

國立臺灣大學工學院工程科學及海洋工程學系



碩士論文

Department of Engineering Science and Ocean Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

應用契比雪夫配置法探討氣-水耦合流場之穩定性分析

Stability Analysis of Air-Water Coupled Shear Flow Using

Chebyshev Collocation Method

沈巧婷

Chiao-Ting Shen

指導教授：蔡武廷 博士

Advisor: Wu-Ting Tsai, Ph.D.

中華民國 108 年 7 月

July, 2019



國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

應用契比雪夫配置法探討氣-水耦合流場之
穩定性分析

Stability Analysis of Air-Water Coupled Shear Flow
Using Chebyshev Collocation Method

本論文係 沈巧婷君（學號 R05525132）在國立臺灣大學
工程科學及海洋工程學系完成之碩士學位論文，於民國 108 年
7 月 29 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

A handwritten signature in blue ink, likely belonging to the supervisor.

（指導教授）

A handwritten signature in black ink, likely belonging to a committee member.

A handwritten signature in black ink, likely belonging to a committee member.

系主任

A handwritten signature in blue ink, likely belonging to the department chair.

摘要



本研究探討一空氣剪切流產生與初期發展的不穩定波水波。利用數值解析耦合空氣與水體流場之穩定性動力方程式—Orr-Sommerfeld 方程式，並滿足空氣與水界面之邊界條件。本研究的數值方法為契比雪夫配置法，即使用契比雪夫多項式展開特徵函數與以配置點離散，兩者所搭配的數值方法，並以 QZ 法求解其衍伸出的廣義特徵值問題。其計算範圍可擴展至更長的波長（最長至 20 cm）與更強的風（摩擦速度最大至 100 cm/s），並隨著風速的增加有雙重不穩定模態的產生。研究結果顯示此數值方法為一容易應用，且有高收斂性與準確性之方法。

關鍵字：線性穩定性分析、風浪、氣-水界面、契比雪夫配置法、區間分解法

Abstract



This study describes the generation and initial growth of unstable water waves by an air shear flow. A numerical method is used to solve the air-water coupled Orr-Sommerfeld equations and the interfacial boundary conditions is satisfied. The method is based on the expansion of the eigenfunctions in terms of Chebyshev polynomials, point collocation, and the subsequent solution of the resulting generalized eigenvalue problem with the QZ-algorithm. The calculation range can be extended to longer wavelengths (up to 20 cm) and stronger winds (friction velocity up to 100 cm/s), and double unstable modes are produced as wind velocity increases. The results show that this numerical method is easy to apply and has high accuracy and convergence.

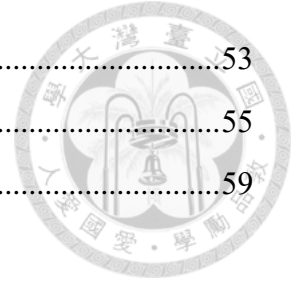
Keywords: Linear stability analysis, wind wave, air-water interface, Chebyshev collocation method, Domain decomposition method

目錄



口試委員會審定書	i
摘要	ii
Abstract.....	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
符號表	ix
第一章、前言	1
1.1 研究背景	1
1.2 論文架構	4
第二章、控制方程式及邊界條件	5
2.1 穩定性動力方程式 (Orr-Sommerfeld Equation)	5
2.2 邊界條件	9
2.3 背景狀態剪流場之速度分佈	14
2.4 匹配條件 (Matching condition)	19
第三章、數值方法	23
3.1 契比雪夫配置法 (Chebyshev Collocation Method)	23
3.2 數值方法之驗證與收斂性測試	26
3.2.1 契比雪夫配置法之驗證與收斂性測試.....	26
3.2.2 發展率對截斷高度之敏感性測試.....	32
3.2.3 不同截斷上邊界條件之比較.....	33
第四章、計算結果與討論	34
4.1 與其它數值解析之比較	34
4.2 中性穩定曲線 (Neutral Stability Curve)	39
4.3 不穩定模態的壓力與 x 方向速度分佈	43
第五章、結論	50
參考文獻	51

附錄一、 流體應力關係式	53
附錄二、 特徵方程組矩陣	55
附錄三、 二維平面 Poiseuille 流場之穩定性分析	59



圖目錄



- 圖 2.1：背景狀態剪流場速度於垂直方向之變化。其中以 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 表示。 .16
- 圖 2.2：背景狀態剪流場速度之一次導數於垂直方向之變化。其中以 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 表示。17
- 圖 2.3：背景狀態剪流場速度之二次導數於垂直方向之變化。其中以 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 表示。18
- 圖 2.4：方法一之示意圖。虛線表示為匹配條件。22
- 圖 2.5：方法二之示意圖。虛線表示為匹配條件。22
- 圖 3.1：最大虛部特徵值在 $N_w = 80$ 與 70 之間的誤差圖。白色部分表示誤差大於 10% ，紅線為中性穩定曲線。30
- 圖 3.2：最大虛部特徵值的誤差圖，其中在 $\lambda \geq 5 \text{ cm}$ (虛線左側)，為 $N_w = 120$ 與 110 之間的誤差；在 $\lambda < 5 \text{ cm}$ (虛線右側)，為 $N_w = 80$ 與 70 之間的誤差。白色部分表示誤差大於 10% ，紅線為中性穩定曲線。31
- 圖 4.1：本研究解得的發展率與 Tsai & Lin (2004) 及 Zeisel *et al.* (2008) 的結果比較。○ Tsai & Lin 解得之發展率。□ Zeisel *et al.* 解得之發展率。35
- 圖 4.2：空氣速度之二次導數的格點，在有無區域分解下的離散情形。38
- 圖 4.3：不同風速下，發展率隨波長的變化。(a) $u_* = 40 \text{ cm/s}$ 、(b) $u_* = 60 \text{ cm/s}$ 、(c) $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 。藍線表示為單一/第一模態，紅線為第二模態。40
- 圖 4.4：不同風速下，角頻率隨波長的變化。(a) $u_* = 40 \text{ cm/s}$ 、(b) $u_* = 60 \text{ cm/s}$ 、(c) $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 。黃線為線性水波理論值，藍線表示為單一/第一模態，紅線為第二模態。41
- 圖 4.5：中性穩定曲線圖。..... 表示為前人解析的範圍，—— 表示本研究解析的中性穩定曲線，- · - · 表示為 Zeisel *et al.* 解析的中性穩定曲線。○表示引致不穩定的臨界風速。□表示引致雙重不穩定的臨界風速。42
- 圖 4.6：在不同風速下，不穩定模態的壓力分佈圖。(a) $u_* = 20 \text{ cm/s}$ 、(b) $u_* = 40 \text{ cm/s}$ 、(c) $u_* = 60 \text{ cm/s}$ 、(d) $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、(e) $u_* = 100 \text{ cm/s}$ 。灰線表示為擾動氣-水界面。47
- 圖 4.7：在不同風速下，不穩定模態的 x 方向速度分佈圖。(a) $u_* = 20 \text{ cm/s}$ 、(b)

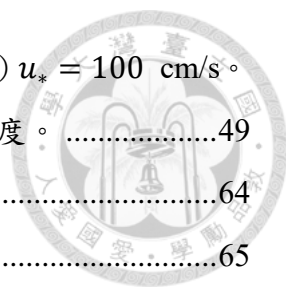
$u_* = 40 \text{ cm/s}$ 、(c) $u_* = 60 \text{ cm/s}$ 、(d) $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、(e) $u_* = 100 \text{ cm/s}$ 。

灰線表示為擾動氣-水界面。虛線表示為黏性次邊界層高度。.....49

圖 C.1：不同網格點 N 時，虛部特徵值之誤差。.....64

圖 C.2：不同網格點 N 時， $[A]$ 之條件數。.....65

圖 C.3：不同網格點 N 時， $[A]\mathbf{x} = \omega[B]\mathbf{x}$ 的殘差。.....65



表目錄



表 3.1：利用契比雪夫配置法求解平面 Poiseuille 流場於 $k = 1, R = 10000$ 時，特徵值的收斂情況。.....	28
表 3.2：針對低風速 ($u_* = 30$ cm/s)、短波 ($\lambda = 1$ cm) 於不同 α 值時，最大特徵值的收斂性測試。.....	28
表 3.3：針對高風速 ($u_* = 80$ cm/s)、短波 ($\lambda = 1$ cm) 於不同 α 值時，最大特徵值之收斂性測試。.....	28
表 3.4：針對低風速 ($u_* = 30$ cm/s)、長波 ($\lambda = 20$ cm) 於不同 α 值時，最大特徵值之收斂性測試。.....	29
表 3.5：針對高風速 ($u_* = 80$ cm/s)、長波 ($\lambda = 20$ m) 於不同 α 值時，最大特徵值之收斂性測試。.....	29
表 3.6：針對四種情況於不同 N_{a1} 時，最大特徵值之收斂性測試。.....	29
表 3.7：不同截斷高度 h 時，最大特徵值之敏感性測試。.....	32
表 3.8：不同截斷上邊界條件時，最大特徵值之比較。.....	33
表 4.1：Zeisel <i>et al.</i> (2008) 於 $u_* = 30$ cm/s、 $\lambda = 1$ cm 時，在不同格點數所解得的特徵值。.....	37
表 4.2：本數值分析於 $u_* = 30$ cm/s、 $\lambda = 1$ cm 時，在不同格點數所解得的特徵值與計算時間。.....	37
表 4.3：Tsai & Lin (2004) 以有限差分法於 $u_* = 30$ cm/s、 $\lambda = 1$ cm 時，在不同格點數所解得的特徵值與計算時間。.....	37
表 4.4：未使用區域分解時，最大特徵值的收斂性測試，並與有使用區域分解時的結果比較。.....	38
表 C.1：高階微分與低階微分所解得的特徵值之收斂性測試，並與 Orszag (1971) 解得的特徵值比較。.....	63
表 C.2：高階微分與低階微分之特性。.....	64

符號表



希臘字母

α	空氣對數流場之網格點對水體網格點的倍數
β	兩倍發展率
γ	空氣流場速度函數參數
δ	黏性次邊界層高度
η	氣-水界面高度
κ	von Kármán 常數
λ	波長
μ	絕對黏滯係數
ν	動黏滯係數
ρ	密度
ψ	流函數
ϕ	流函數經正規模態展開後之振幅
τ	剪應力
ω	角頻率；特徵值
ω_i	發展率
ζ	配置點

英文字母

c	複數相速度
F	福祿數平方的導數
g	重力加速度
h	截斷高（深）度
k	波數
m	空氣與水之動黏滯係數比
N	網格數；契比雪夫多項式之次數
p	動壓力
P_t	總壓力



P_0	背景壓力
q	氣-水界面高度經正規模態展開後之振幅
r	空氣與水之密度比
R	雷諾數
Re	實數部分
s	黏性次邊界層厚度之係數
t	時間
T	表面張力
T_n	契比雪夫多項式
u	x 方向速度
u_*	空氣摩擦速度
U_0	水面速度
U_h	空氣截斷高度上的速度
w	z 方向速度
W	韋伯數的導數
x	水平位置向量
x	特徵向量
z	垂直位置向量

手寫體

\mathcal{L}	特徵長度
\mathcal{V}	特徵速度

重音符號

'	擾動狀態項
^	正規模態展開後之振幅
~	無因次化項
-	歸一化項

第一章、前言



1.1 研究背景

一初始為平滑靜止的水面，在受到風的吹拂後，水下便形成一剪流場，也因此空氣與水體交界面被激起了不穩定波。經過近一世紀前人豐富的研究，我們對不穩定波之形成與發展機制的了解也更深入，卻仍不可謂完全。

由於雷達波在海洋遙測上的應用越趨頻繁，如：對海底地形的探測、海面油污的偵測、船跡之追蹤等。當應用雷達波在海面之反射與散射進行遙測時，海表面短波的存在對遙測影像具有相當的影響性，因此有關造成這些被稱為海面「小尺度表面粗糙度」(small-scale surface roughness) 的海面短波之形成與演化，在 80 年代來又引起廣泛之研究，如 Phillips & Hasselmann (1986)。

各派對於氣-水界面不穩定波形成與發展的機制，意見相當分歧。首先嘗試解釋不穩定波發展機制的為 Jeffreys, Jeffreys (1925) 考慮空氣之邊界層流場在不穩定波波峰的下風處剝離，造成水體流場向上運動的質點受到空氣壓力較小，而向下運動的質點受到的空氣壓力則較大，所以造成了不穩定波的發展。但 Jeffreys 此一「剝離」理論適用於較長且較陡的波，並不適用於小尺度、短波長的氣-水界面不穩定波。自此之後，即有許多前人貢獻有關氣-水界面不穩定波形成與發展的理論或數值解析之文獻，以下僅將與本研究有直接相關之研究做一回顧。

Miles (1957, 1962) 於 60 年代發表一系列有關風引致水面不穩定波生成之理論模式與解析，Miles 假設風吹水波的形成是起因於空氣流場中不穩定擾動的成長，藉由擾動空氣流場內壓力的作用，將水面波動發展所需的動量傳輸至水體流場。Miles (1957) 並計算出：從空氣流場傳輸至不穩定波的能量傳輸率與空氣流場中臨界高度處 (critical height; 空氣流速等於不穩定波傳播速度之高度) 空氣流速之二次導數成比例。Miles (1962) 根據上述之理論基礎，僅考慮空氣流場進行不穩定波發展機制之研究，而忽略水體流場的存在對不穩定波發展的影響。據此所求得的不穩定波發展率，與 Larson & Wright (1975) 實驗測量得到的發展率比較，兩者大致吻合。

Valenzuela (1976) 以有限差分法 (finite difference method) 解析滿足氣-水界

面邊界條件之氣-水耦合剪流場的穩定性動力方程式 (Orr-Sommerfeld equation)，以求得不穩定波的發展率與傳播速度。Valenzuela 所得到的不穩定波發展率較 Miles (1962) 的結果更接近 Larson & Wright (1975) 的實驗測量值。同時 Valenzuela 並指出，研究氣-水界面不穩定波之發展機制時，不可忽略水體流場。因為考慮水體流場存在時，我們將解得較大之不穩定波發展率，特別是在較大之空氣流場流速情況下。

相同於 Valenzuela (1976) 的解析，Kawai (1979) 亦以 Runge-Kutta 方法求解耦合氣-水剪流場的穩定性邊界值問題，以得不穩定波的發展率與傳播速度。Kawai 同時進行實驗量測與其數值解析結果比較。Kawai (1979) 與 Valenzuela 的數值解析主要不同之處為，Kawai 的水體剪流場函數是由他實驗量測，所得的流速資料推得的誤差函數，而 Valenzuela 為使用線性-對數形式之速度分佈。Kawai 的研究驗證了 Valenzuela 的結論：「在研究不穩定波的發展機制時，完整的氣-水耦合剪流場及界面邊界條件是不可忽略的」。Kawai 根據他研究所得的結果發現，擁有極大值發展率的不穩定波，其傳播速度幾乎為極小值。

van Gastel, Janssen & Komen (1985) 使用逼進法 (asymptotic method) 解析滿足氣-水界面邊界條件之耦合剪流場的穩定性動力方程式，並探討不同流場參數對不穩定波生成的影響。van Gastel *et al.* (1985) 發現增加空氣流場的黏性次邊界層 (viscous sublayer) 之高度，對不穩定波發展率有大幅度的增加，也就代表隨著水面流速的增加，不穩定波的傳播速度亦隨之增加。van Gastel *et al.* (1985) 在其研究結果得到不穩定波發展率的極大值與空氣摩擦速度三次方成比例的簡單關係。

Wheless & Csanady (1993) 同樣以 compound matrix 方法解析滿足界面邊界條件之氣-水耦合穩定性動力方程式，改變流體的性質 (如流體黏滯性、表面張力) 和流場參數 (如空氣摩擦速度、無窮高處之自由空氣流速)，討論其對不穩定波發展的影響。Wheless & Csanady 發現：降低表面張力，不穩定波之發展率將增加，而傳播速度將降低。擁有極大值發展率與極小值傳播速度的不穩定波，其波數在降低表面張力後皆增加，且後者增加的較前者多。因此 Wheless & Csanady 認為 Kawai (1979) 的研究發現：「不穩定波發展率的極大值和傳播速度的極小值幾乎同時發生」，僅是一個在特定表面張力值下的巧合而已，並非一般情況。

Boomkamp, Boersma, Miesen & Beijnon (1997) 以契比雪夫配置法 (Chebyshev collocation method) 解析平行二相流的穩定性問題，此問題為一相似於本研究之氣


-水耦合剪流場的穩定性分析，其所解析的水體流場僅為一薄層。Boomkamp *et al.* 提供了一種穩健的數值方法，其收斂快速且易於應用在不同之平行二相流的穩定性分析。

Tsai & Lin (2004) 以有限差分法解析海-氣耦合剪流場中初始表面波生成的穩定性動力方程式，並探討不同流體性質與流場參數對不穩定波發展之影響及成因。Tsai & Lin 所得到的結果與 Kawai (1979) 及 van Gastel *et al.* (1985) 兩者的數值解析結果相當吻合，並指出 Wheless & Csanady (1993) 的數值解析可能是錯誤的，其計算的發展率約為 Kawai 結果的四倍。

Zeisel, Stiassnie & Agnon (2008) 以契比雪夫配置法解析同樣滿足界面邊界條件之氣-水耦合穩定性動力方程式，並比起上述研究能計算至更高風速 (最高至 1 m s^{-1}) 及更長的波長 (最長至 20 cm)，且發現雙重不穩定模態的產生。Zeisel *et al.* 的數值解析與 Tsai & Lin (2004) 的結果相當吻合。

在不穩定波生成初期之短時間內，流場運動之動力方程式中的非線性項尚未有重要影響時，線性不穩定理論是合理且足夠的。因此本研究以線性不穩定理論探討空氣與水耦合之剪流場，經由數值解析滿足氣-水界面邊界條件之流場穩定性動力方程式，以求解氣-水界面不穩定波之發展率與傳播速度，並與 Tsai & Lin (2004) 以及 Zeisel *et al.* (2008) 之數值解析比較，在繪製出中性穩定曲線，以及探討不穩定模態下之擾動壓力與 x 方向速度的變化。

1.2 論文架構



如上節所述，為求解氣-水耦合剪流場之線性穩定性分析，第二章將介紹所需之統御方程式以及邊界條件。首先於 2.1 節推導穩定性動力方程式；接續由 2.2 節推導氣-水界面邊界條件以及上、下邊界條件；而後於 2.3 節分別介紹空氣與水體的背景速度；於 2.4 節介紹應用於空氣流場之匹配條件。第三章將介紹一解析線性穩定性分析之數值方法。3.1 節為介紹契比雪夫配置法，並代入第二節所推導之方程式；3.2 節為探討契比雪夫配置法的準確性與收斂性測試。第四章將呈現線性穩定性分析之結果。4.1 節為比較本研究之數值解析與其他數值解析結果；於 4.2 節繪製出中性穩定曲線；於 4.3 節呈現擾動壓力與擾動速度的分佈。第五章為本研究之結論。

第二章、控制方程式及邊界條件



2.1 穩定性動力方程式 (Orr-Sommerfeld Equation)

考慮一受微小擾動之空氣與水體耦合的二維黏性流場，此空氣流場在無窮高處以 U_∞ 之水平速度運動，並引致水體運動。在未受擾動前，空氣與水體的運動皆為二維平行剪流場，並建立於 $x-z$ 座標系統中， x 軸表示水平沿流場方向運動為正； z 軸表示以向上為正之垂直方向。其中 $z=0$ 為平均水平面處。假設空氣與水皆為不可壓縮、密度均勻分佈且黏滯係數為定值之牛頓流體。以下推導過程以水體為例，並以下標 w 來表示水體中的物理量與參數。

受擾動之水下流場需滿足連續及動量方程式 (Navier-Stokes equation)：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \overline{V}_w &= 0 \\ \frac{\partial \overline{V}_w}{\partial t} + (\overline{V}_w \cdot \nabla) \overline{V}_w &= -\frac{1}{\rho_w} \nabla P_w + \nu_w \nabla^2 \overline{V}_w\end{aligned}\quad (2.1)$$

其中 \overline{V}_w 和 P_w 分別表示為受擾動水體之速度及動壓力 (dynamic pressure)， ν_w 與 ρ_w 分別表示為水的動黏滯係數與密度。

而「受擾動後流場」之速度與動壓力可分解成未受擾動之「背景狀態流場」項與額外增加之「擾動狀態流場」項：

$$\begin{aligned}\overline{V}_w(x, z, t) &= (U_w(z) + u'_w(x, z, t), w'_w(x, z, t)) \\ P_w(x, z, t) &= P_{0,w}(x, z, t) + p'_w(x, z, t)\end{aligned}\quad (2.2)$$

式中 u'_w 、 w'_w 與 p'_w 分別表示為擾動項的 x 、 z 方向速度與動壓力， U_w 與 $P_{0,w}$ 則分別表示為水體背景狀態的平行流場速度與動壓力。

將 (2.2) 代入 (2.1) 之統御方程式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial(U_w + u'_w)}{\partial x} + \frac{\partial w'_w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(U_w + u'_w)}{\partial t} + (U_w + u'_w) \frac{\partial(U_w + u'_w)}{\partial x} + w'_w \frac{\partial(U_w + u'_w)}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(P_{0,w} + p'_w)}{\partial x} + \nu_w \nabla^2(U_w + u'_w)\end{aligned}\quad (2.3)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial w'_w}{\partial t} + (U_w + u'_w) \frac{\partial w'_w}{\partial x} + w'_w \frac{\partial w'_w}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(P_{0,w} + p'_w)}{\partial z} + \nu_w \nabla^2 w'_w \end{aligned}$$

而背景狀態流場亦要滿足動量方程式：

$$0 = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P_{0,w}}{\partial x} + \nu_w \nabla^2 U_w \quad (2.4)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P_{0,w}}{\partial z}$$

將受擾動流場 (2.3) 扣除背景流場 (2.4) 後，忽略非線性項可得到線性化之統御方程式：

$$\frac{\partial u'_w}{\partial x} + \frac{\partial w'_w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u'_w}{\partial t} + U_w \frac{\partial u'_w}{\partial x} + w'_w \frac{dU_w}{dz} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w}{\partial x} + \nu_w \nabla^2 u'_w \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial w'_w}{\partial t} + U_w \frac{\partial w'_w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w}{\partial z} + \nu_w \nabla^2 w'_w$$

二維不可壓縮流存在一流函數 (stream function) ψ 。若考慮其在 x 方向以周長 λ 與時間上以速度 c 傳播，則此水之擾動流函數可表示為 $\psi'_w(x, z, t) = \widehat{\phi}_w(z) e^{ik(x-ct)}$ ，其中 $k = 2\pi/\lambda$ 為波數。本研究僅考慮在時間上的不穩定性 (temporal instability)，而非空間中之不穩定 (spatial instability)，因此假設 k 為一正實數， c 為複數 ($c = c_r + ic_i$)。若 $c_i > 0$ ，擾動波將隨時間以 $kc_i = \omega_i$ 之發展率成長，則此波為不穩定的。反之，若 $c_i < 0$ ，則擾動波以 ω_i 之發展率衰減，因此為穩定的擾動波。

以擾動之流函數來表示擾動速度：

$$u'_w(x, z, t) = \frac{\partial \psi'_w(x, z, t)}{\partial z} = \frac{d\widehat{\phi}_w(z)}{dz} e^{ik(x-ct)} \quad (2.6)$$

$$w'_w(x, z, t) = -\frac{\partial \psi'_w(x, z, t)}{\partial x} = -ik\widehat{\phi}_w(z) e^{ik(x-ct)}$$

將擾動狀態流場 (2.5) 之速度項以 (2.6) 代入：



$$\begin{aligned}
& \left(-ikc \frac{d\widehat{\phi}_w}{dz} + ikU_w \frac{d\widehat{\phi}_w}{dz} - ik \frac{dU_w}{dz} \widehat{\phi}_w \right) e^{ik(x-ct)} \\
& = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w}{\partial x} + \nu_w \left(-k^2 \frac{d\widehat{\phi}_w}{dz} + \frac{d^3\widehat{\phi}_w}{dz^3} \right) e^{ik(x-ct)} \\
& (-k^2 c \widehat{\phi}_w + k^2 U_w \widehat{\phi}_w) e^{ik(x-ct)} \\
& = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w}{\partial z} + \nu_w \left(ik^3 \widehat{\phi}_w - ik \frac{d^2\widehat{\phi}_w}{dz^2} \right) e^{ik(x-ct)}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中連續方程式會自動滿足。接著將兩方程式 (2.7) 交叉對 x 及 z 微分以消去壓力項 p'_w ，可得到一描述水體擾動流場之線性穩定性動力方程式：

$$\begin{aligned}
& -k(c - U_w) \frac{d^2\widehat{\phi}_w}{dz^2} + \left[k^3(c - U_w) - k \frac{d^2U_w}{dz^2} \right] \widehat{\phi}_w \\
& = -i\nu_w \left(\frac{d^4\widehat{\phi}_w}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2\widehat{\phi}_w}{dz^2} + k^4 \widehat{\phi}_w \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

選擇空氣摩擦速度 $u_* = \sqrt{\tau_a/\rho_a}$ 為流場之特徵速度 $[\mathcal{V}]$ ， $1/k$ 為特徵長度 $[\mathcal{L}]$ 。其中 τ_a 為氣-水界面作用於空氣之剪應力，因通過界面之剪應力需為連續，故在界面上作用於空氣之剪應力 τ_a ，應等於作用於水體之剪應力 τ_w 。以上述所選之特徵速度及長度，將水體之穩定性動力方程式 (2.8) 無因次化，並以 \sim 表示無因次之變數：

$$k = \frac{1}{[\mathcal{L}]} \tilde{k}, \quad (U, c) = [\mathcal{V}](\tilde{U}, \tilde{c}), \quad z = [\mathcal{L}]\tilde{z}, \quad \widehat{\phi} = [\mathcal{V}\mathcal{L}]\tilde{\phi} \tag{2.9}$$

將上述之無因次變數 (2.9) 代入 (2.8)，則可得無因次之穩定性動力方程式：

$$\begin{aligned}
& -\tilde{k}(\tilde{c} - \tilde{U}_w) \frac{d^2\tilde{\phi}_w}{d\tilde{z}^2} + \left[\tilde{k}^3(\tilde{c} - \tilde{U}_w) - \tilde{k} \frac{d^2\tilde{U}_w}{d\tilde{z}^2} \right] \tilde{\phi}_w \\
& = -\frac{i}{R_w} \left(\frac{d^4\tilde{\phi}_w}{d\tilde{z}^4} - 2\tilde{k}^2 \frac{d^2\tilde{\phi}_w}{d\tilde{z}^2} + \tilde{k}^4 \tilde{\phi}_w \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $R_w = u_*/k\nu_w$ 為水體之雷諾數 (Reynolds number)。上式即為通稱之 Orr-Sommerfeld 方程式。

同上述之水體流場，空氣中的無因次穩定性動力方程式為：

$$\begin{aligned}
& -\tilde{k}(\tilde{c} - \bar{U}_a) \frac{d^2 \tilde{\phi}_a}{d\tilde{z}^2} + \left[\tilde{k}^3(\tilde{c} - \bar{U}_a) - \tilde{k} \frac{d^2 \bar{U}_a}{d\tilde{z}^2} \right] \tilde{\phi}_a \\
& = -\frac{i}{R_a} \left(\frac{d^4 \tilde{\phi}_a}{d\tilde{z}^4} - 2\tilde{k}^2 \frac{d^2 \tilde{\phi}_a}{d\tilde{z}^2} + \tilde{k}^4 \tilde{\phi}_a \right)
\end{aligned}
\tag{2.11}$$



其中以下標 a 表示空氣之變數與參數，空氣流場之擾動流函數為 $\psi'_a(x, z, t) = \widehat{\phi}_a(z)e^{ik(x-ct)}$ ， $R_a = u_*/k\nu_a$ 為空氣之雷諾數， $U_a(z)$ 為空氣在背景狀態的平行流流速。



2.2 邊界條件

本研究考慮的流場共存在三個邊界，一為空氣與水體的界面，另外兩個分別是空氣流場與水體流場的無窮遠處。求解 (2.10) 與 (2.11) 之穩定性動力方程式需於上述之邊界上滿足適當之邊界條件。為與動力方程式的階次（線性）一致，氣-水界面之邊界條件需經線性化處理。

空氣與水體流場在受擾動後，假設氣-水界面為 $z = \eta(x, t)$ ，並在此界面上需滿足以下之物理條件：(1) 流體質點之運動需相切於界面、(2) 空氣與水體流場之速度需連續、(3) 界面上之剪應力需連續、(4) 界面上之正應力需與表面張力平衡。其中有關流體剪應力及正應力表示式，為三維應力張量簡化後得到之二維流場應力關係式，其推導過程詳見附錄一。考慮均勻表面張力分佈，而無張力梯度之存在。以下將推導於界面處之邊界條件：

(1) 空氣與水交界面的運動邊界條件 (kinematic condition)

考慮兩不相溶的流體，兩者間存在一共同交界面 (interface)，於二維流場可表示為 $f(x, z, t) = z - \eta(x, t)$ 。對空氣與水體的交界面而言，不管空氣與水體如何運動，必須符合沒有任何物質傳輸此一條件，即空氣與水都無法穿透此一界面。以方程式表示即為：

$$\frac{Df(x, z, t)}{Dt} = 0 \quad (2.12)$$

上式在 $z = \eta(x, t)$ 處成立。將上式展開並代入受擾動狀態之物理量 (2.2) 後可得：

$$-\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + [U_w(\eta) + u'_w(x, \eta, t)] \frac{-\partial \eta(x, t)}{\partial x} + w'_w(x, \eta, t) = 0 \quad (2.13)$$

以泰勒級數將上式展開至 $z = 0$ 可得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left[U_w(0) + \frac{dU_w(0)}{dz} \eta + \dots \right] \frac{-\partial \eta}{\partial x} \\ & + \left[u'_w(x, 0, t) + \frac{\partial u'_w(x, 0, t)}{\partial z} \eta + \dots \right] \frac{-\partial \eta}{\partial x} \\ & + \left[w'_w(x, 0, t) + \frac{\partial w'_w(x, 0, t)}{\partial z} \eta + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

忽略上式中之非線性項。如同擾動狀態之空氣與水體流場，我們亦考慮波數為 k 、發展率為 kc_i 之擾動狀態的氣-水界面，則擾動界面位移為 $\eta(x, t) = qe^{ik(x-ct)}$ ，其中 q 表示振幅。以流函數 (2.6) 表示擾動速度項，即可得到在 $z = 0$ 處成立之線性方程式：

$$(c - U_0)q - \widehat{\phi}_w(0) = 0 \quad (2.15)$$

其中 $U_0 = U_w(0) = U_a(0)$ 為背景狀態之水面流速。

(2) 在空氣與水交界面處的速度需連續

x 方向與 z 方向上之空氣流場與水體流場速度在 $z = \eta(x, t)$ 處需為連續，代入受擾動狀態之物理量 (2.2) 後可表示為：

$$U_a(\eta) + u'_a(x, \eta, t) = U_w(\eta) + u'_w(x, \eta, t) \quad (2.16)$$

$$w'_a(x, \eta, t) = w'_w(x, \eta, t) \quad (2.17)$$

將上述二式以泰勒級數展開至 $z = 0$ ，扣除背景流場所滿足的界面邊界條件為： $U_w(0) = U_a(0)$ ，忽略式中非線性項，以流函數 (2.6) 表示擾動速度項，則可得到在 $z = 0$ 處成立的線性方程式：

$$\frac{d\widehat{\phi}_a(0)}{dz} + \frac{dU_a(0)}{dz}q = \frac{d\widehat{\phi}_w(0)}{dz} + \frac{dU_w(0)}{dz}q \quad (2.18)$$

$$\widehat{\phi}_a(0) = \widehat{\phi}_w(0) \quad (2.19)$$

(3) 剪應力在空氣與水交界面處需連續

在 $z = \eta(x, t)$ 處，剪應力連續之數學方程式可由附錄一之 (A.10)，代入受擾動狀態之物理量 (2.2)：

$$\begin{aligned} \mu_a \left[2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u'_a}{\partial x} - \frac{\partial w'_a}{\partial z} \right) + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{dU_a}{dz} + \frac{\partial u'_a}{\partial z} + \frac{\partial w'_a}{\partial x} \right) \right] \\ = \mu_w \left[2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u'_w}{\partial x} - \frac{\partial w'_w}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{dU_w}{dz} + \frac{\partial u'_w}{\partial z} + \frac{\partial w'_w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$



以泰勒級數展開至 $z = 0$ 後忽略非線性項，扣除背景狀態流場所滿足之條件： $\mu_a dU_a(0)/dz = \mu_w dU_w(0)/dz$ 。以流函數 (2.6) 表示方程式中之擾動速度，則可得到在 $z = 0$ 處成立之線性方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\mu_a}{\mu_w} \left(\frac{d^2 U_a(0)}{dz^2} q + \frac{d^2 \widehat{\phi}_a(0)}{dz^2} + k^2 \widehat{\phi}_a(0) \right) \\ = \frac{d^2 U_w(0)}{dz^2} q + \frac{d^2 \widehat{\phi}_w(0)}{dz^2} + k^2 \widehat{\phi}_w(0) \end{aligned} \quad (2.21)$$

(4) 正應力在空氣與水交界面處需與表面張力平衡

在 $z = \eta(x, t)$ 處，正應力平衡之數學方程式可由附錄一之 (A.11) 表示，代入受擾動狀態之物理量 (2.2) 及水體與空氣受擾動之總壓力，其中受擾動之總壓力分別表示為 $P_{t,a} = P_{t,0,a} + P'_{t,a}$ 與 $P_{t,w} = P_{t,0,w} + P'_{t,w}$ ：

$$\begin{aligned} P_{t,0,a} + P'_{t,a} - 2\mu_a \frac{\frac{\partial u'_a}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{dU_a}{dz} + \frac{\partial u'_a}{\partial z} + \frac{\partial w'_a}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial w'_a}{\partial z}}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} \\ = P_{t,0,w} + P'_{t,w} - 2\mu_w \frac{\frac{\partial u'_w}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{dU_w}{dz} + \frac{\partial u'_w}{\partial z} + \frac{\partial w'_w}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial w'_w}{\partial z}}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} \\ + T \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

將上述方程式 (2.22) 扣除背景狀態總壓力所滿足之條件： $P_{t,0,a}(x, \eta, t) = P_{t,0,w}(x, \eta, t)$ 及 $\mu_a dU_a(\eta)/dz = \mu_w dU_w(\eta)/dz$ ，並以流函數 (2.6) 表示方程式中的擾動速度項。其中擾動之總壓力可分解為動壓力與靜壓力並表示為：

$$P'_{t,a}(x, \eta, t) = p'_a(x, \eta, t) - \rho_a g \eta(x, t) = \widehat{p}_a(\eta) e^{ik(x-ct)} - \rho_a g \eta(x, t) \quad (2.23)$$

$$P'_{t,w}(x, \eta, t) = p'_w(x, \eta, t) - \rho_w g \eta(x, t) = \widehat{p}_w(\eta) e^{ik(x-ct)} - \rho_w g \eta(x, t)$$

$\widehat{p}_a(\eta)$ 與 $\widehat{p}_w(\eta)$ 可分別從空氣與水體流場的 x 方向擾動狀態之動量方程式求得：



$$\begin{aligned}
 \widehat{p}_a(\eta) &= \frac{\mu_a}{ik} \left(\frac{d^3 \widehat{\phi}_a(\eta)}{dz^3} - k^2 \frac{d\widehat{\phi}_a(\eta)}{dz} \right) \\
 &\quad + \rho_a \left[(c - U_a) \frac{d\widehat{\phi}_a(\eta)}{dz} + \frac{dU_a}{dz} \widehat{\phi}_a(\eta) \right] \\
 \widehat{p}_w(\eta) &= \frac{\mu_w}{ik} \left(\frac{d^3 \widehat{\phi}_w(\eta)}{dz^3} - k^2 \frac{d\widehat{\phi}_w(\eta)}{dz} \right) \\
 &\quad + \rho_w \left[(c - U_w) \frac{d\widehat{\phi}_w(\eta)}{dz} + \frac{dU_w}{dz} \widehat{\phi}_w(\eta) \right]
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

將 (2.23) 與 (2.24) 代入正應力的邊界條件方程式 (2.22) 中，以泰勒級數對 $z = 0$ 展開並忽略非線性項，則此一條件在 $z = 0$ 之線性方程式如下所示：

$$\begin{aligned}
 &\frac{\rho_a}{\rho_w} \left[(U_0 - c) \frac{d\widehat{\phi}_a(0)}{dz} - \frac{dU_a(0)}{dz} \widehat{\phi}_a + \frac{iv_a}{k} \left(\frac{d^3 \widehat{\phi}_a(0)}{dz^3} - 3k^2 \frac{d\widehat{\phi}_a(0)}{dz} \right) \right] \\
 &= \left[(U_0 - c) \frac{d\widehat{\phi}_w(0)}{dz} - \frac{dU_w(0)}{dz} \widehat{\phi}_w + \frac{iv_w}{k} \left(\frac{d^3 \widehat{\phi}_w(0)}{dz^3} - 3k^2 \frac{d\widehat{\phi}_w(0)}{dz} \right) \right] \\
 &\quad + gq \left(\frac{\rho_w - \rho_a}{\rho_w} \right) - \frac{k^2 Tq}{\rho_w}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

以特徵長度及特徵速度將上述五個氣-水界面邊界條件無因次化，可得滿足於 $z = 0$ 之無因次氣-水界面邊界條件：

$$\begin{aligned}
 (\tilde{c} - \widetilde{U}_0) \tilde{q} - \widetilde{\phi}_w &= 0 \\
 \frac{d\widetilde{\phi}_a}{d\tilde{z}} + \frac{d\widetilde{U}_a}{d\tilde{z}} \tilde{q} &= \frac{d\widetilde{\phi}_w}{d\tilde{z}} + \frac{d\widetilde{U}_w}{d\tilde{z}} \tilde{q} \\
 \widetilde{\phi}_a &= \widetilde{\phi}_w \\
 m \left[\frac{d^2 \widetilde{\phi}_a}{d\tilde{z}^2} + \tilde{k}^2 \widetilde{\phi}_a + \frac{d^2 \widetilde{U}_a}{d\tilde{z}^2} \tilde{q} \right] &= \frac{d^2 \widetilde{\phi}_w}{d\tilde{z}^2} + \tilde{k}^2 \widetilde{\phi}_w + \frac{d^2 \widetilde{U}_w}{d\tilde{z}^2} \tilde{q} \\
 r \left[(\widetilde{U}_0 - \tilde{c}) \frac{d\widetilde{\phi}_a}{d\tilde{z}} - \frac{d\widetilde{U}_a}{d\tilde{z}} \widetilde{\phi}_a + \frac{i}{\tilde{k}R_a} \left[\frac{d^3 \widetilde{\phi}_a}{d\tilde{z}^3} - 3\tilde{k}^2 \frac{d\widetilde{\phi}_a}{d\tilde{z}} \right] \right] \\
 &= (\widetilde{U}_0 - \tilde{c}) \frac{d\widetilde{\phi}_w}{d\tilde{z}} - \frac{d\widetilde{U}_w}{d\tilde{z}} \widetilde{\phi}_w + \frac{i}{\tilde{k}R_w} \left[\frac{d^3 \widetilde{\phi}_w}{d\tilde{z}^3} - 3\tilde{k}^2 \frac{d\widetilde{\phi}_w}{d\tilde{z}} \right] + (\tilde{k}^2 W + F) \tilde{q}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 $m = \mu_a/\mu_w$ 為空氣對水之黏滯係數比， $r = \rho_a/\rho_w$ 為空氣對水之密度比， $W = 1/We = kT/(\rho_w u_*^2)$ 為韋伯數 (We) 之導數， $F = 1/Fr^2 = (\rho_w - \rho_a)g/(\rho_w k u_*^2)$ 為福祿數 (Fr) 平方之導數， T 為表面張力係數， g 為重力加速度。

在無窮遠處的邊界上，空氣與水體流場其擾動速度皆為零，因此其無因次形式為：

$$\widetilde{\phi}_w(\tilde{z}) = \frac{d\widetilde{\phi}_w(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = 0, \quad \tilde{z} \rightarrow -\infty \quad (2.27)$$

$$\widetilde{\phi}_a(\tilde{z}) = \frac{d\widetilde{\phi}_a(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = 0, \quad \tilde{z} \rightarrow \infty \quad (2.28)$$

綜合上述之統御方程式 (2.10) - (2.11) 與邊界條件 (2.26) - (2.37)，即可構成此穩定性分析的解，同時可表示為一廣義特徵值問題 (generalized eigenvalue problem) 的解。此解需為非零解 (nontrivial solution)，即 $\tilde{\phi} \neq 0$ 。因此廣義特徵值 \tilde{c} 需滿足以下色散關係 (dispersion relation)：

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\tilde{k}, R_w, R_a, m, r, W, F) \quad (2.29)$$



2.3 背景狀態剪流場之速度分佈

(A) 空氣流場速度分佈

利用平板邊界層紊流場的實測速度資料，Miles (1962) 將空氣背景狀態平行流場表示為「線性-對數」(linear-logarithmic) 形式之速度分佈。其中 Miles 僅考慮空氣流場之不穩定性，因此氣-水界面可視為一「不平滑」之邊界 (no-slip boundary)，在界面上空氣之流速為零。

若考慮空氣與水體耦合之流場，則空氣在界面上之流速等於水體表面之流速 U_0 ，而 Miles 之空氣流場速度分佈修正為以下形式：

在黏性次邊界層 (viscous sublayer) 中之流場「線性」速度分佈為：

$$U_a(z) = U_0 + \frac{u_*^2}{\nu_a} z, \quad 0 \leq z \leq \delta \quad (2.30)$$

在黏性次邊界層以外之流場速度呈「對數函數」分佈：

$$U_a(z) = U_0 + s u_* + \frac{u_*}{\kappa} \left[\gamma - \tanh\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right], \quad z \geq \delta \quad (2.31)$$

上式之 γ 滿足以下關係式：

$$\sinh \gamma = \frac{2\kappa u_*}{\nu_a} (z - \delta) \quad (2.32)$$

其中 $\kappa = 0.4$ 為 von Kármán 常數， $\delta = s\nu_a/u_*$ 為黏性次邊界層之高度， s 值決定黏性次邊界層之厚度，而水面上空氣邊界層紊流之 s 值約為 5。此空氣速度分佈及其一次與二次導數皆連續於次邊界層高度 $z = \delta$ 。

上述之空氣流場速度函數廣泛被使用於氣-水界面不穩定波，如 Valenzuela (1976)、Tsai & Lin (2004) 與 Zeisel *et al.* (2008) 等，因此在本研究中，選擇此「線性-對數」形式為空氣背景狀態流場速度函數分佈。



(B) 水體流場速度分佈

相較於空氣流場的「線性-對數」函數速度分佈，對於水體流場之速度分佈，各研究的選擇都不相同。在本穩定性分析中之水體背景流場速度，選擇 van Gastel *et al.* (1985) 以指數函數近似之背景狀態水體流速的垂直分佈：

$$U_w(z) = U_0 \exp\left(\frac{\rho_a u_*^2}{U_0 \mu_w} z\right) \quad (2.33)$$

U_0 為水體表面流速， u_* 為空氣摩擦速度。其中 U_0 可根據 Kawai (1979) 定義為空氣摩擦速度之一半，即 $U_0 = 0.5u_*$ 。

由 (2.30) 與 (2.33) 可知速度分佈在交界面 $z = 0$ 其一次與二次導數為不連續，然而剪應力於界面需為連續，故空氣之剪應力 τ_a 應等於水體之剪應力 τ_w ，即 $\mu_a dU_a/dz = \mu_w dU_w/dz$ 。

圖 2.1-圖 2.3 顯示本研究所採用之氣-水耦合剪流場的速度、速度之一次導數與二次導數在垂直方向的變化。由圖 2.1-圖 2.3 可看出空氣流場中之速度、速度之一次導數與二次導數均遠大於水體流場，但此結果不表示空氣流場比水體流場對不穩定擾動的影響大，因空氣流體的密度遠小於水體流體的密度。

由圖 2.1 或 (2.31) 可觀察出速度在無窮遠處時為無限大，因此造成數值解析無法直接解析至無窮遠處。而由圖 2.3 可觀察出速度之二次導數在黏性次邊界層上方，於小範圍內有極大的變化，因此需以很高網格的解析度才能捕捉其中的變化。上述速度與速度之二次導數的問題，將存在穩定性動力方程式中，扮演不穩定擾動的影響因子，並於下節探討對上述兩種問題之處理。

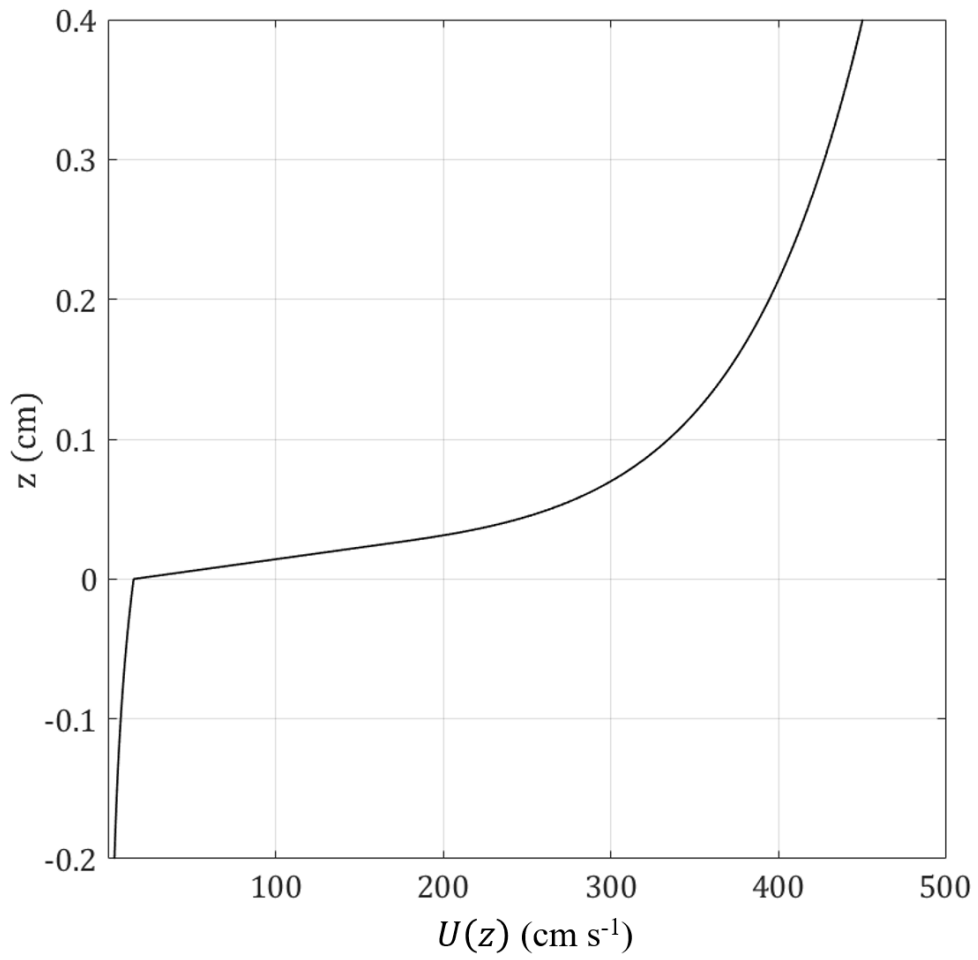


圖 2.1：背景狀態剪流場速度於垂直方向之變化。其中以 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 表示。

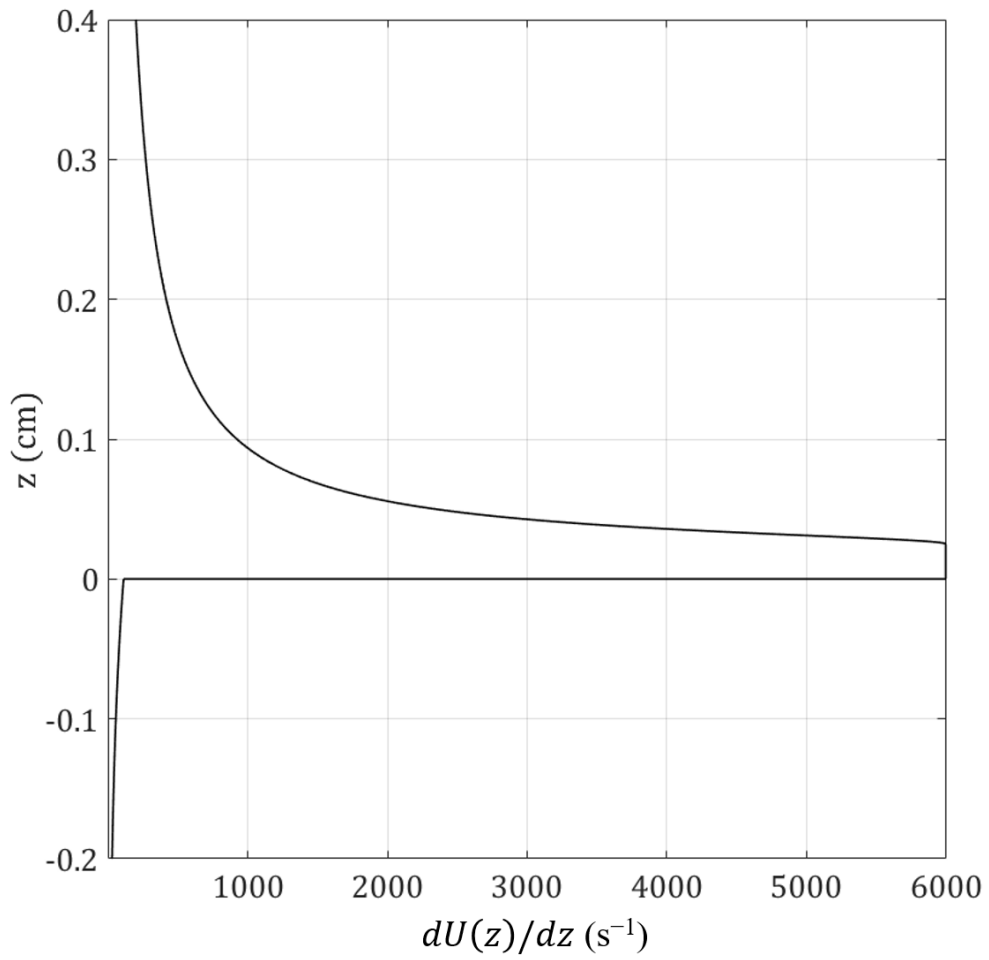


圖 2.2：背景狀態剪流場速度之一次導數於垂直方向之變化。其中以 $u_* = 30$ cm/s 表示。

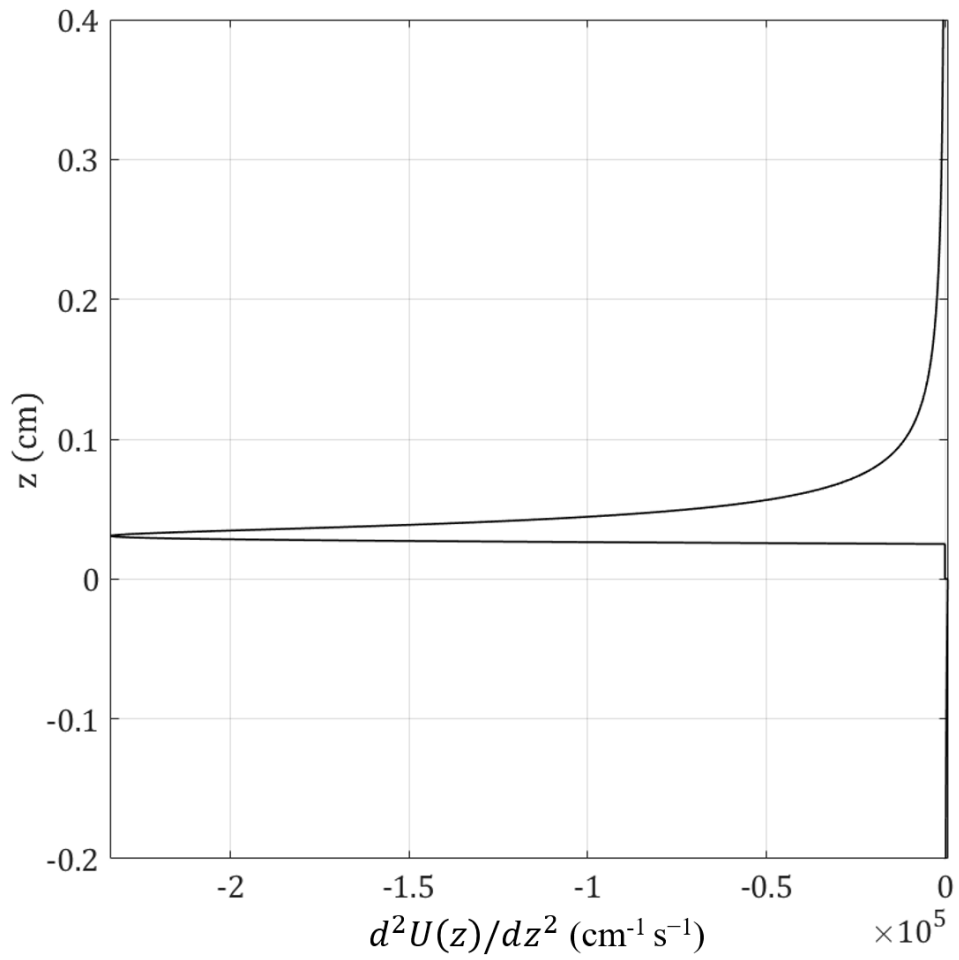


圖 2.3：背景狀態剪流場速度之二次導數於垂直方向之變化。其中以 $u_* = 30$ cm/s 表示。



2.4 匹配條件 (Matching condition)

此節將同樣如 Boomkamp *et al.* (1997) 應用區域分解法 (domain decomposition method) (如: Canuto, Hussaini, Quarteroni & Zang (1988)), 把特徵函數的區間分解為兩子區間 (subdomain), 並各別以兩不同特徵函數表示, 其中兩特徵函數間將以匹配條件來連結。

首先將處理速度之二次導數內的問題, 即在黏性次邊界層上方時, 於小範圍內有極大的變化。本研究使用的為配置點, 其特性為在邊界處較密集, 因此需以高解析的網格才能捕捉到此變化。然而如以區域分解法將空氣流場之特徵函數 (eigenfunction) $\phi_a(z)$ 分解為 $\phi_{a1}(z)$ 及 $\phi_{a2}(z)$ 兩特徵函數, 其中下標 a1 為空氣線性流場, a2 為空氣對數流場。兩特徵函數描述的區間分別為 $[0, \delta]$ 與 $[\delta, h]$, 因此對於黏性次邊界層 $z = \delta$ 上方, 會有配置點在邊界處高解析的網格, 所以速度之二次導數的變化能更精確地捕捉。爾後之數值方法都以 $\phi_{a1}(z)$ 及 $\phi_{a2}(z)$ 兩特徵函數解析, 並於第三章與直接以單一特徵函數 $\phi_a(z)$ 解析之結果比較, 以證實於黏性次邊界層 $z = \delta$ 處應用區域分解法的重要性。

於 $\phi_{a1}(z)$ 及 $\phi_{a2}(z)$ 兩特徵函數間, 即 $z = \delta$ 處, 以匹配條件連結。其中匹配條件需滿足水平與垂直兩方向之速度及應力連續, 因此無因次匹配條件表示為:

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_{a1}(\delta) &= \widetilde{\phi}_{a2}(\delta) \\ \frac{d\widetilde{\phi}_{a1}(\delta)}{d\tilde{z}} &= \frac{d\widetilde{\phi}_{a2}(\delta)}{d\tilde{z}} \\ \frac{d^2\widetilde{\phi}_{a1}(\delta)}{d\tilde{z}^2} &= \frac{d^2\widetilde{\phi}_{a2}(\delta)}{d\tilde{z}^2} \\ \frac{d^3\widetilde{\phi}_{a1}(\delta)}{d\tilde{z}^3} &= \frac{d^3\widetilde{\phi}_{a2}(\delta)}{d\tilde{z}^3}\end{aligned}\tag{2.34}$$

之後將處理速度在無窮遠處時為無限大的問題, 以下將介紹兩種處理方法:

第一種處理方法為截斷計算區間的高度至一定值, 並在此截斷高度以適當的條件替代。因此在本研究的數值解析中, 空氣與水之截斷高度為 $z = \pm h$, 而擾動流場在此邊界上需滿足「自由滑移條件」(free-slip condition), 亦即在 $z = \pm h$ 邊界之切線方向無剪力作用, 與流體質點之連動與邊界相切, 故表示邊界垂直之速度分

量為零。因此以流函數 (2.6) 表示擾動速度項，則無因次之自由滑移條件為：

$$\frac{d^2 \widetilde{\phi}_w(-\tilde{h})}{d\tilde{z}^2} = 0; \quad \widetilde{\phi}_w(-\tilde{h}) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2 \widetilde{\phi}_a(\tilde{h})}{d\tilde{z}^2} = 0; \quad \widetilde{\phi}_a(\tilde{h}) = 0 \quad (2.36)$$

第二種處理方法為欲描述上邊界至無窮遠處，故將空氣流場速度於一定高度後為定值，同如 Boomkamp *et al.* (1997) 所述。假設空氣流場於一截斷高度 h 後之背景速度為定值，即 $U_a(z) = U_a(h) = U_h$, $z > h$ 。將上述假設代入空氣中的穩定性動力方程式 (2.11)，並滿足邊界條件 (2.28)，可解得一描述 $z > h$ 區域的解析解，其以無因次形式表示為：

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_{a3}(\tilde{z}) = & D \exp[-\tilde{k}(\tilde{z} - \tilde{h})] \\ & + E \exp\left[-\sqrt{\tilde{k}^2 + i\tilde{k}R_a(\widetilde{U}_h - \tilde{c})}(\tilde{z} - \tilde{h})\right], \quad \tilde{z} > \tilde{h} \end{aligned} \quad (2.37)$$

其中 D 與 E 為係數。

將上述解析解 (2.37) 應用於數值解析時，同樣將以區域分解法將空氣流場的特徵函數 $\phi_a(z)$ 於此高度 $z = h$ 分為 $\phi_{a2}(z)$ 及 $\phi_{a3}(z)$ 兩特徵函數，其描述之區間分別為 $[\delta, h]$ 與 $[h, \infty)$ ，其中下標 a2 表示空氣對數流場，a3 為空氣常數流場。在 $\phi_{a2}(z)$ 及 $\phi_{a3}(z)$ 兩特徵函數間，以匹配條件連結時，將於導數項產生非線性於 \tilde{c} 之項，

如： $d\widetilde{\phi}_{a3}(\tilde{h})/d\tilde{z} = -\tilde{k}D + -\sqrt{\tilde{k}^2 + i\tilde{k}R_a(\widetilde{U}_h - \tilde{c})}E$ 。因此為消除導數項內之非線性項，將假設不穩定波的傳播速度 \tilde{c} 遠小於截斷高度上的背景速度 \widetilde{U}_h ，即 $|\tilde{c}| \ll \widetilde{U}_h$ 。因此假設後的解析解 $\widetilde{\phi}_{a3}(\tilde{z})$ 以無因次表示為：

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_{a3}(\tilde{z}) = & D \exp[-\tilde{k}(\tilde{z} - \tilde{h})] \\ & + E \exp\left[-\sqrt{\tilde{k}^2 + i\tilde{k}R_a\widetilde{U}_h}(\tilde{z} - \tilde{h})\right], \quad \tilde{z} > \tilde{h} \end{aligned} \quad (2.38)$$

將假設後的解析解 (2.38) 代入無因次之匹配條件可表示為：

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_{a2}(\tilde{h}) = & D + E \\ \frac{d\widetilde{\phi}_{a2}(\tilde{h})}{d\tilde{z}} = & -\tilde{k}D - \sqrt{\tilde{k}^2 + i\tilde{k}R_a\widetilde{U}_h}E \end{aligned} \quad (2.39)$$



$$\frac{d^2 \widetilde{\phi}_{a2}(\tilde{h})}{d\tilde{z}^2} = \tilde{k}^2 D + (\tilde{k}^2 + i\tilde{k}R_a \widetilde{U}_h) E$$

$$\frac{d^3 \widetilde{\phi}_{a2}(\tilde{h})}{d\tilde{z}^3} = -\tilde{k}^3 D - (\tilde{k}^2 + i\tilde{k}R_a \widetilde{U}_h)^{3/2} E$$

由於水體背景速度為一隨深度遞減之函數，因此於無窮水深 $z = -\infty$ 或截斷深度 $z = -h$ 時皆趨近於零，表示其影響氣-水耦合流場之擾動會相當小。因此於水體流場之下邊界可僅計算至截斷深度 $z = -h$ ，並滿足自由滑移條件 (2.35)。

綜合上述可將氣-水耦合流場以兩種不同上邊界條件解析，其一為上邊界代入自由滑移條件 (2.36)，如圖 2.4 所示。其二為上邊界代入滿足解析解之匹配條件 (2.39)，如圖 2.5 所示。圖 2.4 與圖 2.5 皆在 $z = -h$ 處滿足自由滑移條件 (2.35)、 $z = 0$ 處滿足氣-水界面條件 (2.26) 與 $z = \delta$ 處滿足匹配條件 (2.34)。

Tsai & Lin (2004) 及 Zeisel *et al.* (2008) 分別使用與上述不同之上、下邊界條件。然而在第四章可知，此兩種不同邊界條件之解法，所解得不穩定波的發展率，與 Tsai & Lin 及 Zeisel *et al.* 的數值解析結果比較皆吻合，證實截斷高度與解析解所衍生的邊界條件是有效的。

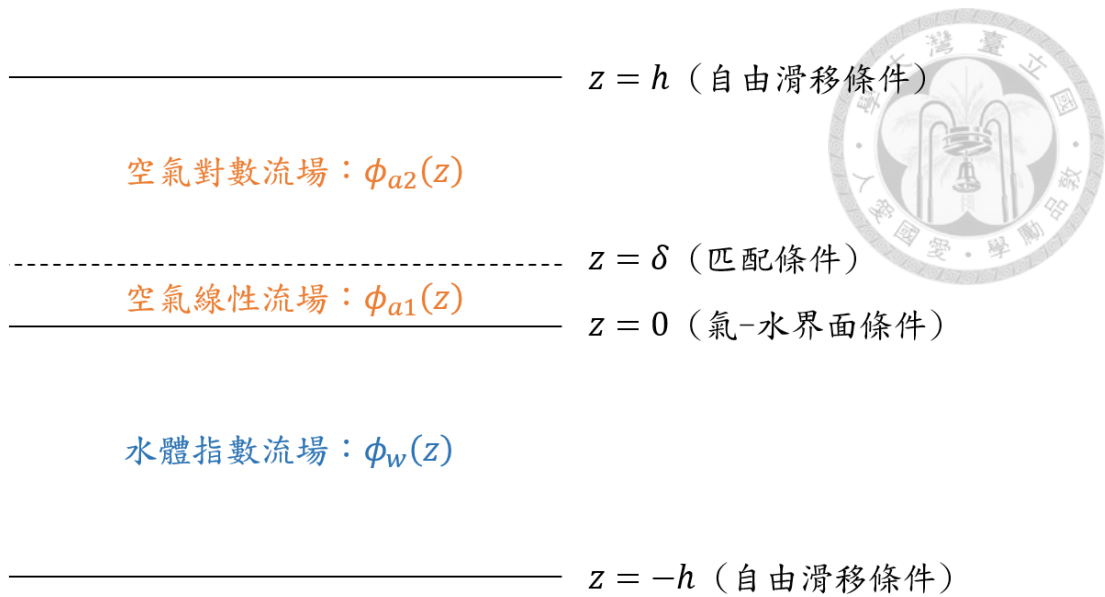


圖 2.4：方法一之示意圖。虛線表示為匹配條件。

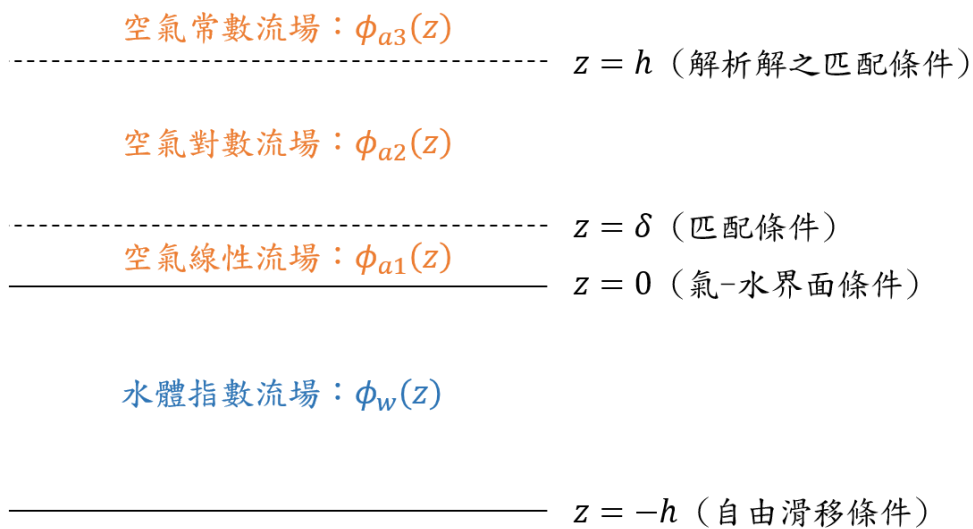


圖 2.5：方法二之示意圖。虛線表示為匹配條件。

第三章、 數值方法



以下數值方法為解析圖 2.5 所示之方法二，即上邊界使用滿足解析解之匹配條件 (2.39)。並在 3.2.3 節與圖 2.4 之方法一比較，即上邊界使用自由滑移條件。

3.1 契比雪夫配置法 (Chebyshev Collocation Method)

契比雪夫配置法是將特徵函數以基底函數 (basic function) 展開，其中基底函數為契比雪夫多項式第一型式 (first kind of Chebyshev polynomials)。將特徵函數所描述的區間以配置點 (collocation points) 離散。以下將分別介紹契比雪夫多項式與配置點的形式與特性，並應用於第二章所推導的方程式。

契比雪夫多項式其正交的範圍於 $[-1,1]$ ，因此需將待展開之特徵函數，即 $\widetilde{\phi}_w(\tilde{z})$, $\widetilde{\phi}_{a1}(\tilde{z})$ 與 $\widetilde{\phi}_{a2}(\tilde{z})$ ，描述的區間，分別為 $[-\tilde{h}, 0]$, $[0, \tilde{\delta}]$ 與 $[\tilde{\delta}, \tilde{h}]$ ，以線性座標轉換至 $[-1,1]$ ，如下所示：

$$\begin{aligned}\zeta_w &= \frac{2\tilde{z}}{\tilde{h}} + 1, & -\tilde{h} \leq \tilde{z} \leq 0 \\ \zeta_{a1} &= \frac{2\tilde{z}}{\tilde{\delta}} - 1, & 0 \leq \tilde{z} \leq \tilde{\delta} \\ \zeta_{a2} &= \frac{2(\tilde{z} - \tilde{\delta})}{\tilde{h} - \tilde{\delta}} - 1, & \tilde{\delta} \leq \tilde{z} \leq \tilde{h}\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 ζ 表示為線性轉換後至 $[-1,1]$ 的座標。

將座標轉換後的特徵函數 $\widetilde{\phi}_w(\zeta_w)$, $\widetilde{\phi}_{a1}(\zeta_{a1})$ 與 $\widetilde{\phi}_{a2}(\zeta_{a2})$ 以契比雪夫多項式展開至一截斷的多項式次數 (degree of polynomial) N ，分別如下所示：

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_w(\zeta_w) &= \sum_{n=0}^{N_w} a_n T_n(\zeta_w), & \widetilde{\phi}_{a1}(\zeta_{a1}) &= \sum_{n=0}^{N_{a1}} b_n T_n(\zeta_{a1}), \\ \widetilde{\phi}_{a2}(\zeta_{a2}) &= \sum_{n=0}^{N_{a2}} c_n T_n(\zeta_{a2})\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 $T_n(\zeta)$ 為 n 次契比雪夫多項式第一型式，此多項式以三角函數之形式表示為 $T_n(\zeta) = \cos[n \cos^{-1}(\zeta)]$ 。 a_n, b_n 與 c_n 為係數，其數量分別為 $N_w + 1, N_{a1} + 1$



與 $N_{a2} + 1$ 個。

特徵函數之導數能以契比雪夫多項式 $T_n(\zeta)$ 之導數表示為：

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_w^{(j)}(\zeta_w) &= \left(\frac{2}{\bar{h}}\right)^j \sum_{n=0}^{N_w} a_n T_n^{(j)}(\zeta_w), \\ \widetilde{\phi}_{a1}^{(j)}(\zeta_{a1}) &= \left(\frac{2}{\bar{\delta}}\right)^j \sum_{n=0}^{N_{a1}} b_n T_n^{(j)}(\zeta_{a1}), \\ \widetilde{\phi}_{a2}^{(j)}(\zeta_{a2}) &= \left(\frac{2}{\bar{h} - \bar{\delta}}\right)^j \sum_{n=0}^{N_{a2}} c_n T_n^{(j)}(\zeta_{a2})\end{aligned}\quad (3.3)$$

j 表示為特徵函數對 ζ 微分之 j 次導數。其中契比雪夫多項式的導數能透過三角性質，推得契比雪夫多項式微分之遞迴關係 (recurrence relation)，如 Schmid & Henningson (2001) 所述：

$$\begin{aligned}T_{n+1}^{(j)}(\zeta) &= 2(n+1)T_n^{(j-1)}(\zeta) + \frac{n+1}{(n-1)}T_{n-1}^{(j)}(\zeta), \quad n \geq 2 \\ T_0^{(j)}(\zeta) &= 0, \quad T_1^{(j)}(\zeta) = T_0^{(j-1)}(\zeta), \quad T_2^{(j)}(\zeta) = 4T_1^{(j-1)}(\zeta)\end{aligned}\quad (3.4)$$

其中由 (3.4) 推測高階微分 $T_n^{(j)}(\zeta)$ 值與零階微分 $T_n(\zeta)$ 值相比下有很大的差異，因而造成數值計算上的誤差。然在附錄三以二維平面 Poiseuille 流場的線性穩定性問題測試，比較使用高階 (四階) 微分與低階 (二階) 微分所得的數值解析，其結果顯示使用四階與二階微分所得的發展率與收斂性極為相似，因此說明使用高階 (四階) 微分解析是可行的。

之後將展開的特徵函數 (3.3) 各別在其範圍 $[-1,1]$ 中以配置點離散。配置點之特性為在邊界處較密集，且範圍同樣位於 $[-1,1]$ ，亦可稱為 Gauss-Lobatto grid。Trefethen (2000) 說明配置點如應用於內插法 (interpolation) 中，並與等間距離散的網格點相比，將能有效的減少龍格現象 (Runge's phenomenon) 的發生，即減少多項式內插之誤差。並隨著配置點數量的增加，內插多項式的誤差將呈指數遞減，因此配置點被認為是最佳點 (optimal points)。其中配置點之數學式表示如下：

$$\zeta_l = \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right), \quad l = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.5)$$

其中設置 $M = N - 2$ ，配置點 ζ_l 離散為 $N - 3$ 個點。其中 N 為契比雪夫多項式之截斷次數。

將配置點 ζ_l 代入展開之特徵函數 (3.3)，分別對 ζ_w , ζ_{a1} 與 ζ_{a2} 離散後，在每個配置點上需滿足統御方程式 (2.10) 與 (2.11)。因此由配置點可分別得到 $N_w - 3$, $N_{a1} - 3$ 與 $N_{a2} - 3$ 個方程式。其餘由邊界條件 (2.26)、(2.35)、(2.34) 與 (2.39) 分別於 $\tilde{z} = \pm\tilde{h}, 0, \tilde{\delta}$ 提供 15 個方程式。上述總共有 $N_w + N_{a1} + N_{a2} + 6$ 個方程式。由展開的特徵函數 (3.3) 之 a_n, b_n, c_n 、氣-水界面條件之 \tilde{q} 與滿足解析解之匹配條件之 D, E ，將總共有 $N_w + N_{a1} + N_{a2} + 6$ 個未知數。

因此方程式與未知數可表示為一廣義特徵值問題 (generalized eigenvalue problem) 形式的複數特徵方程組，即 $[A]\mathbf{x} = \tilde{\omega}[B]\mathbf{x}$ 。其中複數矩陣 $[A]$ 與 $[B]$ 如附錄二所示， $\tilde{\omega} = \tilde{k}\tilde{c}$ 為複數特徵值， \mathbf{x} 為複數特徵向量，並定義為：

$$\mathbf{x}^T = [a_0, a_1, \dots, a_{N_w}, b_0, b_1, \dots, b_{N_{a1}}, c_0, c_1, \dots, c_{N_{a2}}, \tilde{q}, D, E] \quad (3.6)$$

以 QZ 法求解上述之廣義特徵值問題，可解出所有模態的特徵值與特徵向量。找出本研究所關注之不穩定模態，即 $\tilde{\omega}_l > 0$ 之特徵值與其對應的特徵向量。



3.2 數值方法之驗證與收斂性測試

3.2.1 契比雪夫配置法之驗證與收斂性測試

此小節將先求解兩平板間二維平面 Poiseuille 流場的線性穩定性問題，以驗證本研究之契比雪夫配置法。Orszag (1971) 以 Galerkin-Tau 方法求解二維平面 Poiseuille 流場的線性穩定性問題。並以半渠寬為特徵長度，渠中間流速為特徵速度，其中當雷諾數 $R = 10000$ 與無因次不穩定波波數 $\tilde{k} = 1$ 時，解得之特徵值 $\tilde{\omega}$ 為 $0.23752649 + 0.00373967i$ 。因此將本研究之契比雪夫配置法以相同的流場參數，解得最大特徵值表示於表 3.1，其求解過程詳見附錄三。由表 3.1 的結果可觀察出，特徵值在 $N = 60$ 時，收斂至小數點以下八位，並與 Orszag 解得的特徵值相同。

以上證實契比雪夫配置法的準確性與可行性，故以下將以契比雪夫配置法解析氣-水耦合剪流場的線性穩定性問題。以下數值解析均使用下列空氣與水的性質計算：空氣密度 $\rho_a = 0.0012 \text{ g/cm}^3$ ，水密度 $\rho_w = 1.00 \text{ g/cm}^3$ ，空氣動黏滯係數 $\nu_a = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ ，水動黏滯係數 $\nu_w = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ ，表面張力係數 $T = 75.0 \text{ dynes/cm}$ ，重力加速度 $g = 980 \text{ cm/s}^2$ 。觀察最不穩定模態的發展率，即最大特徵值的虛部 $\max(\tilde{\omega}_i)$ ，作為以下收斂性測試的目標。收斂性測試將以下列四種不同情況，即高、低空氣摩擦速度 u_* (30、80 cm/s) 與長、短波 λ (1、20 cm)，所得的特徵值來決定每個子區間的格點數 N_w, N_{a1}, N_{a2} 。

為簡化決定格點數之步驟，將參考 Zeisel *et al.* (2008) 收斂性測試的方法，其設定空氣對數流場的格點數為水體流場的倍數，即 $N_{a2} = \alpha N_w$ ，其中 α 為係數。此設定是由於速度之二次導數於黏性次邊界層上方，需以高解析的網格點來捕捉其變化。因此推測如空氣對數流場的網格點越多將能提高收斂的速度，並證實於表 3.2-表 3.5。表 3.2-表 3.5 為不同的 α (1、1.5、2) 對不同情況下特徵值的收斂性測試。表 3.2 為低風速與短波時的特徵值，可觀察出在 $\alpha = 1$ 時，至 $N_w = 120$ 收斂至小數點以下六位；然在 $\alpha = 2$ 時， $N_w = 60$ 已收斂至小數點以下七位。表 3.3 為高風速與短波時的特徵值，在 $\alpha = 1$ 時，至 $N_w = 120$ 僅能收斂至小數點以下三位；而在 $\alpha = 2$ 時， $N_w = 70$ 已收斂至小數點以下五位。表 3.4 為低風速與長波時

的特徵值，在 $\alpha = 1$ 時，至 $N_w = 180$ 僅能收斂至小數點以下三位；而在 $\alpha = 2$ 時， $N_w = 140$ 收斂至小數點以下五位。表 3.5 為高風速與長波時的特徵值，在 $\alpha = 1$ 時，至 $N_w = 280$ 僅能收斂至小數點以下兩位；在 $\alpha = 2$ 與 $N_w = 280$ 時，也僅能收斂至小數點以下三位。由上述收斂性測試可觀察出 $\alpha = 2$ 時，能有效的提高收斂性與準確性，因此以下皆以 $N_{a2} = 2N_w$ 計算。

接著決定黏性次邊界層（空氣線性流場）所需的格點 N_{a1} 。黏性次邊界層雖相對於空氣對數與水體流場兩區間之範圍很小，且其背景速度僅為線性，但仍是影響此流場穩定性的關鍵。表 3.6 為四種情況下，不同 N_{a1} 時的收斂性測試。由表 3.6 可觀察出四種情況下， N_{a1} 為 10 即以足夠描述此黏性次邊界層的變化，因此以下皆以 $N_{a1} = 10$ 計算。

最後需決定水體流場所所需的格點 N_w 。然而在表 3.2-表 3.5 的測試內，可觀察出不同風速與波長下，特徵值收斂的速率皆不盡相同，其中又以不同波長下有顯著的差異。如短波時之測試，表 3.2-表 3.3 在 $N_w = 60 \sim 70$ 已至少有小數點以下五位的收斂；而在長波的測試時，表 3.4-表 3.5 需至 $N_w = 140$ 或甚至到 280 才僅能有至少三位的收斂。如欲解析範圍至 $u_* \in [0, 100]$ cm/s, $\lambda \in [0, 20]$ cm 的區域，以單一水體格點 N_w 計算會導致解析的準確性不足，如圖 3.1 所示。圖 3.1 為最大虛部特徵值在 $N_w = 80$ 與 70 之間的誤差，其中白色部分表示為誤差大於 10% 的區域，並且以中性穩定曲線（紅線），來作為判斷水體格點的準確性是否足夠來畫出此中性穩定曲線。因此由圖 3.1 可觀察出白色部分涵蓋到中性穩定曲線的所在的區域，因此判斷此水體格點為 80 時，其準確性不足以描述欲解析的區域。因此為使欲解析的區域整體能有足夠的準確性，即提高長波區域內的水體格點。設置在一波長後，以更多的水體格點計算，如圖 3.2 所示。圖 3.2 為 $\lambda \geq 5$ cm 時，最大虛部特徵值以 $N_w = 120$ 與 110 之間的誤差；在 $\lambda < 5$ cm 時，最大虛部特徵值以 $N_w = 80$ 與 70 之間的誤差，即圖 3.1 的部分。由圖 3.2 可觀察出中性穩定曲線的所在之區域的誤差皆在 1% 以下。因此以下在 $\lambda < 5$ cm 時，以 $N_w = 80$ 計算；在 $\lambda \geq 5$ cm 時，以 $N_w = 120$ 計算。



格點數 N	特徵值 $\tilde{\omega}$
30	$0.23741471 + 0.00349165i$
40	$0.23752741 + 0.00373651i$
50	$0.23752650 + 0.00373968i$
55	$0.23752649 + 0.00373967i$
60	$0.23752649 + 0.00373967i$
65	$0.23752649 + 0.00373967i$
70	$0.23752649 + 0.00373967i$
Orszag (1971)	$0.23752649 + 0.00373967i$

表 3.1：利用契比雪夫配置法求解平面 Poiseuille 流場於 $k = 1, R = 10000$ 時，特徵值的收斂情況。

$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$			
N_w	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$
50	$1.13269848 + 0.01446774i$	$1.13274805 + 0.01442873i$	$1.13274617 + 0.01443027i$
60	$1.13274307 + 0.01443189i$	$1.13274625 + 0.01443019i$	$1.13274627 + 0.01443016i$
70	$1.13274904 + 0.01442778i$	$1.13274623 + 0.01443019i$	$1.13274628 + 0.01443018i$
80	$1.13274710 + 0.01442951i$	$1.13274626 + 0.01443016i$	$1.13274627 + 0.01443017i$
100	$1.13274620 + 0.01443022i$	$1.13274627 + 0.01443016i$	$1.13274637 + 0.01443015i$
120	$1.13274627 + 0.01443016i$	$1.13274629 + 0.01443010i$	$1.13274621 + 0.01443023i$

表 3.2：針對低風速 ($u_* = 30 \text{ cm/s}$)、短波 ($\lambda = 1 \text{ cm}$) 於不同 α 值時，最大特徵值的收斂性測試。其中 $N_{a1} = 10$ 、 $N_{a2} = \alpha N_w$ 、 $\tilde{h} = 2\pi$ 。

$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$			
N_w	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$
50	$0.19249684 + 0.14507718i$	$0.19405187 + 0.14902511i$	$0.19341098 + 0.14781928i$
60	$0.19464196 + 0.14992663i$	$0.19353721 + 0.14805922i$	$0.19339506 + 0.14778074i$
70	$0.19430058 + 0.14947047i$	$0.19339219 + 0.14777854i$	$0.19341144 + 0.14781132i$
80	$0.19383505 + 0.14862053i$	$0.19339508 + 0.14778078i$	$0.19341334 + 0.14781507i$
100	$0.19341239 + 0.14781881i$	$0.19341326 + 0.14781484i$	$0.19341267 + 0.14781372i$
120	$0.19339508 + 0.14778076i$	$0.19341279 + 0.14781403i$	$0.19341271 + 0.14781385i$

表 3.3：針對高風速 ($u_* = 80 \text{ cm/s}$)、短波 ($\lambda = 1 \text{ cm}$) 於不同 α 值時，最大特徵值之收斂性測試。其中 $N_{a1} = 10$ 、 $N_{a2} = \alpha N_w$ 、 $\tilde{h} = 2\pi$ 。

$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$			
N_w	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$
80	1.93837828 + 0.02829273i	1.83812082 + 0.04129599i	1.82507823 + 0.04278424i
100	1.87647063 + 0.03881021i	1.82693732 + 0.04478098i	1.82819810 + 0.04451286i
120	1.83960392 + 0.04323929i	1.82722997 + 0.04455267i	1.82922175 + 0.04426209i
140	1.82821239 + 0.04456499i	1.82847374 + 0.04436589i	1.82954466 + 0.04422222i
160	1.82659021 + 0.04468169i	1.82923050 + 0.04426179i	1.82954209 + 0.04422393i
180	1.82723758 + 0.04455171i	1.82951925 + 0.04422338i	1.82950831 + 0.04422871i

表 3.4：針對低風速 ($u_* = 30 \text{ cm/s}$)、長波 ($\lambda = 20 \text{ cm}$) 於不同 α 值時，最大特徵值之收斂性測試。其中 $N_{a1} = 10$ 、 $N_{a2} = \alpha N_w$ 、 $\tilde{h} = 2\pi$ 。

$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$			
N_w	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$
80	0.60205355 + 0.14550777i	1.26388538 + 0.03464057i	0.82584547 + 0.14251096i
120	1.23648771 + 0.06924382i	0.62552717 + 0.23278786i	0.35917412 + 0.40357879i
160	0.83130874 + 0.15952336i	0.35934732 + 0.40290954i	0.36242965 + 0.39920669i
200	0.47066037 + 0.30239385i	0.35827596 + 0.40512158i	0.37420842 + 0.38370169i
240	0.35935068 + 0.40293078i	0.36994847 + 0.38876055i	0.37673853 + 0.38087815i
280	0.35468675 + 0.40988480i	0.37548242 + 0.38192265i	0.37683537 + 0.38072360i

表 3.5：針對高風速 ($u_* = 80 \text{ cm/s}$)、長波 ($\lambda = 20 \text{ m}$) 於不同 α 值時，最大特徵值之收斂性測試。其中 $N_{a1} = 10$ 、 $N_{a2} = \alpha N_w$ 、 $\tilde{h} = 2\pi$ 。

N_{a1}	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$
10	1.13274627 + 0.01443016i	1.82954466 + 0.04422222i
15	1.13274626 + 0.01443016i	1.82954237 + 0.04421745i
20	1.13274624 + 0.01443019i	1.82957676 + 0.04422232i
25	1.13274623 + 0.01443016i	15.6006492 + 3.23013066i
N_{a1}	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$
10	0.19341144 + 0.14781132i	0.376835370 + 0.38072360i
15	0.19341146 + 0.14781141i	0.375009330 + 0.38009763i
20	0.19341148 + 0.14781168i	17.38150237 + 5.95343201i
25	0.19341302 + 0.14781407i	78.34534377 + 2.29610455i

表 3.6：針對四種情況於不同 N_{a1} 時，最大特徵值之收斂性測試。

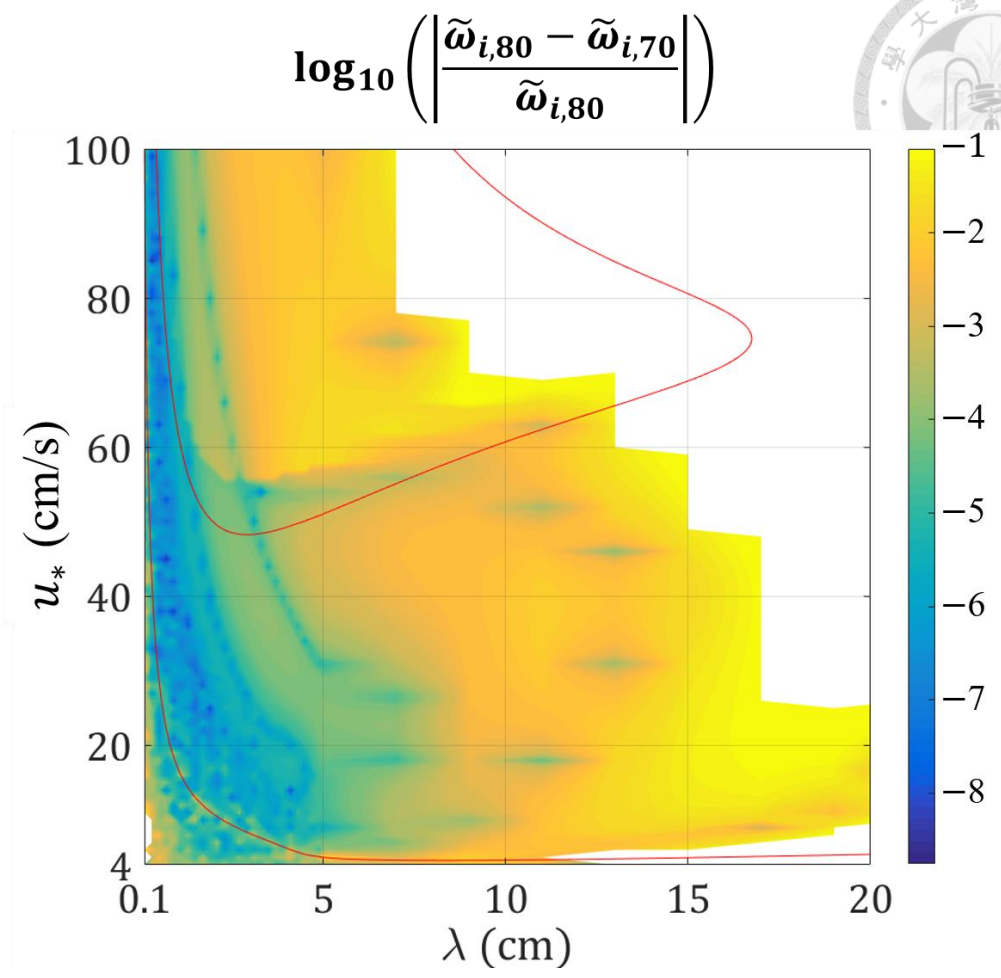
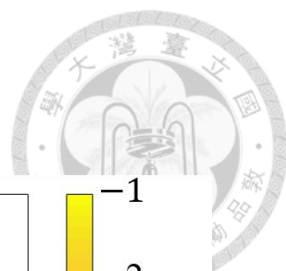


圖 3.1：最大虛部特徵值在 $N_w = 80$ 與 70 之間的誤差圖。白色部分表示誤差大於 10%，紅線為中性穩定曲線。

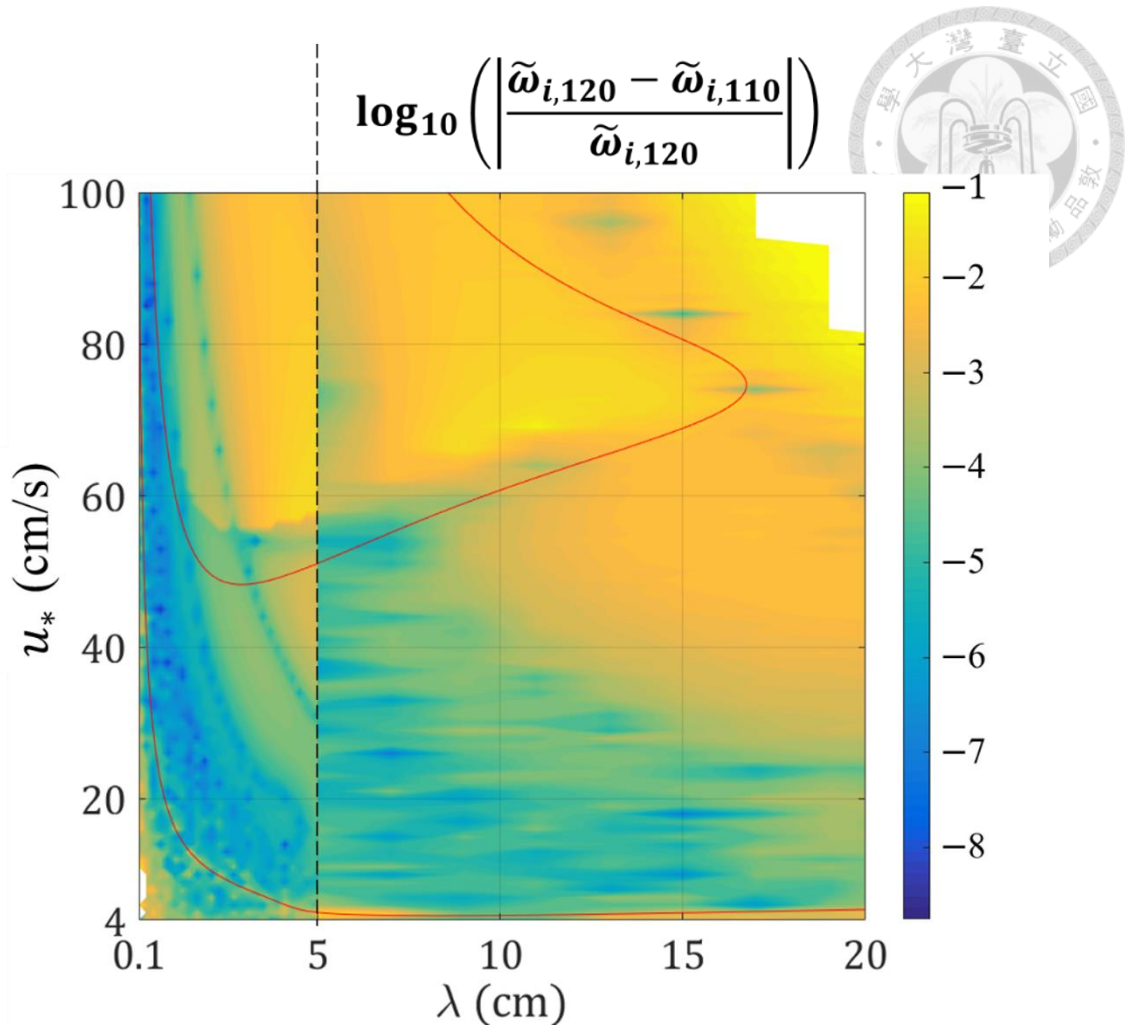


圖 3.2：最大虛部特徵值的誤差圖，其中在 $\lambda \geq 5$ cm（虛線左側），為 $N_w = 120$ 與 110 之間的誤差；在 $\lambda < 5$ cm（虛線右側），為 $N_w = 80$ 與 70 之間的誤差。白色部分表示誤差大於 10%，紅線為中性穩定曲線。



3.2.2 發展率對截斷高度之敏感性測試

根據 Valenzuela (1976) 研究中指出：空氣流場的截斷高度至少需位於一半波長的高度，才能以自由滑溜邊界條件替代無窮高度處的輻射邊界條件。因此以下將測試滿足解析解之匹配條件需以多少截斷高度才能替代無窮高度處的輻射邊界條件，即特徵值不隨截斷高度變化。由表 3.7 測試四種情況下，在不同截斷高度時，特徵值的變化。表 3.7 可觀察出在 $\tilde{h} = 2\pi$ 時，即一倍的波長，四種情況下的特徵值皆趨於穩定。因此以下計算的截斷高度均為 $\tilde{h} = 2\pi$ 。

\tilde{h}	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$
π	$1.13138238 + 0.01441372i$	$0.19278839 + 0.14718957i$
1.5π	$1.13268878 + 0.01442947i$	$0.19338715 + 0.14778916i$
2π	$1.13274627 + 0.01443017i$	$0.19341144 + 0.14781132i$
2.5π	$1.13274875 + 0.01443019i$	$0.19341349 + 0.14781419i$
\tilde{h}	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$
π	$1.82616964 + 0.04418152i$	$0.37619195 + 0.37947473i$
1.5π	$1.82940264 + 0.04421999i$	$0.37669594 + 0.38068763i$
2π	$1.82954466 + 0.04422222i$	$0.37683537 + 0.38072360i$
2.5π	$1.82951715 + 0.04422563i$	$0.37695257 + 0.38064690i$

表 3.7：不同截斷高度 \tilde{h} 時，最大特徵值之敏感性測試。



3.2.3 不同截斷上邊界條件之比較

本節將比較 2.4 節所整理的另種方法對特徵值的影響，即在空氣流場的截斷高度 $\tilde{z} = \tilde{h}$ 使用自由滑移條件，如圖 2.4 所示。表 3.8 為四種情況下，以不同截斷上邊界條件所解得的特徵值。表 3.8 顯示四種情況下的特徵值，其值在已收斂的位數內皆相同。因此表示使用不同的截斷上邊界條件，對特徵值的影響很小。

上邊界條件	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 1 \text{ cm}$
空氣解析匹配條件	$1.13274627 + 0.01443017i$	$0.19341144 + 0.14781132i$
自由滑移條件	$1.13274623 + 0.01443039i$	$0.19341236 + 0.14781243i$
上邊界條件	$u_* = 30 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$	$u_* = 80 \text{ cm/s}, \lambda = 20 \text{ cm}$
空氣解析匹配條件	$1.82954466 + 0.04422222i$	$0.37683537 + 0.38072360i$
自由滑移條件	$1.82954694 + 0.04422163i$	$0.37627006 + 0.38179499i$

表 3.8：不同截斷上邊界條件時，最大特徵值之比較。

第四章、計算結果與討論



4.1 與其它數值解析之比較

(A) 與 Tsai & Lin (2004) 及 Zeisel *et al.* (2008) 之解析比較

為驗證本數值解析的正確性，此節將與 Tsai & Lin 及 Zeisel *et al.* 解析相同的空氣摩擦速度 $u_* = 13.6$ 、 17.0 、 21.4 以及 24.8 cm/s (對應的水面流速分別為 $U_0 = 7.5$ 、 9.6 、 9.8 以及 10.2 cm/s)。圖 4.1 表示本研究解得的特徵值，並與 Tsai & Lin 及 Zeisel *et al.* 比較。其中 $\beta = 2\omega_i$ 為兩倍虛部特徵值，即兩倍的發展率。圖 4.1 顯示 Tsai & Lin 以有限差分法解得的不穩定波發展率，與本研究結果較為接近。而 Zeisel *et al.* 雖同樣以契比雪夫配置法解析，其不穩定波發展率卻與本研究結果差異較大，推測此結果是由於 Zeisel *et al.* 所計算的截斷高度、上下邊界條件及解廣義特徵值問題的方法，與本研究稍有不同的緣故。兩者誤差皆在 10% 以內。

由圖 4.1 驗證本數值解析的正確性後，將再分別與 Tsai & Lin 及 Zeisel *et al.* 比較於 $u_* = 30$ cm/s、 $\lambda = 1$ cm 時的收斂性，以及與 Tsai & Lin 比較計算時間，如表 4.1-表 4.3 所示。Zeisel *et al.* 的特徵尺度與本研究不同，因此將其無因次之特徵值轉換為本文的特徵尺度，並於表 4.1 列出其特徵值的收斂性測試。表 4.2 為本研究的結果，並以類似於表 4.1 的格點數計算。比較表 4.1 與表 4.2 的結果，其皆在 N_w 為 50 時，收斂至小數點以下六位，顯示本研究與 Zeisel *et al.* 的收斂性相同。然而比較兩者的所需的格點數，將表示本研究能以少於 Zeisel *et al.* 的格點，即有同樣的收斂性。並也說明黏性次邊界層內的格點 N_{a1} ，未像 Zeisel *et al.* 所述：需給予黏性次邊界層高解析的格點。

表 4.3 為 Tsai & Lin 以有限差分法在不同的格點時，解得的特徵值與計算時間。表 4.3 顯示特徵值在水體及空氣格點數 N_w 、 N_a 皆為 500 時，收斂至小數點以下四位。並比較表 4.3 與表 4.2 的收斂性與計算時間，顯示有限差分法所的收斂性與計算時間皆差於本研究所使用的契比雪夫配置法。也因此表示本研究所使用的契比雪夫配置法為一穩健的數值方法。

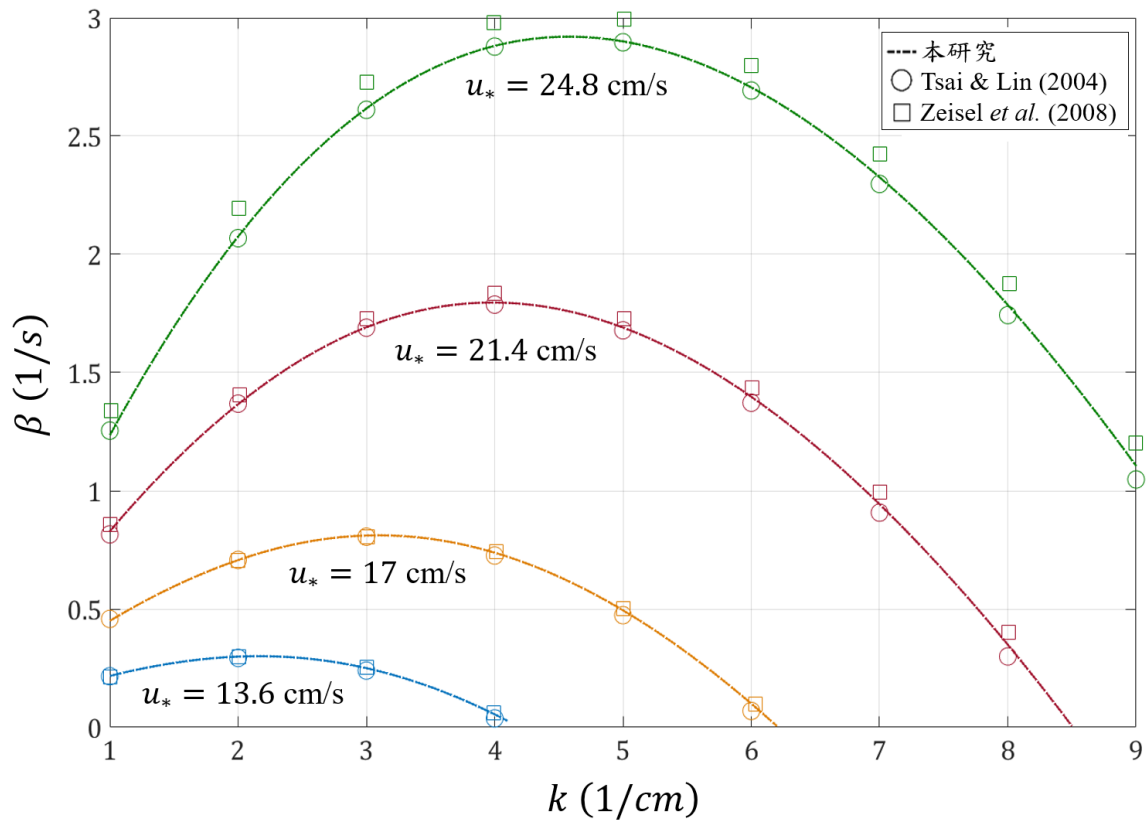


圖 4.1：本研究解得的發展率與 Tsai & Lin (2004) 及 Zeisel *et al.* (2008) 的結果比較。○ Tsai & Lin 解得之發展率。□ Zeisel *et al.* 解得之發展率。

(B) 與未使用區域分解法於黏性次邊界層高度的解析比較

為驗證使用區域分解法的重要性，此節將比較有無使用區域分解法於黏性次邊界層高度對結果的影響。未使用區域分解法於黏性次邊界層高度，即表示空氣流場僅以單一特徵函數 $\phi_a(z)$ 解析，其中 $\phi_a(z)$ 所描述的區間為 $[0, h]$ 。使用相同的流場參數與數值方法解析 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 1 \text{ cm}$ ，與上邊界條件為滿足解析解之匹配條件為例，其結果顯示於表 4.4。表 4.4 為未使用區域分解法於黏性次邊界層高度時的收斂性測試，其中水體格點 N_w 固定於 80，並調整不同的空氣格點 N_a 。表 4.4 顯示在 $N_a = 360$ 時，其特徵值小數點以下五位與有使用區域分解法時的特徵值是相同的。表示有無使用區域分解法，並不影響氣-水耦合流場穩定性分析的結果，因此匹配條件實際上不含有物理意義，僅只是數值解析上的處理。但對於有使用區域分解法的結果，顯示能有效的提高收斂性與準確性，並以較少的時間計算。

以下將探討有無使用區域分解法於黏性次邊界層高度，對空氣速度之二次導數網格點離散的情形，如圖 4.2 所示。圖 4.2 (a) 與圖 4.2 (b) 顯示在相同的空氣格點數下，有無區域分解之網格點離散情形。其中 $u_* = 30 \text{ cm/s}$ 、 $\lambda = 1 \text{ cm}$ 時，以圖 4.2 (a) 的格點 $N_a = 170$ 與有區域分解的解析下，已有小數點以下七位的收斂性，如表 3.2 所示。以圖 4.2 (b) 的格點 $N_a = 170$ 與無區域分解的解析下，僅有小數點以下兩位的收斂。然而隨著格點的增加，以圖 4.2 (c) 的格點 $N_a = 360$ 與無區域分解的解析下，仍僅有小數點以下五位的收斂。並且觀察在黏性次邊界層上方，如有區域分解時，可明顯捕捉到速度二次導數在很小的區間內的變化。然而以無區域分解解析時，此變化很大的區域內之格點明顯較有區域分解時稀疏。所以推測影響此流場之數值解析的準確性與收斂性，主要為黏性次邊界層上方格點的解析度。因此證實了使用區域分解法於黏性次邊界層高度對氣-水耦合流場的重要性。



N_w	N_{a1}	N_{a2}	$\tilde{\omega}$
30	30	66	$1.13019 + 0.014524i$
50	50	110	$1.12999 + 0.014619i$
70	70	154	$1.12999 + 0.014619i$
90	90	198	$1.12999 + 0.014619i$
110	110	242	$1.12999 + 0.014619i$
130	130	286	$1.12999 + 0.014619i$

表 4.1：Zeisel *et al.* (2008) 於 $u_* = 30$ cm/s、 $\lambda = 1$ cm 時，在不同格點數所解得的特徵值。

N_w	N_{a1}	N_{a2}	$\tilde{\omega}$	計算時間 (sec)
30	10	60	$1.13289 + 0.014242i$	0.196761
50	10	100	$1.13275 + 0.014430i$	0.259938
70	10	140	$1.13275 + 0.014430i$	0.391715
90	10	180	$1.13275 + 0.014430i$	0.618859
110	10	220	$1.13275 + 0.014430i$	1.025693
130	10	260	$1.13275 + 0.014430i$	1.606819

表 4.2：本數值分析於 $u_* = 30$ cm/s、 $\lambda = 1$ cm 時，在不同格點數所解得的特徵值與計算時間。

N_w	N_a	$\tilde{\omega}$	計算時間 (sec)
100	100	$1.13054 + 0.015459i$	1.965
300	300	$1.13115 + 0.014523i$	29.775
500	500	$1.13120 + 0.014457i$	73.218
700	700	$1.13122 + 0.014439i$	157.159
900	900	$1.13123 + 0.014432i$	360.303

表 4.3：Tsai & Lin (2004) 以有限差分法於 $u_* = 30$ cm/s、 $\lambda = 1$ cm 時，在不同格點數所解得的特徵值與計算時間。



N_w	N_a	$\tilde{\omega}$
80	160	$1.13241069 + 0.01471892i$
80	200	$1.13251108 + 0.01462720i$
80	240	$1.13262786 + 0.01452960i$
80	280	$1.13269043 + 0.01448193i$
80	320	$1.13272265 + 0.01444990i$
80	360	$1.13274147 + 0.01443527i$
80	400	$1.13280981 + 0.01439139i$
80	440	$0.93946454 + 0.01099291i$
有使用區域分解法		$1.13274627 + 0.01443017i$

表 4.4：未使用區域分解時，最大特徵值的收斂性測試，並與有使用區域分解時的結果比較。

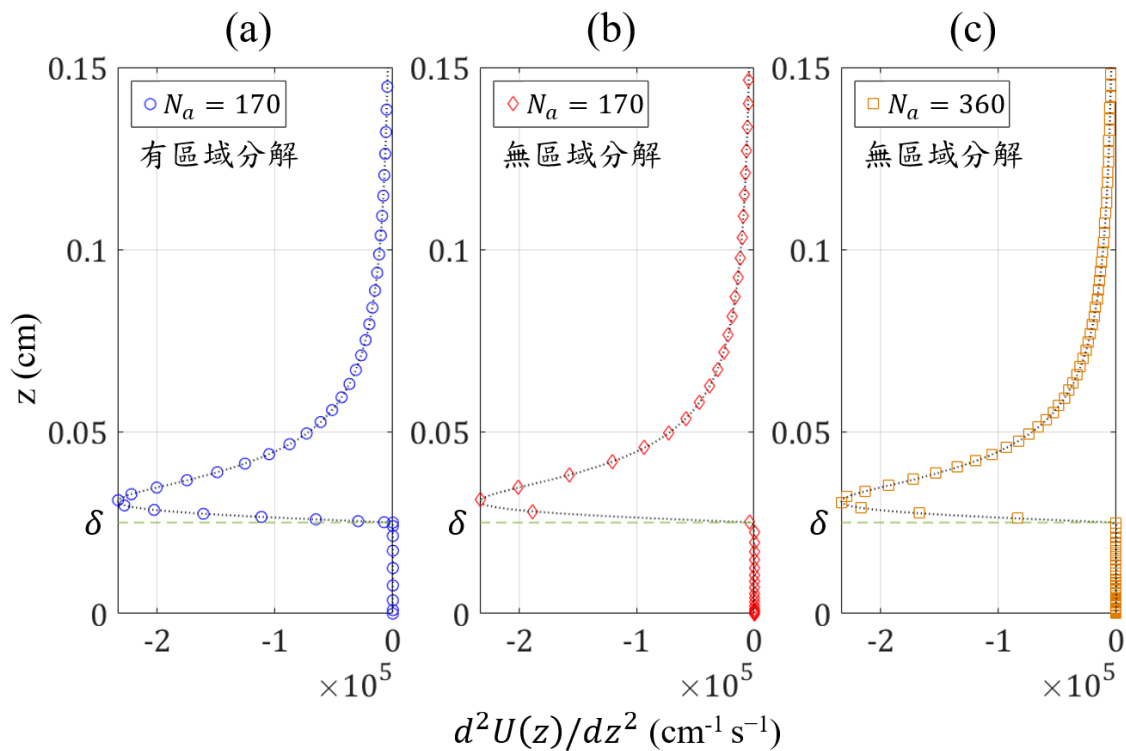


圖 4.2：空氣速度之二次導數的格點，在有無區域分解下的離散情形。



4.2 中性穩定曲線 (Neutral Stability Curve)

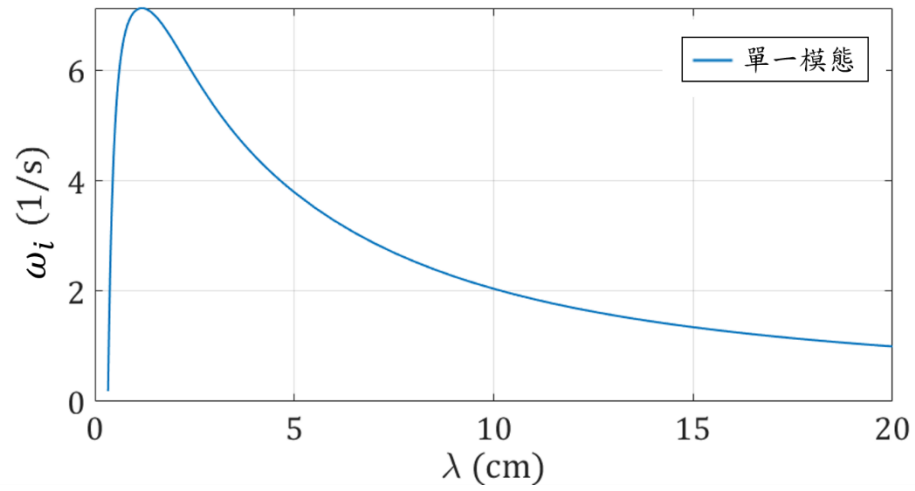
前人已解析許多關於氣-水耦合流場穩定性問題的研究，如 Valenzuela(1976)、Kawai (1979) 與 Tsai & Lin (2004) 等，其研究結果皆以給定空氣摩擦速度 u_* 與波長 λ 解析出發展率，並整理其解析範圍，約在 $0 < u_* < 50$ cm/s 與 $0 < \lambda < 7$ cm。而在第三章顯示本研究解析的範圍能同樣與 Zeisel *et al.* (2008) 至 $0 < u_* < 100$ cm/s 與 $0 < \lambda < 20$ cm，如圖 4.5 所示。

並觀察出前人解析範圍的結果均為單一不穩定模態，即僅有一個不穩定的模態，如圖 4.3 (a) 所示。圖 4.3 (a) 為 $u_* = 40$ cm/s 時，發展率 ($\overline{\omega}_i > 0$) 隨波長的變化。然而隨著解析範圍的擴大，又主要以風速增加的變化較為明顯。在大於一臨界風速時，於一波長範圍內有雙重不穩定模態產生，即有兩個不穩定的模態，如圖 4.3 (b) 與 (c) 所示。圖 4.3 (b) 與 (c) 分別為 $u_* = 60$ 與 80 cm/s 時，發展率隨波長的變化。其中定義雙重不穩定模態內，有最大發展率的模態為第一模態 (藍線)，次之發展率的模態為第二模態 (紅線)。圖 4.3 (a) - (c) 顯示最大發展率與中性點 ($\overline{\omega}_i = 0$) 所在的位置，皆集中於短波。並隨風速的增加，發展率也隨之增加，但最大發展率與中性點所在的波長變短。圖 4.4(a)-(c) 分別表示為 $u_* = 40$ 、 60 與 80 cm/s 時，實部特徵值 (角頻率) 隨波長的變化，並與線性水波理論的角頻率比較。圖 4.4 (a) 顯示其角頻率與線性水波理論值十分接近。圖 4.4 (b) 與 (c) 顯示僅有一模態與線性水波理論值相近，而另一模態則遠小於線性水波理論值。上述結果均與 Zeisel *et al.* 的結果雷同。

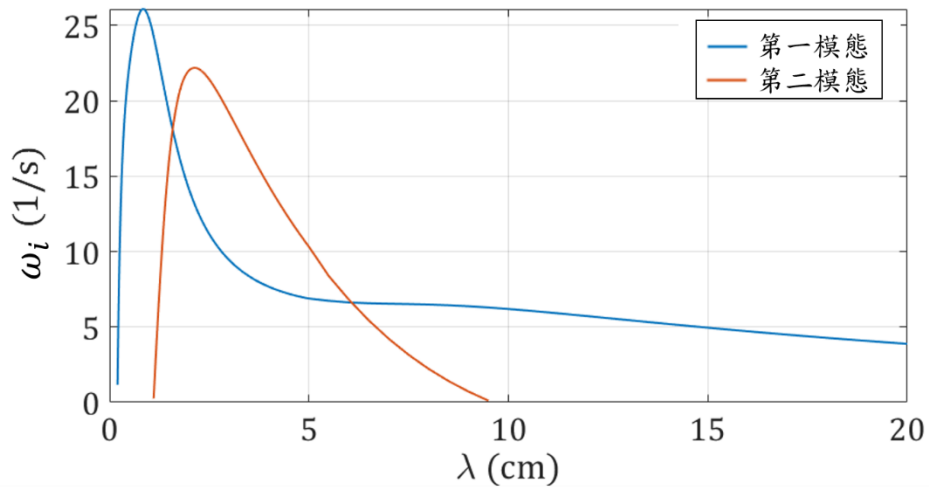
為瞭解在不同波長與風速下，其狀態為穩定、單一或是雙重不穩定模態，將會以中性點來做區隔，即繪製中性穩定曲線於 $\lambda - u_*$ 平面。中性穩定曲線的繪製方法為固定 λ (或 u_*)，並逐步增加 u_* (或 λ) 解得對應的特徵值後。尋找虛部特徵值由負轉正或正轉負時，其值為零的位置，即表示為中性點，其中以割線法 (secant method) 來求解中性點 (根)。並在不同 λ (或 u_*) 時，重複上述步驟，即可在 $\lambda - u_*$ 平面繪製出中性穩定曲線，如圖 4.5 所示。圖 4.5 為本研究解得的中性穩定曲線，並與 Zeisel *et al.* 繪製的中性穩定曲線比較。圖 4.5 顯示我們的中性穩定曲線與 Zeisel *et al.* 的中性穩定曲線相似。並由圖中可找出引致不穩定的臨界 (最小) 風速 $u_{*,cr1}$ 為 4.58 cm/s，以及引致雙重不穩定模態的臨界風速 $u_{*,cr2}$ 為 48.3 cm/s。



(a) $u_* = 40 \text{ cm/s}$



(b) $u_* = 60 \text{ cm/s}$



(c) $u_* = 80 \text{ cm/s}$

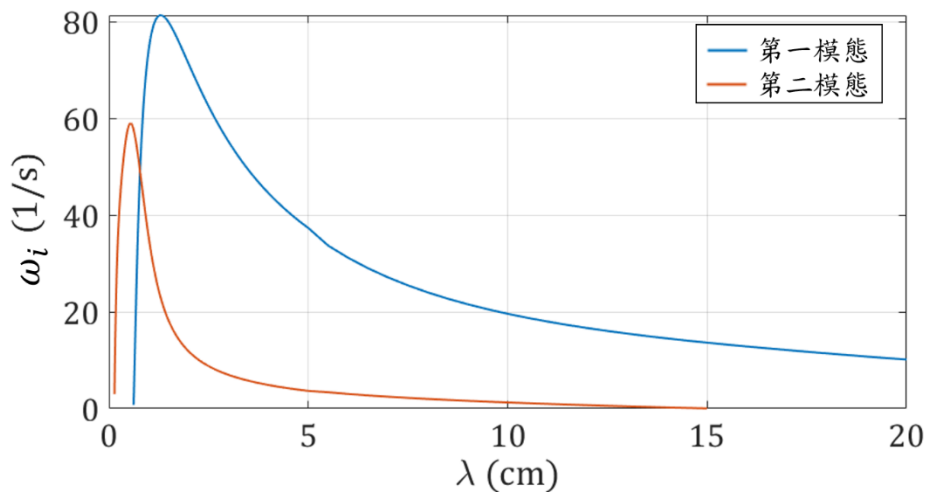
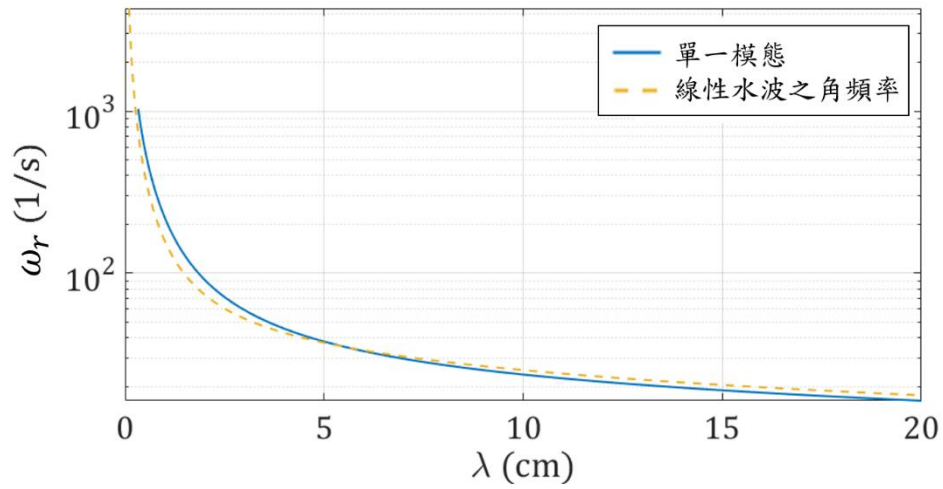


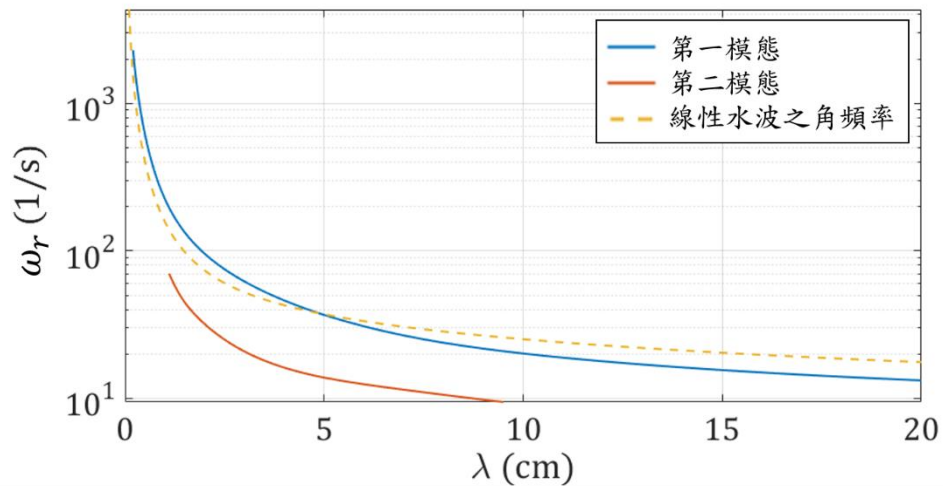
圖 4.3：不同風速下，發展率隨波長的變化。(a) $u_* = 40 \text{ cm/s}$ 、(b) $u_* = 60 \text{ cm/s}$ 、(c) $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 。藍線表示為單一/第一模態，紅線為第二模態。



(a) $u_* = 40 \text{ cm/s}$



(b) $u_* = 60 \text{ cm/s}$



(c) $u_* = 80 \text{ cm/s}$

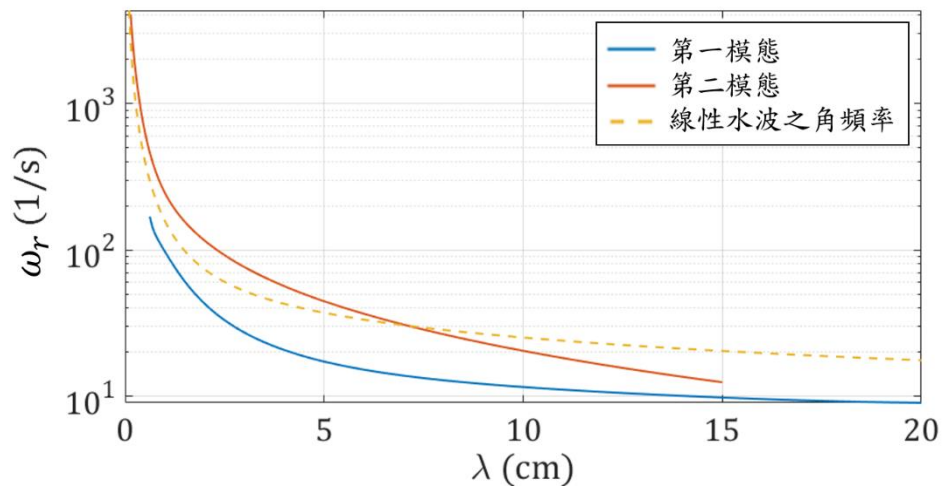


圖 4.4: 不同風速下, 角頻率隨波長的變化。(a) $u_* = 40 \text{ cm/s}$ 、(b) $u_* = 60 \text{ cm/s}$ 、(c) $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 。黃線為線性水波理論值, 藍線表示為單一/第一模態, 紅線為第二模態。

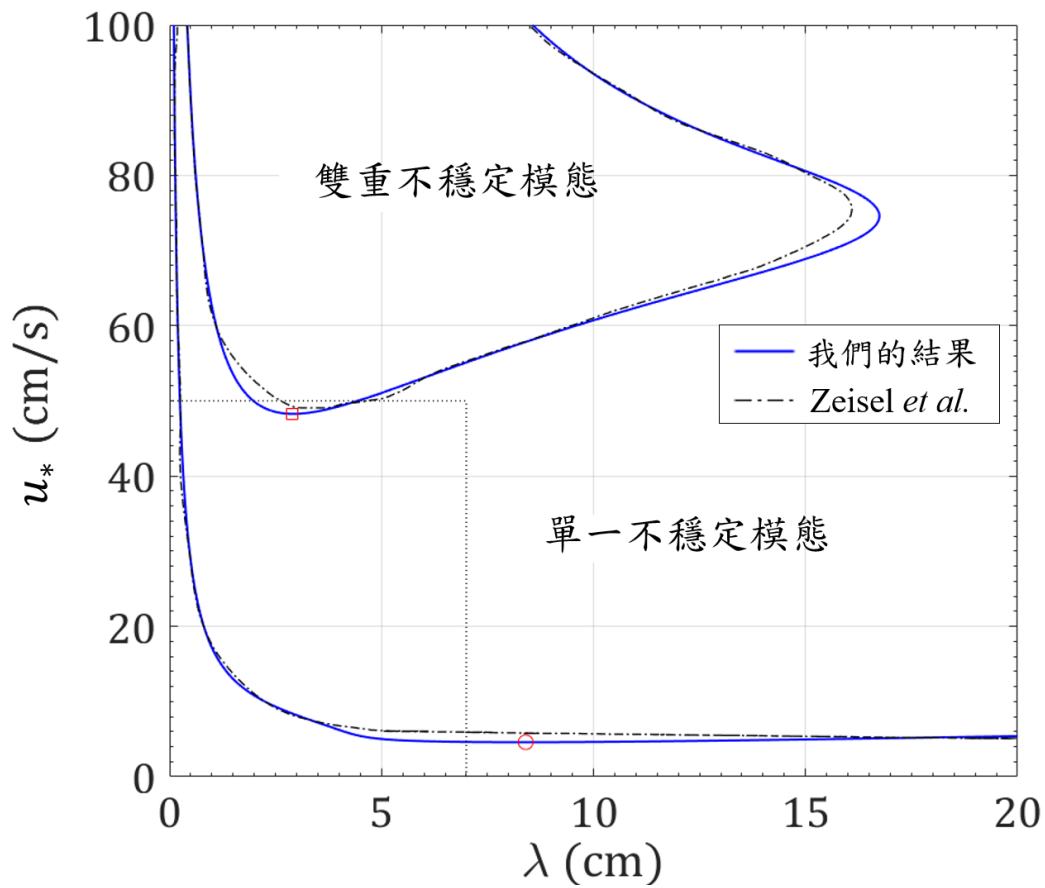


圖 4.5：中性穩定曲線圖。……表示為前人解析的範圍，——表示本研究解析的中性穩定曲線，- · - · 表示為 Zeisel *et al.* 解析的中性穩定曲線。○表示引致不穩定的臨界風速 $u_{*,cr1} = 4.58 \text{ cm/s}$ 。□表示引致雙重不穩定的臨界風速 $u_{*,cr2} = 48.3 \text{ cm/s}$ 。



4.3 不穩定模態的壓力與 x 方向速度分佈

此節將顯示最不穩定模態時，壓力與 x 方向速度的分佈。其值由解析廣義特徵方程組 $[A]\mathbf{x} = \tilde{\omega}[B]\mathbf{x}$ 後，找出最大的虛部特徵值 $\max(\tilde{\omega}_i)$ ，與其對應的特徵向量 \mathbf{x} ，在將特徵向量代回特徵函數 $\tilde{\phi}$ ，即可以特徵函數表示最不穩定模態時的各物理量，如速度、壓力及能量。以下將推導以最不穩定模態之特徵函數 $\tilde{\phi}$ ，表示的壓力與 x 方向速度分佈之方程式，其中本研究之特徵函數共有 $\tilde{\phi}_w(\zeta_w)$ 、 $\tilde{\phi}_{a1}(\zeta_{a1})$ 與 $\tilde{\phi}_{a2}(\zeta_{a2})$ 。

水體的擾動壓力 $\widehat{p}_w(z)$ 可由 (2.24) 表示為：

$$\widehat{p}_w(z) = \frac{\mu_w}{ik} \left(\frac{d^3 \widehat{\phi}_w}{dz^3} - k^2 \frac{d\widehat{\phi}_w}{dz} \right) + \rho_w \left[(c - U_w) \frac{d\widehat{\phi}_w}{dz} + \frac{dU_w}{dz} \widehat{\phi}_w \right] \quad (4.1)$$

將 (4.1) 以 (2.9) 之無因次變數與 $\widehat{p} = [\rho_w \mathcal{V}^2] \tilde{p}$ 無因次化，可得到無因次擾動壓力的表示式：

$$\tilde{p}_w(z) = \frac{1}{i\tilde{k}\tilde{R}_w} \left(\frac{d^3 \tilde{\phi}_w}{d\tilde{z}^3} - \tilde{k}^2 \frac{d\tilde{\phi}_w}{d\tilde{z}} \right) + (\tilde{c} - \tilde{U}_w) \frac{d\tilde{\phi}_w}{d\tilde{z}} + \frac{d\tilde{U}_w}{d\tilde{z}} \tilde{\phi}_w \quad (4.2)$$

將 (4.2) 中的特徵函數 $\tilde{\phi}_w$ 以契比雪夫配置法展開，如 (3.3) 所示，其中特徵向量為已知，因此 \tilde{p}_w 同樣為已知。將 \tilde{p}_w 乘上 $[\rho_w \mathcal{V}^2]$ 得到有因次的壓力 \widehat{p}_w 後，在代回正規模態展開的 $p'_w(x, \zeta_w, t) = \widehat{p}_w(\zeta_w) e^{ik(x-ct)}$ 。因此以水體特徵函數 $\tilde{\phi}_w(\zeta_w)$ 描述的有因次之擾動壓力分佈為：

$$\begin{aligned} p'_w(x, \zeta_w, t) = [\rho_w \mathcal{V}^2] Re \left\{ \left[\frac{1}{i\tilde{k}\tilde{R}_w} \left[\tilde{\phi}_w^{(3)}(\zeta_w) - \tilde{k}^2 \tilde{\phi}_w^{(1)}(\zeta_w) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + (\tilde{c} - \tilde{U}_w) \tilde{\phi}_w^{(1)}(\zeta_w) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d\tilde{U}_w}{d\tilde{z}} \tilde{\phi}_w(\zeta_w) \right] e^{ik(x-ct)} \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 $Re\{ \}$ 表示為實部。

同上述水體流場，空氣線性與對數流場中有因次之擾動壓力分佈分別為：

$$p'_{a1}(x, \zeta_{a1}, t) = [\rho_w \mathcal{V}^2] Re \left\{ r \left[\frac{1}{i\tilde{k}R_a} \left[\widetilde{\phi}_{a1}^{(3)}(\zeta_{a1}) - \tilde{k}^2 \widetilde{\phi}_{a1}^{(1)}(\zeta_{a1}) \right] + (\tilde{c} - \widetilde{U}_{a1}) \widetilde{\phi}_{a1}^{(1)}(\zeta_{a1}) + \frac{d\widetilde{U}_{a1}}{d\tilde{z}} \widetilde{\phi}_{a1}(\zeta_{a1}) \right] e^{ik(x-ct)} \right\} \quad (4.4)$$

$$p'_{a2}(x, \zeta_{a2}, t) = [\rho_w \mathcal{V}^2] Re \left\{ r \left[\frac{1}{i\tilde{k}R_a} \left[\widetilde{\phi}_{a2}^{(3)}(\zeta_{a2}) - \tilde{k}^2 \widetilde{\phi}_{a2}^{(1)}(\zeta_{a2}) \right] + (\tilde{c} - \widetilde{U}_{a2}) \widetilde{\phi}_{a2}^{(1)}(\zeta_{a2}) + \frac{d\widetilde{U}_{a2}}{d\tilde{z}} \widetilde{\phi}_{a2}(\zeta_{a2}) \right] e^{ik(x-ct)} \right\}$$

水體的擾動 x 方向速度分佈，可由 (2.6) 擾動之流函數表示，並以 (2.9) 無因次化，得到無因次擾動 x 方向速度 \widetilde{u}_w 後，將 \widetilde{u}_w 以契比雪夫配置法展開，並乘上 $[\mathcal{V}]$ 得到有因次的壓力 \widetilde{u}_w ，在代回正規模態展開的 $u'_w(x, \zeta_w, t) = \widetilde{u}_w(\zeta_w) e^{ik(x-ct)}$ 。因此以水體特徵函數 $\widetilde{\phi}_w(\zeta_w)$ 描述的有因次之擾動 x 方向速度分佈為：

$$u'_w(x, \zeta_w, t) = [\mathcal{V}] Re \left\{ \widetilde{\phi}_w^{(1)}(\zeta_w) e^{ik(x-ct)} \right\} \quad (4.5)$$

同上述水體流場，空氣線性與對數流場中有因次之 x 方向速度分佈分別為：

$$u'_{a1}(x, \zeta_{a1}, t) = [\mathcal{V}] Re \left\{ \widetilde{\phi}_{a1}^{(1)}(\zeta_{a1}) e^{ik(x-ct)} \right\} \quad (4.6)$$

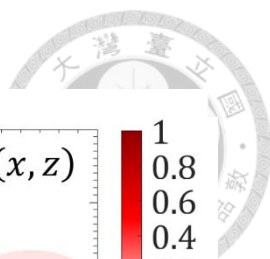
$$u'_{a2}(x, \zeta_{a2}, t) = [\mathcal{V}] Re \left\{ \widetilde{\phi}_{a2}^{(1)}(\zeta_{a2}) e^{ik(x-ct)} \right\}$$

由上述推導之方程式 (4.3) - (4.4)，可畫出不穩定模態的壓力分佈；(4.5) - (4.6)，可畫出不穩定模態的 x 方向速度分佈。觀察在初始時間 $t = 0$ sec 與水平長度 $x = 0 \sim 4\pi$ cm 內的變化。在 $\lambda = 3$ cm 時，不同風速 ($u_* = 20, 40, 60, 80$ 與 100 cm/s) 下，最不穩定模態的壓力與 x 方向速度分佈，如圖 4.6 與圖 4.7 所示。

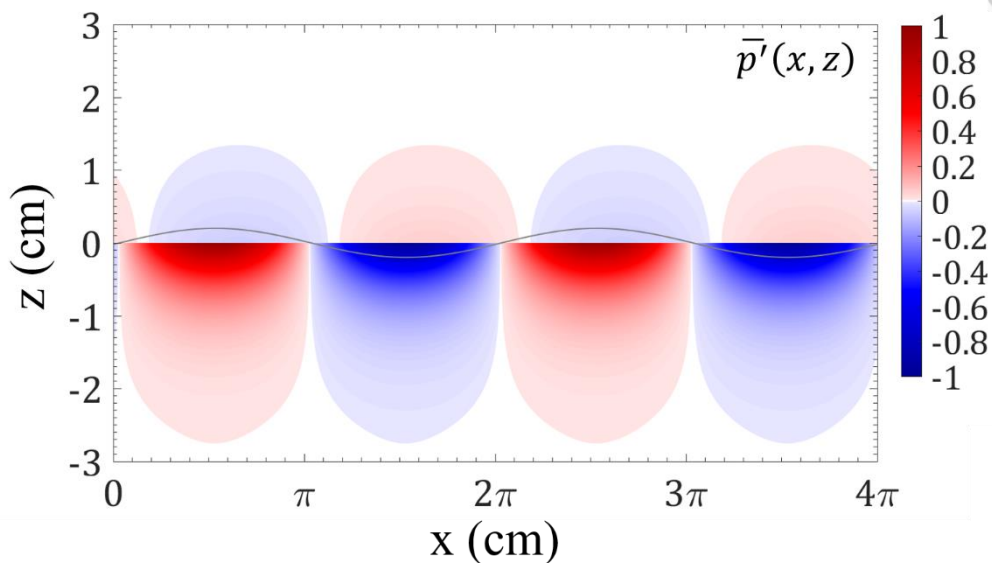
圖 4.6 為不同風速下，最不穩定模態的壓力分佈，其中壓力均以歸一化，並以 \bar{p}' 表示。圖 4.6 顯示隨著風速的增加，空氣流場中的擾動壓力也隨之增加。圖 4.6 (a) 與 (b) 為 $u_* = 20$ 與 40 cm/s 時的壓力分佈，其顯示此風速下影響不穩定波的主要為水體流場的壓力。此現象是由於空氣的密度與黏滯性皆遠小於水體，且風速較小時，而導致空氣對不穩定波產生的壓力將小於水體。圖 4.6 (c) - (e) 為 $u_* = 60, 80$ 與 100 cm/s 時的壓力分佈，顯示空氣流場壓力對不穩定波的影響

將大於水體流場，並隨著風速增加，兩介質對不穩定波的影響相當。此現象是由於空氣流場的壓力在此風速下對不穩定波的影響已超過黏滯性的影響，且水面速度 U_0 小於空氣摩擦速度 u_* 。以上表示主要影響不穩定波的區域（空氣、水體），將隨風速的變化有所不同。

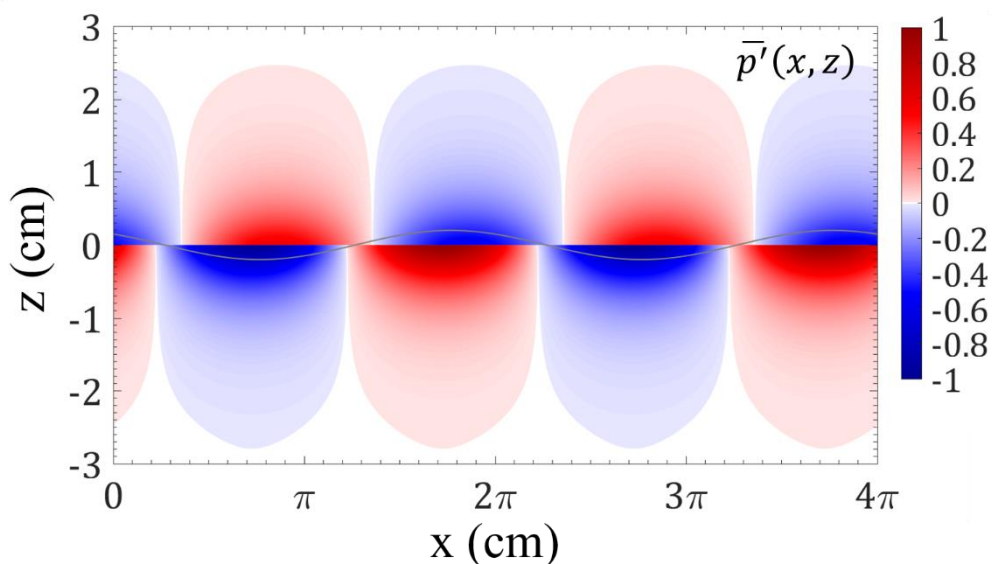
圖 4.7 為不同風速下，最不穩定模態的 x 方向速度分佈，其中 x 方向速度均以歸一化，並由 \bar{u}' 表示，並主要關注於黏性次邊界層附近的區域。圖 4.7 顯示不論在哪種風速下，空氣流場的速度將遠大於水體流場的速度。此現象是由於 x 方向速度與剪應力相關。在氣-水界面之剪應力需為連續，又由於水體與空氣的黏滯性有極大差異，並且水體的黏滯性大於空氣。因此造成水體與空氣之 x 方向速度同樣有很大的差異，且空氣的 x 方向速度會大於水體，並證實於圖 4.7。



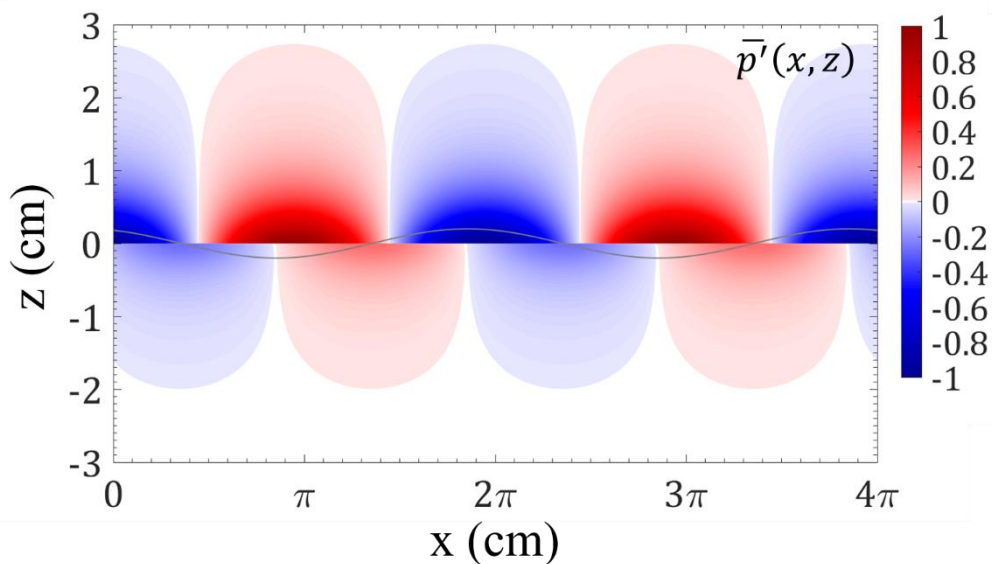
(a) $u_* = 20$ cm/s

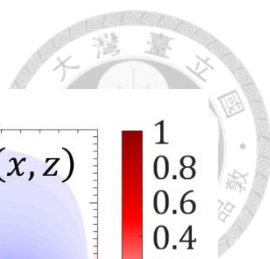


(b) $u_* = 40$ cm/s

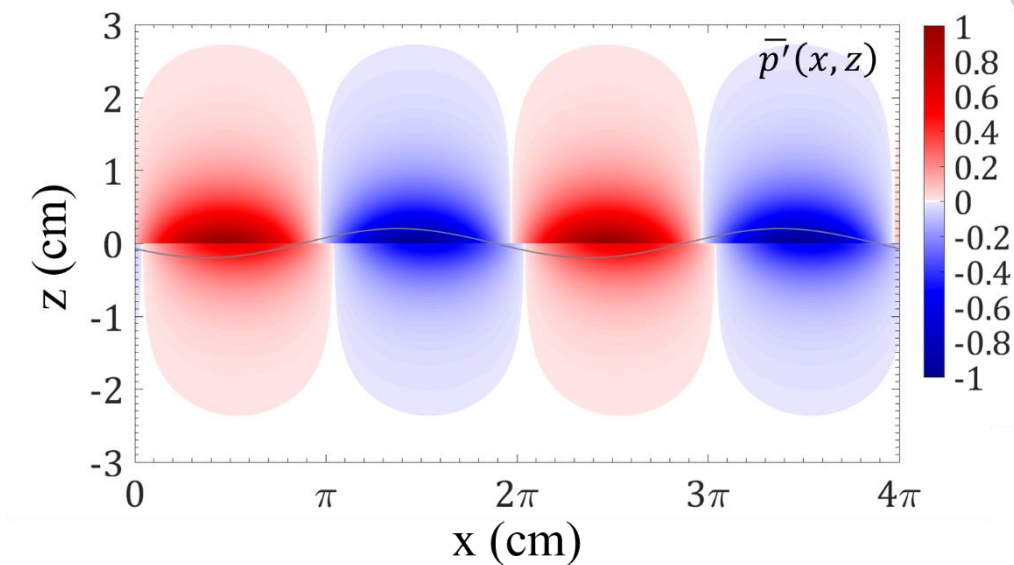


(c) $u_* = 60$ cm/s





(d) $u_* = 80$ cm/s



(e) $u_* = 100$ cm/s

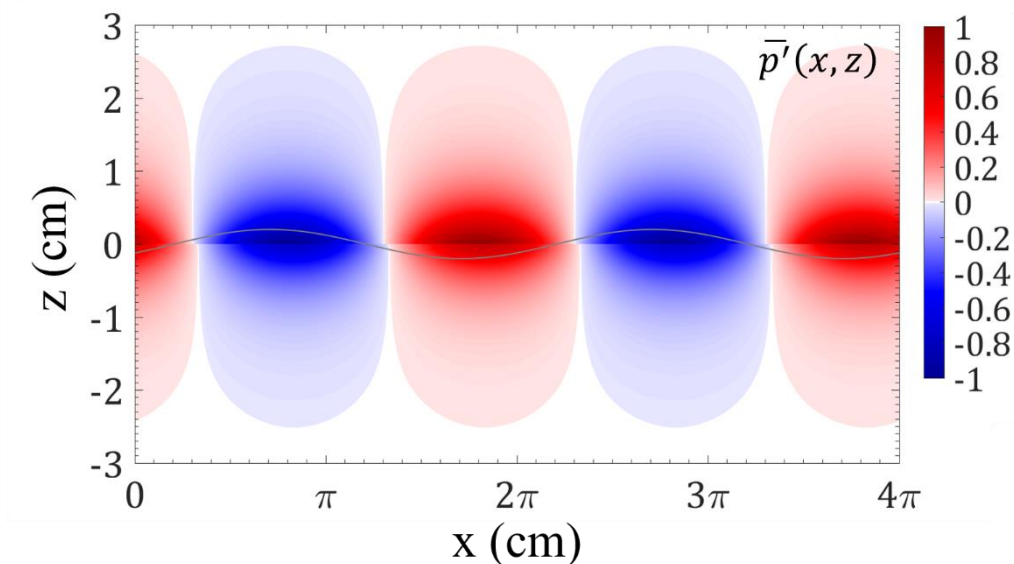
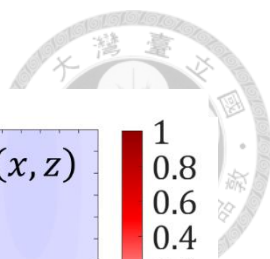
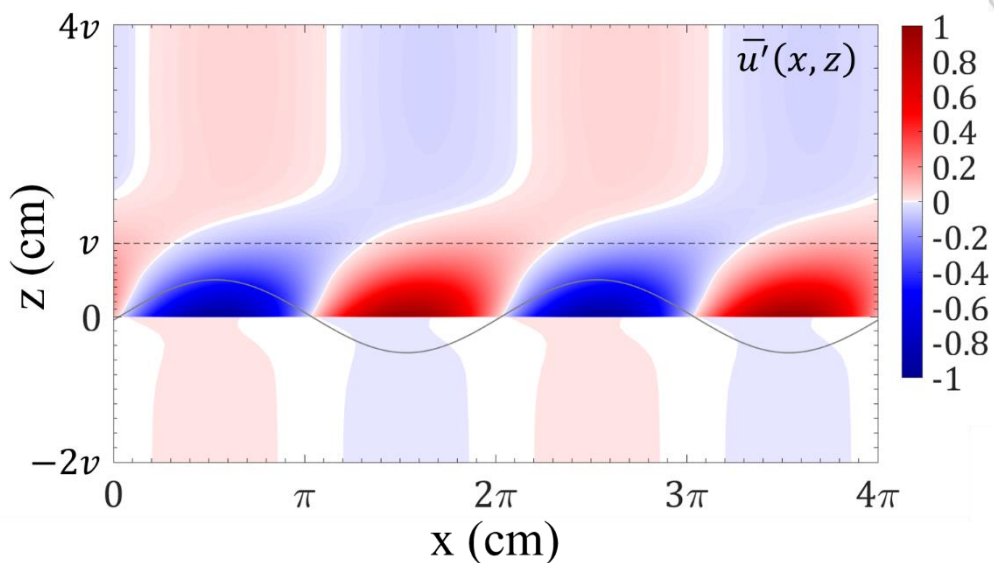


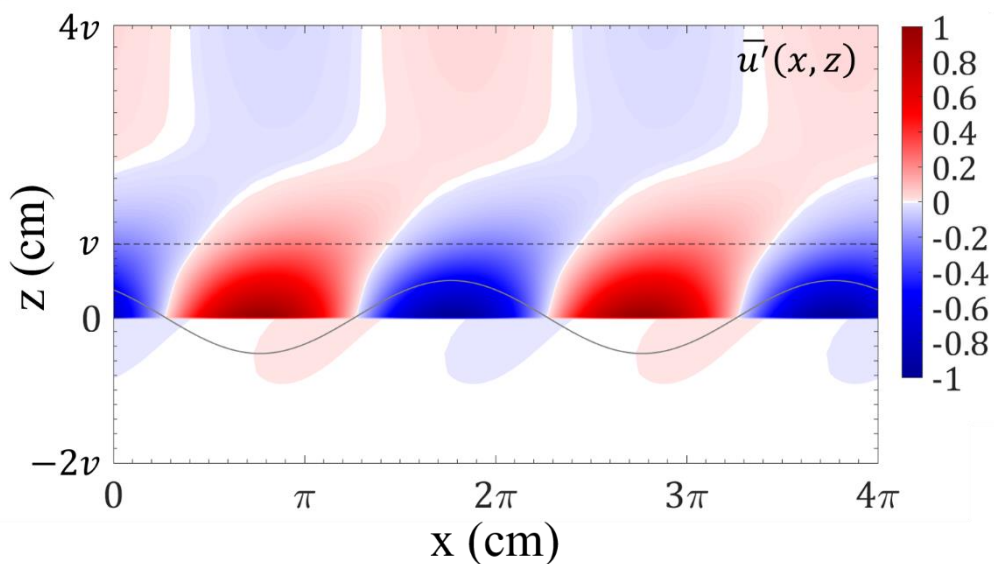
圖 4.6：在不同風速下，不穩定模態的壓力分佈圖。(a) $u_* = 20$ cm/s、(b) $u_* = 40$ cm/s、(c) $u_* = 60$ cm/s、(d) $u_* = 80$ cm/s、(e) $u_* = 100$ cm/s。灰線表示為擾動氣-水界面。



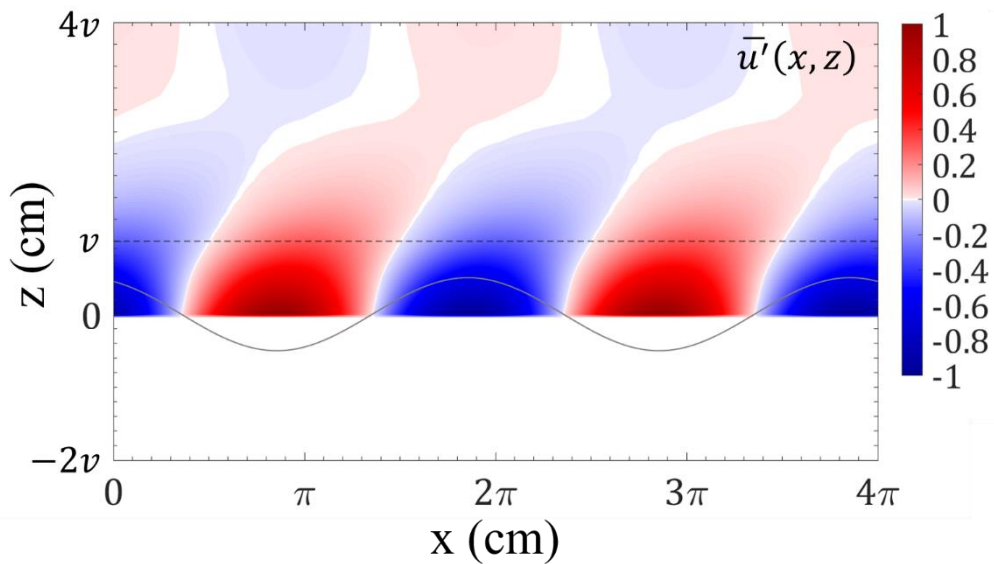
(a) $u_* = 20$ cm/s



(b) $u_* = 40$ cm/s



(c) $u_* = 60$ cm/s



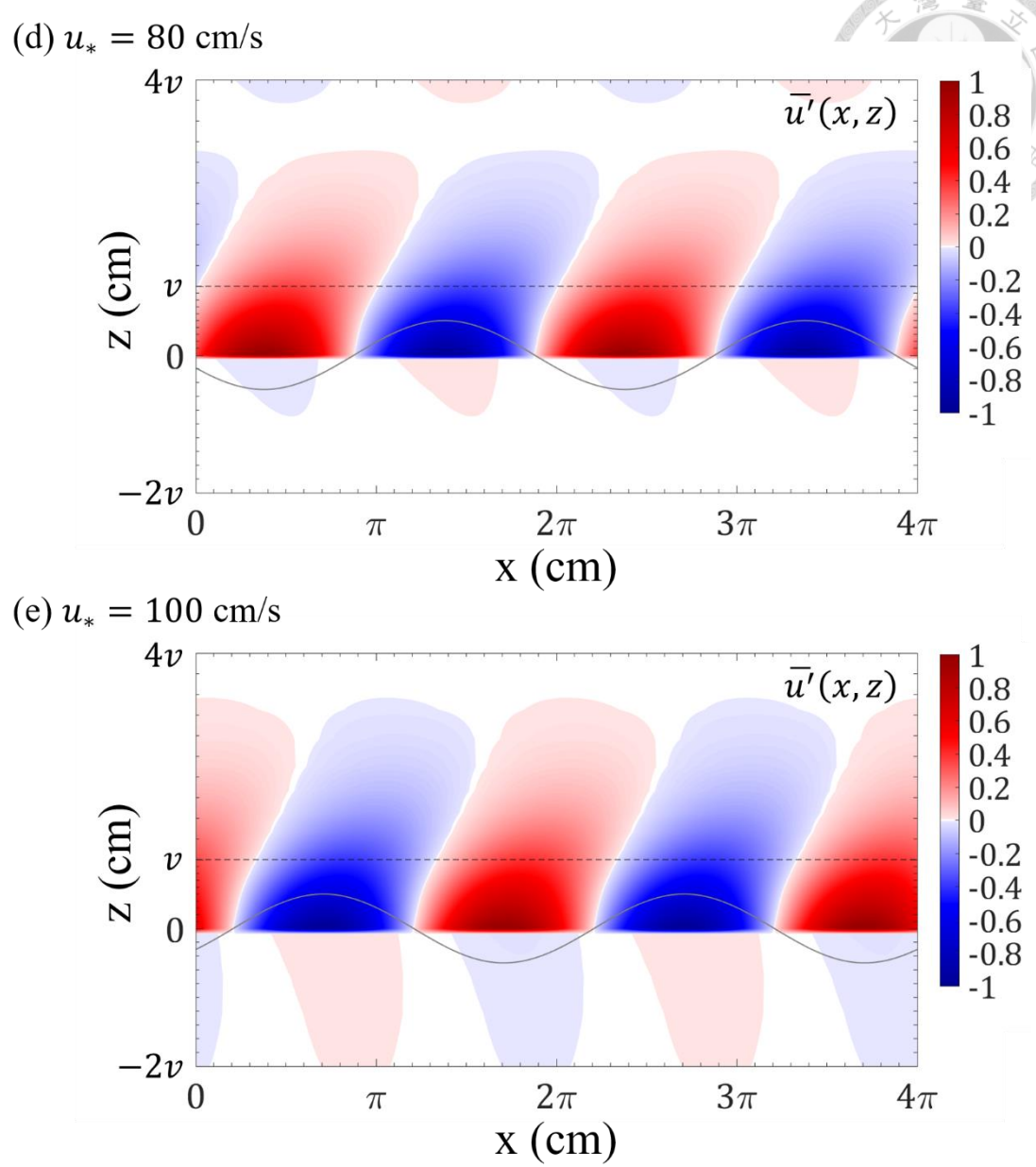
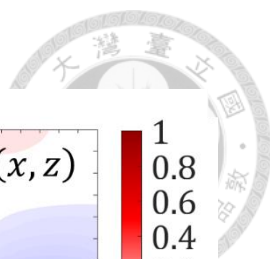


圖 4.7：在不同風速下，不穩定模態的 x 方向速度分佈圖。(a) $u_* = 20 \text{ cm/s}$ 、(b) $u_* = 40 \text{ cm/s}$ 、(c) $u_* = 60 \text{ cm/s}$ 、(d) $u_* = 80 \text{ cm/s}$ 、(e) $u_* = 100 \text{ cm/s}$ 。灰線表示為擾動氣-水界面。虛線表示為黏性次邊界層高度。

第五章、 結論



本研究以契比雪夫配置法解析氣-水耦合剪流場的穩定性動力方程式及氣-水交界面邊界條件，並使用 QZ 法求解廣義特徵方程組，進而求得不穩定波的發展率。並與前人解得的不穩定波發展率比較，其誤差均在 10% 以內，並未有太大的差異，因此證明本研究的數值方法對氣-水耦合剪流場的穩定性問題是正確的。而且與前人的數值方法比較，能有更好的準確性、收斂性以及計算速度。並且計算範圍能擴展至 $0 < \lambda < 20 \text{ cm}$ 與 $0 < u_* < 100 \text{ cm/s}$ 或甚至更高。並顯示使用區域分解法於黏性次邊界層高度，能有效的提高收斂性與準確性。因此說明本研究中的契比雪夫配置法是一穩定且強大的數值方法，並且能容易的應用在不同的線性穩定性分析裡。

隨著計算範圍的擴展，同樣發現在高風速時，有雙重不穩定模態的產生。並繪製出中性穩定曲線以判別其狀態為穩定、單一或是雙重不穩定模態。在一定波長 $\lambda = 3 \text{ cm}$ 下，隨著速度增加時，擾動壓力對不穩定波的影響，將由水體流場轉變為空氣流場主導；而擾動 x 方向速度對不穩定波的影響，在不同速度下，皆集中於黏性次邊界層內，且空氣的影響遠大於水體的影響，並由剪應力的連續證實此結果符合物理意義。

本研究僅對不穩定模態的壓力與 x 方向速度有初步的討論，然而還有許多問題並未深入討論，如：引起雙重不穩定模態的機制、兩者間的差異，或是延伸方法至空間不穩定分析，進一步比較時間與空間不穩定機制的差異，以上都是未來能研究的方向。

參考文獻

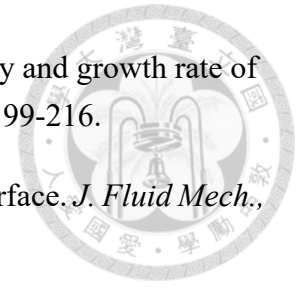


- Boomkamp, P., Boersma, B., Miesen, R. & Beijnon, G. 1997 A Chebyshev collocation method for solving two-phase flow stability problems. *J. Comput. Phys.*, **132**, 191-200.
- Canuto, C., Hussaini, M., Quarteroni, A. & Zang, T. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York.
- Jeffreys, H. 1925 On the formation of water waves by wind. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **107**, 189-206.
- Kawai, S. 1979 Generation of initial wavelets by instability of a coupled shear flow and their evolution to wind waves. *J. Fluid Mech.*, **93**, 661-703.
- Larson, T. & Wright, J. 1975 Wind-generated gravity-capillary waves: Laboratory measurements of temporal growth rates using microwave backscatter. *J. Fluid Mech.*, **70**, 417-436.
- Miles, J. W. 1957 On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, **3**, 185-204.
- Miles, J. W. 1962 On the generation of surface waves by shear flows. Part 4. *J. Fluid Mech.*, **13**, 433-448.
- Orszag, S. A. 1971 Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, **50**, 689.
- Phillips, O. M. & Hasselmann, K. 1986 *Wave Dynamics and Radio Probing of the Ocean Surface*. Springer US.
- Schmid, P. J. & Henningson, D. S. 2001 *Stability and transition in shear flows*. 1st ed. Vol. 142. Springer-Verlag New York.
- Trefethen, L. N. 2000 *Spectral methods in MATLAB*. SIAM.
- Tsai, W. T. & Lin, M. Y. 2004 Stability Analysis of the Initial Surface-Wave Generation within an Air-Sea Coupled Shear Flow. *J. Marine Sci. Tech.*, **12**, 200-208.
- Valenzuela, G. 1976 The growth of gravity-capillary waves in a coupled shear flow. *J. Fluid Mech.*, **76**, 229-250.

van Gastel, K., Janssen, P. A. & Komen, G. J. 1985 On phase velocity and growth rate of wind-induced gravity-capillary waves. *J. Fluid Mech.*, **161**, 199-216.

Wheless, G. & Csanady, G. 1993 Instability waves on the air–sea interface. *J. Fluid Mech.*, **248**, 363-381.

Zeisel, A., Stiassnie, M. & Agnon, Y. 2008 Viscous effects on wave generation by strong winds. *J. Fluid Mech.*, **597**, 343-369.



附錄一、流體應力關係式



考慮兩不相溶（或難相溶）的流體，兩者間存在著一共同交界面（interface）。

令 $F(x, y, z, t)$ 表示此一交界面。另外令 $R_1(t)$ 表示存在一流體的區域， $R_2(t)$ 表示存在另一流體的區域。根據流體的應力張量表示式，作用於流體的應力張量為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

若 (x, y, z) 為交界面上的一點，則此交界面在點 (x, y, z) 上的單位法向量 (l, m, n)

可表示成：

$$(l, m, n) = \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \right) \quad (\text{A.2})$$

令 R_1 、 R_2 表示為曲率半徑，所以在交界面處可得到如下之應力平衡關係式：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1})l \\ \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1})m \\ \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1})n \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

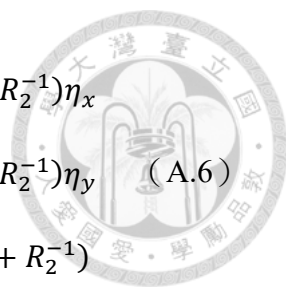
T 為表面張力係數。但是對不可壓縮流體而言，應力張量可表示為（本附錄中下標符號 x 、 y 及 z ，分別表示對 x 、 y 及 z 之偏微分）：

$$\begin{bmatrix} P_t - 2\mu u_x & -\mu(u_y + v_x) & -\mu(u_z + w_x) \\ -\mu(v_x + u_y) & P_t - 2\mu v_y & -\mu(v_z + w_y) \\ -\mu(u_z + w_x) & -\mu(v_z + w_y) & P_t - 2\mu w_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

令交界面對平均水平面之高度變化為 $z = \eta(x, y, t)$ ，則交界面可表示成 $F(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z$ ，因此 $F_x = \partial\eta(x, y, t)/\partial x$ 、 $F_y = \partial\eta(x, y, t)/\partial y$ 、 $F_z = -1$ 。所以單位法向量為：

$$(l, m, n) = \left(\frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}}, \frac{\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + 1}} \right) \quad (\text{A.5})$$

將上述應力表示式(A.4)和法向量表示式(A.5)代入應力和表面張力的平衡式(A.3)中，化簡後得到：



$$\begin{aligned}
P_t \eta_x - \mu[2u_x \eta_x + (u_y + v_x) \eta_y - (u_z + w_x)] &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \eta_x \\
P_t \eta_y - \mu[(v_x + u_y) \eta_x + 2v_y \eta_y - (v_z + w_y)] &= T(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \eta_y \quad (\text{A.6}) \\
-P_t - \mu[(u_z + w_x) \eta_x + (v_z + w_y) \eta_y - 2w_z] &= -T(R_1^{-1} + R_2^{-1})
\end{aligned}$$

若取二維流場 ($x-z$ 座標)，上式將變成：

$$\begin{aligned}
P_t \eta_x - \mu[2u_x \eta_x - (u_z + w_x)] &= T \eta_x R^{-1} \\
-P_t - \mu[(u_z + w_x) \eta_x - 2w_z] &= -TR^{-1}
\end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

再分別將 (A.7) 二式，改寫成在此一界面的法線和切線上的分量。

法線上分量：

$$P_t - \frac{2\mu[u_x \eta_x^2 - (u_z + w_x) \eta_x + w_z]}{1 + \eta_x^2} = TR^{-1} \quad (\text{A.8})$$

切線上分量：

$$2\mu(u_x - w_z) \eta_x + \mu(u_z + w_x)(\eta_x^2 - 1) = 0 \quad (\text{A.9})$$

把二維座標中，曲率半徑之導數表示為 $R^{-1} = \eta_{xx}/(1 + \eta_x^2)^{3/2}$ ，將其代入 (A.8)

與 (A.9) 後，可得到：

$$P_t - \frac{2\mu[u_x \eta_x^2 - (u_z + w_x) \eta_x + w_z]}{1 + \eta_x^2} = T \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} \quad (\text{A.10})$$

$$2\mu(u_x - w_z) \eta_x + \mu(u_z + w_x)(\eta_x^2 - 1) = 0 \quad (\text{A.11})$$

附錄二、特徵方程組矩陣



特徵方程組 $[A]\mathbf{x} = \tilde{\omega}[B]\mathbf{x}$ 之矩陣 $[A]$ 與 $[B]$ 分別如下所示。其方程組所解析之上邊界為滿足解析解之匹配條件 (2.39)，因此由 3.1 節所顯示 $[A]$ 與 $[B]$ 之大小均為 $(N_w + N_{a1} + N_{a2} + 6) \times (N_w + N_{a1} + N_{a2} + 6)$ 。 $[A]$ 與 $[B]$ 矩陣內所放置之方程式之順序依序為：水體流場之統御方程式、空氣線性流場之統御方程式、空氣對數流場之統御方程式、(水體)自由滑移條件、氣-水界面條件、匹配條件、滿足解析解之匹配條件。

為方便表示 $[A]$ 、 $[B]$ 矩陣，設置以下參數以簡化方程式之長度。

將 (3.3) 內之契比雪夫多項式與微分項參數之乘積分別表示為 I, J, K ：

$$I_n^{(j)}(\zeta_{w_l}) = \left(\frac{2}{\tilde{h}}\right)^j T_n^{(j)}(\zeta_{w_l})$$

$$J_n^{(j)}(\zeta_{a1_l}) = \left(\frac{2}{\tilde{\delta}}\right)^j T_n^{(j)}(\zeta_{a1_l}),$$

$$K_n^{(j)}(\zeta_{a2_l}) = \left(\frac{2}{\tilde{h} - \tilde{\delta}}\right)^j T_n^{(j)}(\zeta_{a2_l})$$

將水體流場之統御方程式之 $[A]$ 、 $[B]$ 矩陣部分，分別表示為 $A1, B1$ ：

$$A1_n(\zeta_{w_l}) = \frac{i}{R_w} I_n^4(\zeta_{w_l}) + \left(\tilde{k}\tilde{U}_w - \frac{2i\tilde{k}^2}{R_w}\right) I_n^2(\zeta_{w_l}) + \left(\frac{i\tilde{k}^4}{R_w} - \tilde{k}^3\tilde{U}_w - \tilde{k}\tilde{U}_w''\right) I_n^0(\zeta_{w_l})$$

$$B1_n(\zeta_{w_l}) = I_n^2(\zeta_{w_l}) - \tilde{k}^2 I_n^0(\zeta_{w_l})$$

將空氣線性流場之統御方程式之 $[A]$ 、 $[B]$ 矩陣部分，分別表示為 $A2, B2$ ：

$$A2_n(\zeta_{a1_l}) = \frac{i}{R_a} J_n^4(\zeta_{a1_l}) + \left(\tilde{k}\tilde{U}_{a1} - \frac{2i\tilde{k}^2}{R_a}\right) J_n^2(\zeta_{a1_l})$$

$$+ \left(\frac{i\tilde{k}^4}{R_a} - \tilde{k}^3\tilde{U}_{a1} - \tilde{k}\tilde{U}_{a1}''\right) J_n^0(\zeta_{a1_l})$$

$$B2_n(\zeta_{a1_l}) = J_n^2(\zeta_{a1_l}) - \tilde{k}^2 J_n^0(\zeta_{a1_l})$$

將空氣對數流場之統御方程式之 $[A]$ 、 $[B]$ 矩陣部分，分別表示為 $A3, B3$ ：



$$\begin{aligned}
 A3_n(\zeta_{a2l}) &= \frac{i}{R_a} K_n^4(\zeta_{a2l}) + \left(\tilde{k} \widetilde{U}_{a2} - \frac{2i\tilde{k}^2}{R_a} \right) K_n^2(\zeta_{a2l}) \\
 &\quad + \left(\frac{i\tilde{k}^4}{R_a} - \tilde{k}^3 \widetilde{U}_{a2} - \tilde{k} \widetilde{U}_{a2}'' \right) K_n^0(\zeta_{a2l}) \\
 B3_n(\zeta_{a2l}) &= K_n^2(\zeta_{a2l}) - \tilde{k}^2 K_n^0(\zeta_{a2l})
 \end{aligned}$$

將氣-水界面條件 (2.26) 之正應力平衡於 $[A]$ 矩陣部分，分別表示為 $A4, A5$ ：

$$\begin{aligned}
 A4_n &= \frac{i}{\tilde{k}R_w} [I_n^3(1) - 3\tilde{k}^2 I_n^1(1)] + \widetilde{U}_0 I_n^1(1) - \widetilde{U}_w'(0) I_n^0(1) \\
 A5_n &= -r \left[\frac{i}{\tilde{k}R_a} [J_n^3(-1) - 3\tilde{k}^2 J_n^1(-1)] + \widetilde{U}_0 J_n^1(-1) - \widetilde{U}_{a1}'(0) J_n^0(-1) \right] \\
 C_0 &= \tilde{k}W + F
 \end{aligned}$$

將滿足解析解之匹配條件 (2.39) 之參數表示為 θ ：

$$\theta = \sqrt{\tilde{k}^2 + i\tilde{k}R_a \widetilde{U}_h}$$

附錄三、二維平面 Poiseuille 流場之穩定性分析



此附錄將以契比雪夫配置法解析二維平面 Poiseuille 流場，並探討分別使用高階（四階）契比雪夫多項式之微分與低階（二階）微分，所得的數值解析解果。以下將列出二維平面 Poiseuille 流場的統御方程式、邊界條件與背景速度分佈。

二維平面 Poiseuille 流場的統御方程式，同樣為本研究所述之 Orr-Sommerfeld 方程式，因此其無因次之形式以流函數表示為：

$$\begin{aligned} -\tilde{k}(\tilde{c} - \tilde{U}) \frac{d^2 \tilde{\phi}}{d\tilde{z}^2} + [\tilde{k}^3(\tilde{c} - \tilde{U}) - \tilde{k}\tilde{U}'''] \tilde{\phi} \\ = -\frac{i}{R} \left(\frac{d^4 \tilde{\phi}}{d\tilde{z}^4} - 2\tilde{k}^2 \frac{d^2 \tilde{\phi}}{d\tilde{z}^2} + \tilde{k}^4 \tilde{\phi} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

其中以半渠寬為特徵長度 $[L]$ ，渠中間流速為特徵速度 $[U]$ ， $R = [UL]/\nu$ 為雷諾數。二維平面 Poiseuille 流場的上、下邊界條件皆為無滑移條件（no-slip condition），即水平與垂直速度為零，因此無因次之邊界條件以流函數表示為：

$$\tilde{\phi}(\pm 1) = \frac{d\tilde{\phi}(\pm 1)}{d\tilde{z}} = 0 \quad (\text{C.2})$$

二維平面 Poiseuille 流場的背景速度分佈以無因次形式表示為：

$$\tilde{U}(\tilde{z}) = 1 - \tilde{z}^2 \quad (\text{C.3})$$

Orszag (1971) 以 Galerkin-tau 方法展開上述方程組，再以 QZ 法求解廣義特徵值問題。並設置雷諾數 $R = 10000$ ，無因次不穩定波波數 $\tilde{k} = 1$ 時，其特徵值 $\tilde{\omega} = 0.23752649 + 0.00373967i$ ，因此爾後之解析均以此結果為參考。以下將以契比雪夫配置法解析上述方程式 (C.1) - (C.3)。



3.1. 以高階（四階）微分之契比雪夫配置法解析二維平面 Poiseuille 流場

將統御方程式 (C.1) 整理為廣義特徵值問題 $[A]\mathbf{x} = \tilde{\omega}[B]\mathbf{x}$ ，如下所示：

$$\begin{aligned} \frac{i}{R}(D^4\tilde{\phi} - 2\tilde{k}^2D^2\tilde{\phi} + \tilde{k}^4\tilde{\phi}) + \tilde{k}\tilde{U}(D^2\tilde{\phi} - \tilde{k}^2\tilde{\phi}) - \tilde{k}\tilde{U}''\tilde{\phi} \\ = \tilde{\omega}(D^2\tilde{\phi} - \tilde{k}^2\tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (C.4)$$

其中 $\tilde{\omega} = \tilde{k}\tilde{c}$ 與 $D = d/dz$ 。

將本研究的契比雪夫配置法代入，即以契比雪夫多項式展開特徵函數 $\tilde{\phi}(z)$ ：

$$\tilde{\phi}(z) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(z) \quad (C.5)$$

並以配置點離散，其中配置點可表示為：

$$z_l = \cos\left(\frac{\pi l_1}{M}\right), \quad l_1 = 1, 2, \dots, M-1 \quad (C.6)$$

設置 $M = N - 2$ 。

將上述數值方法 (C.5) 與 (C.6) 代入統御方程式 (C.4) 與邊界條件 (C.2)，

可建立複數矩陣 $[A]$ 與 $[B]$ ，如下所示：

$$[A]_{(N+1) \times (N+1)} = \begin{bmatrix} \frac{i}{R}T_0''''(z_1) + \left(\tilde{k}\tilde{U} - \frac{2i}{R}\tilde{k}^2\right)T_0''(z_1) & \dots & \frac{i}{R}T_N''''(z_1) + \left(\tilde{k}\tilde{U} - \frac{2i}{R}\tilde{k}^2\right)T_N''(z_1) \\ + \left(\frac{i}{R}\tilde{k}^4 - \tilde{k}^3\tilde{U} - \tilde{k}\tilde{U}''\right)T_0(z_1) & \dots & + \left(\frac{i}{R}\tilde{k}^4 - \tilde{k}^3\tilde{U} - \tilde{k}\tilde{U}''\right)T_N(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{i}{R}T_0''''(z_{M-1}) + \left(\tilde{k}\tilde{U} - \frac{2i}{R}\tilde{k}^2\right)T_0''(z_{M-1}) & \dots & \frac{i}{R}T_N''''(z_{M-1}) + \left(\tilde{k}\tilde{U} - \frac{2i}{R}\tilde{k}^2\right)T_N''(z_{M-1}) \\ + \left(\frac{i}{R}\tilde{k}^4 - \tilde{k}^3\tilde{U} - \tilde{k}\tilde{U}''\right)T_0(z_{M-1}) & \dots & + \left(\frac{i}{R}\tilde{k}^4 - \tilde{k}^3\tilde{U} - \tilde{k}\tilde{U}''\right)T_N(z_{M-1}) \\ T_0(1) & \dots & T_N(1) \\ T_0(-1) & \dots & T_N(-1) \\ T_0'(1) & \dots & T_N'(1) \\ T_0'(-1) & \dots & T_N'(-1) \end{bmatrix}$$

$$[B]_{(N+1) \times (N+1)} = \begin{bmatrix} T_0''(z_1) - \tilde{k}^2T_0(z_1) & \dots & T_N''(z_1) - \tilde{k}^2T_N(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0''(z_{M-1}) - \tilde{k}^2T_0(z_{M-1}) & \dots & T_N''(z_{M-1}) - \tilde{k}^2T_N(z_{M-1}) \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$



其中複數特徵向量定義為 $\mathbf{x}^T = [a_0, a_1, \dots, a_N]$ 。並於 3.3 節討論其特徵值之收斂性測試與本方法之特性。

3.2. 以低階（二階）微分之契比雪夫配置法解析二維平面 Poiseuille 流場

將統御方程式 (C.4) 中之 $D^2\tilde{\phi} - \tilde{k}^2\tilde{\phi}$ 假設為一新特徵函數 $Y(z)$ ，因此統御方程式可表示為一聯立方程組：

$$\begin{aligned} -\tilde{k}\tilde{U}''\tilde{\phi} + \frac{i}{R}(D^2 - \tilde{k}^2)Y + \tilde{k}\tilde{U}Y &= \tilde{\omega}Y \\ D^2\tilde{\phi} - \tilde{k}^2\tilde{\phi} - Y &= 0 \end{aligned} \quad (C.7)$$

其中 $\tilde{\omega} = \tilde{k}\tilde{c}$ 與 $D = d/dz$ 。

同樣以契比雪夫多項式展開特徵函數 $\tilde{\phi}(z)$ 與 $Y(z)$ ：

$$\tilde{\phi}(z) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(z), \quad Y(z) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(z) \quad (C.8)$$

並以配置點離散，其中配置點表示為：

$$z_l = \cos\left(\frac{\pi l_2}{N}\right), \quad l_2 = 1, 2, \dots, N-1 \quad (C.9)$$

將上述方法 (C.8) 與 (C.9) 代入聯立方程組 (C.7) 與邊界條件 (C.2)，可建立複數矩陣 $[A]$ 與 $[B]$ ，如下所示：

$$[A]_{(2N+2) \times (2N+2)} = \begin{pmatrix} -\tilde{k}\tilde{U}''T_0(z_1) & \dots & -\tilde{k}\tilde{U}''T_N(z_1) & iR^{-1}G_0(z_1) & \dots & iR^{-1}G_N(z_1) \\ & \vdots & \vdots & +\tilde{k}\tilde{U}T_0(z_1) & \dots & +\tilde{k}\tilde{U}T_N(z_1) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{k}\tilde{U}''T_0(z_{N-1}) & \dots & -\tilde{k}\tilde{U}''T_N(z_{N-1}) & iR^{-1}G_0(z_{N-1}) & \dots & iR^{-1}G_N(z_{N-1}) \\ & & & +\tilde{k}\tilde{U}T_0(z_{N-1}) & \dots & +\tilde{k}\tilde{U}T_N(z_{N-1}) \\ G_0(z_1) & \dots & G_N(z_1) & -T_0(z_1) & & -T_N(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_0(z_{N-1}) & \dots & G_N(z_{N-1}) & -T_0(z_{N-1}) & \dots & -T_N(z_{N-1}) \\ T_0(-1) & \dots & T_N(-1) & 0 & \dots & 0 \\ T_0(1) & \dots & T_N(1) & 0 & \dots & 0 \\ T_0'(-1) & \dots & T_N'(-1) & 0 & \dots & 0 \\ T_0'(1) & \dots & T_N'(1) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$



$$[B]_{(2N+2) \times (2N+2)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & T_0(z_1) & \dots & T_N(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & T_0(z_{N-1}) & \dots & T_N(z_{N-1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

其中定義 $G_n(z_{l_2}) = T_n''(z_{l_2}) - \tilde{k}^2 T_n(z_{l_2})$ 。複數特徵函數定義為 $\mathbf{x}^T = [a_0, a_1, \dots, a_N, b_0, b_1, \dots, b_N]$ 。並於下節討論其特徵值收斂性測試與本方法之特性。

3.3. 比較高階與低階微分解析之結果

此節將討論兩方法所解得的特徵值之收斂性測試與其他特性。兩方法解得的特徵值之收斂性測試，如表 C.1 所示。表 C.1 顯示高階微分解析之特徵值於 $N = 55$ 時，已與 Orszag (1971) 解得的特徵值相同；而低階微分解析之特徵值於 $N = 60$ 時，與 Orszag 解得相同的特徵值。表示以高階微分解析之收斂速度比低階微分快，且仍有同樣的準確性。表 C.2 顯示高階微分與低階微分，在同樣網格點時的特性。表 C.2 顯示高階微分的矩陣大小為低階微分的一半，因此其計算速度小於低階微分的計算速度。然在高階微分時，複數矩陣 $[A]$ 的條件數 (condition number) 會大於低階微分。

以下將觀察在不同網格點時，虛部特徵值之誤差、複數矩陣 $[A]$ 的條件數與廣義特徵值問題 $[A]\mathbf{x} = \tilde{\omega}[B]\mathbf{x}$ 間的殘差，如圖 C.1-圖 C.3 所示。圖 C.1 為不同網格點時，虛部特徵值之誤差，其定義為：

$$\text{誤差} = \left| \tilde{\omega}_l - \tilde{\omega}_{l_{ref}} \right| \quad (\text{C.10})$$

其中 $\tilde{\omega}_{l_{ref}}$ 為 Orszag 解得的虛部特徵值 0.00373967。圖 C.1 可觀察出在特徵值收斂以前 $N \leq 60$ ，其誤差有契比雪夫配置法呈指數收斂的特性。並如表 C.1 收斂性測試的結果在 $N = 60$ 時收斂，然而隨著 N 的增加，高階微分的誤差將明顯不穩定



於低階微分，且其發生不穩定的位置會快於低階微分。因此以圖 C.2 與圖 C.3 來判斷此現象為數值不穩定所產生。其分別為不同網格點時，複數矩陣 $[A]$ 的條件數與廣義特徵值問題 $[A]x = \tilde{\omega}[B]x$ 間的殘差，其中殘差定義為：

$$\text{殘差} = [A]x - \tilde{\omega}[B]x \quad (\text{C.11})$$

此兩種數值經常用於檢定矩陣對於數值計算上的敏感性與穩定性。圖 C.2 可觀察出高階微分之條件數隨 N 的增加，其值將會逐漸遠大於低階微分。然而條件數越大表示此線性系統，越趨於病態系統 (ill-conditioned system)，表示其計算結果是無法信任的，並反應於圖 C.1 中的誤差與圖 C.3 中的殘差。

N	高階微分解析之 $\tilde{\omega}$	低階微分解析之 $\tilde{\omega}$
30	$0.23741471 + 0.00349165i$	$0.23759437 + 0.00380300i$
40	$0.23752741 + 0.00373651i$	$0.23752492 + 0.00373909i$
50	$0.23752650 + 0.00373968i$	$0.23752652 + 0.00373958i$
55	$0.23752649 + 0.00373967i$	$0.23752648 + 0.00373968i$
60	$0.23752649 + 0.00373967i$	$0.23752649 + 0.00373967i$
65	$0.23752649 + 0.00373967i$	$0.23752649 + 0.00373967i$
70	$0.23752649 + 0.00373967i$	$0.23752649 + 0.00373967i$
Orszag (1971)	$0.23752649 + 0.00373967i$	

表 C.1：高階微分與低階微分所解得的特徵值之收斂性測試，並與 Orszag (1971) 解得的特徵值比較。



	高階微分解析	低階微分解析
最大微分階次	4	2
網格數 N	60	60
方陣大小	$N + 1$	$2(N + 1)$
$[A]$ 之條件數	$2.964e+8$	$2.611e+8$
計算時間	0.006 s	0.030 s

表 C.2：高階微分與低階微分之特性。

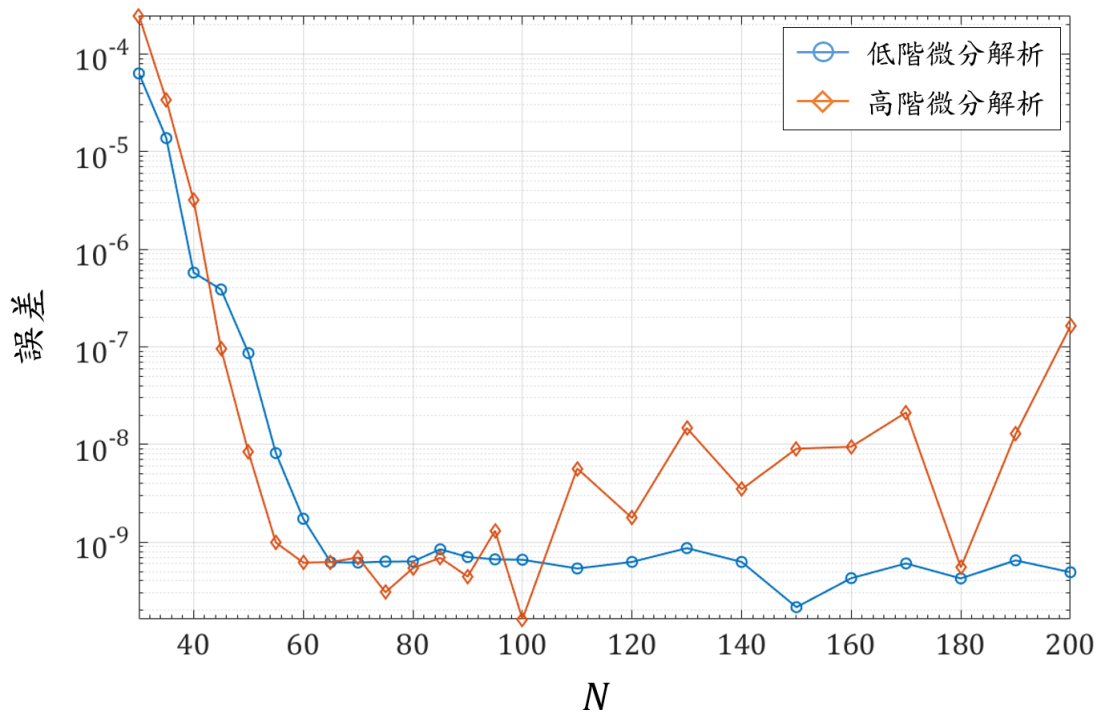


圖 C.1：不同網格點 N 時，虛部特徵值 $\tilde{\omega}_i$ 之誤差。

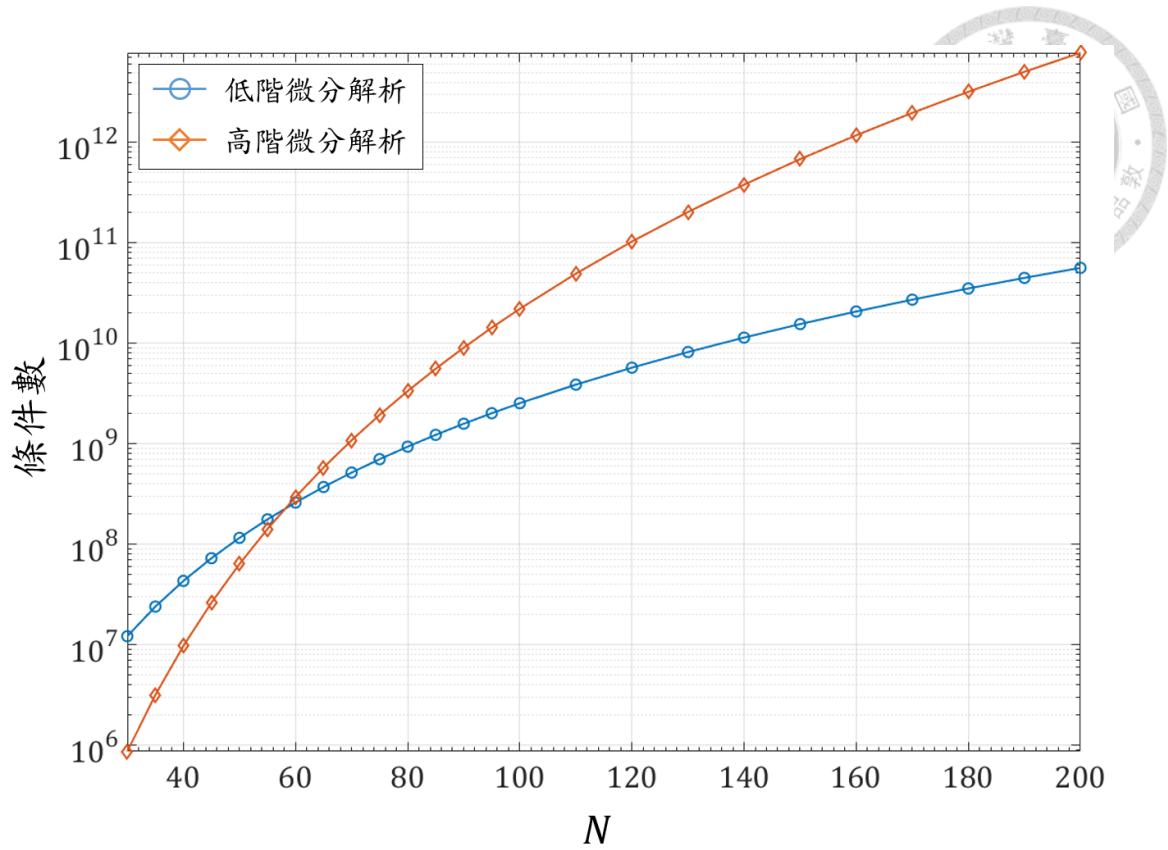


圖 C.2：不同網格點 N 時， $[A]$ 之條件數。

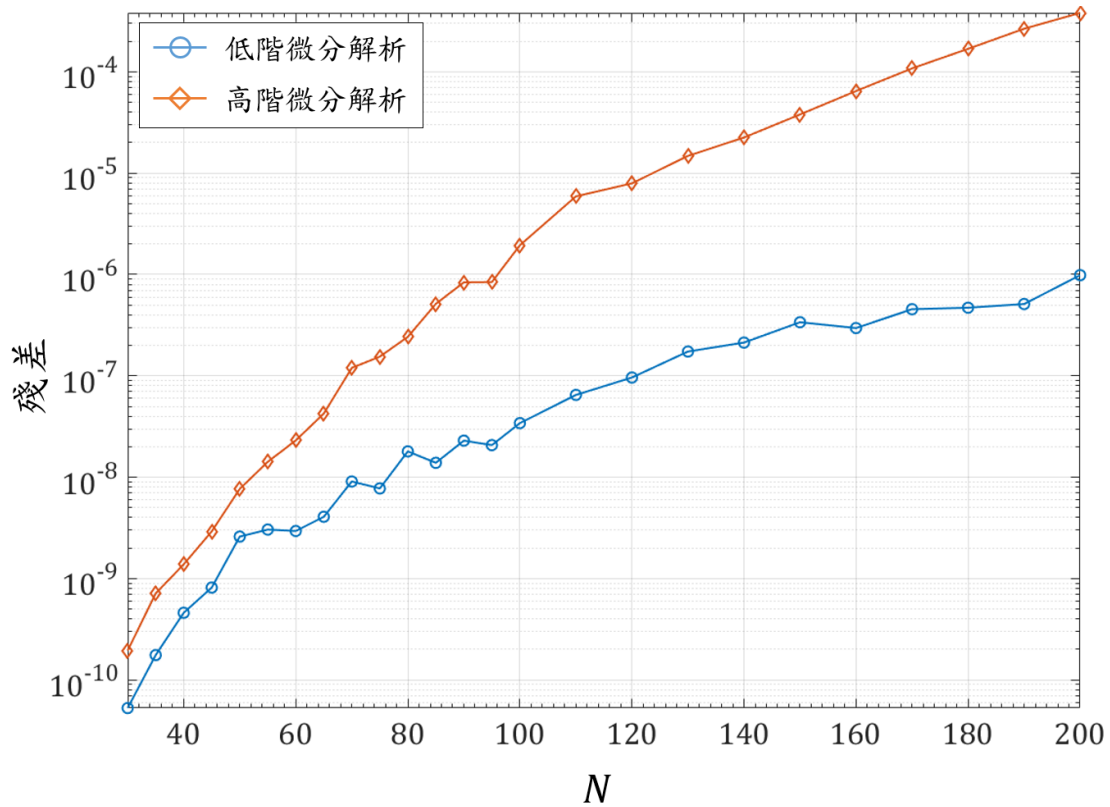


圖 C.3：不同網格點 N 時， $[A]\mathbf{x} = \tilde{\omega}[B]\mathbf{x}$ 的殘差。