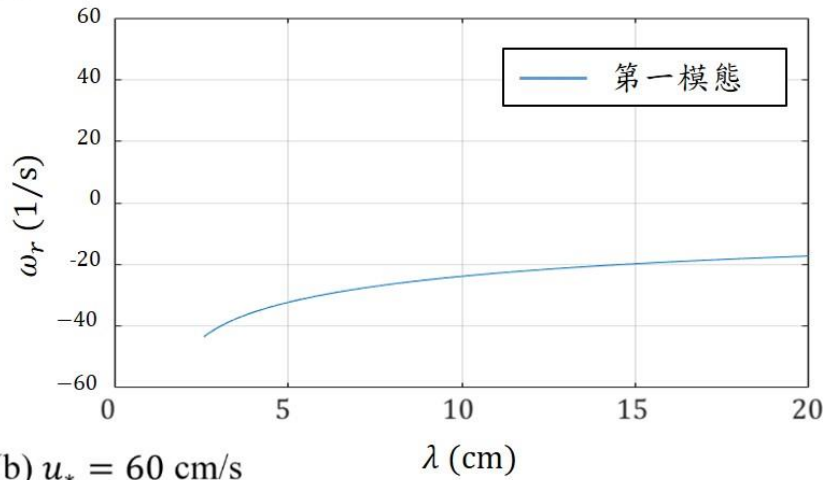


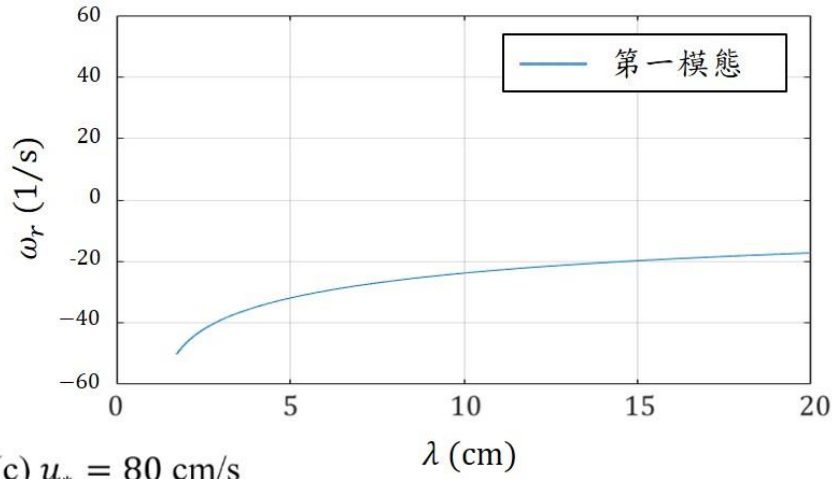
圖 4.1: 不同風速下, 發展率隨波長的變化。(a) $u_* = 40$ cm/s; (b) $u_* = 60$ cm/s; (c) $u_* = 100$ cm/s。藍線表示為第一模態、紅線為第二模態。



(a) $u_* = 40$ cm/s



(b) $u_* = 60$ cm/s



(c) $u_* = 80$ cm/s

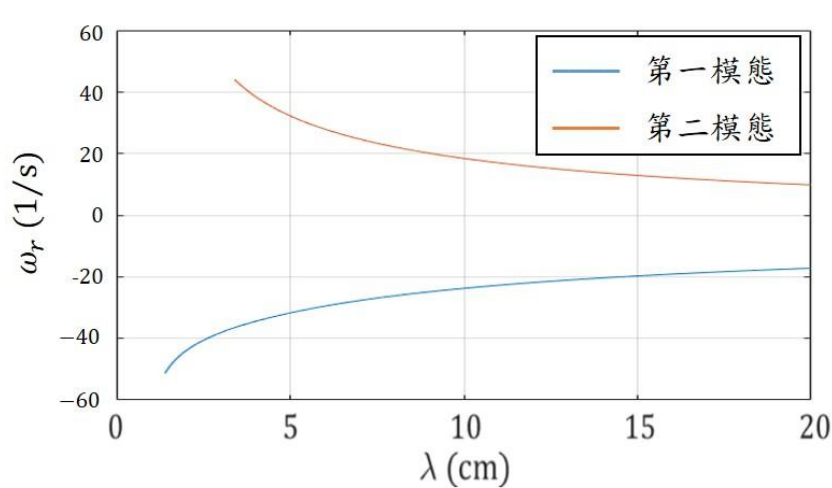


圖 4.2：不同風速下，角頻率隨波長的變化。(a) $u_* = 40$ cm/s；(b) $u_* = 60$ cm/s；
(c) $u_* = 100$ cm/s。藍線表示為第一模態、紅線為第二模態。

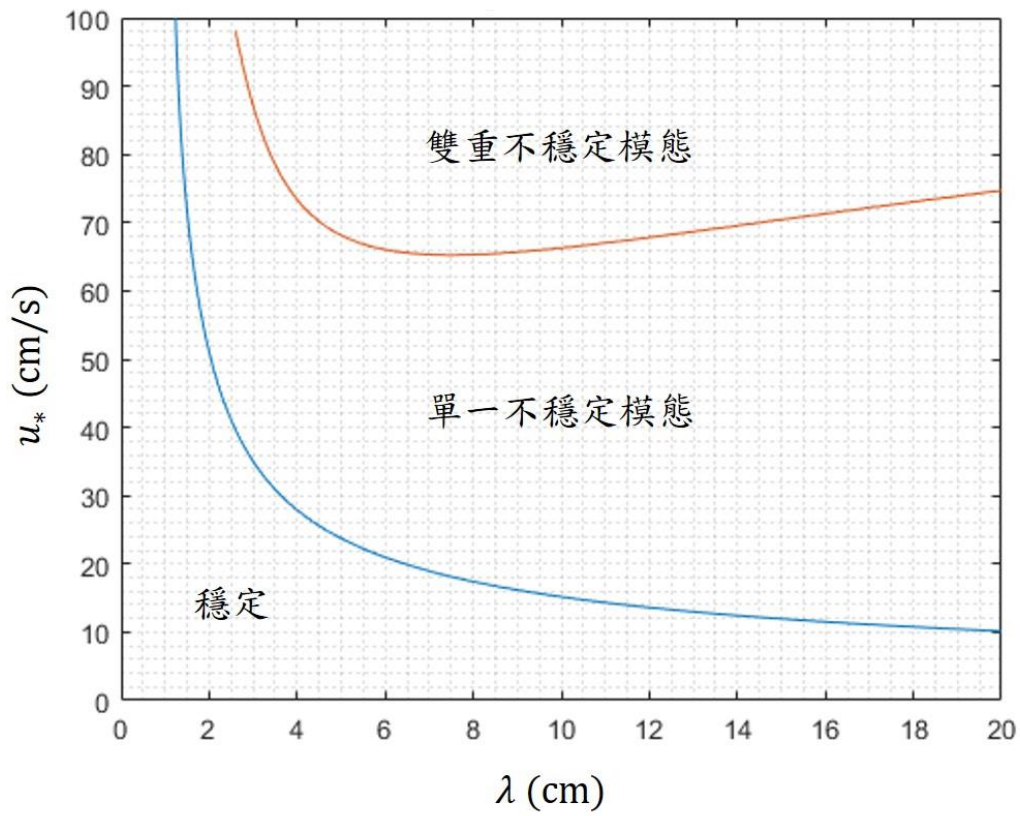


圖 4.3：中性穩定曲線圖。

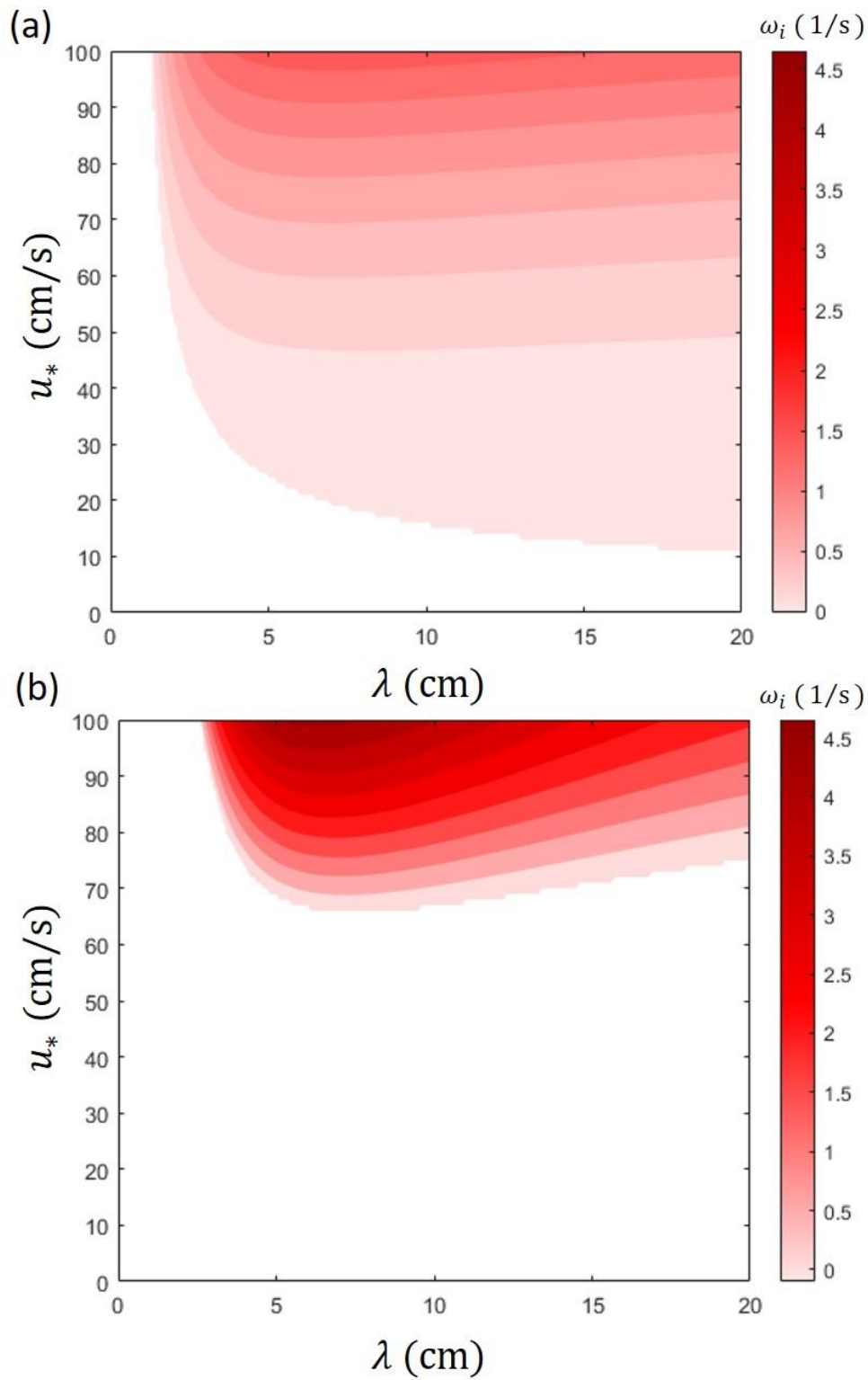


圖 4.4：發展率於不同風速、波長之分布情形。(a) 第一模態；(b) 第二模態。

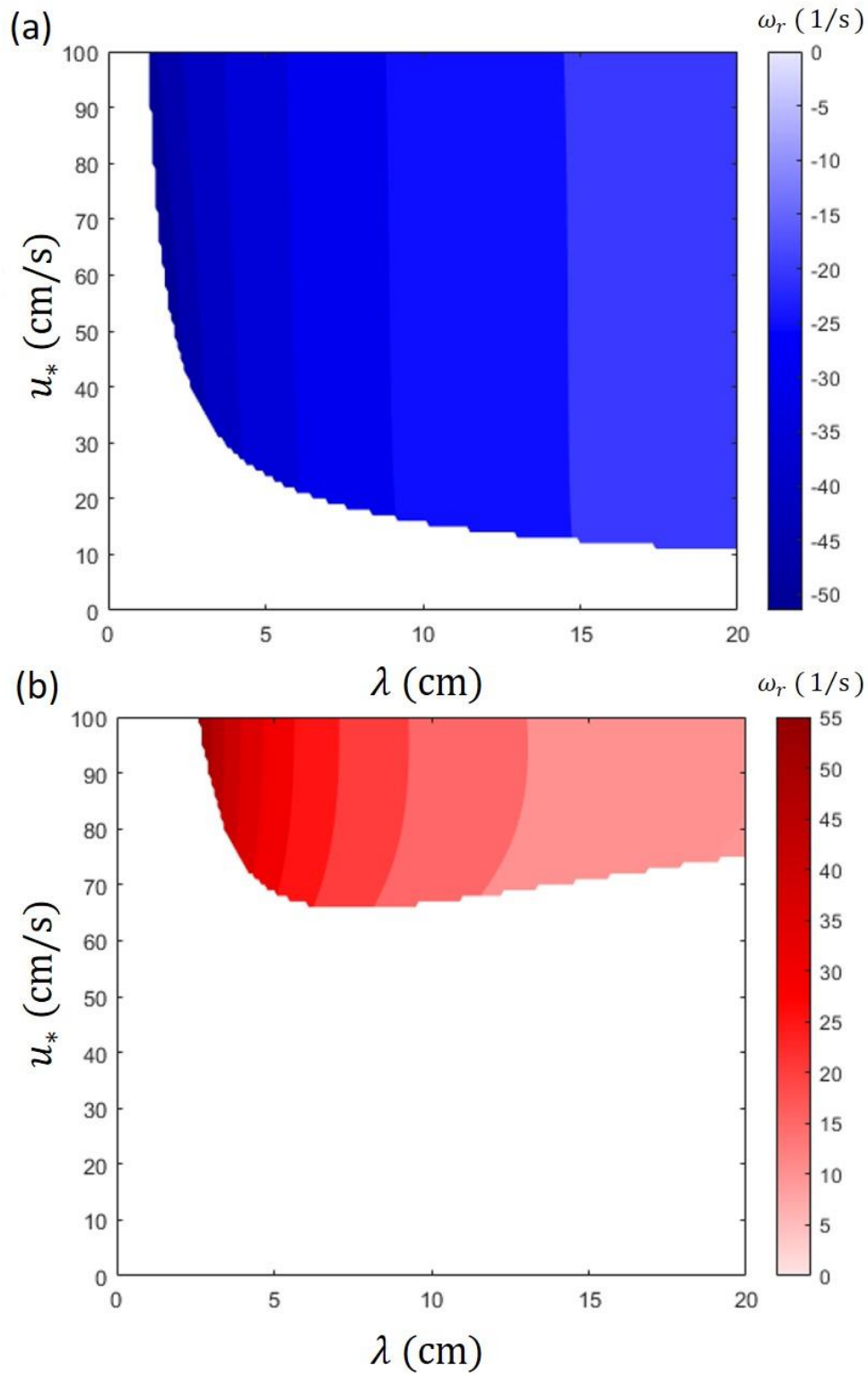


圖 4.5：角頻率於不同風速、波長之分布情形。(a) 第一模態；(b) 第二模態。



4.2、 結果之比較與討論

在 Zeisel *et al.* (2008)文中也針對水體流場做穩定性分析，在兩個參數值做測試，分別為 $u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 5 \text{ cm}$ 以及 $u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 5 \text{ cm}$ ，代表低風速與高風速的情形。對照到本研究的不穩定模態分布區間來看，低風速的案例是落在單一不穩定模態區域，而高風速的案例落在雙重不穩定模態區域。根據 Zeisel *et al.* (2008)的結果，在低風速時計算出的特徵值為 $\omega/\omega_0 = 1.14 - 0.005i$ ，高風速時的特徵值為 $\omega/\omega_0 = 0.865 + 0.0508i$ ，式中 $\omega_0 = 37.1529 \text{ 1/s}$ ，為線性水波理論角頻率值。低風速時的發展率為負值，表示在此風速及波長條件下為穩定模態，而本研究以此參數解析會得到不穩定之第一模態，兩結果不相符，但是在經矩陣運算的多個特徵值中，若將穩定的模態也一併討論，有一解為 $\omega/\omega_0 = 1.1457 - 0.0053i$ ，與 Zeisel *et al.* (2008)的結果十分接近。在高風速的情況下，本研究之第二模態計算出的特徵值為 $\omega/\omega_0 = 0.8650 + 0.0526i$ ，能夠對照 Zeisel *et al.* (2008)的結果，但是 Zeisel *et al.* (2008)只找到了一個不穩定模態，本研究在此參數值同時找到第一模態與第二模態。

根據以上的比較，本研究的結果與 Zeisel *et al.* (2008)的結果誤差皆在10%以內，可以驗證本研究計算的正確性。但本研究中找出的第一模態，並未出現在 Zeisel *et al.* (2008)的結果之中、無法對照，因此不確定此數值計算的結果是否為真實存在的物理現象。

接下來看到不穩定模態的參數分布範圍，本研究與解析氣-水耦合流場皆得到兩個不穩定模態，圖 4.6 中之邁爾斯模態與漣波模態為以沈巧婷 (2019)之結果所繪製之示意圖。本研究解析之第一模態與邁爾斯模態分布區域較廣，從低風速至高風速皆可能發生，但是在性質上，第一模態之角頻率為負值，擾動波傳遞方向相反，與邁爾斯模態截然不同，是兩個完全不相干的不穩定模態。至於本研究之第二模態與漣波模態的分布較為接近，皆在高風速域出現，其臨界風速（即出現此模態的最低風速）為 $u_* = 65.22 \text{ cm/s}$ ，而沈巧婷 (2019)解析的邁爾斯模態臨界風速為 $u_* = 4.58 \text{ cm/s}$ （圖中紅圈位置）、漣波模態臨界風速為 $u_* = 48.3 \text{ cm/s}$ ，本研究之臨界風速較大、不穩定模態分布在較高風速的區域。在 Young and Wolfe (2014)

有對漣波模態設立一必要條件，即 $U_0 > c_{min} \approx 23 \text{ cm}$ ，本研究中定義 $U_0 = 0.5u_*$ ，第二模態也滿足此漣波模態之必要條件。

圖 4.7 將 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 時本研究第二模態的發展率與沈巧婷 (2019) 的兩個不穩定模態做疊圖比較，本研究的發展率與沈巧婷 (2019) 的兩個模態相比要小非常多，推論可能的原因為：水體流場之能量主要由空氣流場傳遞，本研究忽略空氣流場擾動後，可能使水體流場之能量來源消失，或是兩流體間的交互作用被移除，造成發展率很小。圖 4.8 為角頻率之比較，以半對數座標來呈現，加入線性水波角頻率一同比較，四條曲線分布趨勢類似，並且皆在同一個數量級。

本研究求解廣義特徵值方程組 $[A]\{x\} = \tilde{\omega}[B]\{x\}$ ，得到特徵值 $\tilde{\omega}$ 以及特徵向量 $\{x\}$ 。藉由找出最大虛部特徵值以及其對應之特徵向量回推出流函數 $\tilde{\phi}$ ，如式 (3.3)。再利用式 (2.6 a)、式 (2.6 b) 可以得到擾動速度 u' 、 w' 。將擾動速度在 x - z 平面的分布繪製出，並平移水平軸使得相位一致，之後與沈巧婷 (2019) 的結果做比較，如圖 4.9-圖 4.12。沈巧婷 (2019) 解析氣-水耦合流場，本文為了方便比較，只繪出水體流場的擾動速度、忽略掉空氣流場的擾動速度。在水平擾動速度的圖片繪製上，由於擾動在接近水面的區域變化較大，所以調整圖片呈現範圍於深度較淺處。依圖 4.9 的結果來看，三個不穩定模態皆有表層速度方向與深層速度方向不同的現象，而第二模態與漣波模態之半波高對應表面流速方向是一致的，波峰對應到水平擾動速度的負極值。而在垂直擾動速度的部分，三個模態的圖形分布很相似，但是彼此的相位都不同，而漣波模態靠近水面的部分速度會向左延伸，如圖 4.10 所示。在 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 20 \text{ cm}$ 的情況中對應到沈巧婷 (2019) 的漣波模態區域，比較結果如圖 4.11、圖 4.12。由圖 4.11，半波高相位對應表面擾動速度與漣波模態相似；圖 4.12 中垂直擾動速度的分布也相似，僅有小小的平移。由圖 4.9-圖 4.12 的比較結果來看，第二模態並不能明顯地對應漣波模態或是邁爾斯模態，若單就特徵值來比較，如表 4.1、表 4.2，本研究的第二模態發展率小很多，沒辦法與解析氣-水流場的邁爾斯模態和漣波模態相比。

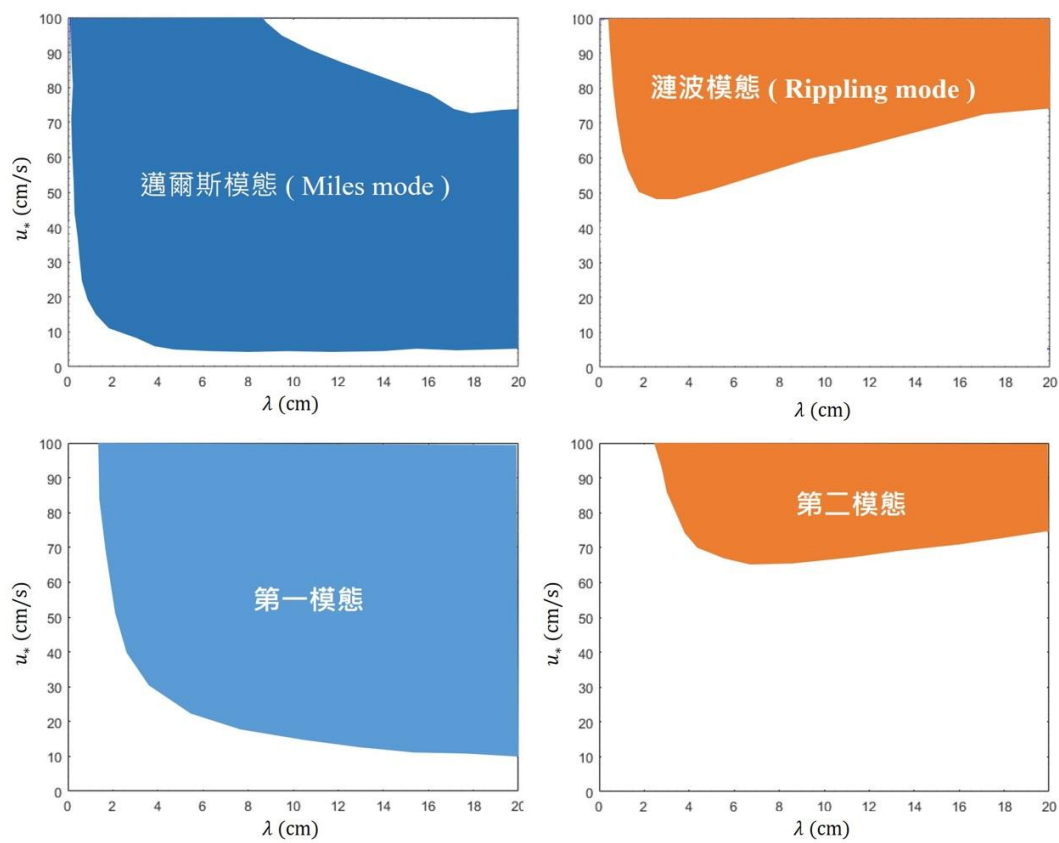


圖 4.6：不穩定模態之分布範圍比較圖。

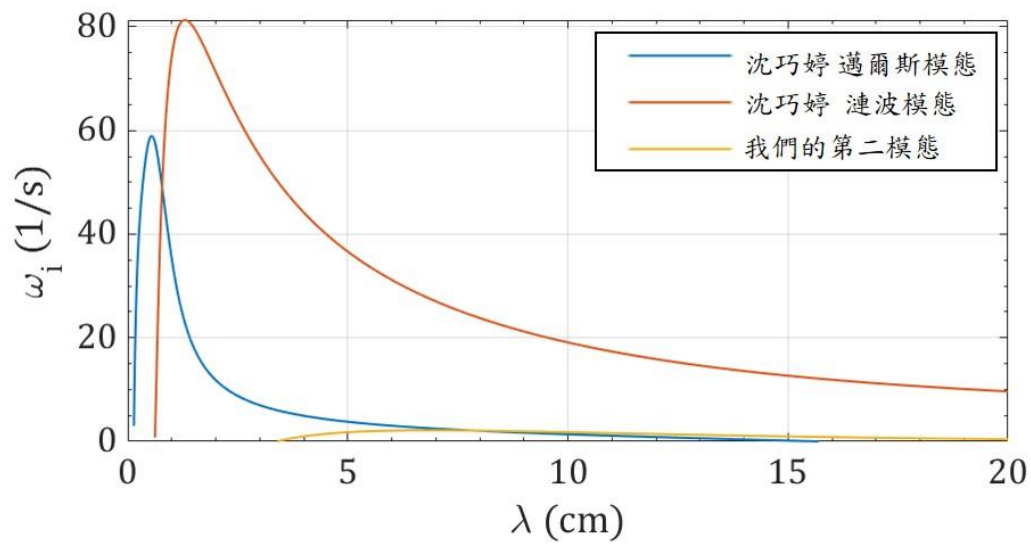


圖 4.7：發展率隨波長變化比較圖 ($u_* = 80$ cm/s)。—— 表示沈巧婷解析之邁爾斯模態；—— 表示沈巧婷解析之漣波模態；—— 表示本研究解析之第二模態。

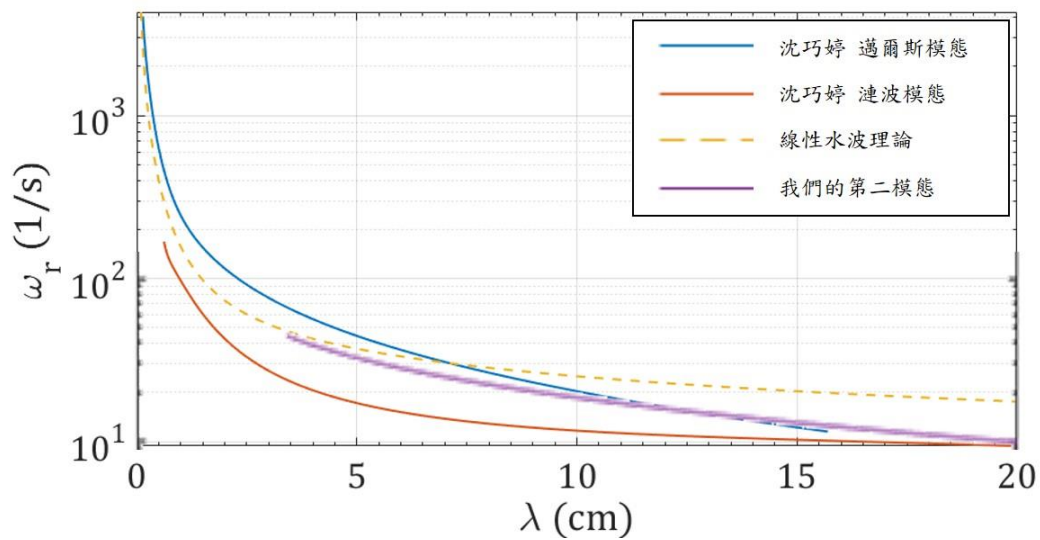


圖 4.8：角頻率隨波長變化比較圖($u_* = 80$ cm/s)。—— 表示沈巧婷解析之邁爾斯模態；—— 表示沈巧婷解析之漣波模態；—— 表示線性水波理論之角頻率；—— 表示本研究解析之第二模態。

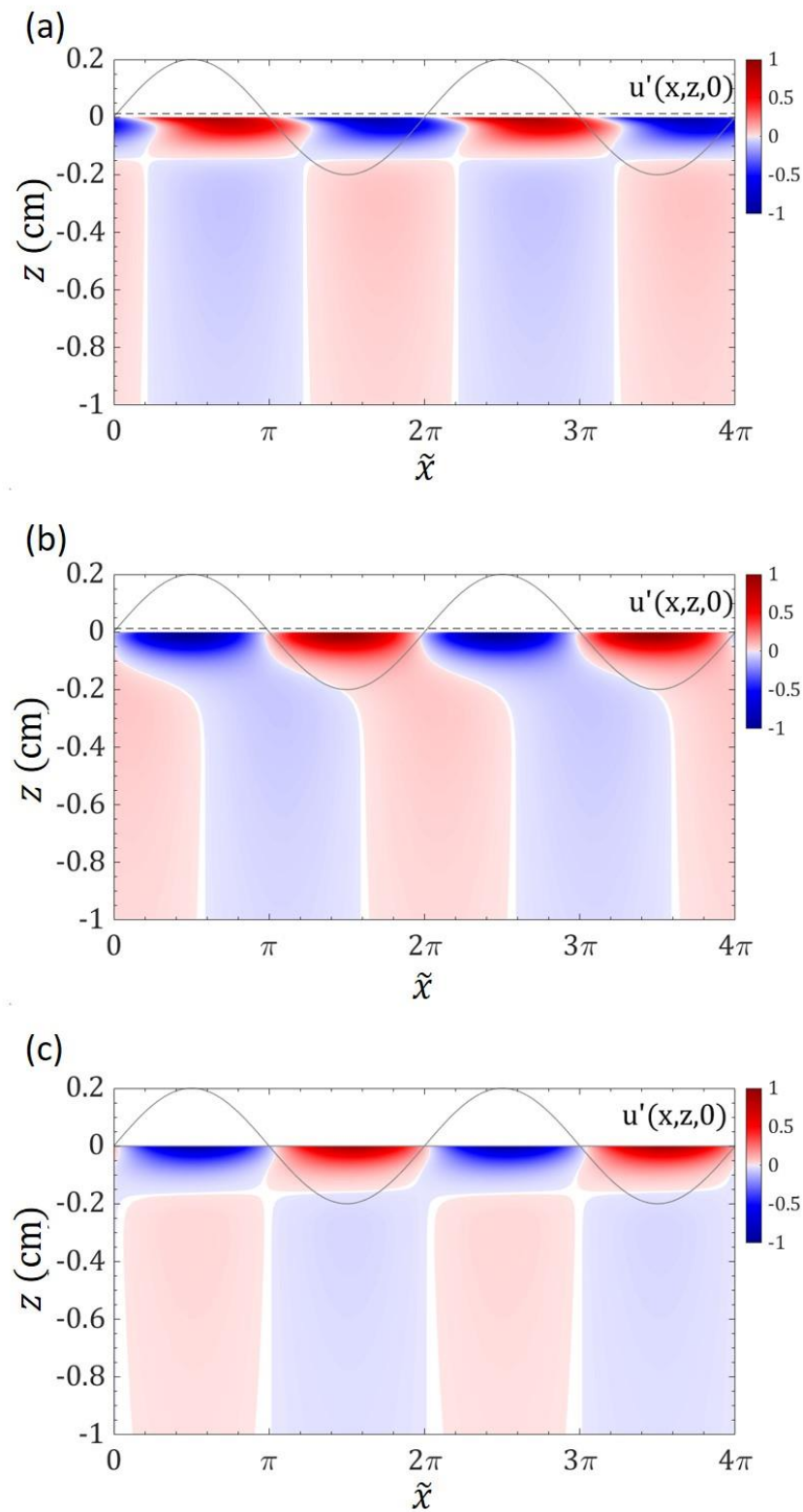
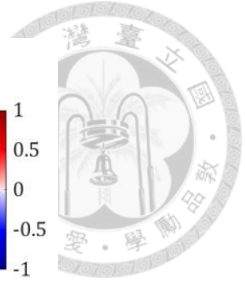


圖 4.9：水平擾動速度分布圖，在 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 5 \text{ cm}$ 。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之邁爾斯模態；(b) 沈巧婷之漣波模態；(c) 本研究之第二模態。

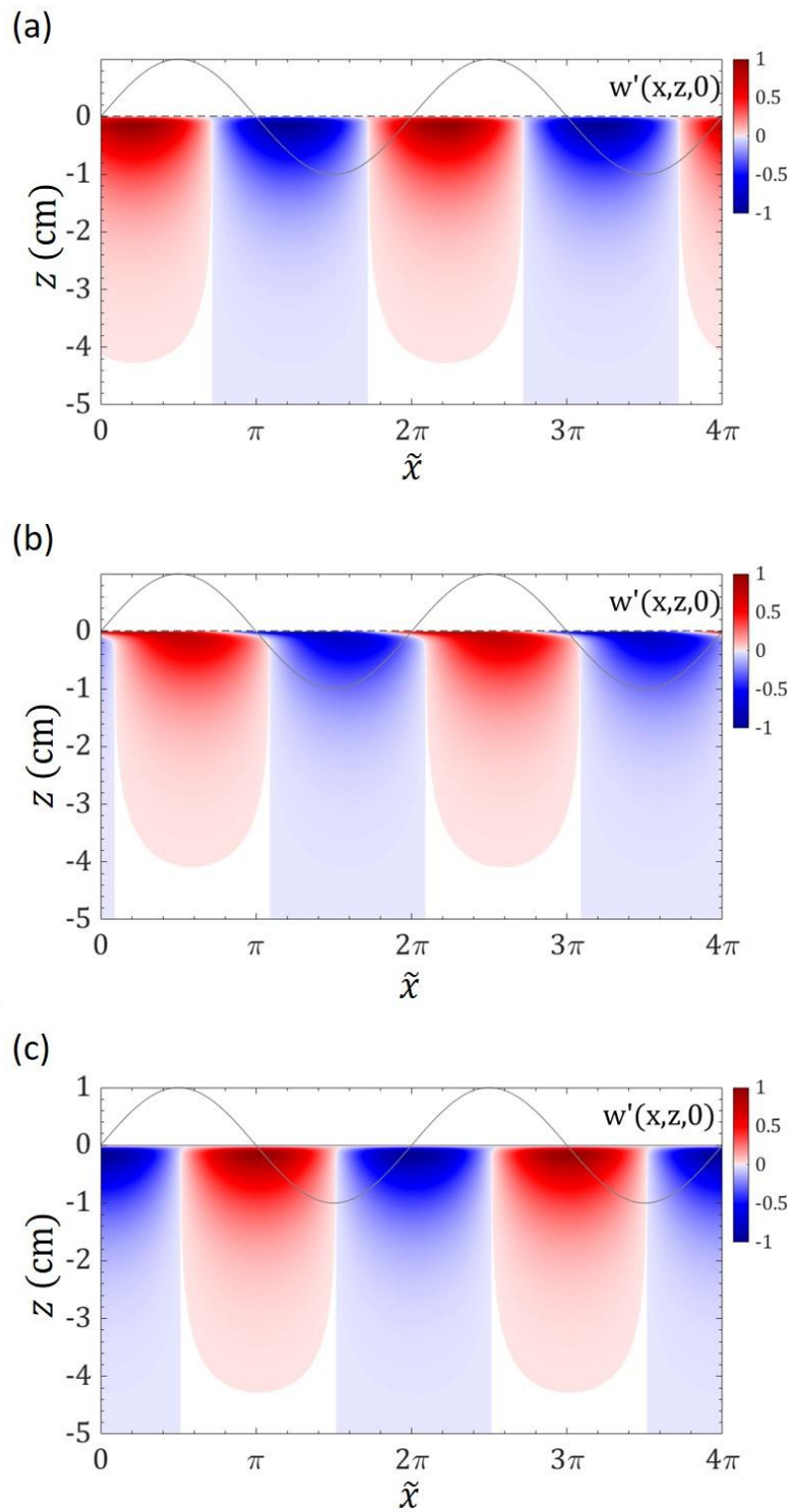


圖 4.10：垂直擾動速度分布圖，在 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 5 \text{ cm}$ 。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之邁爾斯模態；(b) 沈巧婷之漣波模態；(c) 本研究之第二模態。

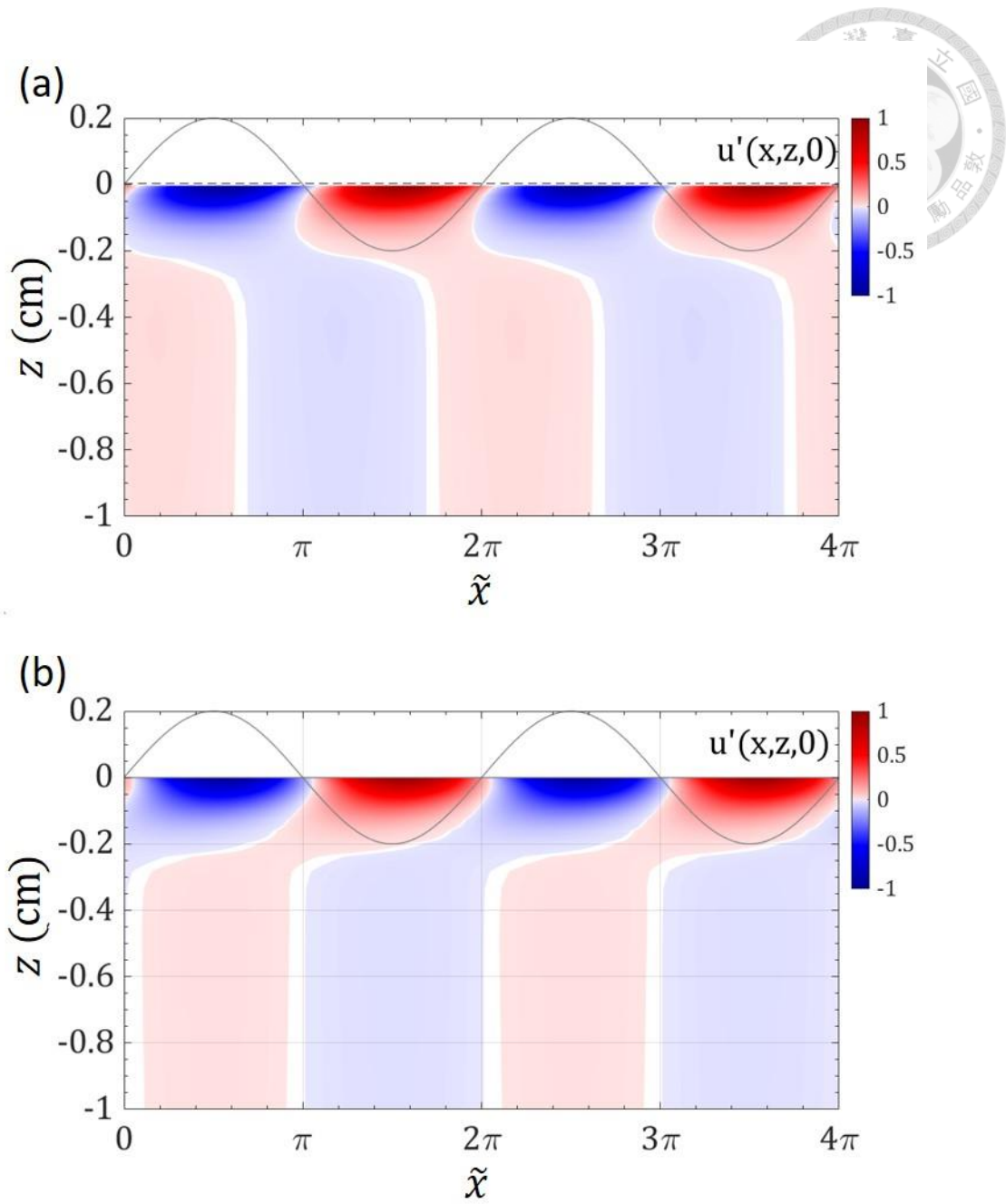


圖 4.11：水平擾動速度分布圖，在 $u_* = 80$ cm/s、 $\lambda = 20$ cm。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之漣波模態；(b) 本研究之第二模態。

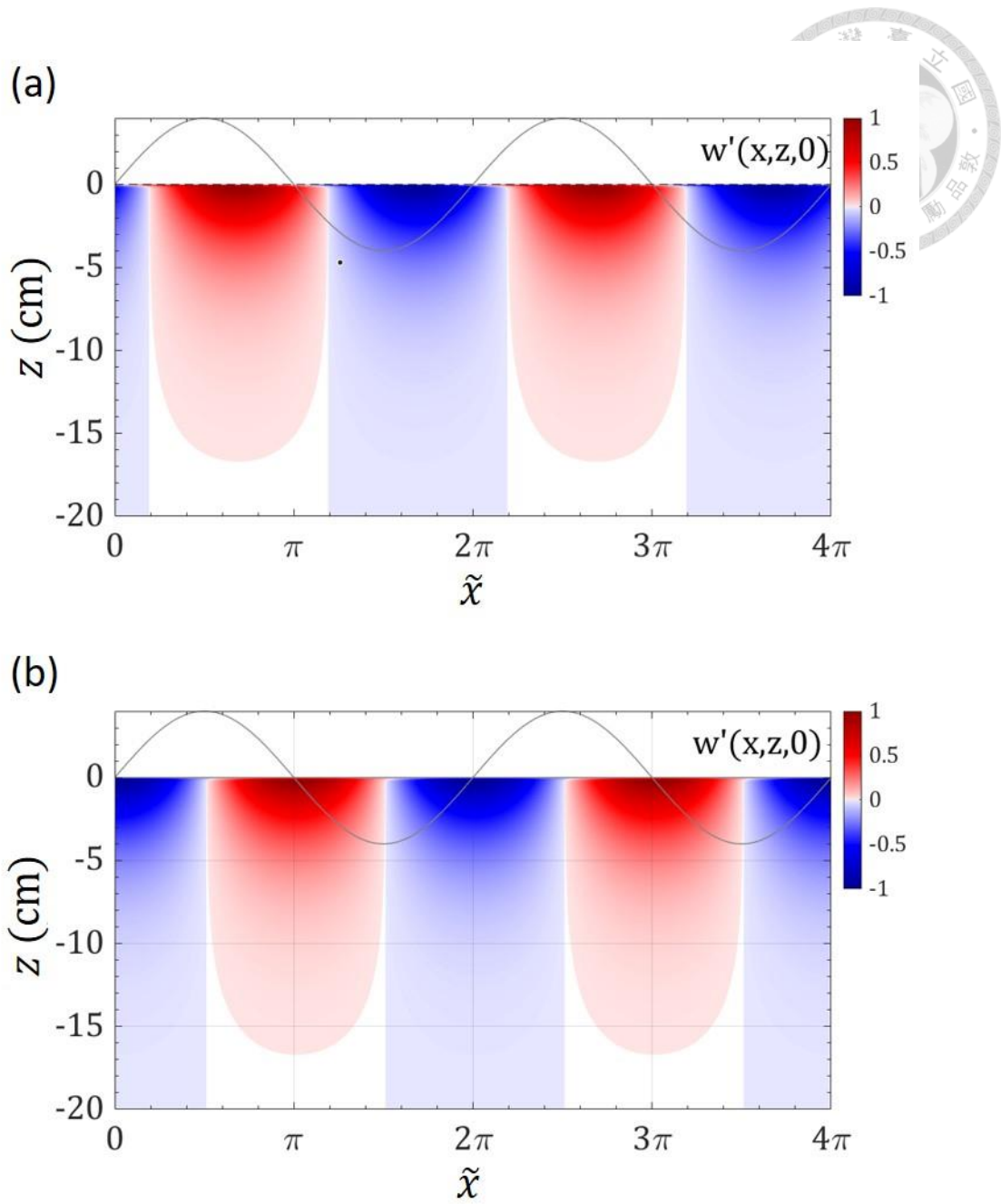


圖 4.12：垂直擾動速度分布圖，在 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 20 \text{ cm}$ 。灰線表示半波高的相位。(a) 沈巧婷之漣波模態；(b) 本研究之第二模態。

$$u_* = 80 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 5 \text{ cm}$$

	沈巧婷之邁爾斯模態	沈巧婷之漣波模態	我們的第二模態
ω	$44.5758 + 3.79395i$	$17.2465 + 36.6116i$	$32.2602 + 1.7763i$

表 4.1：在 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 5 \text{ cm}$ 的最不穩定之特徵值比較。

$$u_* = 80 \text{ cm/s}, \quad \lambda = 20 \text{ cm}$$

	沈巧婷之漣波模態	我們的第二模態
ω	$9.03196 + 10.1273i$	$9.8445 + 0.4122i$

表 4.2：在 $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 20 \text{ cm}$ 的最不穩定之特徵值比較。

第五章、 結論



本研究以契比雪夫配置法解析水體流場，目的在於探討水體流場所產生的不穩定模態在氣-水耦合流場中扮演的角色，及其是否與邁爾斯模態和漣波模態有關聯性，並與前人研究結果做比較。

在計算範圍 $0 < u_* < 100$ cm/s、 $0 < \lambda < 20$ cm 之中，本研究發現了兩種不穩定模態，分別定義為低風速時即產生的「第一模態」，以及高風速時額外產生的「第二模態」。兩模態性質迥異，最引人注意的是第一模態的角頻率 ω_r 為負值，代表此一模態的擾動波行進方向與水流相反。在與 Zeisel *et al.* (2008) 的比較中，計算出的特徵值誤差在10%以內，可由此驗證本研究之計算結果之正確性。不過其中只有第二模態的特徵值是可以對應的，第一模態並未在 Zeisel *et al.* (2008) 文中被提出，因此對於第一模態是否存在於真實流場抱著懷疑的態度。再來考慮本研究之第二模態，其參數分佈的區域與漣波模態較為相近，皆在高風速時發生，並滿足 Young and Wolfe (2014) 文中對於漣波模態的必要條件，但其發展率 ω_i 與邁爾斯模態或是漣波模態相比皆小很多，而透過特徵向量推導出的擾動速度分布也無法直接歸類為邁爾斯模態或漣波模態。

根據 Young and Wolfe (2014) 文中提出：邁爾斯模態由空氣流場所主導、漣波模態由水體流場主導。本研究針對水體流場作解析找到之不穩定模態，第一模態無法與解析氣-水耦合流場之不穩定模態對應，第二模態性質與漣波模態接近，雖然無法由性質來證明兩模態相同，不過依第二模態的分布範圍來看，可以驗證該區域確實是由水體流場所影響之不穩定性，證明漣波模態是由水體流場所影響。

參考文獻



- Dimas, A. A. & Triantafyllou, G. S. (1994). Nonlinear interaction of shear flow with a free surface. *J. Fluid Mech.* **260**, 211-246.
- Longuet-Higgins, M. S. (1998). Instabilities of a horizontal shear flow with a free surface. *J. Fluid Mech.* **364**, 147-162.
- Morland, L. C., Saffman, P. G. & Yuen, H. C. (1991). Waves generated by shear layer instabilities. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **433**(1888), 441-450.
- Stern, M. E. & Adam, Y. A. (1974). Capillary waves generated by a shear current in water. In *Fifth Liege Colloquium on Ocean Hydrodynamics* (ed. J. Nihoul).
- Yih, C.-S. (1972). Surface waves in flowing water. *J. Fluid Mech.* **51**(2), 209-220.
- Young, W. & Wolfe, C. (2014). Generation of surface waves by shear-flow instability. *J. Fluid Mech.* **739**, 276-307.
- Zeisel, A., Stiassnie, M. & Agnon, Y. (2008). Viscous effects on wave generation by strong winds. *J. Fluid Mech.* **597**, 343-369.
- Zhang, C. C. (1996). *Turbulent free-surface wakes behind towed models: experimental measurements, numerical simulations and stability analysis*. (Ph.D. thesis), Mass. Inst. of Technol.
- 沈巧婷 (2019)。應用契比雪夫配置法探討氣-水耦合流場之穩定性分析。國立臺灣大學工程科學與海洋工程研究所碩士論文，台北市。
- 張維鈞 (1998)。海-氣耦合剪流場的穩定性分析。國立海洋大學海洋科學研究所碩士論文，基隆市。

附錄一、流體應力關係式



本章節參考張維鈞 (1998)之流體應力推導方式。

在三維座標中，考慮兩種流體彼此不相溶或難溶，兩流體間存在一界面。作用於流體的應力張量可以表示為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

式中兩下標分別表示作用面與力的方向。

兩流體間交界面以 $F(x, y, z, t)$ 來表示，在此交界面上一點 (x, y, z) ，其單位法向量可表示成：

$$(l, m, n) = \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \right) \quad (\text{A.2})$$

式中下標 x 、 y 、 z 分別表示對三方向之偏微分。

令 R_1 、 R_2 為曲率半徑，所以在交界面處可得到之應力平衡關係式如下：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1})l \\ \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1})m \\ \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1})n \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

式中 T 為表面張力係數，在此假設其在此界面上均勻分布，為一定值。

對於不可壓縮流的應力張量可以表示為以下形式：

$$\begin{bmatrix} P - 2\mu u_x & -\mu(u_y + v_x) & -\mu(u_z + w_x) \\ -\mu(v_y + u_x) & P - 2\mu v_y & -\mu(v_z + w_y) \\ -\mu(w_z + u_x) & -\mu(w_z + v_y) & P - 2\mu w_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

式中 P 為總壓力。以 $\eta(x, y, t)$ 表示半波高的變化，並定義一函數來表示兩流體間之交界面 $F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t)$ ，代入式 (A.2) 後可得到單位法向量為：

$$(l, m, n) = \left(\frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}}, \frac{\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}} \right) \quad (\text{A.5})$$

再將式 (A.4) 及式 (A.5) 代入式 (A.3) 之中，得到三方向之應力平衡式如下：

$$P\eta_x - \mu[2u_x\eta_x + (u_y + v_x)\eta_y - (u_z + w_x)] = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})\eta_x \quad (\text{A.6 a})$$

$$P\eta_y - \mu[(v_x + u_y)\eta_x + 2v_y\eta_y + (v_z + w_y)] = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})\eta_y \quad (\text{A.6 b})$$

$$-P - \mu[(u_z + w_x)\eta_x + (v + w_y) - 2w_z] = -T(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \quad (\text{A.6 c})$$

因本研究只考慮二維流場（ $x-z$ 座標），故將式（A.6）簡化為以下形式，分別代表 x 及 z 方向之應力平衡式：

$$P\eta_x - \mu[2u_x\eta_x - (u_z + w_x)] = T\eta_x R^{-1} \quad (\text{A.7 a})$$

$$-P - \mu[(u_z + w_x)\eta - 2w_z] = -TR^{-1} \quad (\text{A.7 b})$$

假設法向量與 x 軸夾 θ 角，根據單位法向量可以得到 $\cos\theta = \eta_x/\sqrt{\eta_x^2 + 1}$ 、 $\sin\theta = -1/\sqrt{\eta_x^2 + 1}$ ，將式（A.7 a）乘上 $\cos\theta$ 、式（A.7 b）乘上 $\sin\theta$ ，相加後得出法向分項之應力平衡式：

$$P - \frac{2\mu[u_x\eta_x^2 - (u_z + w_x)\eta_x + w_z]}{1 + \eta_x^2} = TR^{-1} \quad (\text{A.8})$$

將式（A.7 a）乘上 $\sin\theta$ ，減去式（A.7 b）乘上 $\cos\theta$ ，得到切向分量之應力平衡式：

$$2\mu(u_x - w_z)\eta_x + \mu(u_z + w_x)(\eta_x^2 - 1) = 0 \quad (\text{A.9})$$

將曲率半徑 $R = (1 + \eta_x^2)^{3/2}/\eta_{xx}$ 代入式（A.8），最後得到法向及切向之應力平衡式如下：

$$P - \frac{2\mu[u_x\eta_x^2 - (u_z + w_x)\eta_x + w_z]}{1 + \eta_x^2} = T \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} \quad (\text{A.10})$$

$$2\mu(u_x - w_z)\eta_x + \mu(u_z + w_x)(\eta_x^2 - 1) = 0 \quad (\text{A.11})$$

附錄二、邊界條件推導



本研究探討水體流場之穩定性，但是在上邊界 $z = \eta$ 處仍考慮是空氣與水的交界面，以此前提做邊界條件之推導，並參考張維鈞 (1998) 文中推導之方法利用泰勒展開式將成立於 $z = \eta$ 之方程式對應到 $z = 0$ 處。

(1) 上邊界之運動邊界條件 (kinematic boundary condition)

定義一函數來表示兩流體間之交界面 $F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t)$ ，空氣與水的流體粒子皆無法穿透此一界面。即

$$\frac{DF(x, z, t)}{dt} = 0 \quad (\text{B.1})$$

將 $F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t)$ 代入上式，得到：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial \eta}{\partial x} = w' \quad (\text{B.2})$$

上式滿足於 $z = \eta$ 處，使用泰勒級數對 $z = 0$ 展開：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \left[U(0) + \eta(x, t) \frac{dU}{dz} \Big|_{z=0} + \dots \right] \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \\ + \left[u'(x, 0, t) + \eta(x, t) \frac{du'}{dz} \Big|_{z=0} + \dots \right] \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \\ = w'(x, 0, t) + \eta(x, t) \frac{dw'}{dz} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

忽略非線性項，再代入半波高的正交模展開 $\eta = qe^{i(kx - \omega t)}$ 以及使用流函數 $\psi(x, z, t) = \phi(z)e^{i(kx - \omega t)}$ 來取代擾動速度：

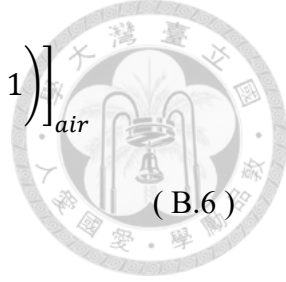
$$k\phi + U_0 kq = \omega q \quad (\text{B.4})$$

最後引入無因次物理量，得到無因次之上邊界運動邊界條件。

$$\tilde{k}\tilde{\phi} + \tilde{U}_0 \tilde{k}\tilde{q} = \tilde{\omega}\tilde{q}, \quad z = 0 \quad (\text{B.5})$$

(2) 上邊界之切向應力平衡

空氣與水的切向應力在交界面 $z = \eta$ 處會連續，切向應力之方程式參見附錄一之式 (A.11)，並加入擾動項：



$$\begin{aligned}
& \left[2\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu \left(\frac{dU}{dz} + \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \right]_{air} \\
& = \left[2\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. + \mu \left(\frac{dU}{dz} + \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \right]_{water}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

上式滿足於 $z = \eta$ 處，使用泰勒級數對 $z = 0$ 展開，並忽略非線性項：

$$\begin{aligned}
& \left[\mu \left(\frac{dU}{dz} \Big|_{z=0} + \eta(x, t) \frac{d^2 U}{dz^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial u'}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial w'}{\partial x} \Big|_{z=0} \right) \right]_{air} \\
& = \left[\mu \left(\frac{dU}{dz} \Big|_{z=0} + \eta(x, t) \frac{d^2 U}{dz^2} \Big|_{z=0} + \frac{\partial u'}{\partial z} \Big|_{z=0} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial w'}{\partial x} \Big|_{z=0} \right) \right]_{water}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

背景狀態流場同樣滿足切向應力平衡式：

$$\left[\mu \frac{dU}{dz} \Big|_{z=0} \right]_{air} = \left[\mu \frac{dU}{dz} \Big|_{z=0} \right]_{water} \tag{B.8}$$

以式 (B.8) 消去式 (B.7) 中的平衡項，接著令空氣的擾動項為零，再代入半波高的正交模展開以及使用流函數來取代擾動速度，整理後可得到：


$$(D^2 + k^2)\phi + \frac{d^2 U}{dz^2} q = 0 \tag{B.9}$$

最後引入無因次物理量，得到線性化無因次切向應力平衡式：

$$(\bar{D}^2 + \tilde{k}^2)\tilde{\phi} + \bar{D}^2 \tilde{U} \tilde{q} = 0, \quad z = 0 \tag{B.10}$$

(3) 上邊界之法向應力平衡

在交界面 $z = \eta$ 處，空氣與水的法向應力和表面張力之平衡式如下。法向應力之方程式參見附錄一之式 (A.10)



$$\begin{aligned}
& \left\{ P - \frac{2\mu[u_x\eta_x^2 - (u_z + w_x)\eta_x + w_z]}{1 + \eta_x^2} \right\}_{air} \\
& = \left\{ P - \frac{2\mu[u_x\eta_x^2 - (u_z + w_x)\eta_x + w_z]}{1 + \eta_x^2} \right\}_{water} \\
& + T \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

其中總壓力可在分解為背景狀態以及擾動狀態：

$$P = P_0 + P' \tag{B.12}$$

在介面處空氣與水的背景狀態壓力是連續的，因此式 (B.11) 中的壓力會只剩下擾動項。將速度的擾動項也代入式 (B.11)：

$$\begin{aligned}
& \left\{ P' - \frac{2\mu \left[\frac{\partial u'}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{dU}{dz} + \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right]}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} \right\}_{air} \\
& = \left\{ P' - \frac{2\mu \left[\frac{\partial u'}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{dU}{dz} + \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right]}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} \right\}_{water} \\
& + T \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

上式滿足於 $z = \eta$ 處，使用泰勒級數對 $z = 0$ 展開，並忽略非線性項：

$$\left[P' - 2\mu \frac{\partial w'}{\partial z} \Big|_{z=0} \right]_{air} = \left[P' - 2\mu \frac{\partial w'}{\partial z} \Big|_{z=0} \right]_{water} + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{B.14}$$

忽略空氣流場的擾動項。

$$P' - 2\mu \frac{\partial w'}{\partial z} \Big|_{z=0} + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \tag{B.15}$$

將擾動總壓力分解為動壓力與靜壓力 $P' = p' - \rho g \eta$ ，代入式 (B.14)：



$$(p' - \rho_w g \eta) - 2\mu_w \frac{\partial w'}{\partial z} \Big|_{z=0} + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.16})$$

代入半波高之正交模展開以及流函數來取代擾動速度，將壓力項也以同樣方式做正交模展開，即 $p'(x, z, t) = \hat{p}'(z)e^{i(kx - \omega t)}$ ：

$$(\hat{p}'(\eta) - \rho_w g q) + 2\mu_w ik D \phi - k^2 T q = 0 \quad (\text{B.17})$$

式中的動壓力擾動項可由 x 方向之動量方程式 (2.5 b) 來求得

$$\hat{p}' = \rho_w \left[\frac{\omega}{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} - U \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{dU}{dz} \phi + \frac{\nu}{ik} (D^3 - k^2 D) \phi \right] \quad (\text{B.18})$$

將式 (B.18) 代入式 (B.17)，整理後得到：

$$kU_0 D \phi - kDU \phi + i\nu_w (D^3 \phi - 3k^2 D \phi) + kgq + \frac{k^3 T}{\rho_w} q = \omega D \phi \quad (\text{B.19})$$

最後引入無因次物理量，得到線性化無因次法向應力平衡式，滿足於 $z = 0$ ：

$$\begin{aligned} \tilde{k} \tilde{U}_0 \tilde{D} \tilde{\phi} - \tilde{k} \tilde{D} \tilde{U} \tilde{\phi} + i \frac{1}{Re} (\tilde{D}^3 \tilde{\phi} - 3\tilde{k}^2 \tilde{D} \tilde{\phi}) + \frac{1}{Fr^2} \tilde{k} \tilde{q} + \frac{1}{We} \tilde{k}^2 \tilde{q} \\ = \tilde{\omega} \tilde{D} \tilde{\phi} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

式中無因次參數定義如下：

$$Re = \frac{[V][L]}{\nu_w}, \quad Fr = \frac{[V]}{\sqrt{g[L]}}, \quad We = \frac{\rho_w [V]^2 [L]}{T} \quad (\text{B.21})$$

(4) 下邊界擾動速度垂直分量為零

由圖 2.1 可以看到背景速度隨深度很快地率減至接近零的值，而在水深較深之處，水平速度隨深度的變化量很小，幾乎可以假設水平速度的垂直梯度為零。因此適用截斷法，假設在下邊界 $z = -h$ 處存在一假想界面，而在 3.3、節中的截斷高度的取值上，會滿足深水波條件，表面波的運動不會影響到海底。在此假想界面套用「自由滑動邊界條件」，流體粒子無法穿透此假想界面，滿足垂直擾動速度為零：

$$w'(x, -h, t) = 0 \quad (\text{B.22})$$

使用流函數來取代擾動速度，並引入無因次物理量，得到第一條下邊界條件：

$$\tilde{\phi}(-h) = 0 \quad (\text{B.23})$$

(5) 下邊界流體質點運動與邊界相切

因為水平擾動速度之垂直梯度趨近於零，亦表示流體粒子的水平運動與假想邊界相切，即：

$$\frac{\partial u'}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (\text{B.24})$$

使用流函數來取代擾動速度，並引入無因次物理量，得到第二條下邊界條件：

$$\tilde{D}^2 \tilde{\phi}(-h) = 0 \quad (\text{B.25})$$

附錄三、特徵方程組矩陣

將推導出的無因次控制方程式 (2.9) 以及邊界條件式 (2.10)–式 (2.14)，以契比雪夫多項式 (3.3) 代入，組成特徵方程組 $[A]\{x\} = \tilde{\omega}[B]\{x\}$ ，其中矩陣 $[A]$ 與 $[B]$ 之大小為 $(N+2) \times (N+2)$ 。將其分解為多個小矩陣以方便表示。以 $A1$ 、 $B1$ 作為控制方程式的部分； $A2$ 、 $B2$ 作為在截斷高度 $\tilde{z} = -\tilde{h}$ 之邊界條件部分； $A3$ 、 $B3$ 作為在水面處 $\tilde{z} = 0$ 之邊界條件部分，排列方式如圖 C.1 所示。各個矩陣之方程式表示如下，其中 $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 、 $l = 1, 2, 3, \dots, M-1$ ：

$$A1_n(\zeta_l) = \frac{i}{Re} \left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^4 T_n^{(4)}(\zeta_l) + \left(\tilde{k}\tilde{U} - \frac{2i\tilde{k}^2}{Re}\right) \left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^2 T_n^{(2)}(\zeta_l) + \left(-\tilde{U}\tilde{k}^3 - \tilde{k}\tilde{D}^2\tilde{U} + \frac{i\tilde{k}^4}{Re}\right) T_n(\zeta_l) \quad (C.1)$$

$$B1_n(\zeta_l) = \left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^2 T_n^{(2)}(\zeta_l) - \tilde{k}^2 T_n(\zeta_l) \quad (C.2)$$

$$A2_n(\zeta_M) = \begin{bmatrix} T_n(\zeta_M) \\ \left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^2 T_n^{(2)}(\zeta_M) \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$B2_n(\zeta_M) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

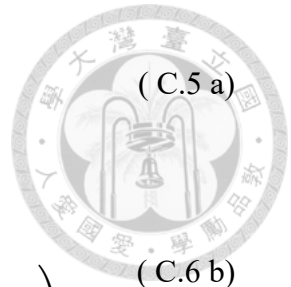
$$A3_n(1, \zeta_0) = \tilde{k}T_n(\zeta_0) \quad (\text{C.5 a})$$

$$A3_n(2, \zeta_0) = \tilde{k}\tilde{U}\left(\frac{2}{\tilde{h}}\right) T_n^{(1)}(\zeta_0) - \tilde{k}\tilde{D}\tilde{U}(\zeta_0)T_n(\zeta_0) + \frac{i}{Re}\left(\left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^3 T_n^{(3)}(\zeta_0) - 3\tilde{k}^2\left(\frac{2}{\tilde{h}}\right) T_n^{(1)}(\zeta_0)\right) \quad (\text{C.6 b})$$

$$A3_n(3, \zeta_0) = \left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^2 T_n^{(2)}(\zeta_0) + \tilde{k}^2 T_n(\zeta_0) \quad (\text{C.7 c})$$

$$B3_n(\zeta_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\tilde{h}}T_n^{(1)}(\zeta_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

在本附錄列出矩陣 [A] 與 [B] 如圖 C.2、圖 C.3 所示。



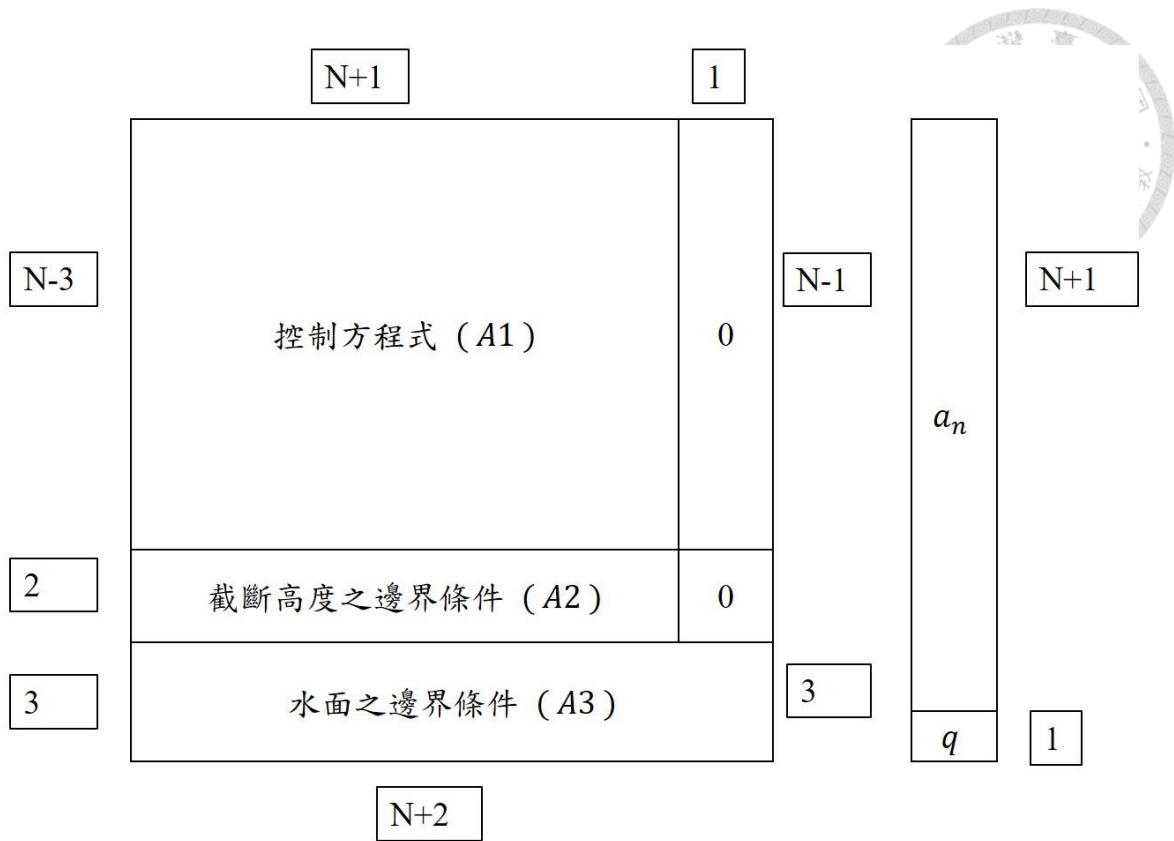
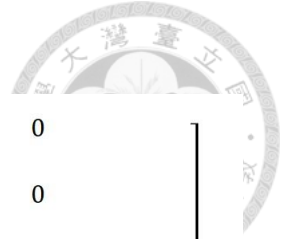


圖 C.1：特徵方程組矩陣與特徵向量之排列方式。



$$\begin{bmatrix}
 A_{1_0}(\zeta_1) & \dots & A_{1_N}(\zeta_1) & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\
 A_{1_0}(\zeta_{M-1}) & \dots & A_{1_N}(\zeta_{M-1}) & 0 \\
 \hline
 T_0(\zeta_M) & \dots & T_N(\zeta_M) & 0 \\
 \left(\frac{2}{\bar{h}}\right)^2 T_0^{(2)}(\zeta_M) & \dots & \left(\frac{2}{\bar{h}}\right)^2 T_N^{(2)}(\zeta_M) & 0 \\
 \hline
 A_{3_0}(1, \zeta_0) & \dots & A_{3_N}(1, \zeta_0) & \tilde{k}\tilde{U}(\zeta_0) \\
 A_{3_0}(2, \zeta_0) & \dots & A_{3_N}(2, \zeta_0) & \frac{1}{Fr^2}\tilde{k} + \frac{\tilde{k}^2}{We} \\
 A_{3_0}(3, \zeta_0) & \dots & A_{3_N}(3, \zeta_0) & \tilde{D}^2\tilde{U}(\zeta_0)
 \end{bmatrix}$$

圖 C. 2：矩陣 [A]。

$$\begin{bmatrix}
 B_{1_0}(\zeta_1) & \dots & B_{1_N}(\zeta_1) & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\
 B_{1_0}(\zeta_{M-1}) & \dots & B_{1_N}(\zeta_{M-1}) & 0 \\
 \hline
 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & \dots & 0 & 1 \\
 \left(\frac{2}{\bar{h}}\right) T_0^{(1)}(\zeta_0) & \dots & \left(\frac{2}{\bar{h}}\right) T_N^{(1)}(\zeta_0) & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

圖 C. 3：矩陣 [B]。

附錄四、二維尾跡流流場之收斂性測試

此附錄為 Zhang (1996) 解析尾跡流流場前，對參數計算範圍做收斂性的測試。

在 $Fr^2 = 0.5$ ，發展率的曲線只有一個分支，選定 $\tilde{k} = 0.3$ 做特徵值的收斂性測試，如表 D.1。要收斂至小數點後七位， $Re = 100$ 需要格點數 80、 $Re = 1000$ 需要格點數 40、 $Re = \infty$ 需要格點數 100。

在 $Fr^2 = 2.25$ ，發展率的曲線出現兩個分支，表 D.2 為分支一的收斂性測試取 $\tilde{k} = 0.3$ 。收斂至小數點後七位所需之格點數略高於 $Fr^2 = 0.5$ 的案例。在收斂速度最慢的 $Re = \infty$ 的情況下，需要格點數 120。

分支二只有在 $Re = 1000$ 及 $Re = \infty$ 出現，其收斂性測試如表 D.3 所示。在 $\tilde{k} = 1.5$ 時， $Re = 1000$ 收斂至小數點後七位需要格點數 80，而 $Re = \infty$ 就算做到格點數 300 仍然只收斂至小數點後三位；而在分支二 $\tilde{k} = 3$ 時， $Re = \infty$ 只收斂至小數點後兩位。

本文在不同的參數下選擇不同的格點數來計算特徵值，確保其以達到收斂的狀態。而在 $Fr^2 = 2.25, Re = \infty$ 的情形，使用 $N = 500$ 去作圖。

$$Fr^2 = 0.5, \quad \tilde{k} = 0.3$$

N	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = \infty$
20	$0.0491382 + 0.0015187i$	$0.0800605 + 0.0270423i$	$0.0790624 + 0.0267917i$
40	$-0.6204969 + 0.0022779i$	$0.0794179 + 0.0270559i$	$0.0780080 + 0.0311490i$
60	$-0.6209056 + 0.0021072i$	$0.0794179 + 0.0270559i$	$0.0779012 + 0.0311183i$
80	$-0.6209065 + 0.0021100i$	$0.0794179 + 0.0270559i$	$0.0779026 + 0.0311144i$
100	$-0.6209065 + 0.0021100i$	$0.0794179 + 0.0270559i$	$0.0779027 + 0.0311145i$
120	$-0.6209065 + 0.0021100i$	$0.0794179 + 0.0270559i$	$0.0779027 + 0.0311145i$

表 D. 1：特徵值隨格點數變化之收斂情形($Fr^2 = 0.5$)。

$$Fr^2 = 2.25, \quad \tilde{k} = 0.3$$

N	$Re = 100$	$Re = 1000$	$Re = \infty$
20	$-0.2295265 + 0.0067230i$	$0.0888590 + 0.0181900i$	$0.0919936 + 0.0196451i$
40	$-0.2290192 + 0.0097030i$	$0.0878526 + 0.0178816i$	$0.0858696 + 0.0230425i$
60	$-0.2287007 + 0.0095154i$	$0.0878527 + 0.0178819i$	$0.0858049 + 0.0225622i$
80	$-0.2286904 + 0.0095122i$	$0.0878527 + 0.0178819i$	$0.0858455 + 0.0225920i$
100	$-0.2286902 + 0.0095123i$	$0.0878527 + 0.0178819i$	$0.0858408 + 0.0225926i$
120	$-0.2286902 + 0.0095123i$	$0.0878527 + 0.0178819i$	$0.0858412 + 0.0225922i$
180	$-0.2286902 + 0.0095123i$	$0.0878527 + 0.0178819i$	$0.0858412 + 0.0225922i$
240	$-0.2286902 + 0.0095123i$	$0.0878526 + 0.0178818i$	$0.0858412 + 0.0225922i$
300	$-0.2286902 + 0.0095123i$	$0.0878533 + 0.0178832i$	$0.0858412 + 0.0225922i$

表 D. 2：特徵值隨格點數變化之收斂情形($Fr^2 = 2.25$ ，分支一)。

N	$Fr^2 = 2.25, \quad \tilde{k} = 1.5$		$\tilde{k} = 3$
	$Re = 1000$	$Re = \infty$	$Re = \infty$
20	$1.0328943 + 0.0196835i$	$1.0382826 + 0.0353884i$	$\text{Inf} + 0.0000000i$
40	$1.0147399 + 0.0113871i$	$1.0087929 + 0.0235751i$	$2.9996368 + 0.0000000i$
60	$1.0150816 + 0.0109281i$	$1.0028684 + 0.0072202i$	$2.9996524 + 0.0000000i$
80	$1.0150797 + 0.0109258i$	$1.0255451 + 0.0111036i$	$2.9996721 + 0.0000000i$
100	$1.0150797 + 0.0109258i$	$1.0192315 + 0.0177768i$	$2.9996806 + 0.0000000i$
120	$1.0150797 + 0.0109258i$	$1.0152765 + 0.0177230i$	$-1.0552389 + 0.0000000i$
180	$1.0150797 + 0.0109258i$	$1.0170630 + 0.0148345i$	$1.2974424 + 0.0077382i$
240	$1.0150795 + 0.0109259i$	$1.0151398 + 0.0146301i$	$1.2935734 + 0.0066181i$
300	$1.0150799 + 0.0109270i$	$1.0155357 + 0.0150946i$	$1.2913458 + 0.0042015i$

表 D. 3：特徵值隨格點數變化之收斂情形($Fr^2 = 2.25$ ，分支二)。

附錄五、非黏流體成長率不連續問題之探討

在 3.2 節做數值方法驗證時，以 Zhang (1996) 文中的結果做比較，發現本研究的方法在 $Re = \infty$ 時，會出現特徵值不穩定的情形，在本附錄討論發生此現象的原因。

在附錄四所做的收斂性測試可以看到 $Fr^2 = 2.25$ 、 $Re = \infty$ 的案例中，波數較大的分支特徵值收斂性很差。因為在附錄四中測試最大格點數只有 $N = 300$ ，所以考慮將格點數調高，觀察是否會使圖形更平滑。圖 E. 1 - 圖 E. 4 為不同格點數的結果，可以看出調高格點數確實能夠減小圖形出現震盪的範圍，在圖 E. 4 中格點數已經達到 $N = 2000$ ，仍是無法完全改善此現象，而此時廣義特徵值方程組 $[A]\{x\} = \omega[B]\{x\}$ 的反向誤差 (backward error) 已經達到 10^8 的數量級，是不容忽視的誤差，使得此結果的精確性不能完全信任，推測格點數數量不足不是造成此現象的主要原因。在圖 E. 5 中，僅是稍微改變格點數，在波數大的分支就出現完全不同的圖形，而波數小的分支圖形是重疊的，且與 Zhang (1996) 的結果吻合 (如圖 E. 5 中之黑線)。兩分支的雷諾數 Re 和佛勞德數 Fr 相同，卻只有一個分支對格點數異常敏感，探究兩分支的差異在於波數不同，而在上述案例中，使用的截斷高度為 $h = 4\pi/k$ ，因此在圖 E. 1 - 圖 E. 4 中，截斷高度會隨著橫軸而改變，目的是為了要避免在波數小的區域截斷高度太小，而無法捕捉完整的背景流場圖形。考慮到截斷高度可能是造成特徵值不連續現象的原因，所以另外仿作 Morland *et al.* (1991) 的研究結果一併討論。

Morland *et al.* (1991) 文中考慮非黏流體，並且使用多種不同的背景流場來做穩定性分析與比較，本文選用其中的指數流場：

$$U(z) = U_0 e^{\frac{2z}{\Delta}} \quad (\text{E.1})$$

式中 Δ 為剪切層厚度，此值影響背景流場速度曲線，此案例之截斷高度之選定也與此物理量有關 ($h = 3\Delta$)。此次測試取 $U_0 = 46.11$ cm/s、固定 $\Delta = 0.28\lambda_m$ ，其中 $\lambda_m = 1.7022$ cm 為一定值，表示出現不穩定模態所需之最小速度對應之波長。固定 Δ 表示截斷高度也是固定的。由圖 E. 6、圖 E. 7 的結果來看，在此波數

範圍只出現一個不穩定分支，也同樣在波數增大後出現發展率不連續的現象。圖 E. 6 和圖 E. 7 為調高格點數後計算的結果，不連續的範圍有減小但無法完全改善。因為圖 E. 6 和圖 E. 7 是固定截斷高度，但仍出現相同的問題，所以排除截斷高度是造成此現象的原因。將發展率隨波長、剪切層厚度的變化以三維等值線圖表示，如圖 E. 8。以俯視的角度來呈現則如圖 E. 9。圖上 λ 小 (k 大) 的位置很明顯的看出有圓形的紋路，即發展率隨著波長震盪，而且不像是隨機的變化，而是有特殊的關聯性。

本測試並未找出在求解無黏系統問題時出現發展率不連續的根本原因，鑒於使用兩種不同流場都出現了同樣的現象，因此推論是由數值方法的使用造成的。根據此次的測試，在處理非黏流 (Rayleigh equation) 的系統時，不適用本研究使用的數值方法。本研究考慮黏性流體之解析，因此在計算非黏流體產生之問題非本文討論之重點，仍會繼續以此數值方法來做計算以及結果之呈現。

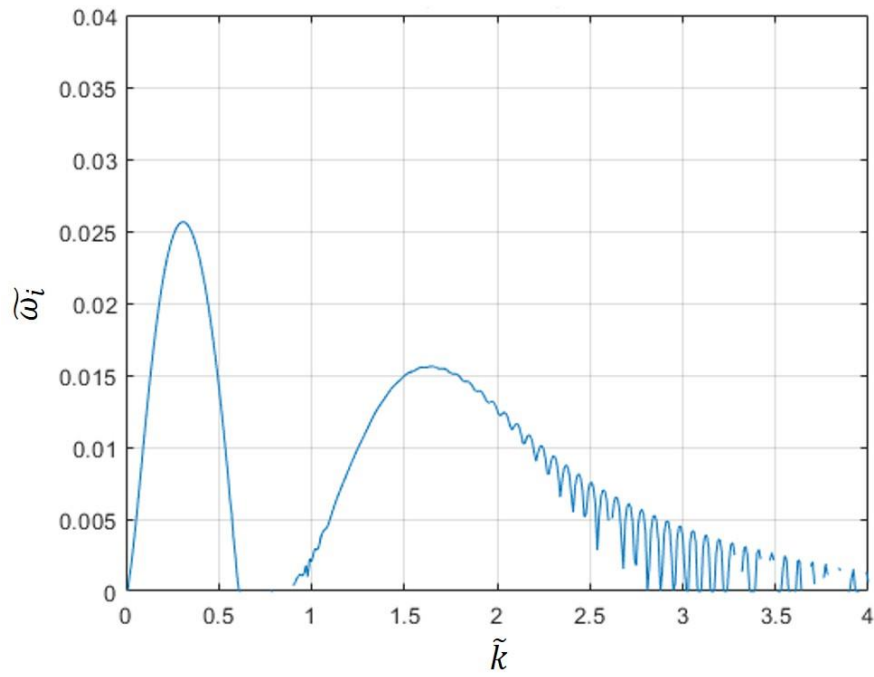
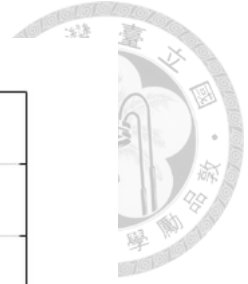


圖 E. 1：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 2.25$, $Re = \infty$, $N = 500$)。

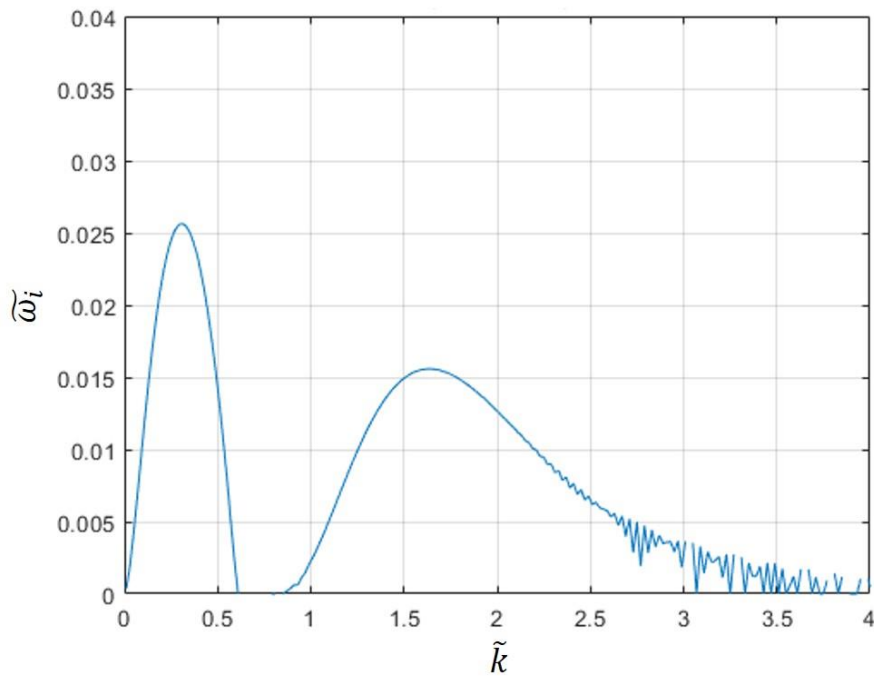


圖 E. 2：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 2.25$, $Re = \infty$, $N = 800$)。

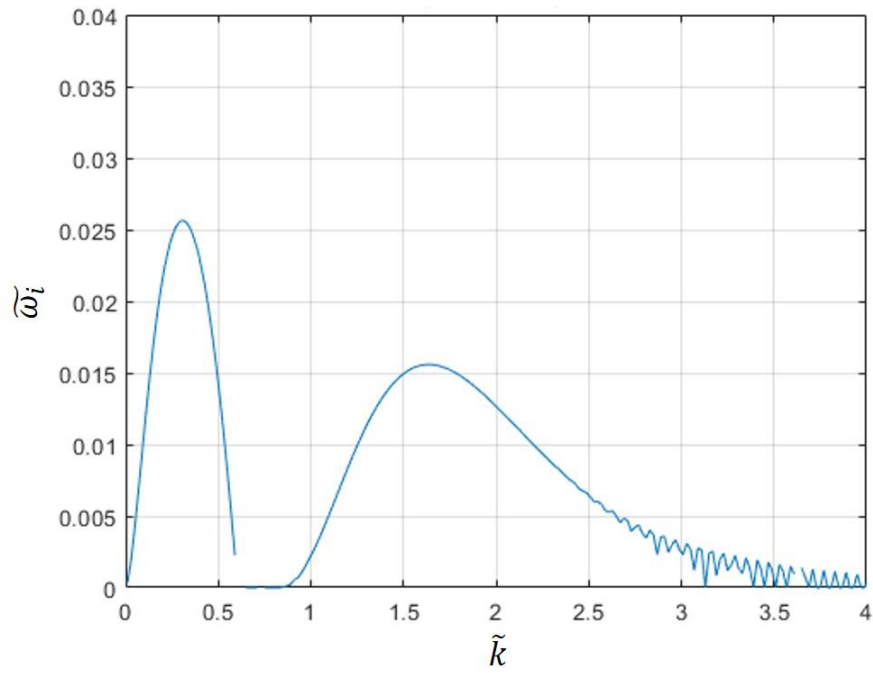
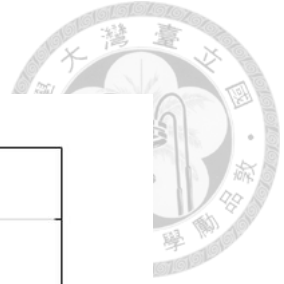


圖 E. 3：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 2.25$, $Re = \infty$, $N = 1200$)。

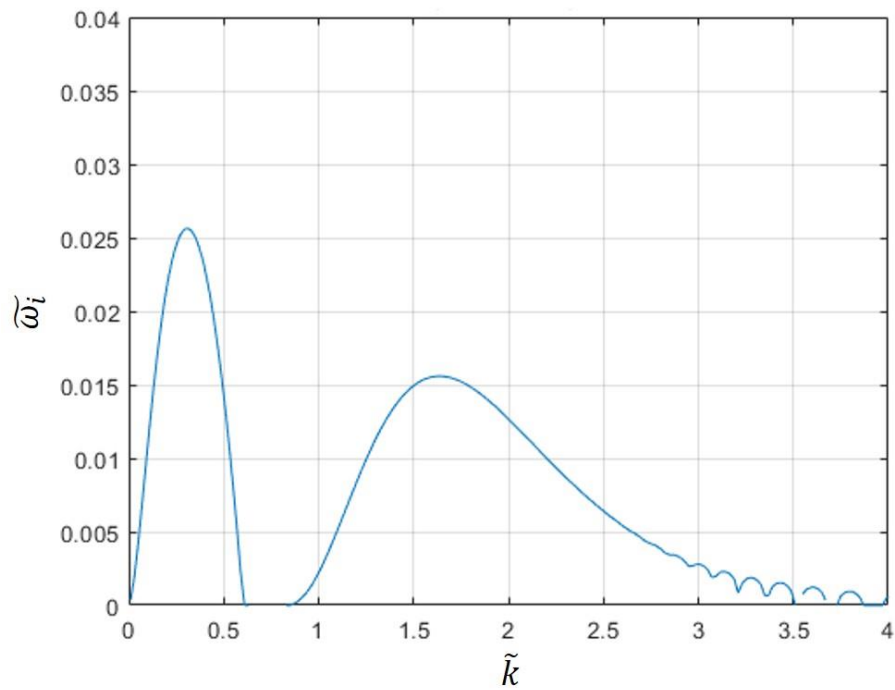


圖 E. 4：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 2.25$, $Re = \infty$, $N = 2000$)。

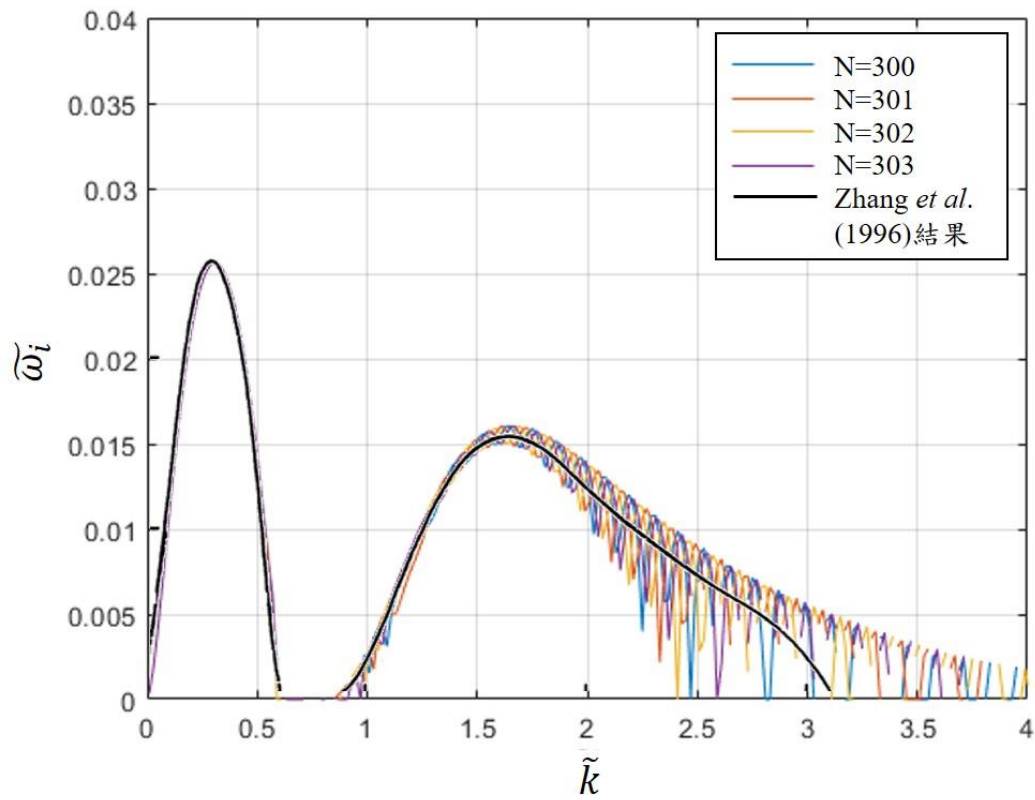


圖 E. 5：發展率隨波數的變化 ($Fr^2 = 2.25$, $Re = \infty$, $N = 2000$)。

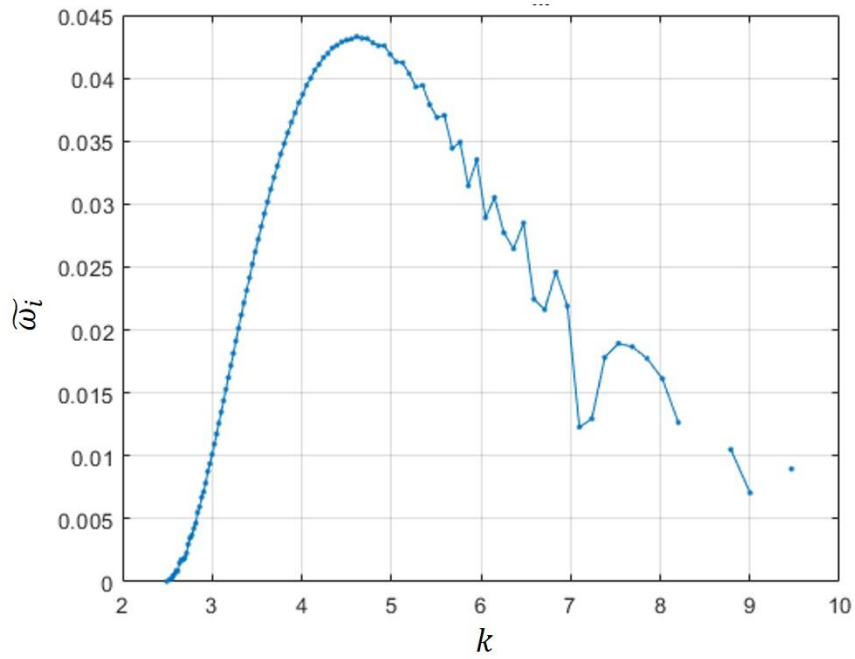
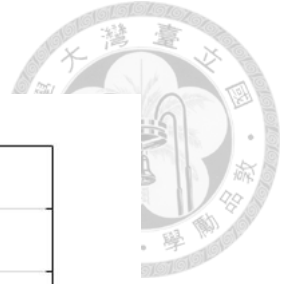


圖 E. 6：發展率隨波數的變化 ($N = 600$)。

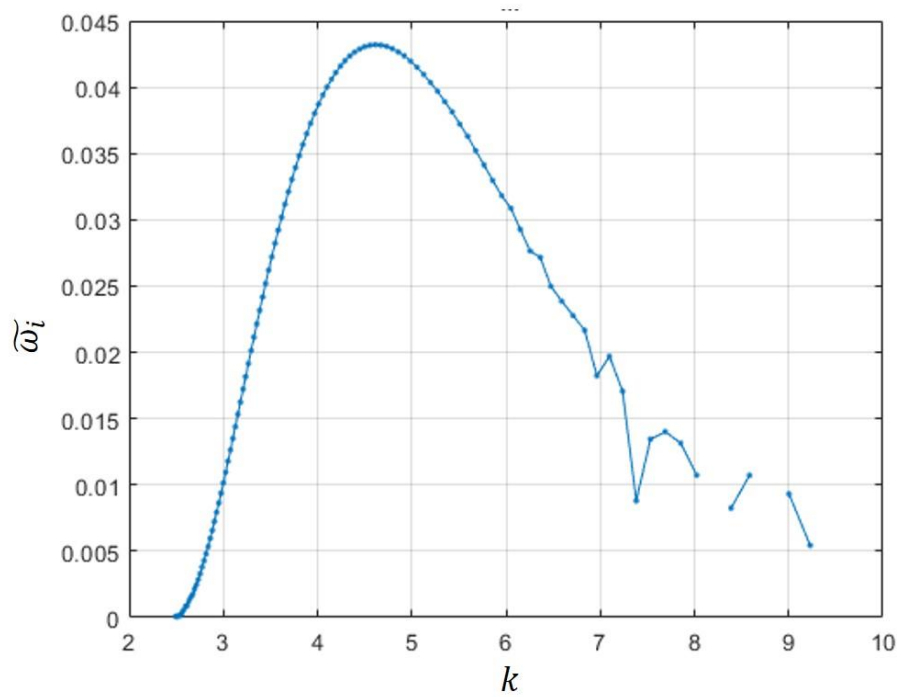


圖 E. 7：發展率隨波數的變化 ($N = 1000$)。

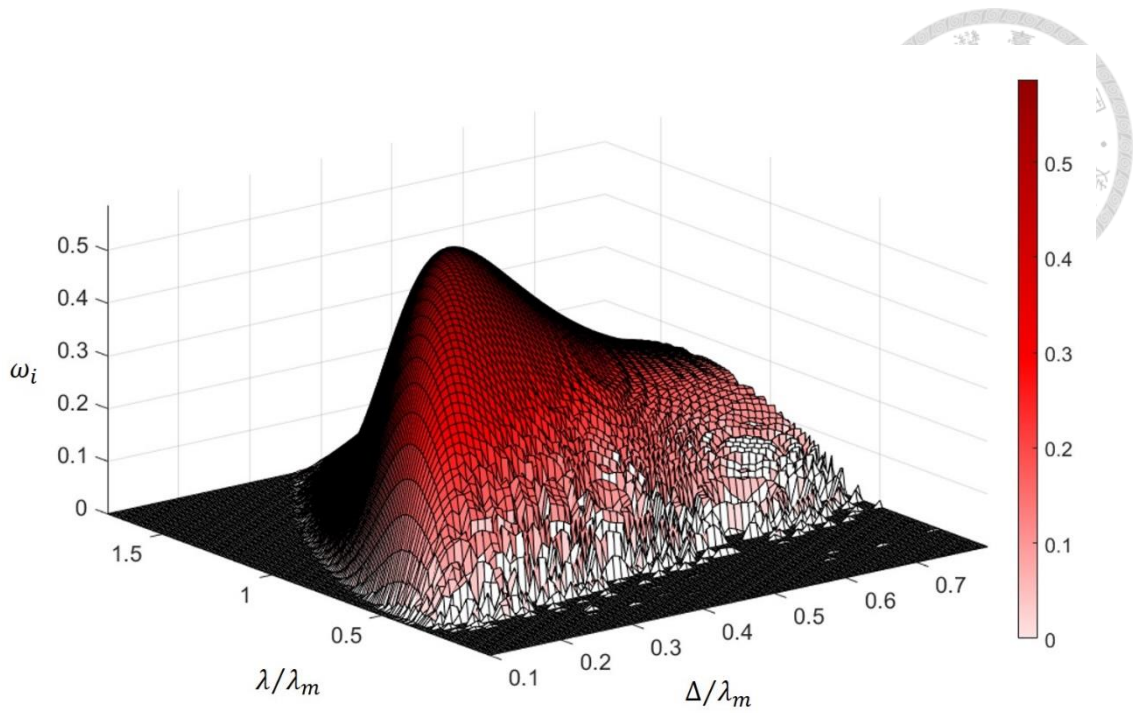


圖 E. 8：發展率隨波長、剪切層厚度變化的三維等值線圖。

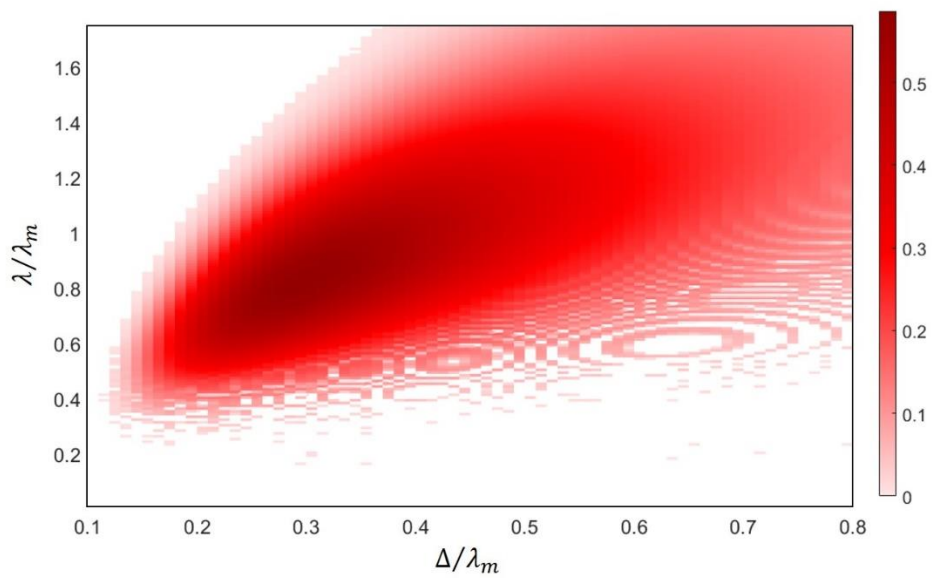


圖 E. 9：發展率隨波長、剪切層厚度變化的二維等值線圖。