

國立臺灣大學工學院工程科學及海洋工程學系

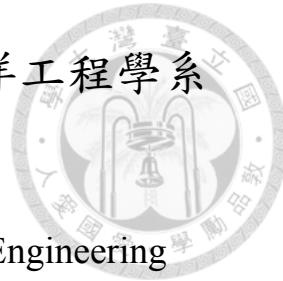
碩士論文

Department of Engineering Science and Ocean Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



未破碎波浪自由液面邊界層之流場紊流結構分析

The Analysis of the Coherent Turbulent Structures
in Non-Breaking Surface Waves

陳政榮

Jheng-Rong Chen

指導教授：蔡武廷 博士

Advisor: Wu-Ting Tsai, Ph.D.

中華民國 105 年 12 月

December, 2016

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

未破碎波浪自由液面邊界層之流場紊流結構分析

The Analysis of the Coherent Turbulent Structures

in Non-Breaking Surface Waves

本論文係陳政榮君（R03525011）在國立臺灣大學工程科學及
海洋工程學系完成之碩士學位論文，於民國 105 年 12 月 22 日承下列考
試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

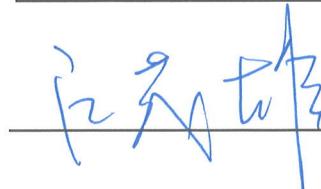


（指導教授）

戴靈恆

張恆幸

系主任



致謝



能完成此論文首先感謝我的指導教授蔡武廷老師，讓我們不需要負擔研究計劃，而能專心於作論文方面的研究。在研究室每週的會議中，總能從老師身上學到許多知識，像是學習如何報告以及作投影片的美感，老師解釋著報告的目標是要解釋一件台下聽眾原本不懂事情到懂，而不是讓聽眾對於講述的知識感到艱深，產生講者好有學問的錯覺，卻一點都聽不懂，並且透過不斷地報告，更能了解自身的盲點，為此目標不斷學習與改進。同時感謝世明和冠鴻學長，在我研究之路遇到困難時，透過討論都能得到幫助與啟發，尤其是冠鴻學長在我不斷地打擾之下，也都不厭其煩、樂意地與我討論。亦感謝口委張恆華老師與戴璽恆老師，尤其很榮幸能跟著戴璽恆老師學習流場穩定性分析之方法。最後感謝父母讓我能無顧慮地專心於研究，不必擔心學費或是其他事物。

中文摘要



觀察波浪表面發現存在沿流向之條痕結構，其結構與牆面紊流邊界層（wall turbulent boundary）相似，為探討其結構特性及其成因，故本研究應用前人於牆面紊流邊界層之研究方法，分析未破碎波浪之自由液面的數值模擬資料，發現低溫條痕之分布與沿流向高速條痕之分布相似，故為低溫高速條痕。透過沿流向平均發現條痕亦與渦度擾動有關，進而以渦度方向角度、渦旋結構辨識、條件平均法分析水面下之紊流流場，發現其具有成對沿流向之相關紊流結構（coherent turbulent structure），且其為反向旋轉，而該結構多分布於波背處，而隨時間發展逐漸朝沿流向延伸。針對上述之特性，可以透過渦度傳輸方程式說明，於波背處之沿流向渦度逐漸增大，於波前處逐漸減小，而其整體效應為隨時間逐漸增大，故使紊流結構朝沿流向延伸。比對 Craik 與 Leibovich 提出之理論，進行穩定性分析，其結果發現與數值模擬資料之流場吻合，故流場中成對沿流向之相關紊流結構即為朗繆爾環流（Langmuir circulation），並造成條痕結構。

關鍵字：波浪表面、溫度條痕、相關紊流結構、渦旋辨識、條件平均法、穩定性分析、朗繆爾環流

Abstract



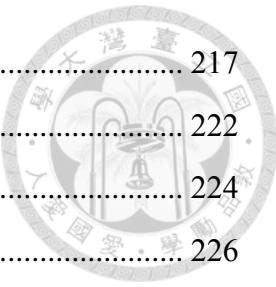
Streaky structures along the streamwise direction can be observed on the wavy surface, and they are similar to what is found in the wall turbulent boundary layer. To study the properties of these structures, the research methods used in the wall turbulent boundary are applied to the analysis of the simulation data of the non-breaking surface wave in this thesis. It is found that the distribution of high-temperature resembles the distribution low-speed streaks, and are so called high-temperature low-speed streaks. By using streamwise averaging, it is found that the streaks also correlate closely with fluctuation vorticity. Further, the methods of vorticity inclination angle, vortex identification and conditional averaging are used to analyze the underwater turbulent flow field, and show that there exist pairs of the streamwise coherent turbulent structures which are counter rotation. The most of them are lain in the wave back and stretched along the streamwise over time. On the above properties, they can be illustrated with vorticity transport equations. The streamwise vorticity grows gradually in the wave back, and decays in the wave front. Then, the total effect is positive, and the streamwise vorticity is stretched over time. Comparing with the theory which Craik and Leibovich proposed, and executing the stability analysis, the characteristics of simulation data fits in with the results of the stability analysis. It confirms that the pairs of the streamwise coherent turbulent structures are Langmuir circulations which lead to streaky structures.

Keywords: wavy surface, thermal streaks, coherent turbulent structure, vortex identification, conditional averaging, stability analysis, Langmuir circulation

目錄



致謝	i
中文摘要	ii
Abstract	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	xxx
第一章、前言	1
1.1 研究背景	1
1.2 數值模擬數據之產生	3
1.3 論文架構	6
第二章、流場結構分析	7
2.1 涡度剖面圖	44
2.2 相位平均	48
2.3 沿流向平均	67
2.4 涡度方向角度	105
2.5 涡旋結構辨識	126
2.5.1 速度梯度張量之第二不變量 (The second invariant of ∇u)	127
2.5.2 速度梯度張量之複數特徵值 (The complex eigenvalues of ∇u) ...	129
2.5.3 $S2 + \Omega 2$ 之第二特徵值 (The second eigenvalues $\lambda 2$ of $S2 + \Omega 2$)	131
2.5.4 速度梯度張量之複數根之虛數部分—渦流強度 (The image part σci of the complex eigenvalues of ∇u , swirling strength)	133
2.5.5 辨識結果	134
2.6 條件平均法 (conditional averaging methods)	172
2.7 涡度傳輸方程式 (Vorticity transport equations)	188
第三章、流場穩定性分析	211
3.1 理論介紹	211



3.2 結果與討論	217
第四章、結論	222
參考文獻	224
附錄一 相平面法	226
附錄二 契比雪夫多項式	232

圖 目 錄



第一章：

圖 1-1：物理區間及計算區間之坐標表示示意圖。 5

第二章：

圖 2-1：波長 7.5CM 於 $t = 5T0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。

圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 8

圖 2-2：波長 7.5CM 於 $t = 10T0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。

圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.86 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 9

圖 2-3：波長 7.5CM 於 $t = 15T0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。

圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.85 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 10

圖 2-4：波長 7.5CM 於 $t = 20T0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。

圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.82 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 11

圖 2-5：波長 7.5CM 於 $t = 25T0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。

圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.83 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 12

圖 2-6：波長 7.5CM 於 $t = 30T0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。

圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.82 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 13



- 圖 2-7：波長 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。..... 14
- 圖 2-8：波長 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。..... 15
- 圖 2-9：波長 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。..... 16
- 圖 2-10：波長 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。.... 17
- 圖 2-11：波長 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。.... 18
- 圖 2-12：波長 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。.... 19
- 圖 2-13：波長 15CM 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.94 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。..... 20

圖 2-14：波長 15CM 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布



- 圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 21
- 圖 2-15：波長 15CM 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.91 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 22
- 圖 2-16：波長 15CM 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 23
- 圖 2-17：波長 15CM 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 24
- 圖 2-18：波長 15CM 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 25
- 圖 2-19：波長 15CM 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.01 。 26
- 圖 2-20：波長 15CM 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 27
- 圖 2-21：波長 15CM 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.04，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 28



- 圖 2-22：波長 15CM 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 29
- 圖 2-23：波長 15CM 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.5，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 30
- 圖 2-24：波長 15CM 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 31
- 圖 2-25：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.95 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 32
- 圖 2-26：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.94 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 33
- 圖 2-27：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 34
- 圖 2-28：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 35
- 圖 2-29：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布



- 圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 36
- 圖 2-30：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 A 為沿流向速度擾動分布圖，圖 B 為跨流向速度擾動分布圖，圖 C 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 D 為溫度分布圖。 37
- 圖 2-31：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 38
- 圖 2-32：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.04，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 39
- 圖 2-33：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.04，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 40
- 圖 2-34：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 41
- 圖 2-35：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 42
- 圖 2-36：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 A 為溫度分布圖，圖 B 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 C 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 D 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。 43



- 圖 2-37：波長 7.5CM 於不同時間之渦度剖面圖。圖 A 為平均跨流向渦度，圖 B 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 C 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 D 為垂直向渦度擾動之方均根。 45
- 圖 2-38：波長 15CM 於不同時間之渦度剖面圖。圖 A 為平均跨流向渦度，圖 B 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 C 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 D 為垂直向渦度擾動之方均根。 46
- 圖 2-39：波長 20CM 於不同時間之渦度剖面圖。圖 A 為平均跨流向渦度，圖 B 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 C 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 D 為垂直向渦度擾動之方均根。 47
- 圖 2-40：波長為 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 49
- 圖 2-41：波長為 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 50
- 圖 2-42：波長為 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 51
- 圖 2-43：波長為 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 52
- 圖 2-44：波長為 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 53
- 圖 2-45：波長為 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 54
- 圖 2-46：波長為 15CM 於 $t = 5T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 55



- 圖 2-47：波長為 15CM 於 $t = 10T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 56
- 圖 2-48：波長為 15CM 於 $t = 15T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 57
- 圖 2-49：波長為 15CM 於 $t = 20T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 58
- 圖 2-50：波長為 15CM 於 $t = 25T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 59
- 圖 2-51：波長為 15CM 於 $t = 30T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 60
- 圖 2-52：波長為 20CM 於 $t = 5T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 61
- 圖 2-53：波長為 20CM 於 $t = 10T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 62
- 圖 2-54：波長為 20CM 於 $t = 15T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 63
- 圖 2-55：波長為 20CM 於 $t = 20T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 64
- 圖 2-56：波長為 20CM 於 $t = 25T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。 65



圖 2-57：波長為 20CM 於 $t = 30T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 A 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 B 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 C 為垂直向渦度擾動之方均根。	66
圖 2-58：波長 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	69
圖 2-59：波長 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	70
圖 2-60：波長 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	71
圖 2-61：波長 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	72
圖 2-62：波長 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	73
圖 2-63：波長 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	74
圖 2-64：波長 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	75
圖 2-65：波長 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	76
圖 2-66：波長 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	77



圖 2-67：波長 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	78
圖 2-68：波長 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	79
圖 2-69：波長 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	80
圖 2-70：波長 15CM 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	81
圖 2-71：波長 15CM 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	82
圖 2-72：波長 15CM 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	83
圖 2-73：波長 15CM 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	84
圖 2-74：波長 15CM 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	85
圖 2-75：波長 15CM 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	86
圖 2-76：波長 15CM 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	87



圖 2-77：波長 15CM 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	88
圖 2-78：波長 15CM 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	89
圖 2-79：波長 15CM 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	90
圖 2-80：波長 15CM 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	91
圖 2-81：波長 15CM 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	92
圖 2-82：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	93
圖 2-83：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	94
圖 2-84：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	95
圖 2-85：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	96
圖 2-86：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	97



圖 2-87：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	98
圖 2-88：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	99
圖 2-89：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	100
圖 2-90：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	101
圖 2-91：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	102
圖 2-92：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為溫度分布；圖 B 為沿流向速度分布；圖 C 為跨流向速度分布；圖 D 為垂直向速度分布。	103
圖 2-93：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 A 為沿流向渦度分布；圖 B 為跨流向渦度分布；圖 C 為垂直向渦度分布。	104
圖 2-94：波長 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。	108
圖 2-95：波長 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。	109
圖 2-96：波長 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。	110



- 圖 2-97：波長 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 111
- 圖 2-98：波長 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 112
- 圖 2-99：波長 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 113
- 圖 2-100：波長 15CM 於 $t = 5T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 114
- 圖 2-101：波長 15CM 於 $t = 10T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 115
- 圖 2-102：波長 15CM 於 $t = 15T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 116
- 圖 2-103：波長 15CM 於 $t = 20T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 117
- 圖 2-104：波長 15CM 於 $t = 25T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 118
- 圖 2-105：波長 15CM 於 $t = 30T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 119
- 圖 2-106：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 120



- 圖 2-107：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 121
- 圖 2-108：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 122
- 圖 2-109：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 123
- 圖 2-110：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 124
- 圖 2-111：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。 125
- 圖 2-112：波長 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 136
- 圖 2-113：波長 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 137
- 圖 2-114：波長 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 138



圖 2-115：波長 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 139

圖 2-116：波長 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 140

圖 2-117：波長 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 141

圖 2-118：波長 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 142

圖 2-119：波長 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 143

圖 2-120：波長 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 144



圖 2-121：波長 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 145

圖 2-122：波長 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 146

圖 2-123：波長 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 147

圖 2-124：波長 15CM 於 $t = 5T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 148

圖 2-125：波長 15CM 於 $t = 10T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 149

圖 2-126：波長 15CM 於 $t = 15T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為
 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 150



圖 2-127：波長 15CM 於 $t = 20T0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 151

圖 2-128：波長 15CM 於 $t = 25T0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 152

圖 2-129：波長 15CM 於 $t = 30T0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 153

圖 2-130：波長 15CM 於 $t = 5T0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 154

圖 2-131：波長 15CM 於 $t = 10T0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 155

圖 2-132：波長 15CM 於 $t = 15T0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 156



圖 2-133：波長 15CM 於 $t = 20T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 157

圖 2-134：波長 15CM 於 $t = 25T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 158

圖 2-135：波長 15CM 於 $t = 30T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 159

圖 2-136：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 160

圖 2-137：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 161

圖 2-138：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 162



圖 2-139：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 163

圖 2-140：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 164

圖 2-141：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0$ 。 165

圖 2-142：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 166

圖 2-143：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 167

圖 2-144：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 168



圖 2-145：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 169

圖 2-146：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 170

圖 2-147：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 A 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 B 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 C 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 D 為 $\sigma ci2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma ci2 > 0.001$ 。 171

圖 2-148：波長 7.5CM 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法 (QD-4) 所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8552$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 176

圖 2-149：波長 7.5CM 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法 (QD-4) 所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9008$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 177

圖 2-150：波長 7.5CM 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8552$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 178

圖 2-151：波長 7.5CM 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9008$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾



動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 179

圖 2-152：波長 15CM 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法 (QD-4) 所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8540$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 180

圖 2-153：波長 15CM 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法 (QD-4) 所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9029$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 181

圖 2-154：波長 15CM 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8540$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 182

圖 2-155：波長 15CM 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9029$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 183

圖 2-156：波長 20CM 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法 (QD-4) 所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8556$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 184

圖 2-157：波長 20CM 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法 (QD-4) 所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9013$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 185

圖 2-158：波長 20CM 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8556$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 186

圖 2-159：波長 20CM 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之



- 結果，其中水深以 $\zeta = 0.9013$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda$ 。 187
- 圖 2-160：波長 7.5CM 於 $t = 5T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 190
- 圖 2-161：波長 7.5CM 於 $t = 10T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 191
- 圖 2-162：波長 7.5CM 於 $t = 15T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 192
- 圖 2-163：波長 7.5CM 於 $t = 20T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 193
- 圖 2-164：波長 7.5CM 於 $t = 25T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 194
- 圖 2-165：波長 7.5CM 於 $t = 30T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 195
- 圖 2-166：波長 7.5CM 於各時間對 $D\omega iDt$ 作層平均之結果，橫軸為 $D\omega iDt$ 之值，縱軸為垂直向之水深。圖 A 為 $D\omega xDt$ 隨時間之分布圖，圖 B 為 $D\omega yDt$ 隨時間之分布圖，圖 C 為 $D\omega zDt$ 隨時間之分布圖。 196



圖 2-167：波長 15CM 於 $t = 5T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 197

圖 2-168：波長 15CM 於 $t = 10T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 198

圖 2-169：波長 15CM 於 $t = 15T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 199

圖 2-170：波長 15CM 於 $t = 20T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 200

圖 2-171：波長 15CM 於 $t = 25T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 201

圖 2-172：波長 15CM 於 $t = 30T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 202

圖 2-173：波長 15CM 於各時間對 $D\omega iDt$ 作層平均之結果，橫軸為 $D\omega iDt$ 之值，縱軸為垂直向之水深。圖 A 為 $D\omega xDt$ 隨時間之分布圖，圖 B 為 $D\omega yDt$ 隨時間之分布圖，圖 C 為 $D\omega zDt$ 隨時間之分布圖。 203

圖 2-174：波長 20CM 於 $t = 5T_0$ 時之對 $D\omega iDt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega xDt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega yDt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega zDt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色



- 為正值。 204
- 圖 2-175：波長 20CM 於 $t = 10T_0$ 時之對 $D\omega_i Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega_x Dt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega_y Dt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega_z Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 205
- 圖 2-176：波長 20CM 於 $t = 15T_0$ 時之對 $D\omega_i Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega_x Dt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega_y Dt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega_z Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 206
- 圖 2-177：波長 20CM 於 $t = 20T_0$ 時之對 $D\omega_i Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega_x Dt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega_y Dt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega_z Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 207
- 圖 2-178：波長 20CM 於 $t = 25T_0$ 時之對 $D\omega_i Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega_x Dt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega_y Dt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega_z Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 208
- 圖 2-179：波長 20CM 於 $t = 30T_0$ 時之對 $D\omega_i Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 A 為 $D\omega_x Dt$ 之相位平均，圖 B 為 $D\omega_y Dt$ 之相位平均，圖 C 為 $D\omega_z Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。 209
- 圖 2-180：波長 20CM 於各時間對 $D\omega_i Dt$ 作層平均之結果，橫軸為 $D\omega_i Dt$ 之值，縱軸為垂直向之水深。圖 A 為 $D\omega_x Dt$ 隨時間之分布圖，圖 B 為 $D\omega_y Dt$ 隨時間之分布圖，圖 C 為 $D\omega_z Dt$ 隨時間之分布圖。 210
- 第三章：
- 圖 3-1：穩定性分析之增長率 ΣR 分布圖，橫軸為 $La - 1$ ，縱軸為 l 。圖 A 為增長率之等高線圖，以細黑虛線表示並標示其值，粗黑實線為固定 $La - 1$ 下，增長率最大值之連線，粗黑虛線為增長率為零之連線。圖 B 為穩定性分析與數值模擬之比較，實點為數值模擬之對應點，細虛線為固定 $La - 1$ 下，增長率最大值之百分比連線。 221



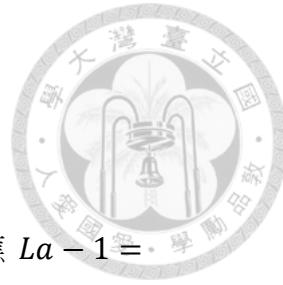
附錄一：

圖 A1-1：為真節點之相平面示意圖。[22].....	227
圖 A1-2：為偽節點之相平面示意圖。[22].....	228
圖 A1-3：為鞍點之相平面示意圖。[22].....	229
圖 A1-4：為螺旋點之相平面示意圖。[22].....	230
圖 A1-5：為中心點之相平面示意圖。[22].....	231

表目錄

第三章：

表 3-1：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 0.1$ 時，對應 $La - 1 = 100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σR 之收斂性測試。.....	219
表 3-2：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 0.5$ 時，對應 $La - 1 = 100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σR 之收斂性測試。.....	219
表 3-3：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 5$ 時，對應 $La - 1 = 100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σR 之收斂性測試。.....	220
表 3-4：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 10$ 時，對應 $La - 1 = 100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σR 之收斂性測試。.....	220



第一章、前言



1.1 研究背景

自然界中不論是河川、海洋或是大氣，多屬於紊流流場，其流場之運動看似紊亂且無規則，然而事實上並非如此。諸多研究顯示紊流流場中存在相關紊流結構（coherent turbulent structure），該結構能持續存在一段時間且逐漸發展而後消散，如牆面紊流邊界層（wall turbulent boundary layer）之馬蹄型渦旋（horseshoe vortex）[1, 2]，或稱髮夾型渦旋（hairpin vortex），和自由液面紊流邊界層之朗繆爾環流（Langmuir circulation）。

諸多學者針對牆面紊流邊界層進行許多研究，Kline 等人 [3] 於接近牆面處置放一跨流向之熱導線（hot-wire），令其產生均勻微小氣泡並藉此觀察流場之運動，發現氣泡匯聚（convergence）而形成平行於沿流向之條痕（streak）。而後學者們利用不同方法深入探討此現象，並提出不同概念模型 [4, 5]。Robinbson [2] 回顧前人之結果並歸納特性，結果顯示上述之條痕是因為髮夾型渦旋之結構，使接近牆面之流體匯聚，進而使微小氣泡聚集而成條痕。髮夾型渦旋可分為三部分，腿、脖子以及頭部，腿為成對之準沿流向渦旋（quasi-streamwise vortex pair），且其方向相反，脖子為沿續成對之準沿流向渦旋並遠離牆面，頭部為連接脖子之跨流向渦度。前述之氣泡條痕結構即因成對之準沿流向渦旋而產生。

雖然牆面紊流邊界層是紊流中較理想化之流場，但仍十分紊亂，故前人利用統計方式來探討牆面紊流邊界層。Moin 和 Kim [6] 計算流場中渦度傾向角度（vorticity inclination angle），並探討不同深度之角度分布趨勢，藉此猜測紊流結構之樣貌，並繪製渦線（vortex line）勾勒出結構外觀。Blackwelder 和 Kaplan [7] 以變數間隔時間平均法（variable-interval time-averaging method，VITA）分析從實驗所量測之時序列數據，而後 Kim 和 Moin [8] 以變數間隔時間平均法為基礎，提出適用於數值模擬資料之變數間隔空間平均法（variable-interval space-averaging method，VISA），並從紊亂之流場中擷取出髮夾型渦旋之結構。亦有學者用不同方法來直接辨識流場中之渦旋結構，如渦度擬能（enstrophy）、渦線，



其皆以渦度之特性來辨識結構。此外也可藉由拓樸學（topology）之概念作為準則，如 Hunt 等人 [9]、Chong 等人 [10]、Jeong 和 Hussain [11]、Zhou 和 Adrian [12] 等，透過速度梯度張量提出辨識準則，或是以局部壓力最小值與渦旋之關係而提出之方法。

由於電腦科學的進步，且隨著數值方法的發展，如今已能模擬波浪之自由液面紊流邊界層。Tsai 等人 [13] 發現流場中亦存在與牆面紊流邊界層相似之條痕結構，並透過分析水下之速度與渦度場，發現其與條痕結構有關。Craik 和 Leibovich [14-16] 以理論分析證明受風剪驅動之波浪自由液面，因水下之朗繆爾環流，造成條痕結構。

本研究使用了前人於牆面紊流邊界層之研究方法，應用於未破碎波浪之自由液面紊流邊界層之數值模擬資料，藉此找出水面下之相關紊流結構，並與 Craik 和 Leibovich 提出之理論，進行穩定性分析之結果進行比較，進而找出造成條痕之相關紊流結構。



1.2 數值模擬數據之產生

本研究所使用的資料為 Tsai 等人 [13] 之數值模擬資料，其模擬一個未破碎表面波之三維流場，且不考慮表面張力，沿流向有一行進之重力波，其波長 λ 有 7.5、15、20 公分等不同模擬條件，其物理區間之長寬高為 $4\lambda \times 2\lambda \times 0.8\lambda$ ，而網格數則依照波長而有所不同，波長 7.5 公分為 $512 \times 256 \times 129$ ，波長 15 公分為 $576 \times 288 \times 144$ ，波長 20 公分為 $768 \times 384 \times 192$ 。波浪尖銳度為 $ak = 0.25$ ，其中 a 為重力波之振幅，而 $k = 2\pi/\lambda$ ，即波數 (wavenumber)。

數值模式採用直接數值模擬 (direct numerical simulation)，即直接求解 Navier-Stokes 方程式，於過程中未使用任何紊流模式，藉此參數化尺度小於離散網格的流場運動。而模擬的水面為非線性運動之自由液面，底部則為自由滑移邊界 (free slip boundary)。由於使用偽頻譜法 (pseudo-spectral method) 來對控制方程式中水平方向之微分項作近似，故水體在水平方向上之邊界為週期條件，而垂直方向則是使用了二階精確度之有限差分法來作近似。由於所模擬的水體為不可壓縮流，故求解流場壓力之 Poisson 方程式。而在時間的積分上，則是採用了二階精確度的低儲存量 (low-storage) 之 Runge-Kutta 法。

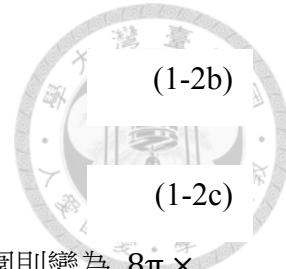
由於所模擬的流場為一包含自由液面運動的非穩態流場，故使用坐標轉換以利求解：

$$\zeta(x, y, z, t) = \frac{z + h}{\eta(x, y, t) + h} , \quad (1-1)$$

如上式將包含自由液面的垂直方向之 z 坐標，其區間從 η 至 h ，轉換為 0 至 1 之間的 ζ 坐標，成為一時間相依之坐標系統，藉此將原先水面上之表面波形狀的物理區間 (x, y, z) 轉換至規則的計算區間 (ξ, ψ, ζ) ，如圖 1.1 所示。而在最後所輸出的三維流場資料則是計算區間內網格點的物理量資料。

另外，模式中為了計算方便，於計算與輸出時皆以特徵長度 \mathcal{L} 、特徵時間 \mathcal{T} 、特徵速度 u 來對長度、時間、速度等物理量作無因次之處理，其定義則分別為：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} , \quad (1-2a)$$



(1-2b)

(1-2c)

故本研究皆以無因次化之物理量作探討，而上述模擬流場之範圍則變為 $8\pi \times 4\pi \times 1.6\pi$ 。另外，模式於輸出時亦使用重力波之線性週期 T_0 來無因次化時間之度量，即

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} , \quad (1-3)$$

如 $t = 5T_0$ 則代表歷經 5 個重力波之週期的時間，相較於直接表示時間更具實際意義。

模式所模擬的時間為 $30T_0$ (約為 6.4 s)。由於前 3 個 T_0 之流場尚在發展，處於相當紊亂的狀態，而約在 $t = 5T_0$ 之後流場才漸漸發展出紊流結構，並趨於穩定，故本研究所採用模式數據中時間之選取，則以 $t = 5T_0$ 代表流場剛開始發展，而 $t = 30T_0$ 為流場發展穩定之代表，並針對此二時間點作分析與探討。

由於流場之特性，可將物理量（如速度）分解為平均值、波浪相關之部分以及擾動部分，以速度為例如

$$\mathbf{u}(\xi, \psi, \zeta, t) = \bar{\mathbf{u}}(\zeta, t) + \tilde{\mathbf{u}}(\xi, \zeta, t) + \mathbf{u}'(\xi, \psi, \zeta, t) , \quad (1-4)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\zeta, t) = \langle \mathbf{u}(\xi, \psi, \zeta, t) \rangle(\zeta, t) , \quad (1-5)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi, \zeta, t) = \langle \mathbf{u}(\xi, \psi, \zeta, t) \rangle_{\psi}(\xi, \zeta, t) - \bar{\mathbf{u}}(\zeta, t) , \quad (1-6)$$

$$\mathbf{u}'(\xi, \psi, \zeta, t) = \mathbf{u}(\xi, \psi, \zeta, t) - \langle \mathbf{u}(\xi, \psi, \zeta, t) \rangle_{\psi}(\xi, \zeta, t) , \quad (1-7)$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ， $\bar{\mathbf{u}}$ 為平均值，而 $\langle \mathbf{u} \rangle$ 表示於計算區間之水平面取平均； $\tilde{\mathbf{u}}$ 為波浪相關之部分，而 $\langle \mathbf{u}(\xi, \psi, \zeta, t) \rangle_{\psi}$ 表示於計算區間對 ψ 方向取平均，即相位平均或跨流向平均， \mathbf{u}' 為速度擾動。將速度分解並以擾動部分作探討，有助於紊流結構之研究。

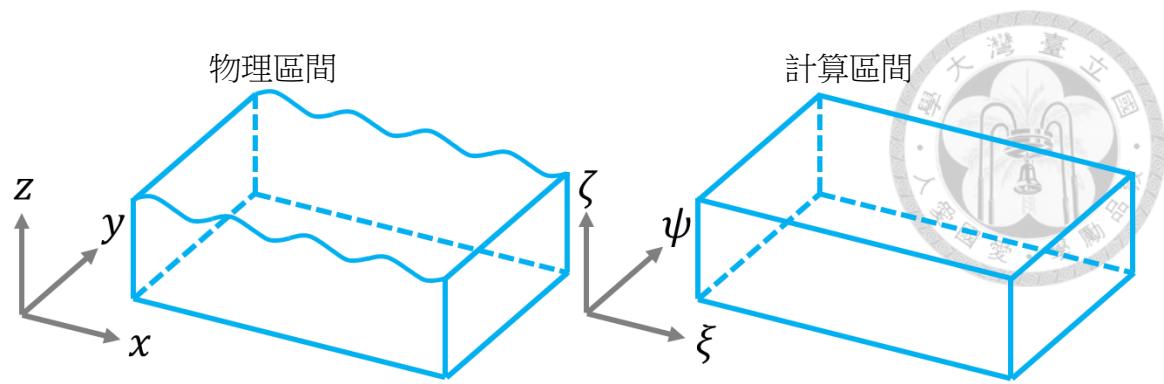


圖 1-1：物理區間（左圖）及計算區間（右圖）之坐標表示示意圖。



1.3 論文架構

如同 1.1 節所述，為求研究自由液面紊流邊界層之水下結構，故於第二章詳細介紹前人於牆面紊流邊界層之研究方法，並應用於本研究之數值模擬資料，進而討論其結果。於 2.1 至 2.3 節為初步分析流場特性，找出溫度、速度及渦度之分布趨勢；而後於 2.4 節以 Moin 和 Kim (1985) [6] 之渦度方向角度方法，分析相關紊流結構之角度分布特性；進而在 2.5 節以渦旋結構辨識之方法，辨識出三維流場中之渦旋結構，並直接觀察而歸納其結構特性；於 2.6 節透過 Kim 和 Moin [8] 之條件平均法，以不同條件作為取樣依據，擷取出欲探討之紊流結構，並加以平均得之具統計意義之紊流結構，進而討論其特性；最後於 2.7 節以渦度傳輸方程式探討渦度隨時間變化之趨勢，藉此說明其他方式所得之結果。第三章則是介紹 Craik 和 Leibovich 提出之穩定性分析，並將其結果與本研究之數值模擬資料作比較，說明造成條痕之水下結構即為朗繆爾環流之影響。第四章則是總結第二、三章之分析結果。

第二章、 流場結構分析



在數值模擬資料中，由於數值模擬是一時間序列的資料，挑選固定時間間隔，如時間為 $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30T_0$ ，作為觀察之時間點，本研究之數值模擬資料包含三種波長，7.5cm、15cm、20cm，主要針對 7.5cm 之結果作分析及探討。而物理量由於邊界為週期條件的關係，並將波浪之特性視為跨流向上無變化，故可以將物理量分為三部分：平均值、波浪與擾動部分。為了方便觀察紊流結構，故針對擾動部分作探討。

在波長為 7.5cm 於接近自由液面之溫度分布如圖 2-1 (d) 至圖 2-6 (d)，其時間分別為 $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30T_0$ ，由此圖可以發現，在較高溫之自由液面出現沿流向條狀之低溫分布，其朝沿流向沿伸且連續不間斷，故稱低溫條痕。接近自由液面之沿流向速度擾動分布如圖 2-1 (a) 至圖 2-6 (a)，其分布特性恰與溫度相反，於低溫條痕處之沿流向速度擾動為正值，可視為低溫快速條痕。由圖 2-1 (b) 至圖 2-6 (b) 之跨流向速度擾動分布可發現與低溫條痕有關，於低溫條痕之 $+y$ 軸方向為跨流向速度擾動之負值，而於 $-y$ 軸方向為跨流向速度擾動之正值。圖 2-1 (c) 至圖 2-6 (c) 為接近自由液面之垂直向速度擾動分布，由此圖無法得知與低溫條痕之相關性。圖 2-13 至圖 2-24 與圖 2-25 至圖 2-36 之波長分別為 15cm 與 20cm 之結果，其分布特性與波長 7.5cm 之結果相似，然而其流場較為紊亂。

欲探究自由液面上低溫條痕結構之特性，除了觀察自由液面之速度場外，亦可由渦度場來觀察水下之流場結構，如圖 2-7 至圖 2-12 為波長 7.5cm，時間分別為 $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30T_0$ 之渦度場等值曲面圖，渦度結構亦呈沿流向條狀分布，與低溫條痕之分布相似，而其隨著時間發展，結構逐漸增強且朝沿流向延伸，而波長 15cm（如圖 2-19 至圖 2-25）及 20cm（如圖 2-31 至圖 2-36）亦有相同之結果。

上述方式皆為直接觀察流場，由於資料為三維紊流流場，不便於觀察與研究，故本章介紹各種方法來分析流場結構。

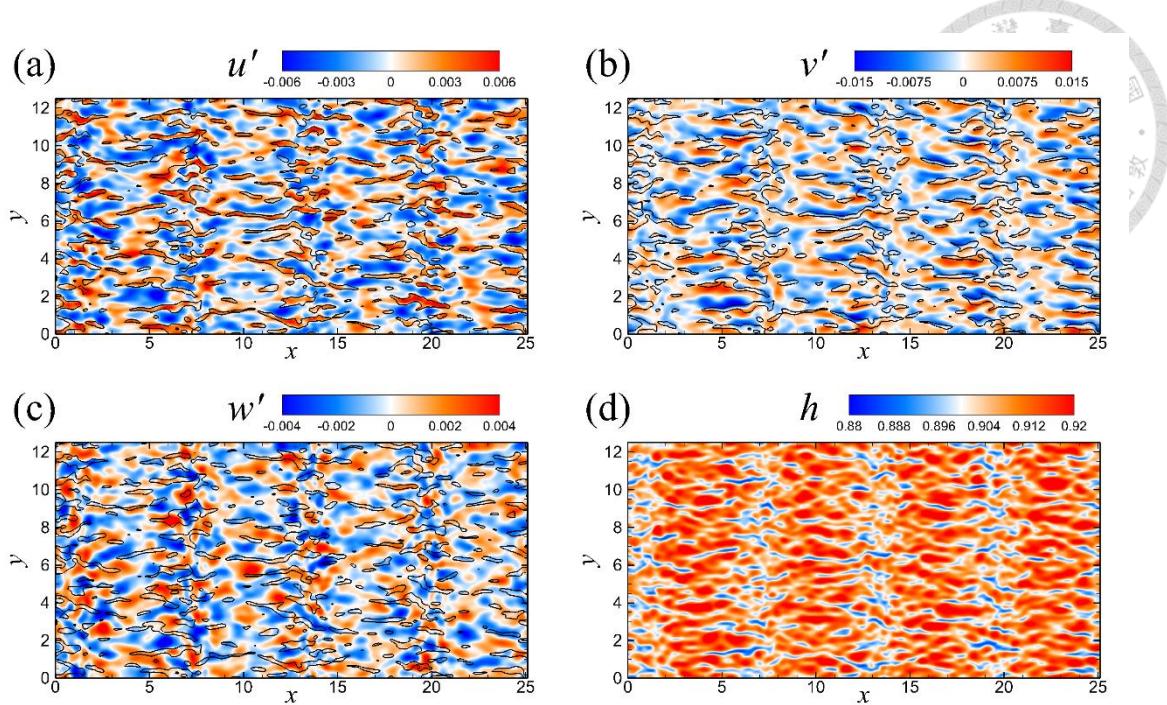


圖 2-1：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

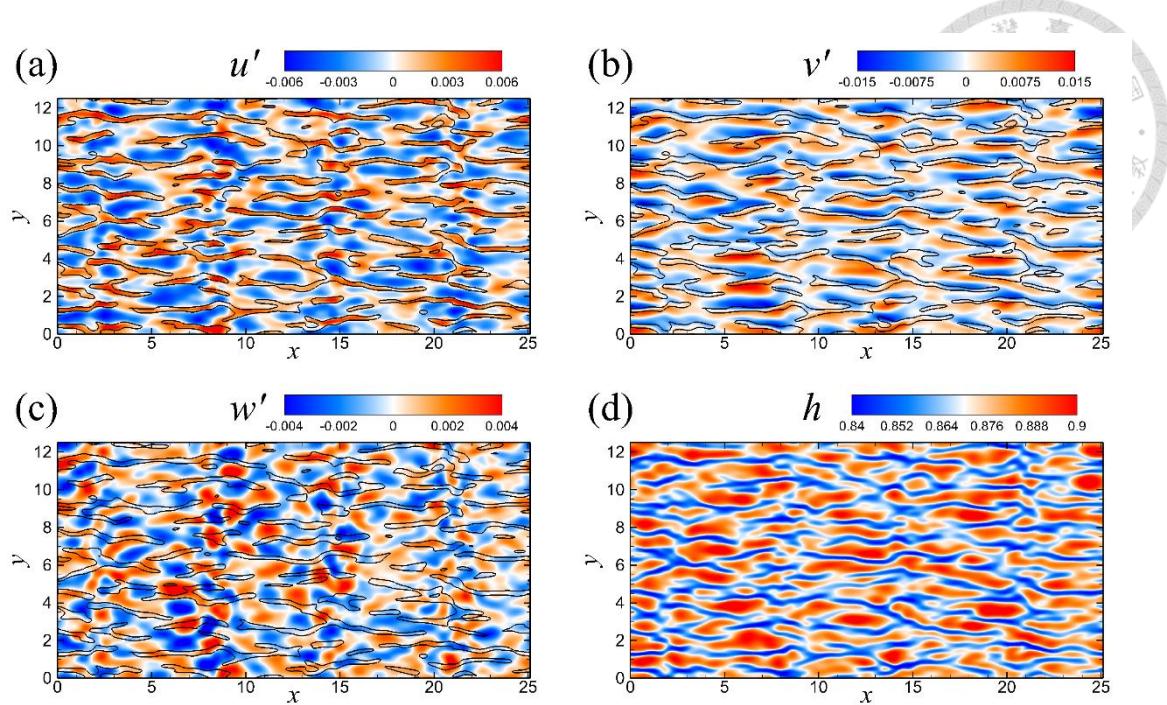


圖 2-2：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.86 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

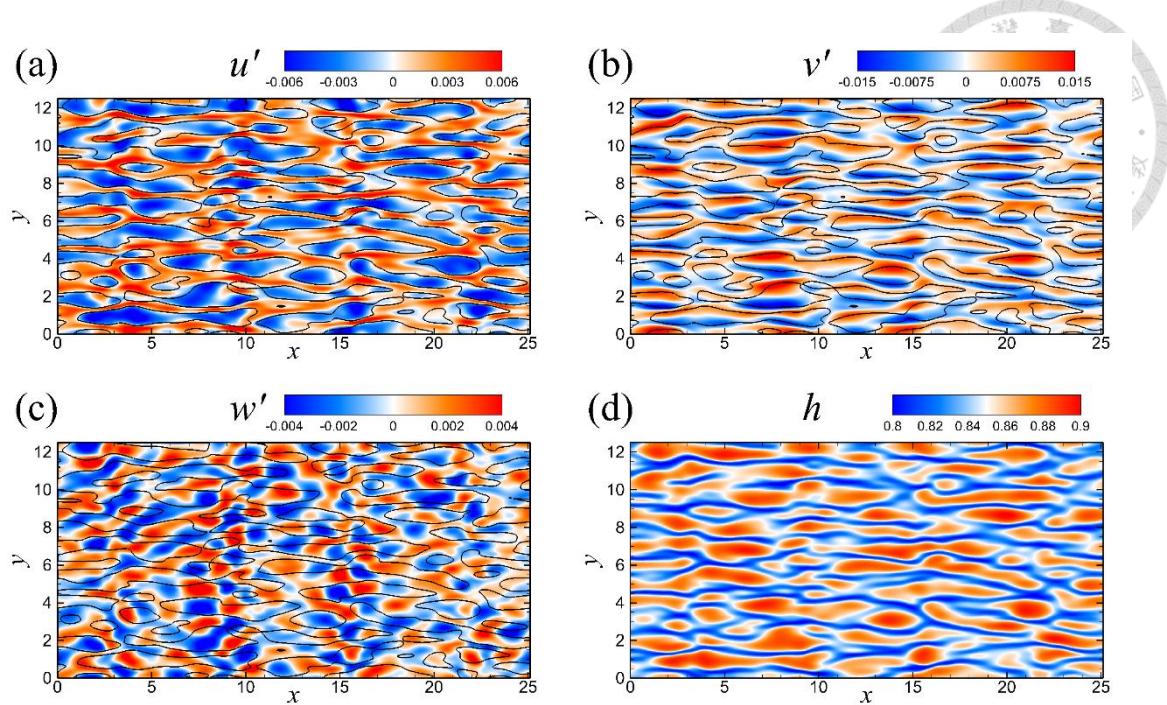


圖 2-3：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.85 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

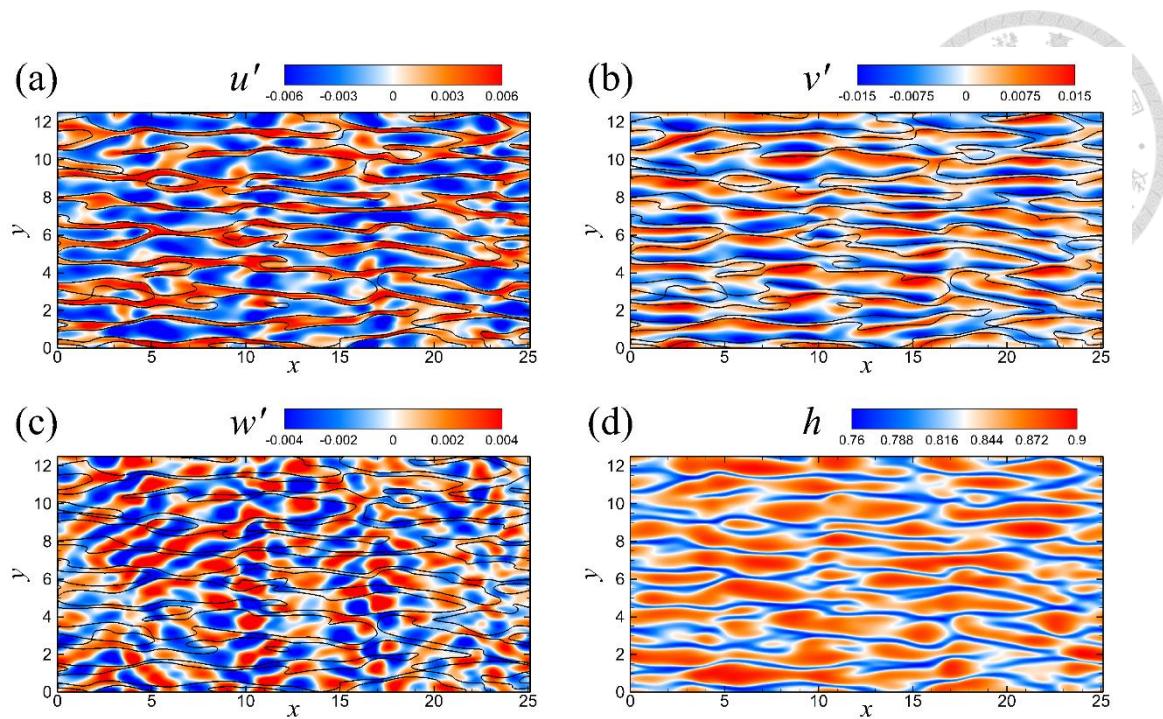


圖 2-4：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.82 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

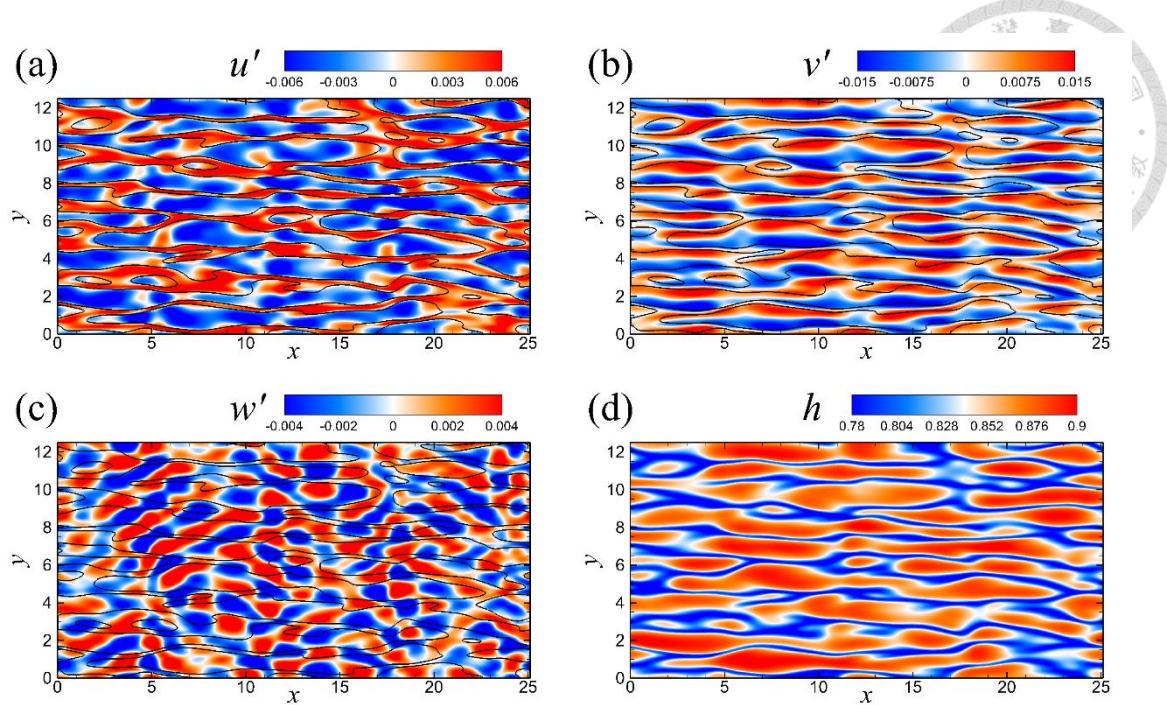


圖 2-5：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.83 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

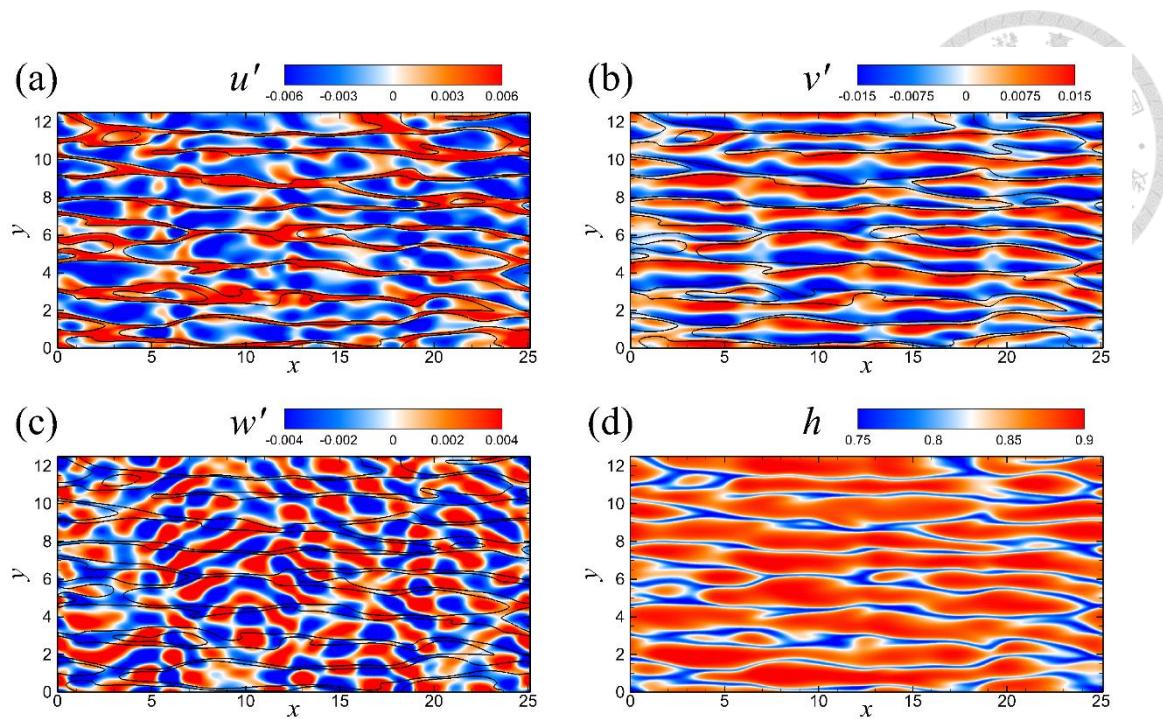


圖 2-6：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.82 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

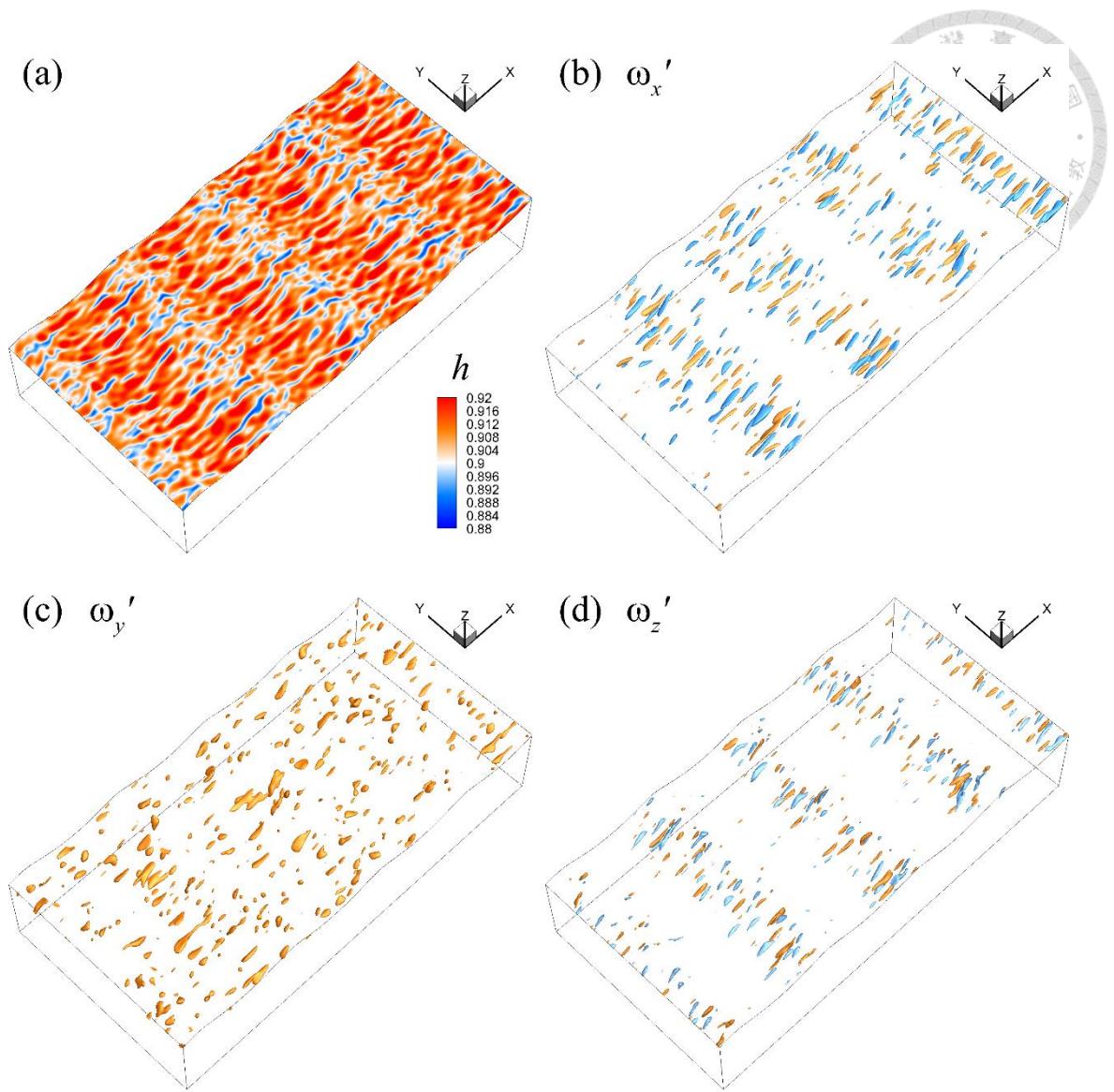


圖 2-7：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02 ，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。

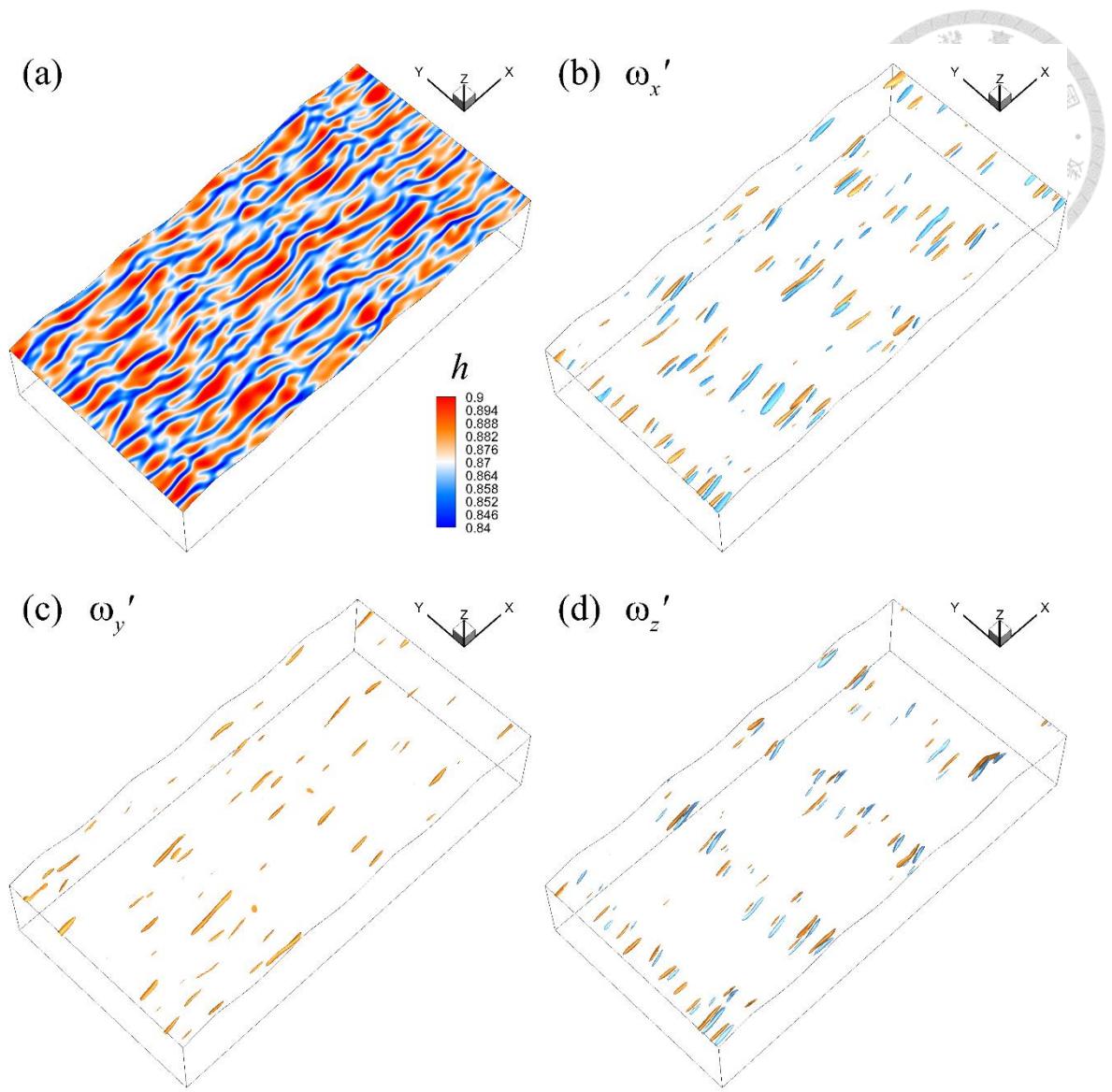


圖 2-8：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02 ，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。

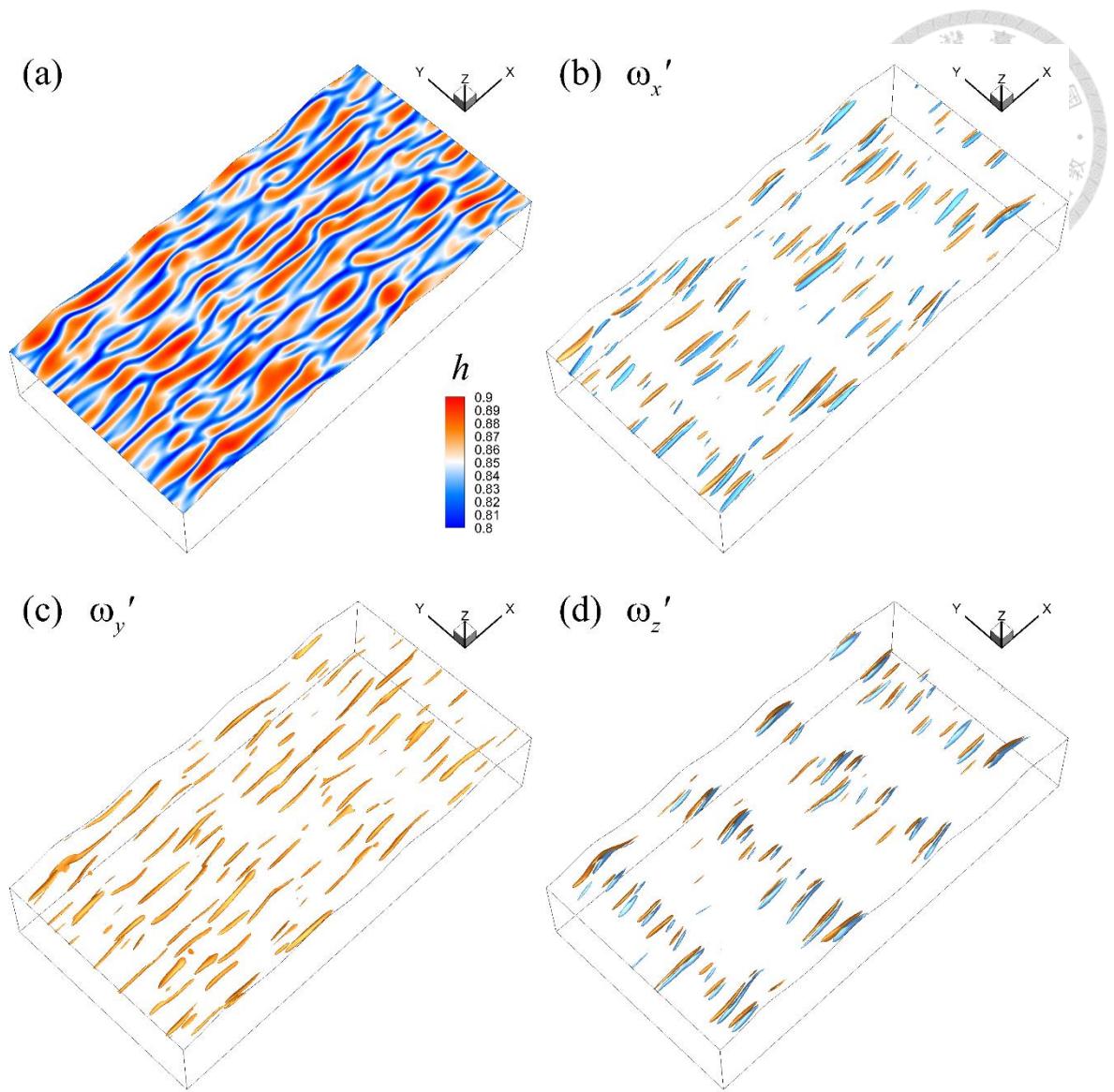


圖 2-9：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。

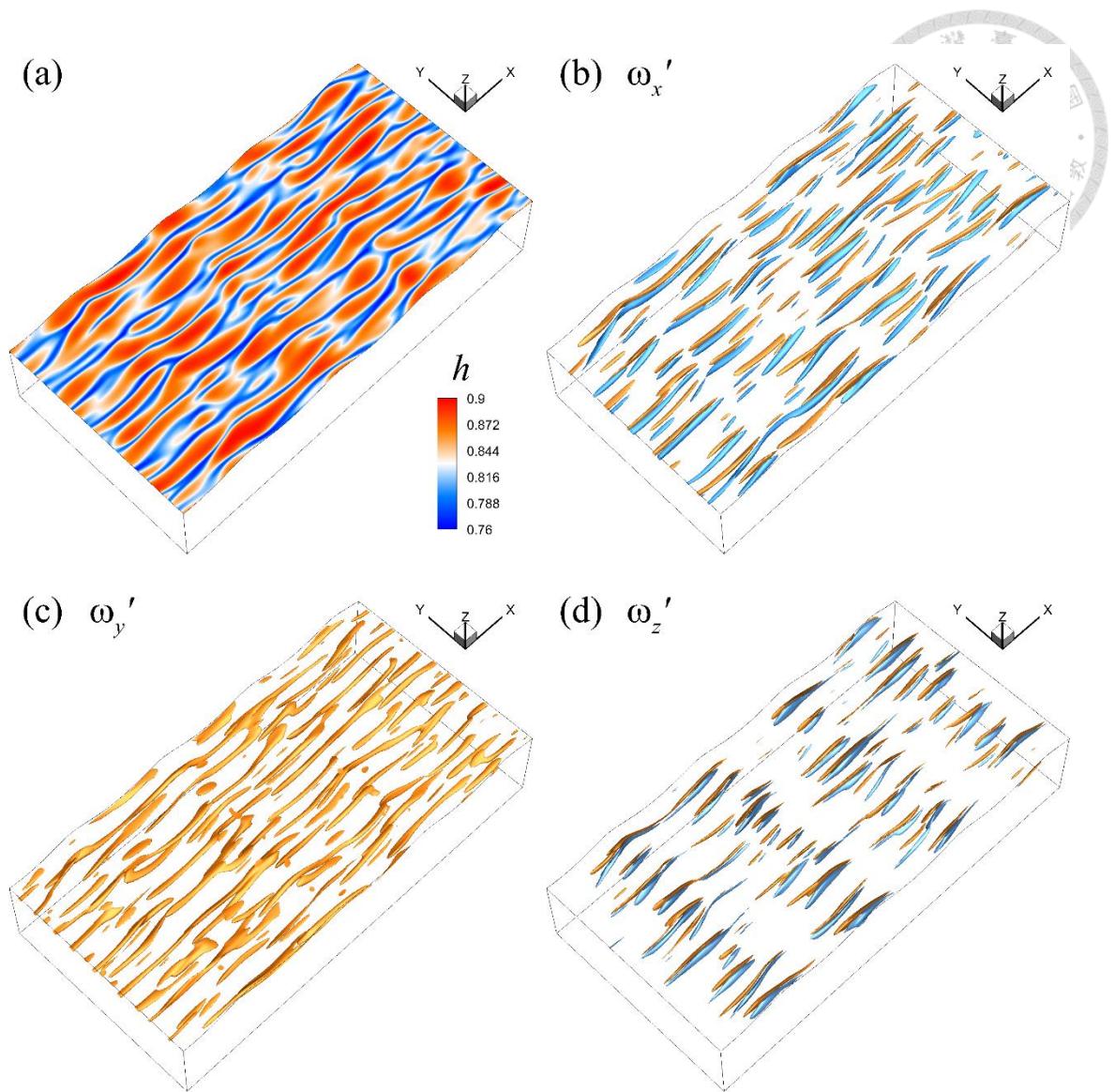


圖 2-10：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。

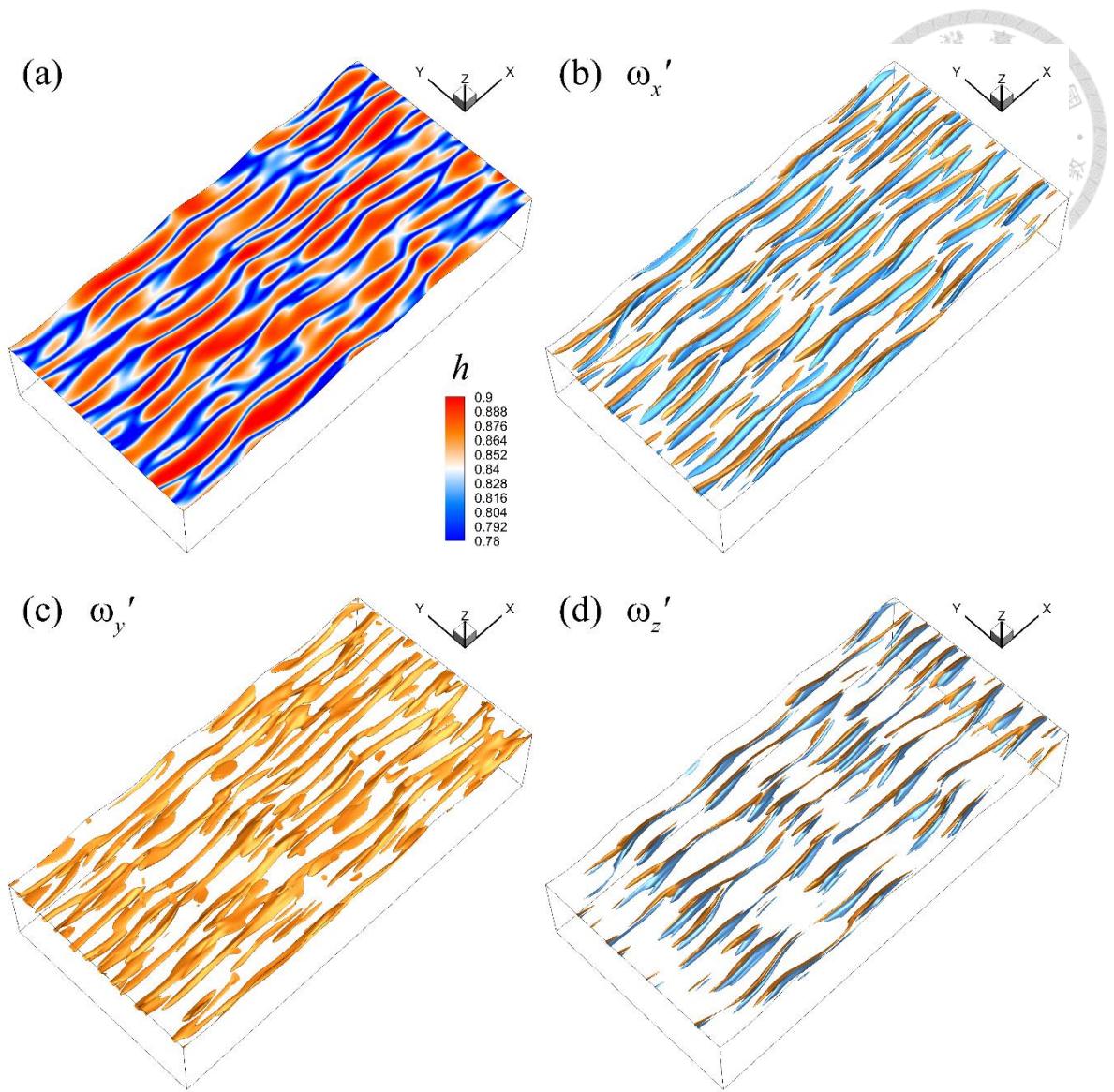


圖 2-11：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。

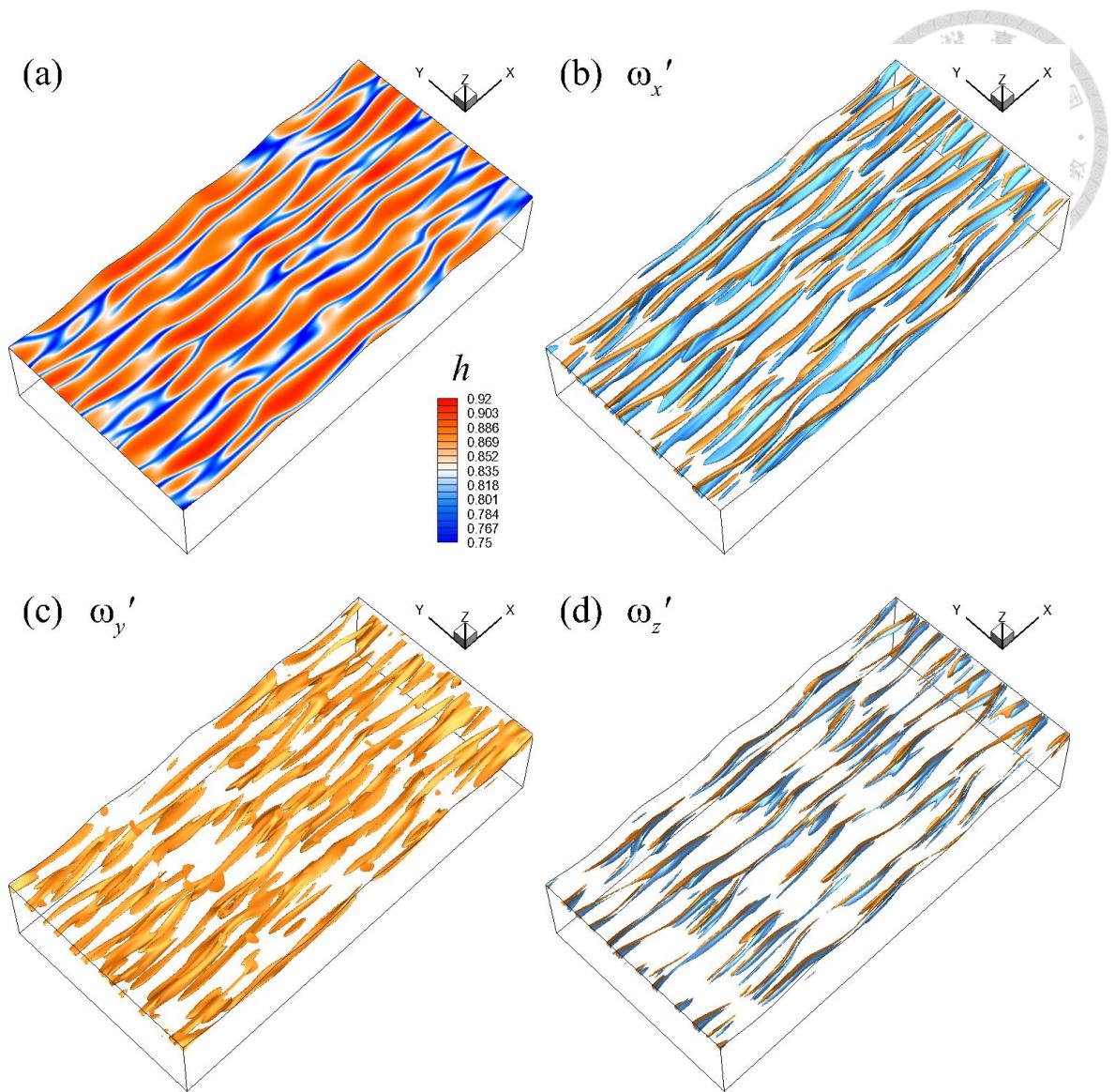


圖 2-12：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.08 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.02，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.05 。

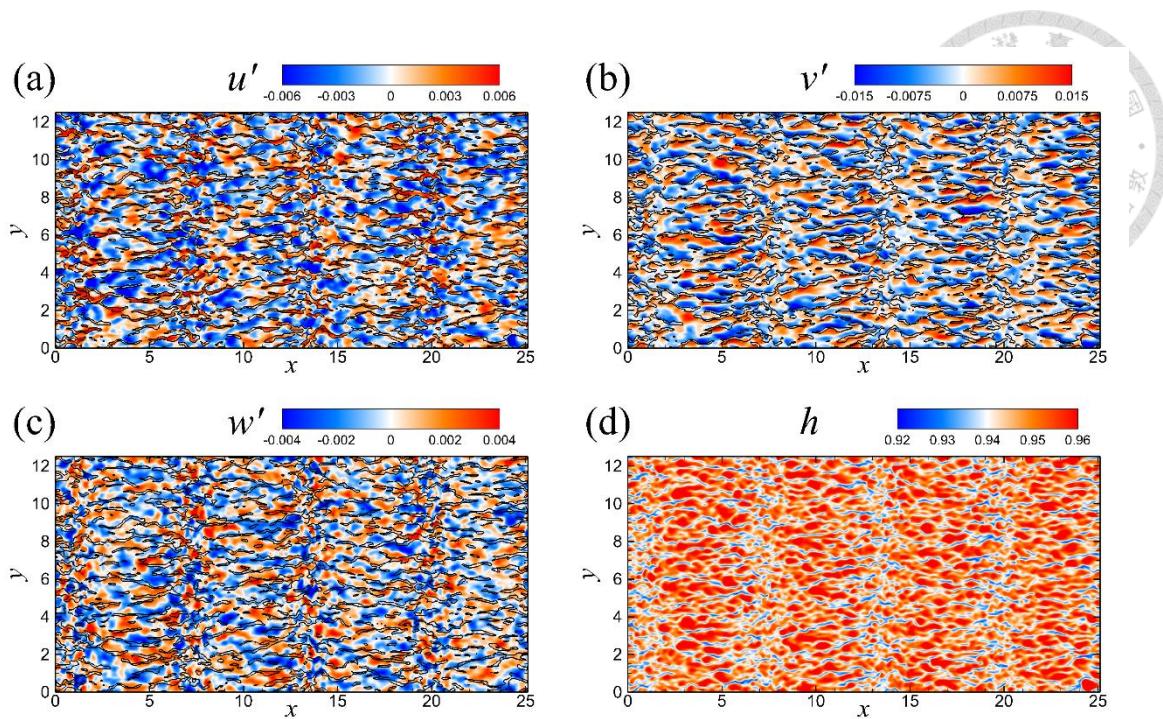


圖 2-13：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.94 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

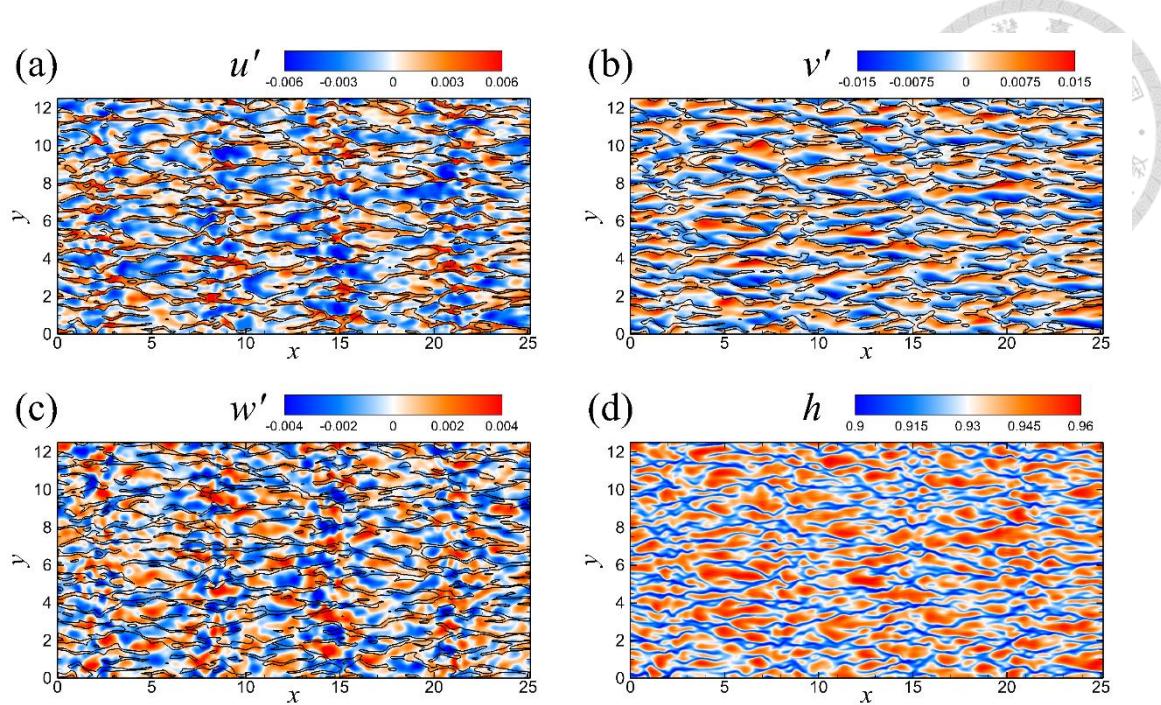


圖 2-14：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

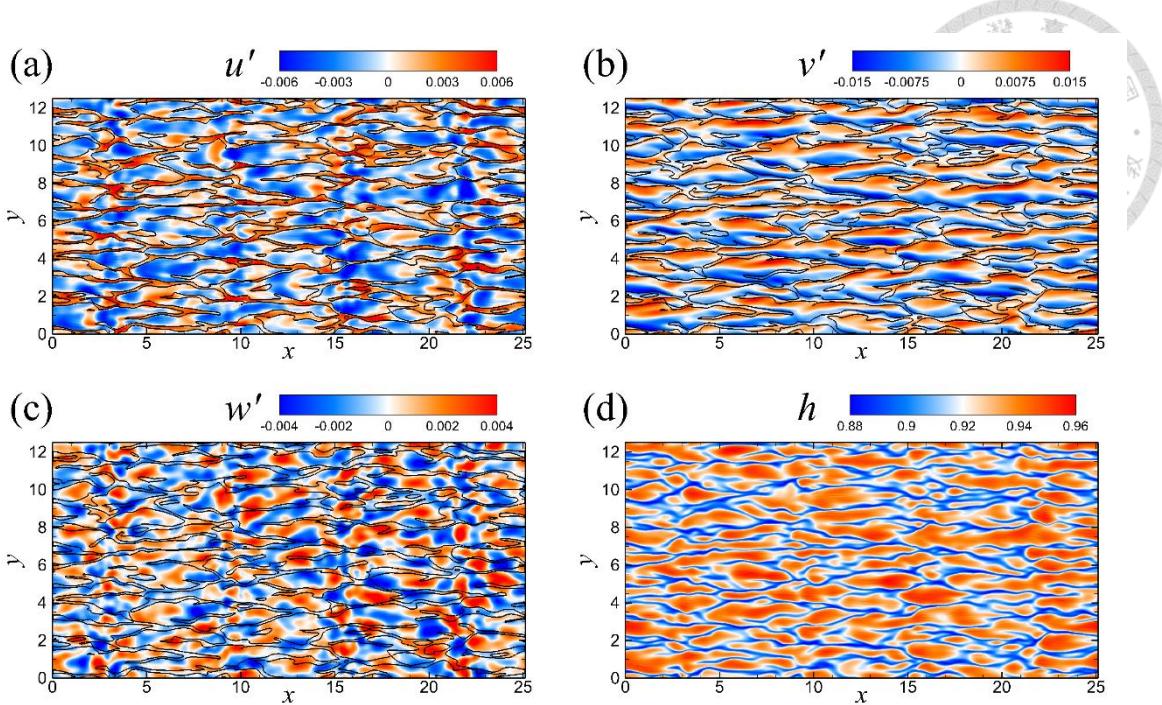


圖 2-15：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.91 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

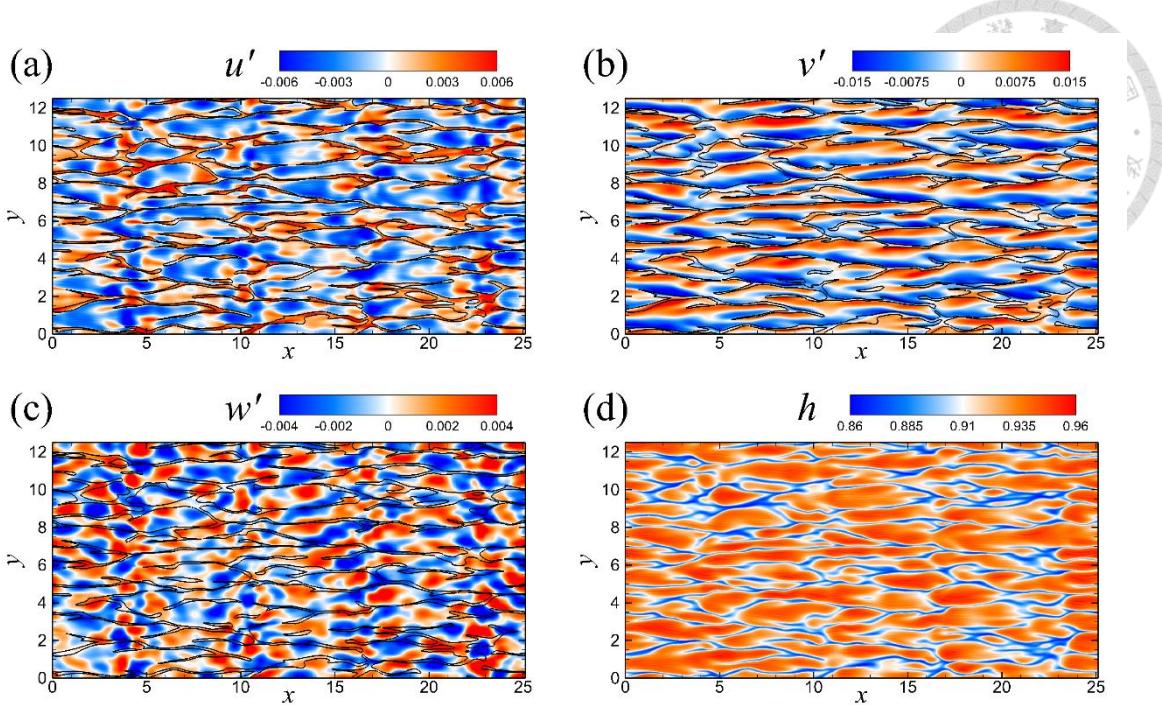


圖 2-16：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

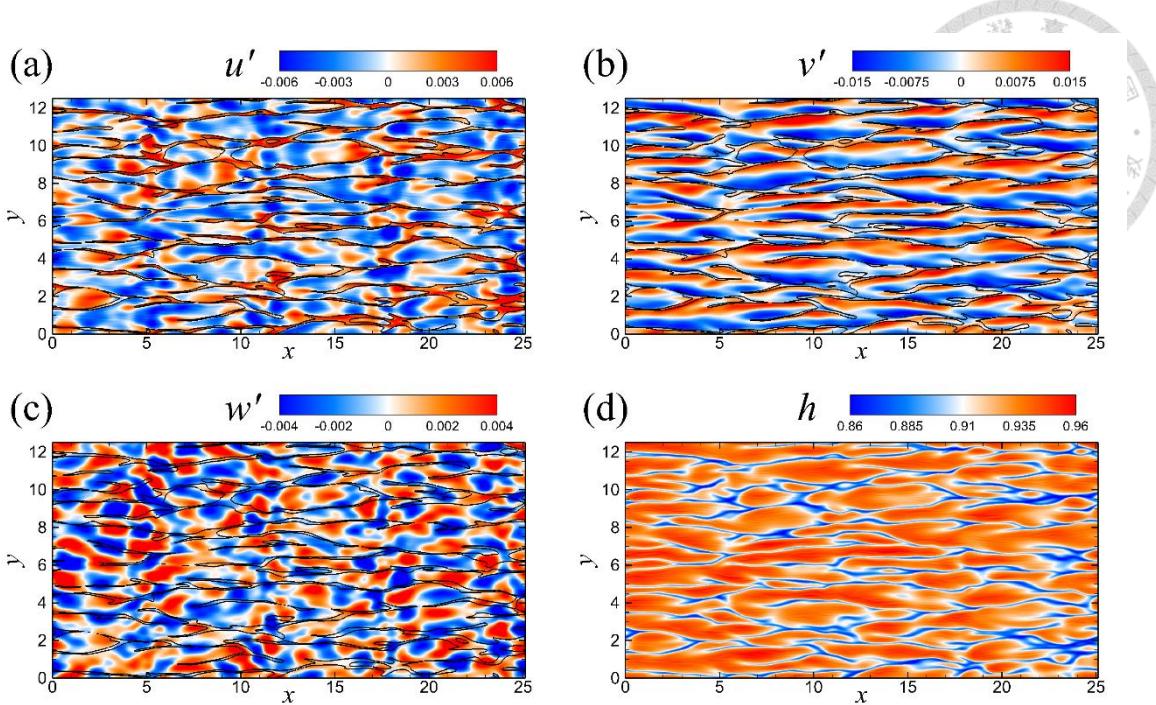


圖 2-17：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

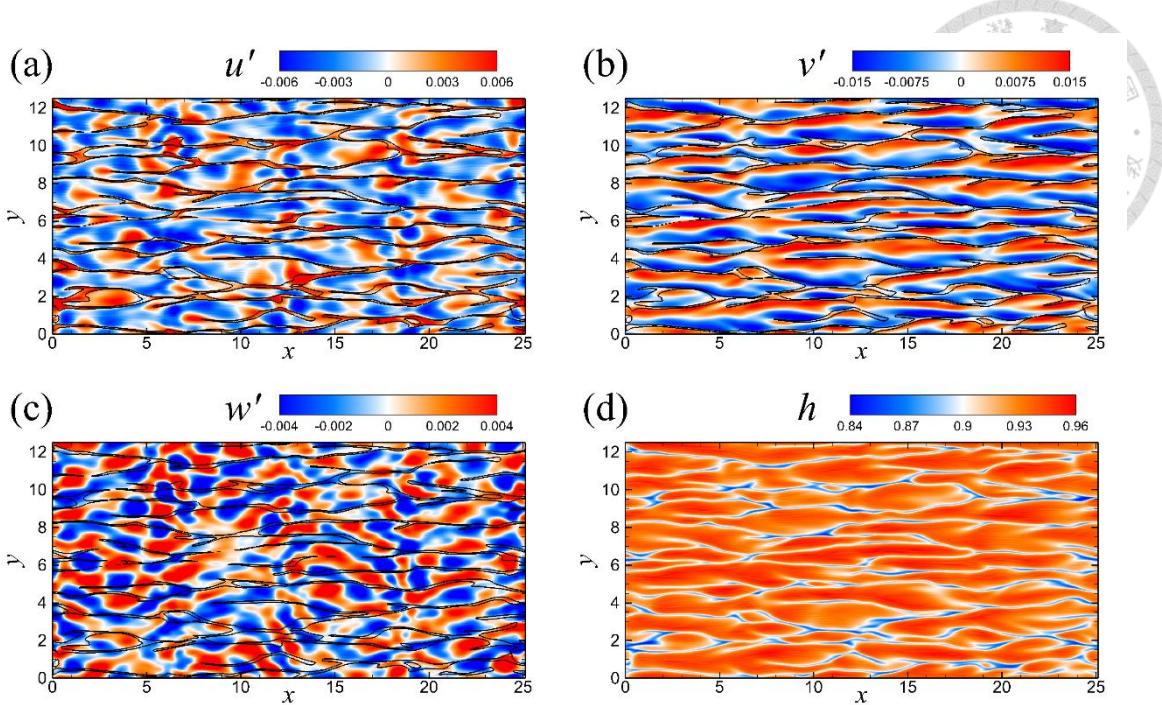


圖 2-18：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.9 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

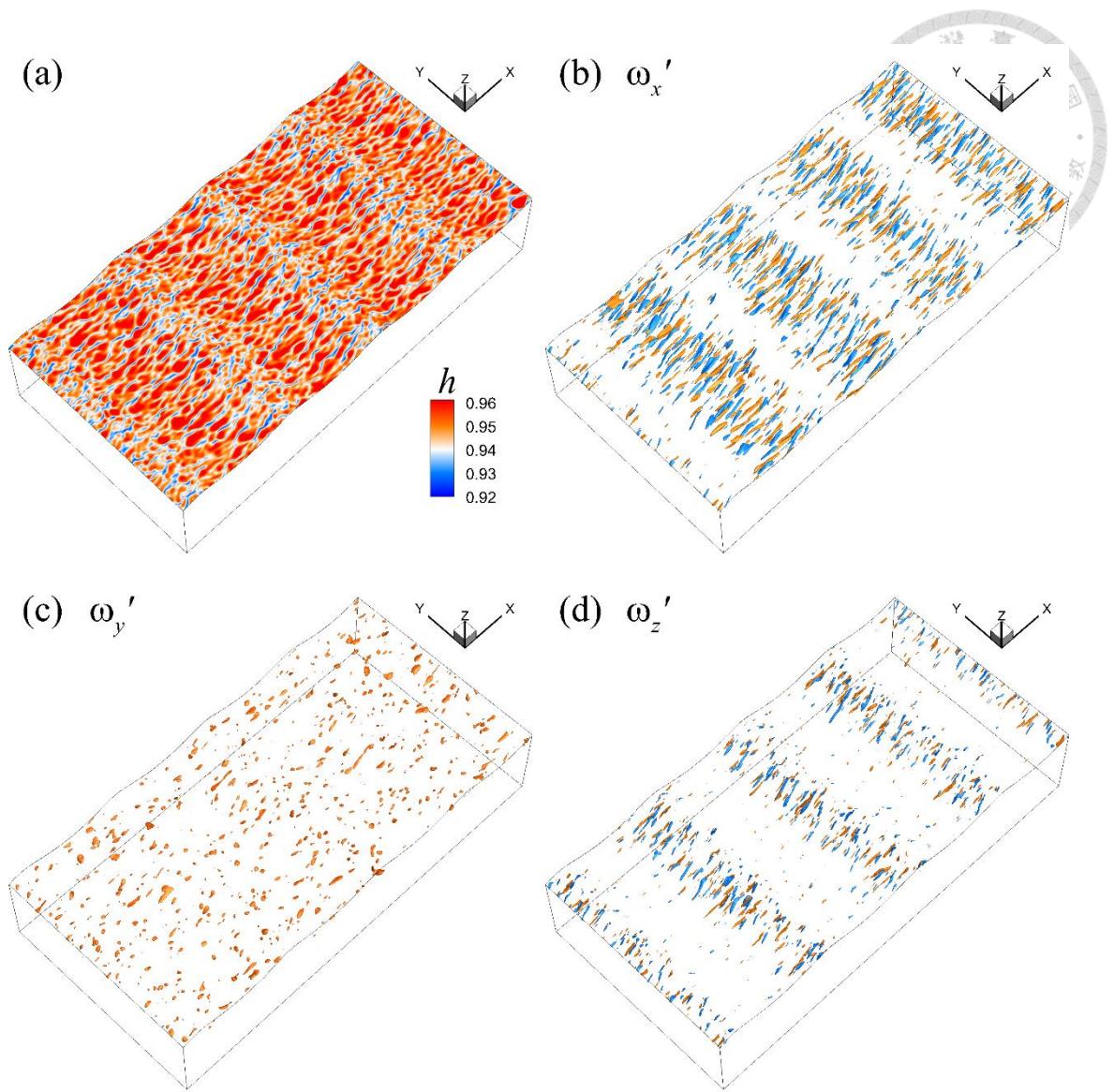


圖 2-19：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.01 。

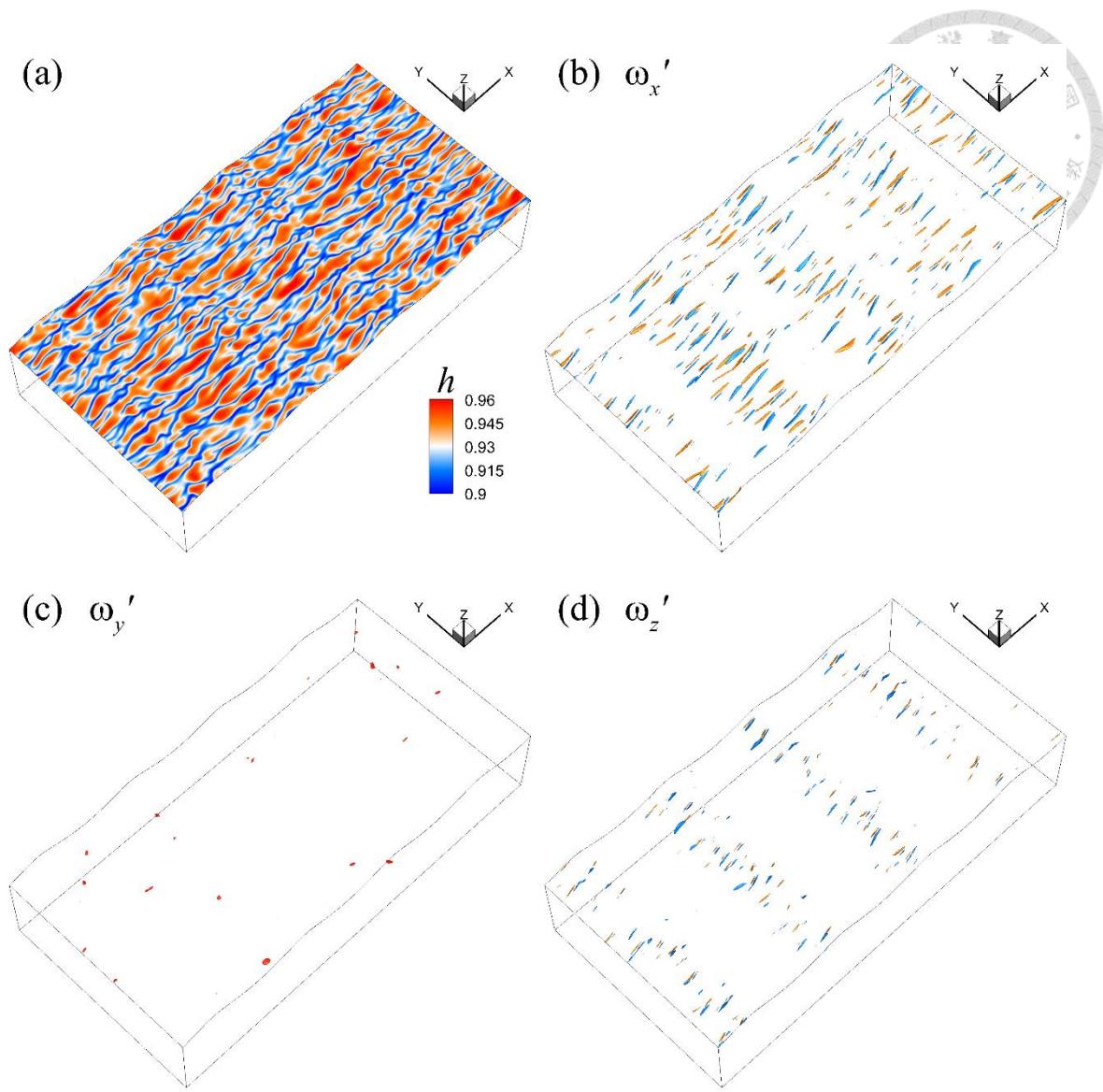


圖 2-20：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

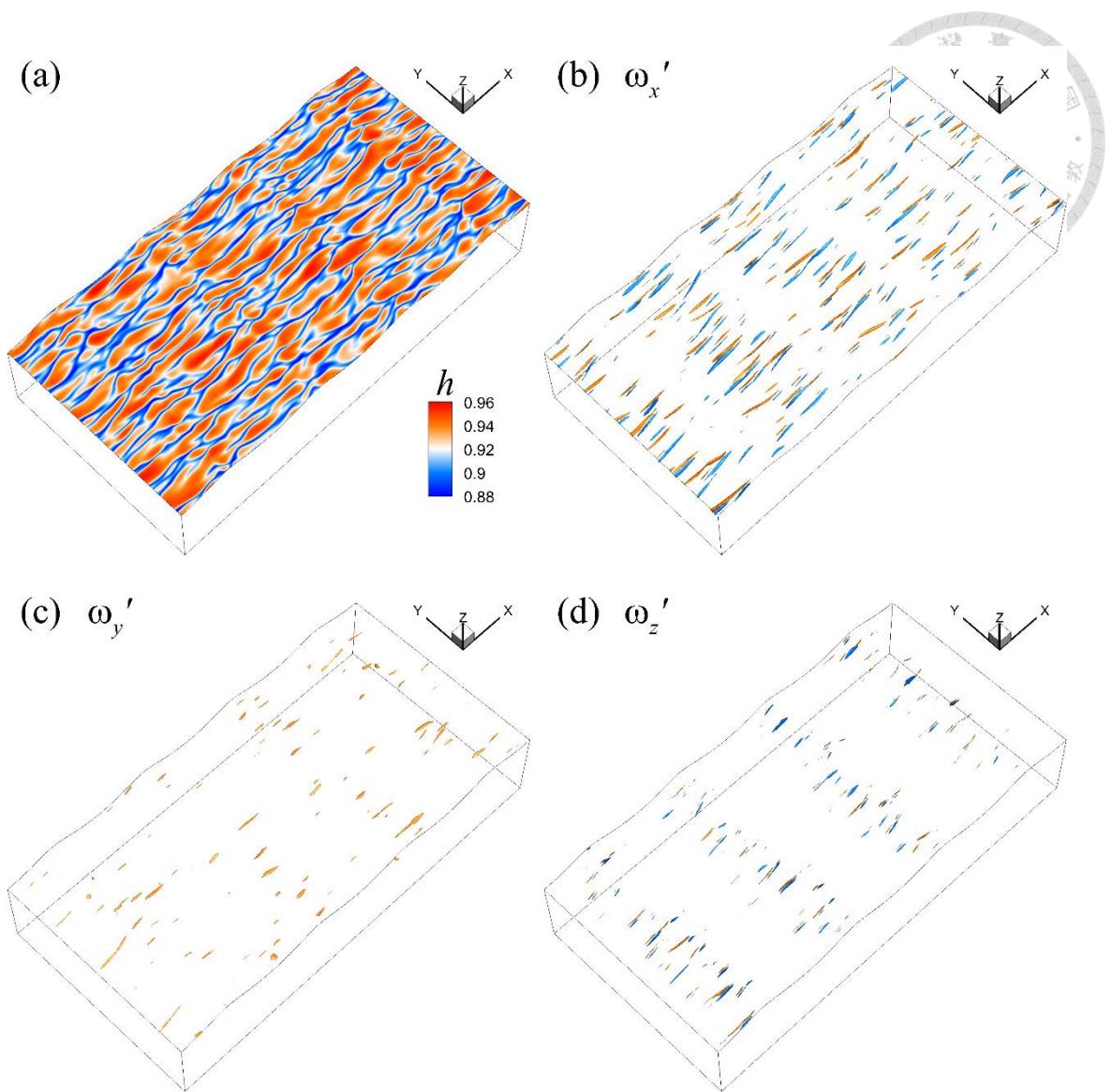


圖 2-21：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.04，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

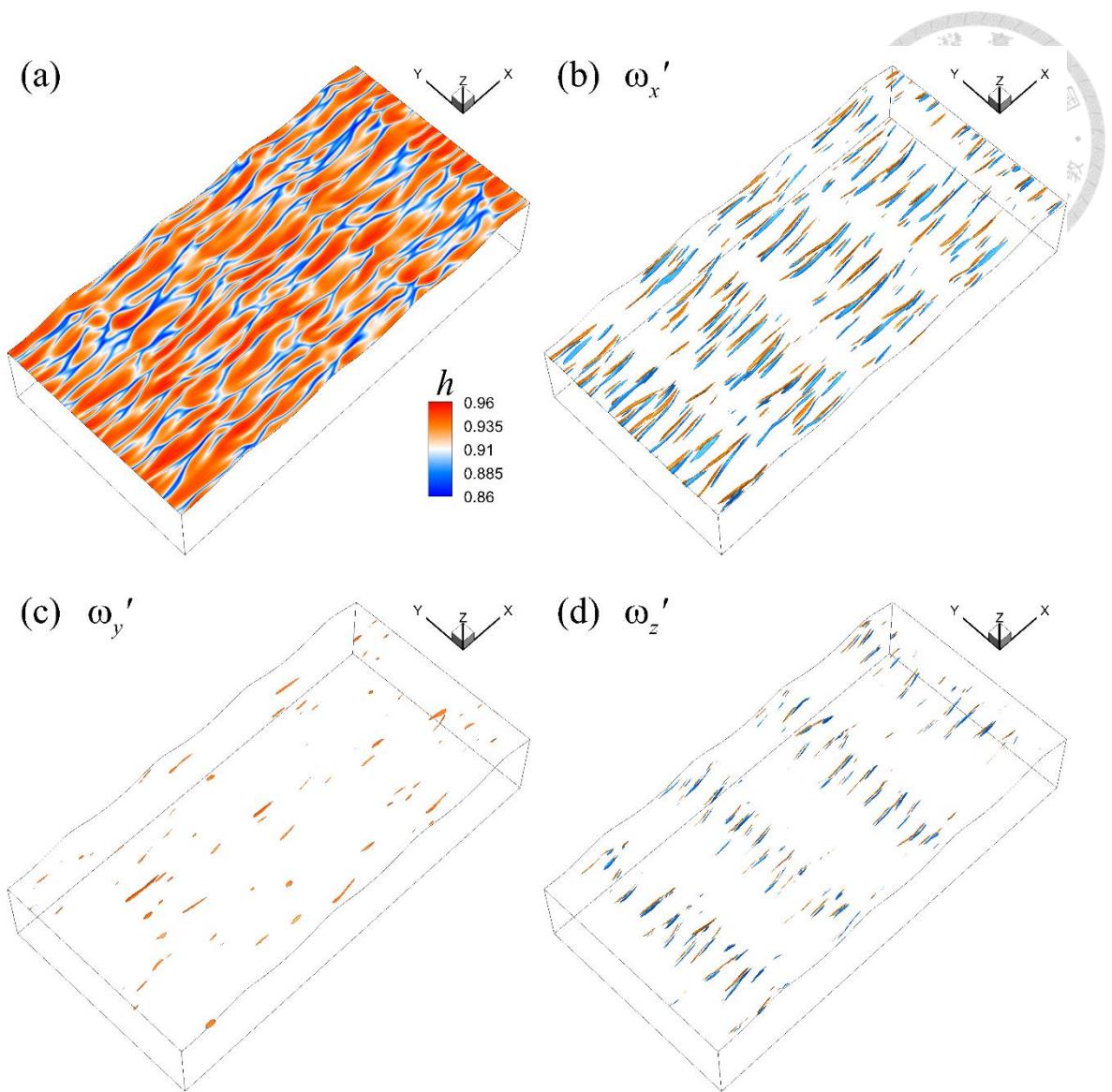


圖 2-22：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

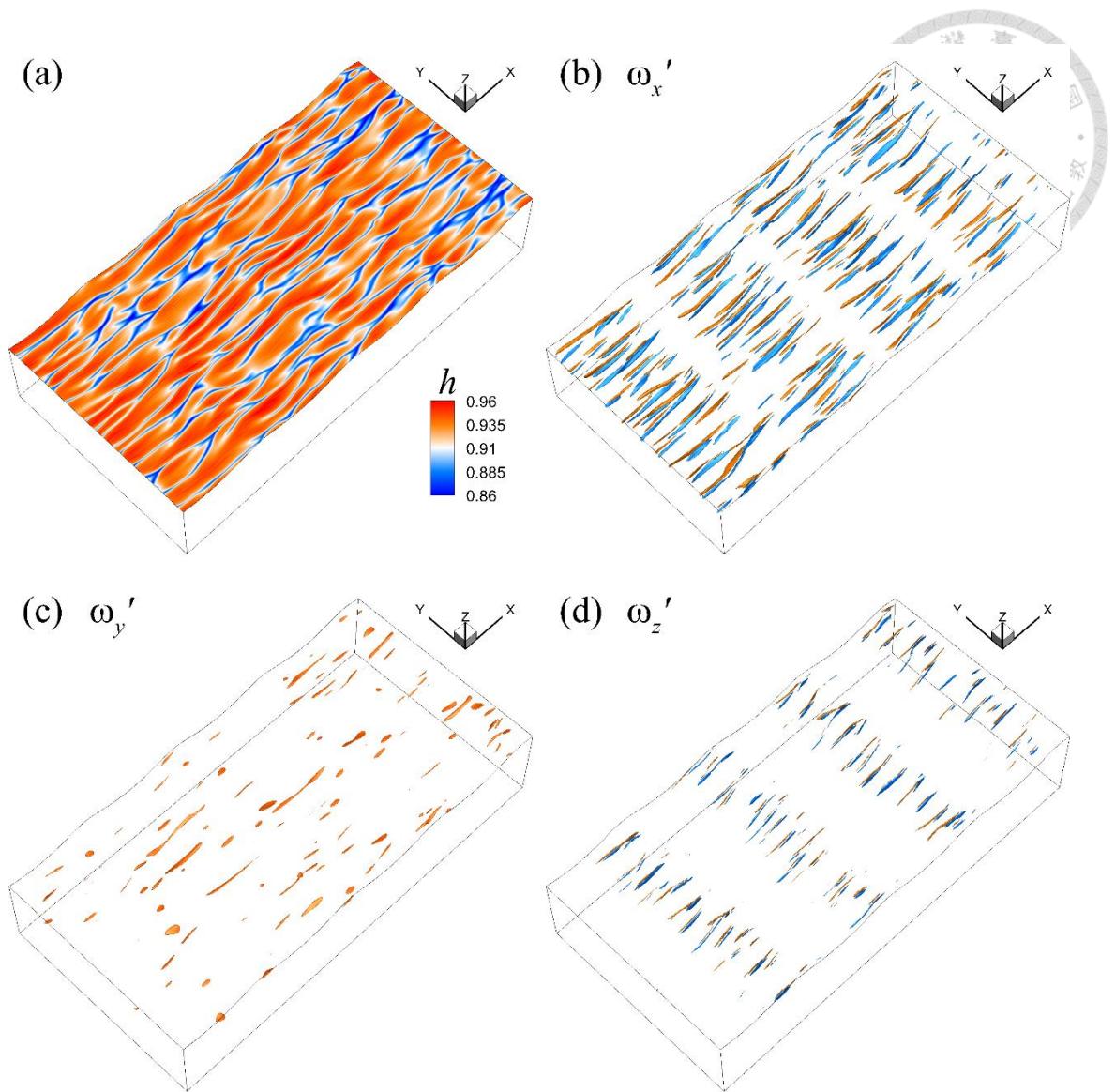


圖 2-23：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.5，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

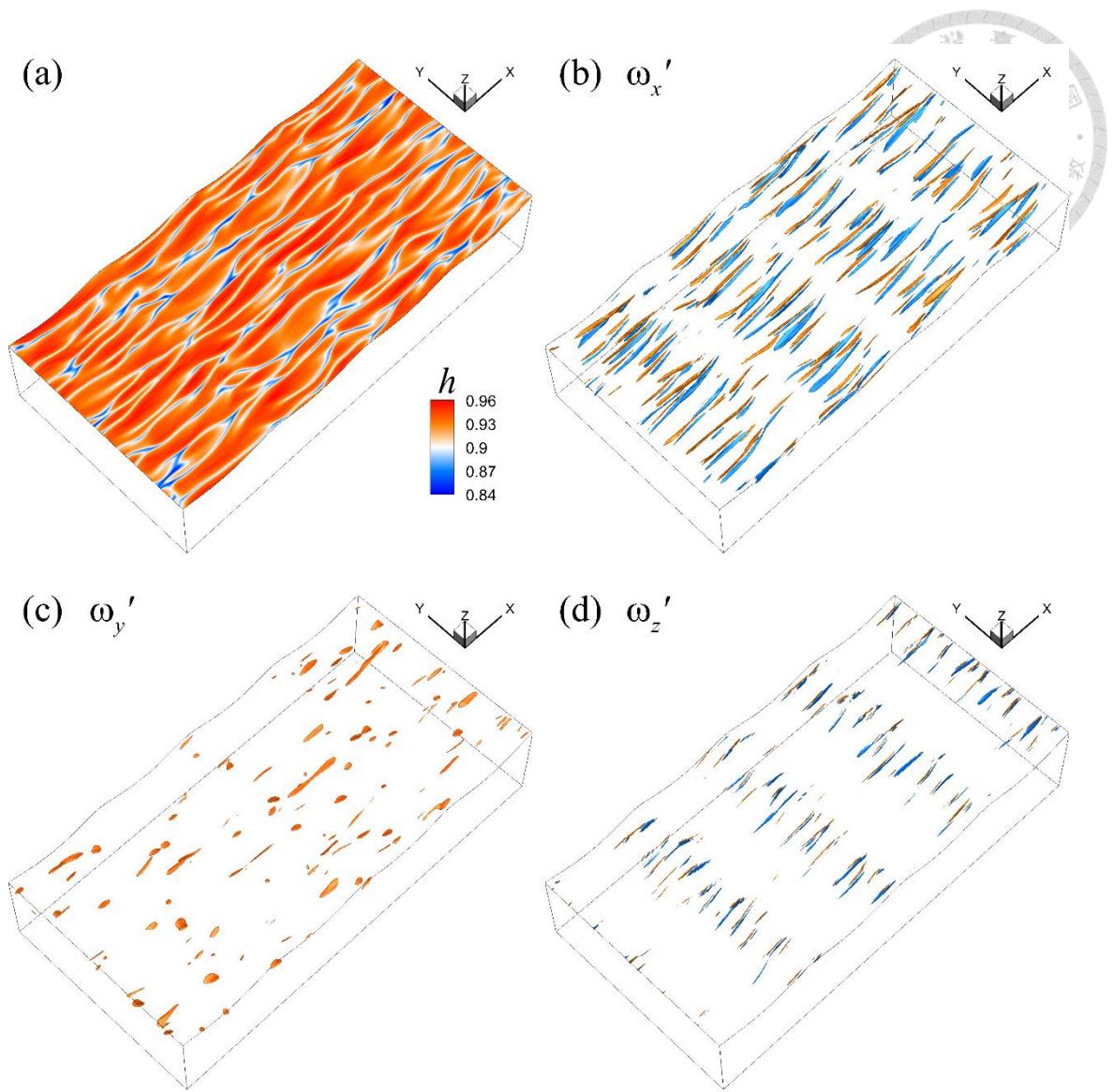


圖 2-24：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

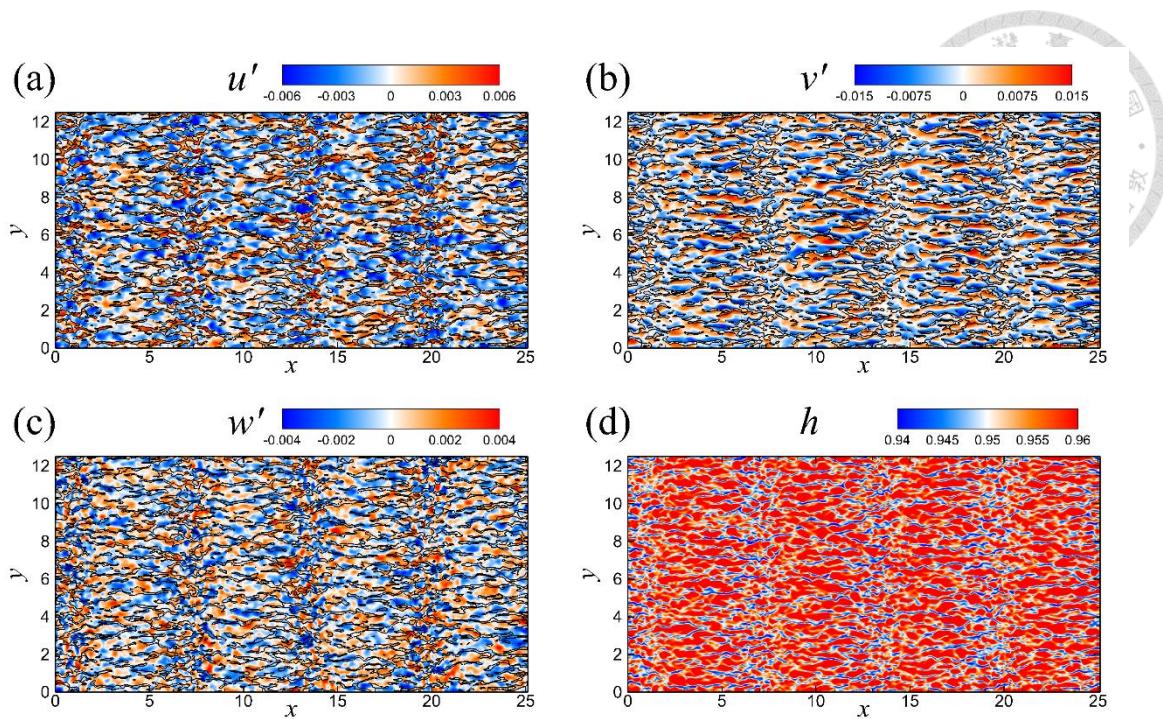


圖 2-25：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.95 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

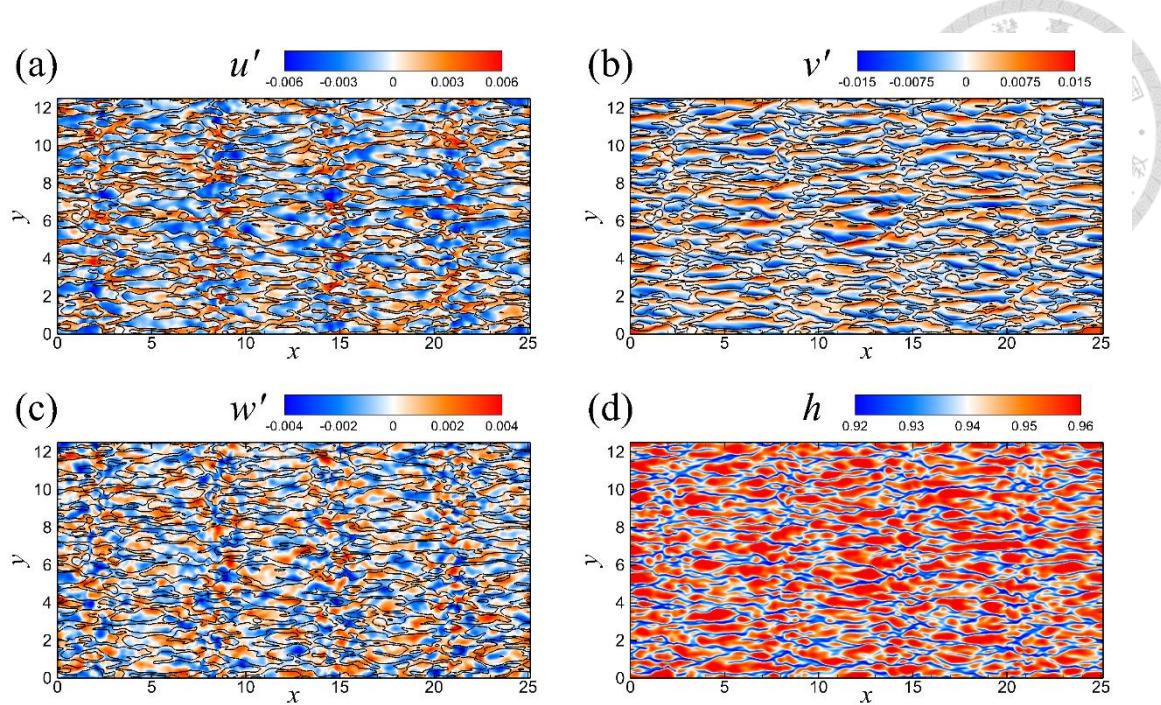


圖 2-26：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.94 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

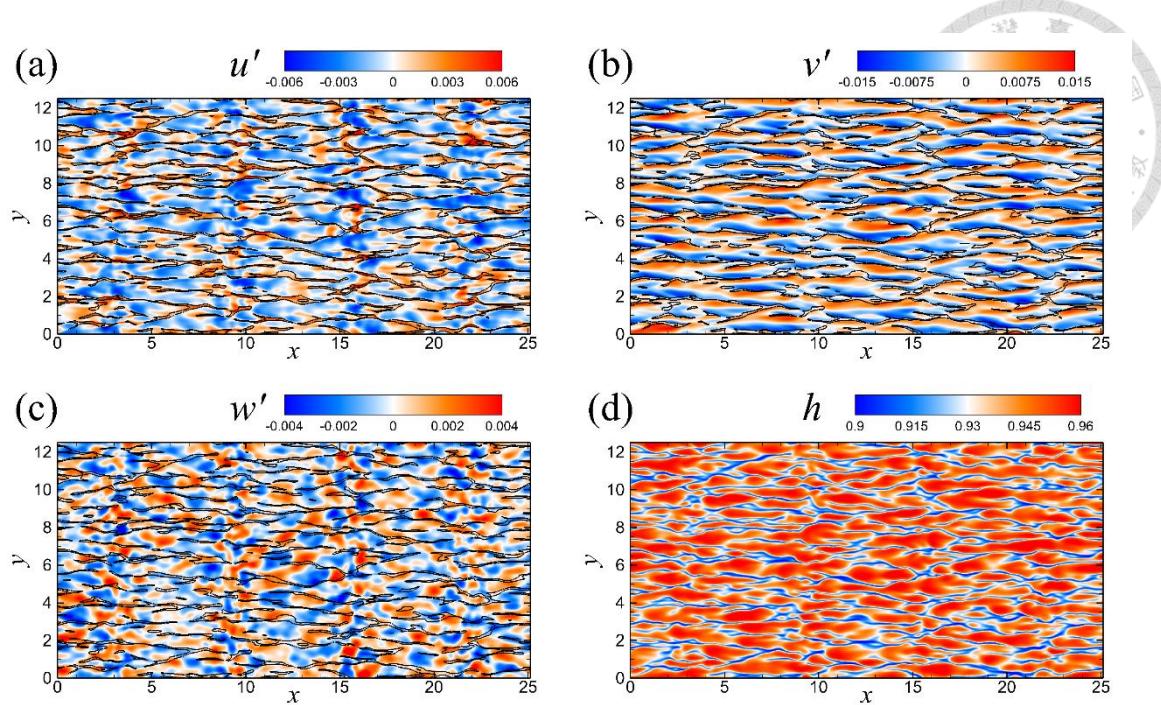


圖 2-27：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

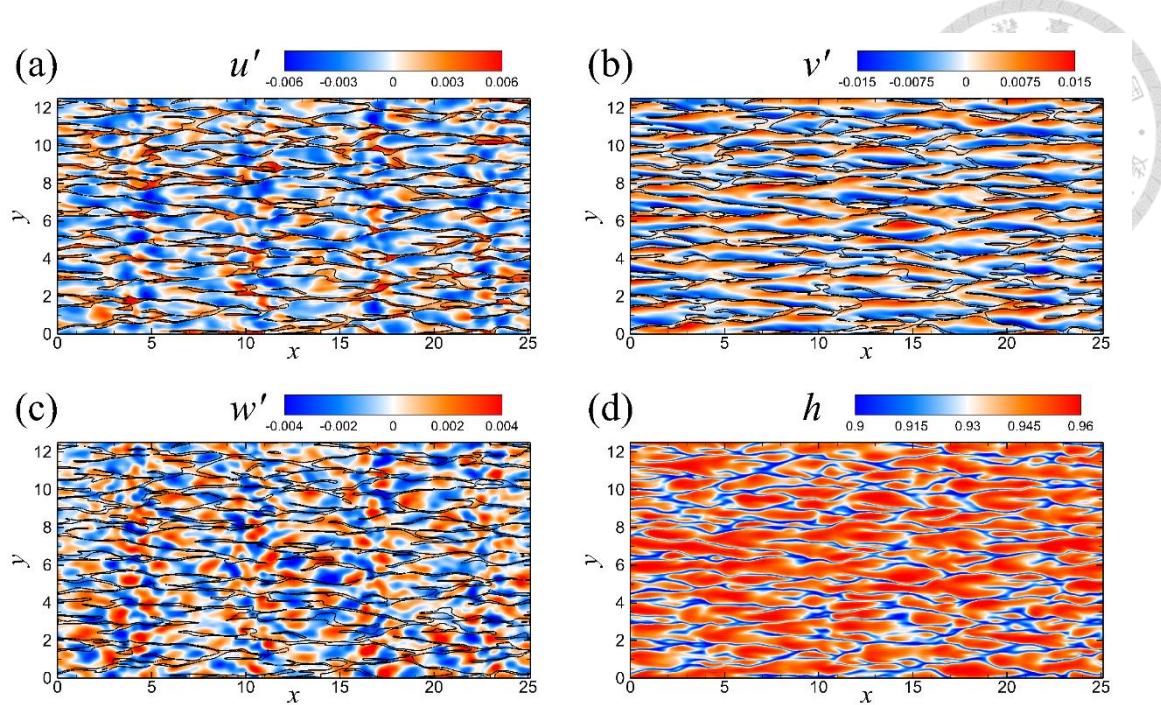


圖 2-28：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

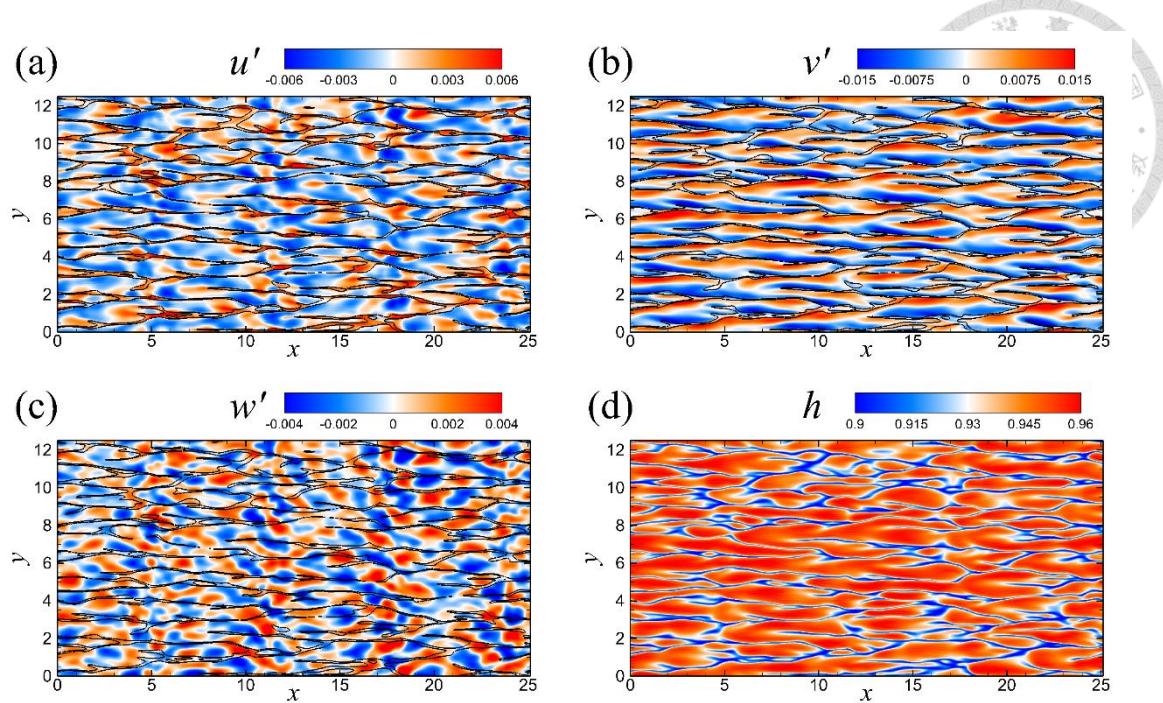


圖 2-29：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

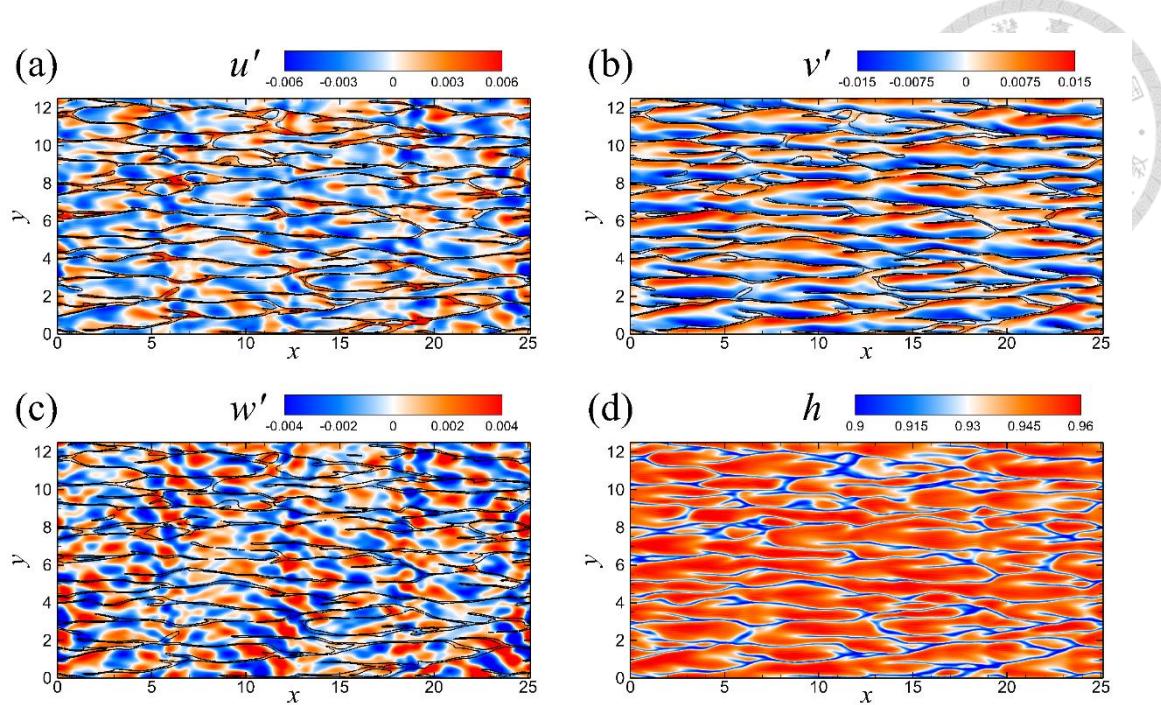


圖 2-30：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之速度擾動及溫度分布圖。圖 a 為沿流向速度擾動分布圖，圖 b 為跨流向速度擾動分布圖，圖 c 為垂直向速度擾動分布圖，其中黑實線為溫度為 0.92 之等值線，圖 d 為溫度分布圖。

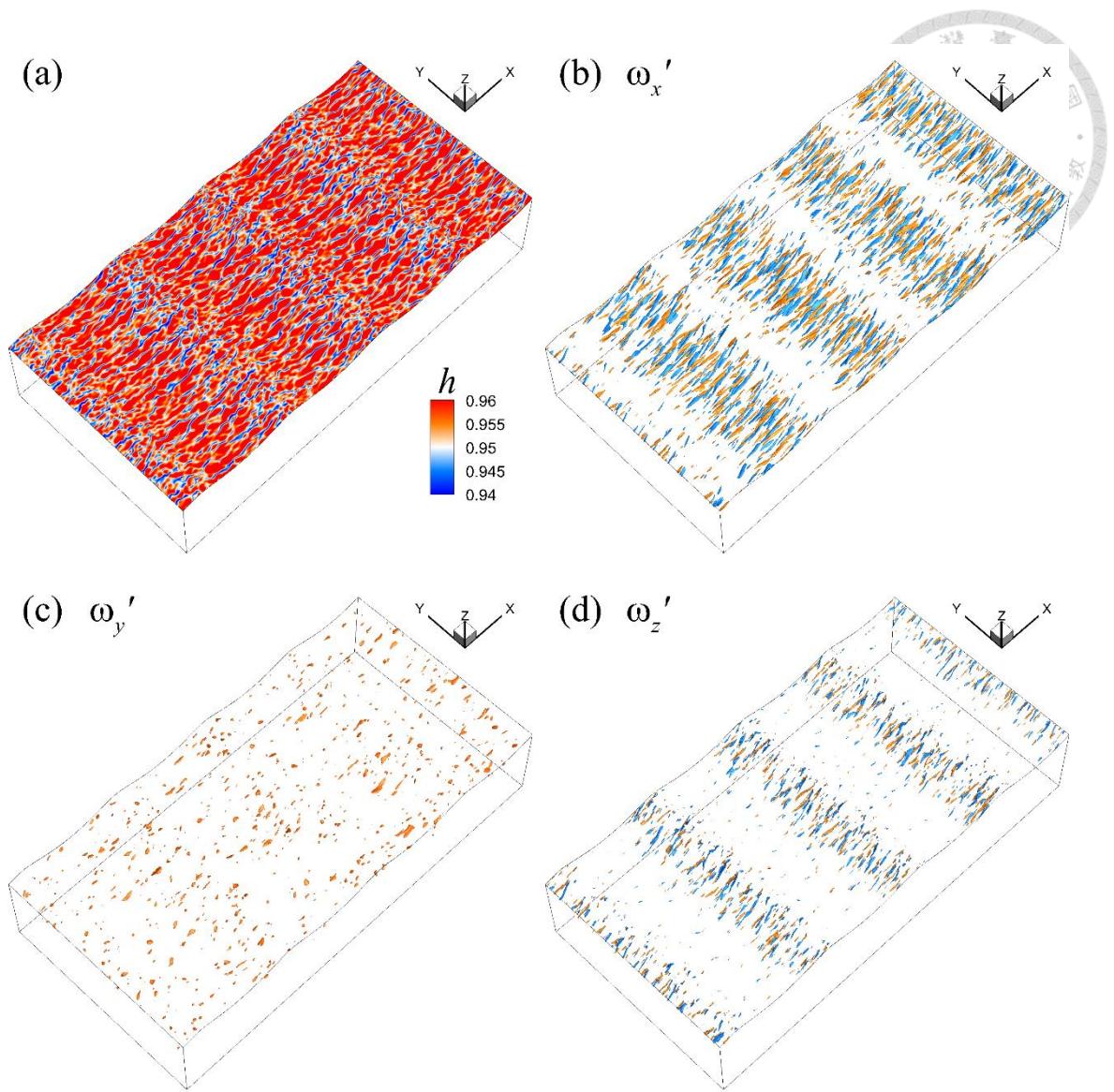


圖 2-31：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

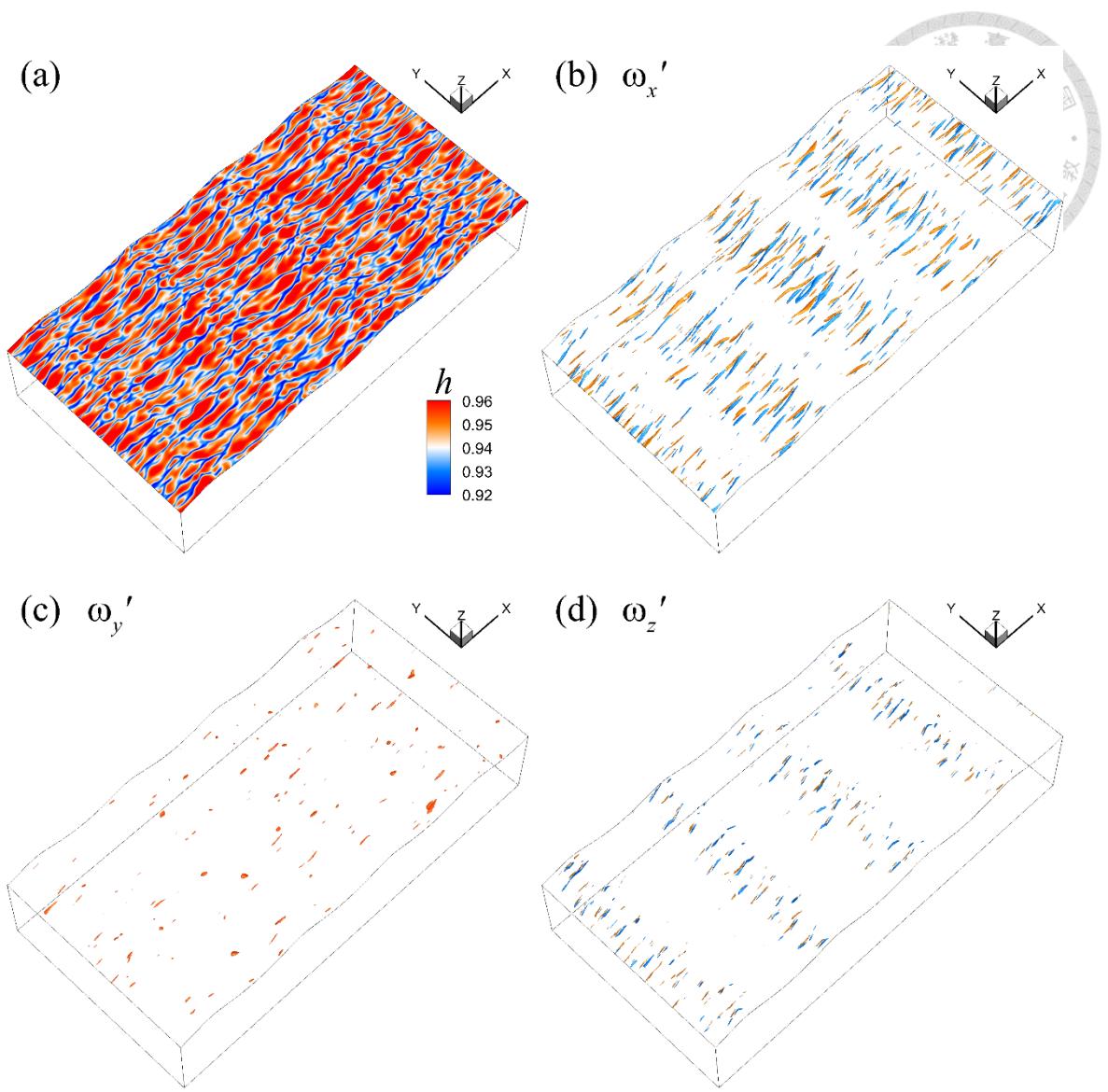


圖 2-32：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.04，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

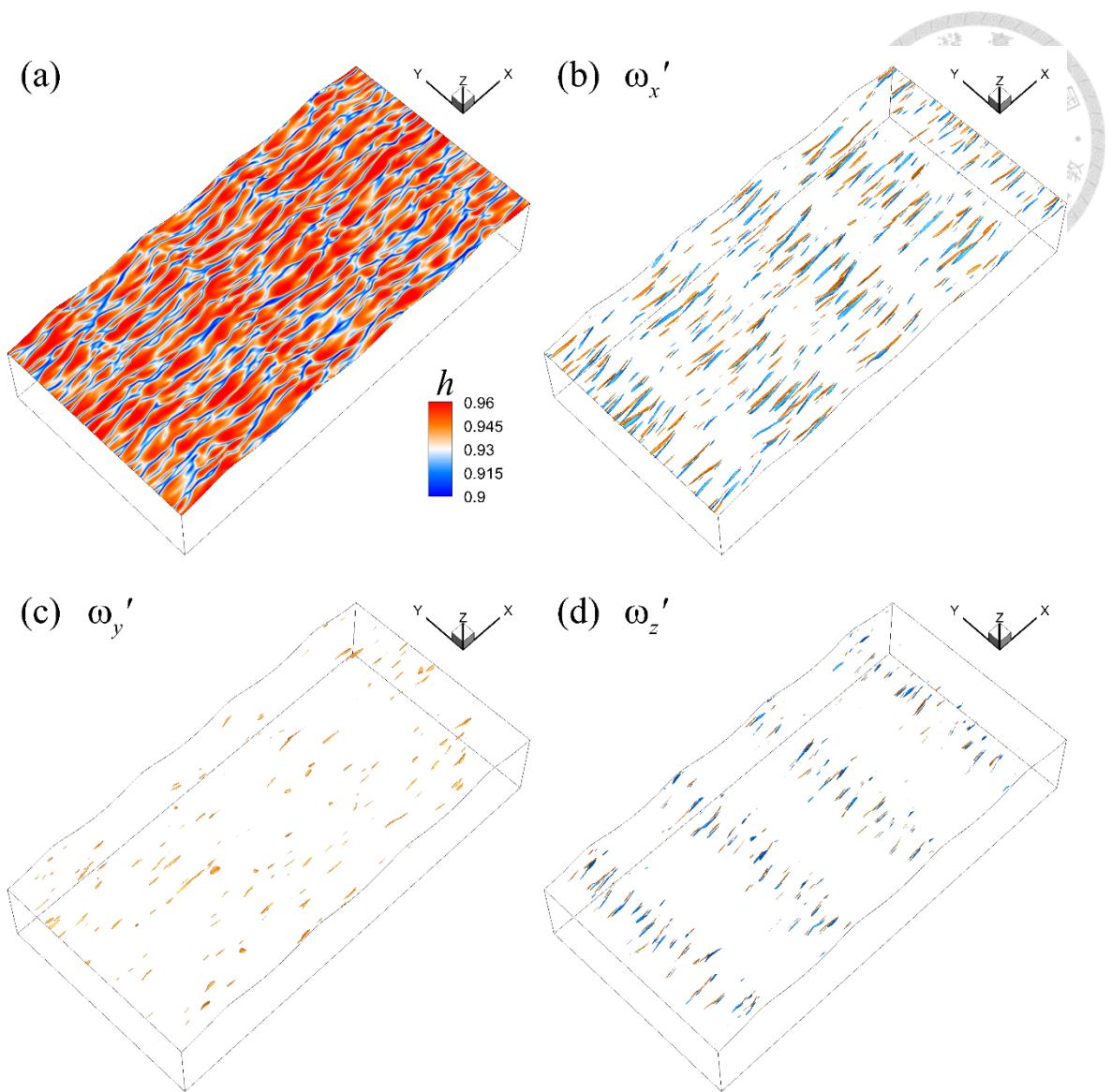


圖 2-33：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.04，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

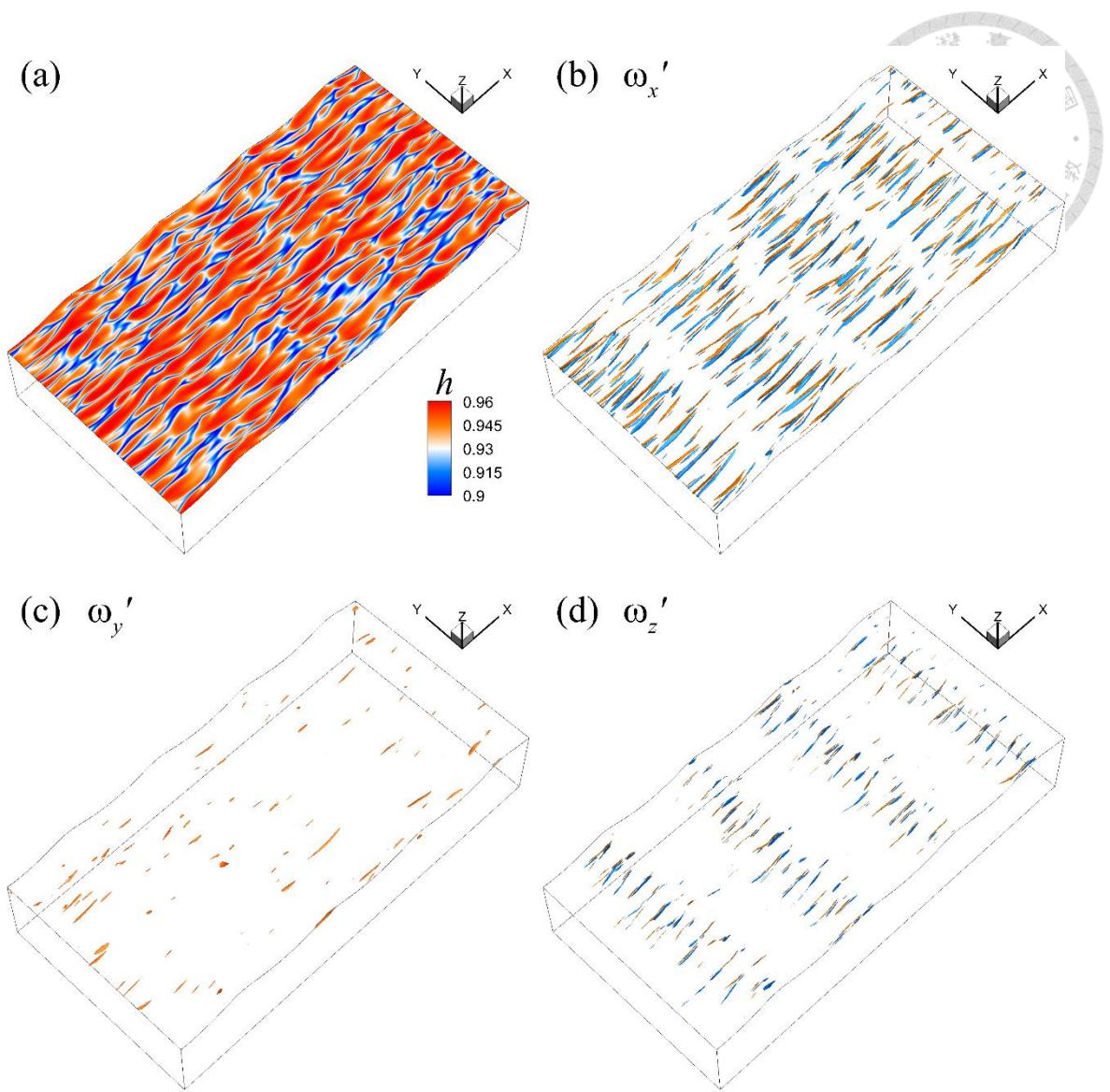


圖 2-34：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

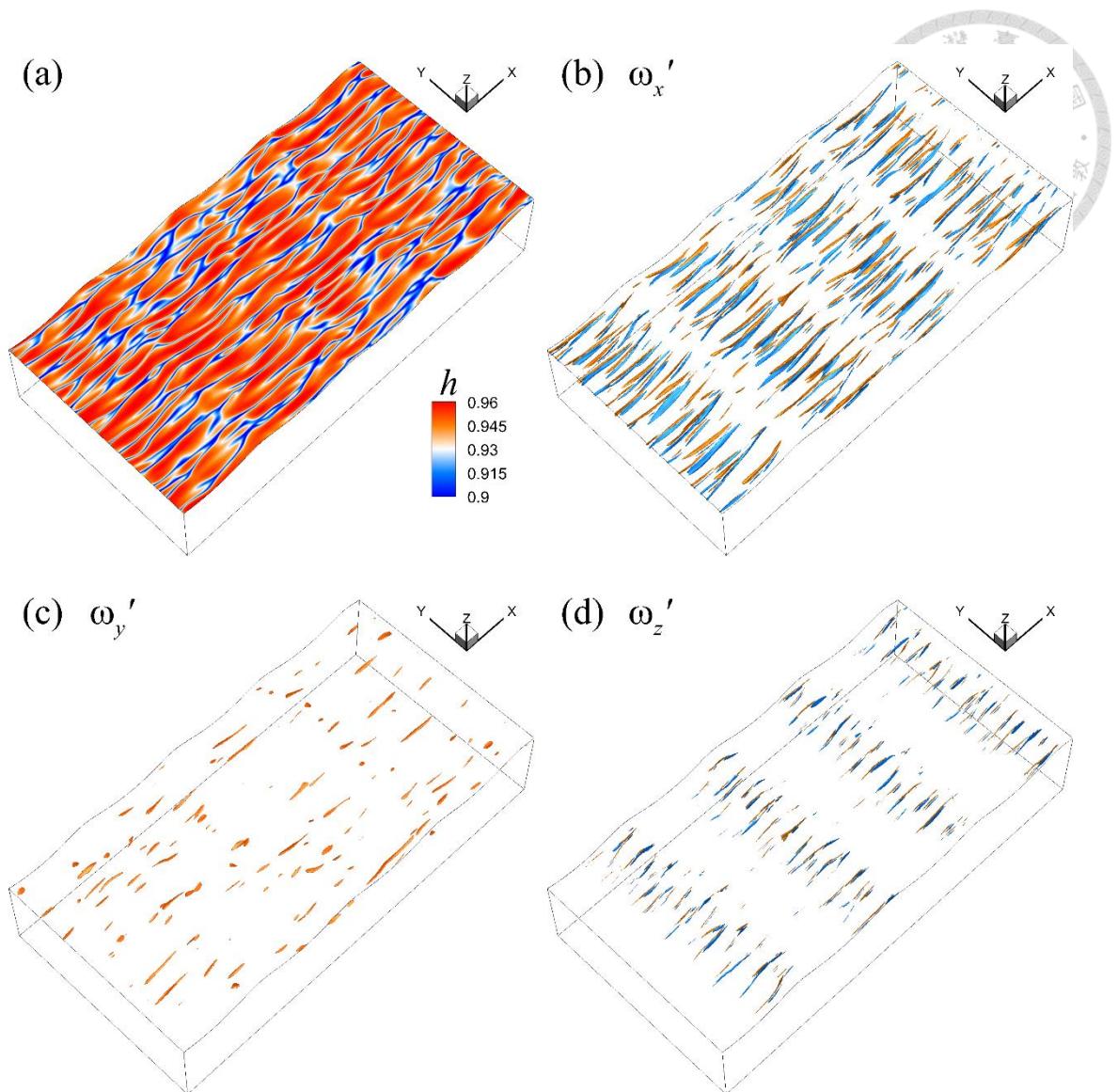


圖 2-35：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。

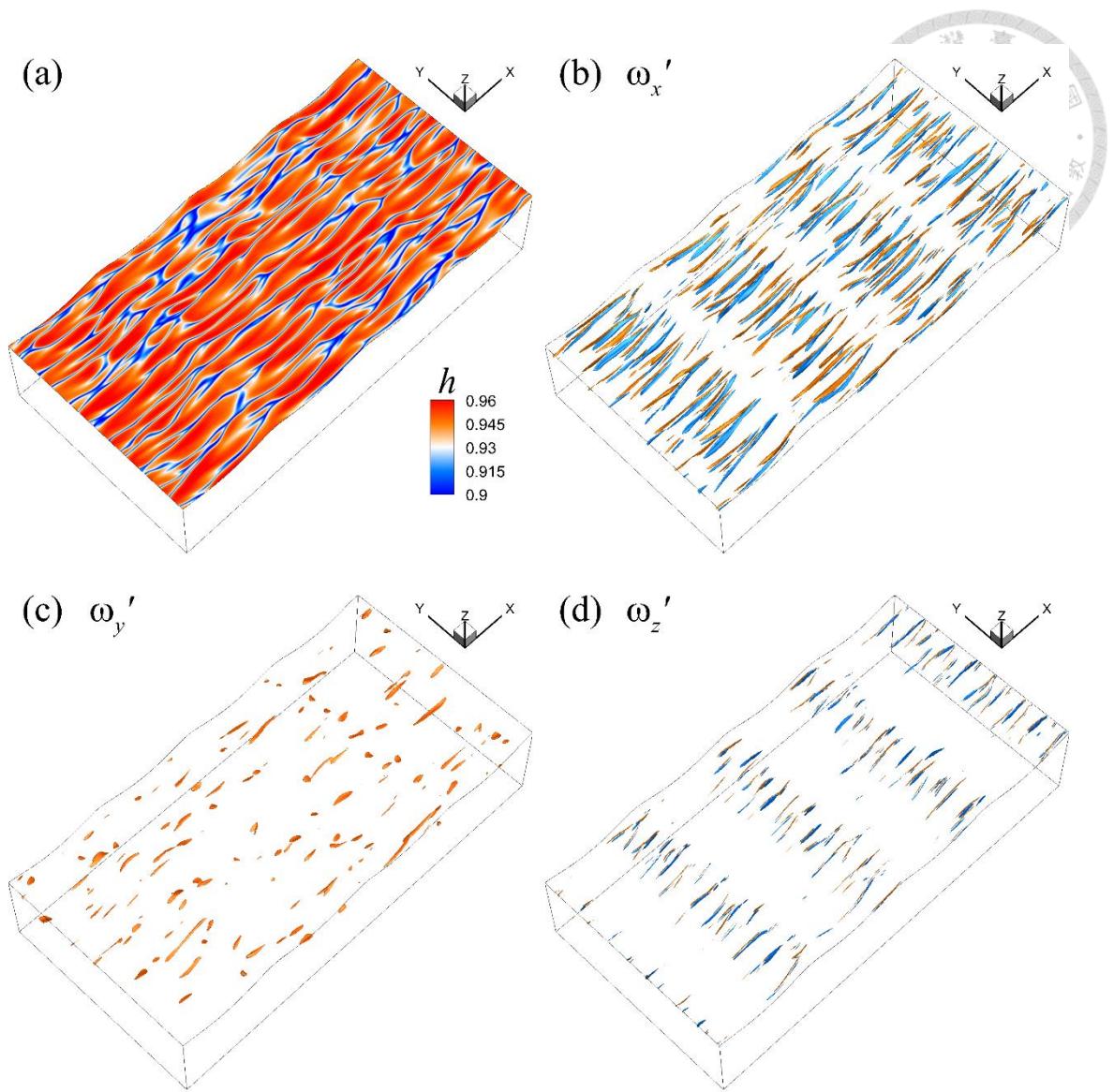


圖 2-36：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時接近自由液面之溫度分布圖與水下渦度擾動之等值曲面圖。圖 a 為溫度分布圖，圖 b 為沿流向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.15 ，圖 c 為跨流向渦度擾動，其等值曲面之值為 0.05，圖 d 為垂直向渦度擾動，其等值曲面之值為 ± 0.1 。



2.1 涡度剖面圖

為求初步了解本研究之數值模擬資料中流場之紊流結構特性，故針對渦度計算平均值與方均根，其中方均根之平均為對計算區間之水平面計算平均。

由於沿流向渦度與垂直向渦度之平均值趨近於零，即沿流向渦度與垂直向渦度近似於其渦度擾動，然而跨流向渦度之平均值不為零，其分布如波長 7.5cm 之圖 2-37(a)。可以發現圖 2-37(a) 之水深於 $z = -0.05$ 處具有最大值，此為於非線性波浪邊界層內，具有沿流向之平均速度所造成，而隨著時間發展，水深於 $z = -0.8$ 處跨流向渦度具有一極值。圖 2-37(b) 為沿流向渦度擾動之方均根值，可以發現其峰值從水深於 $z = -0.1$ 處隨時間向下移至 $z = -0.2$ 處，且逐漸增大。圖 2-37(c) 為跨流向渦度擾動之值次之方均根值，在 $t = 30T_0$ 時於水深 $z = -0.05$ 處具有一峰值。三者於 $z = -1.2$ 處皆趨近於零。圖 2-37(d) 為垂直向渦度擾動之值次之方均根值，可以發現其峰值從水深於 $z = -0.05$ 處隨時間向下移至 $z = -0.1$ 處，且逐漸增大。

比較三者發現沿流向渦度擾動最大，垂直向渦度擾動次之，跨流向渦度擾動最小，且隨著時間發展，渦度擾動於 $t = 5T_0$ 時逐漸變小，而於 $t = 10T_0$ 時，開始逐漸變大，而其峰值逐漸偏向水深較深處，但於 $z = -1.2$ 處皆趨近於零。一開始模擬時，加入符合連續方程式之初始隨機速度擾動，由於模擬之流場尚未穩定，故使渦度擾動之值於 $t = 5T_0$ 較 $t = 10T_0$ 大，而於 $t = 10T_0$ 之後，可視為穩定之流場且紊流逐漸發展。

波長為 15cm（如圖 2-38）、20cm（如圖 2-39）之結果，其分布特性亦與圖 2-37 相同，唯其值隨波長增加而略為變大。

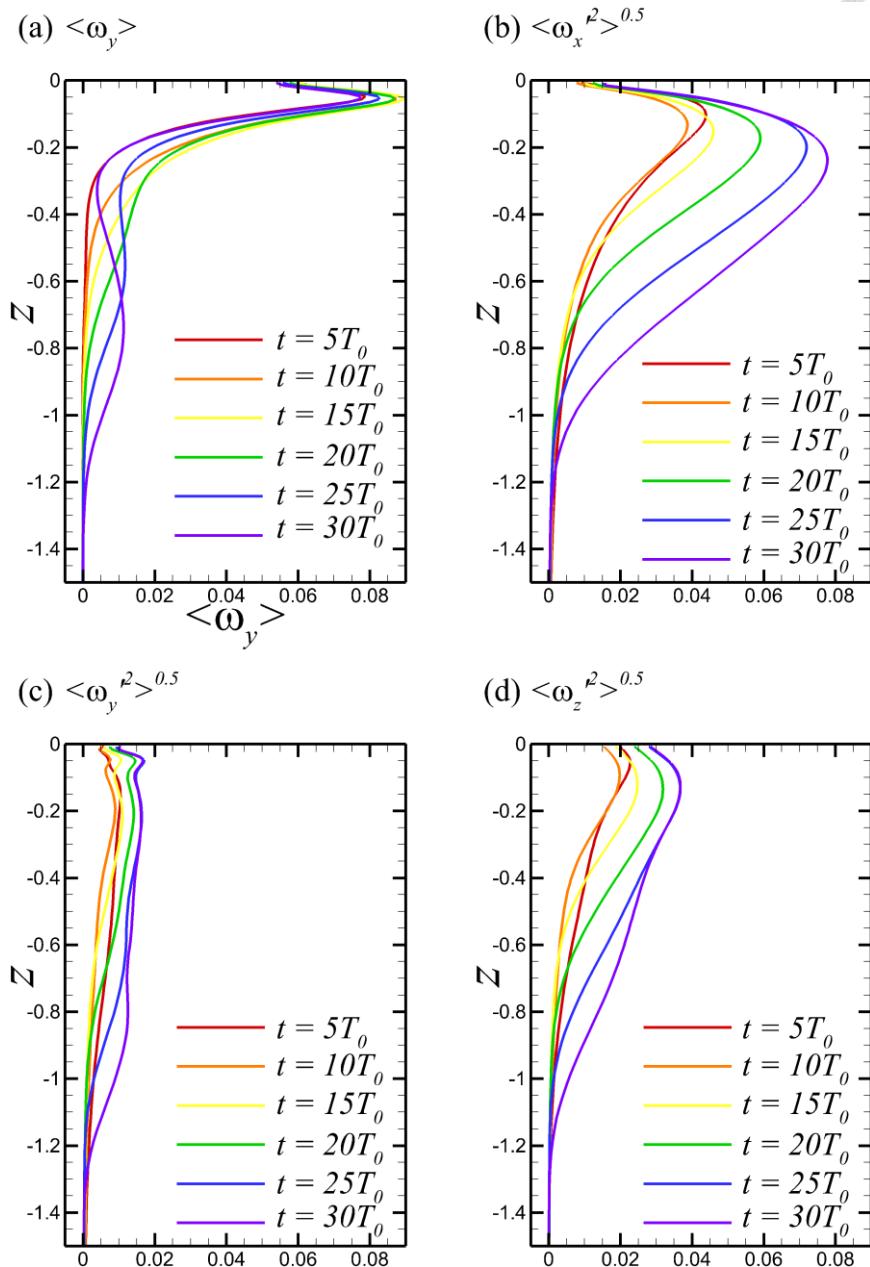
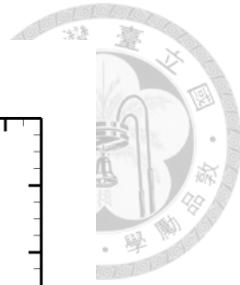


圖 2-37：波長 7.5cm 於不同時間之渦度剖面圖。圖 a 為平均跨流向渦度，圖 b 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 c 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 d 為垂直向渦度擾動之方均根。

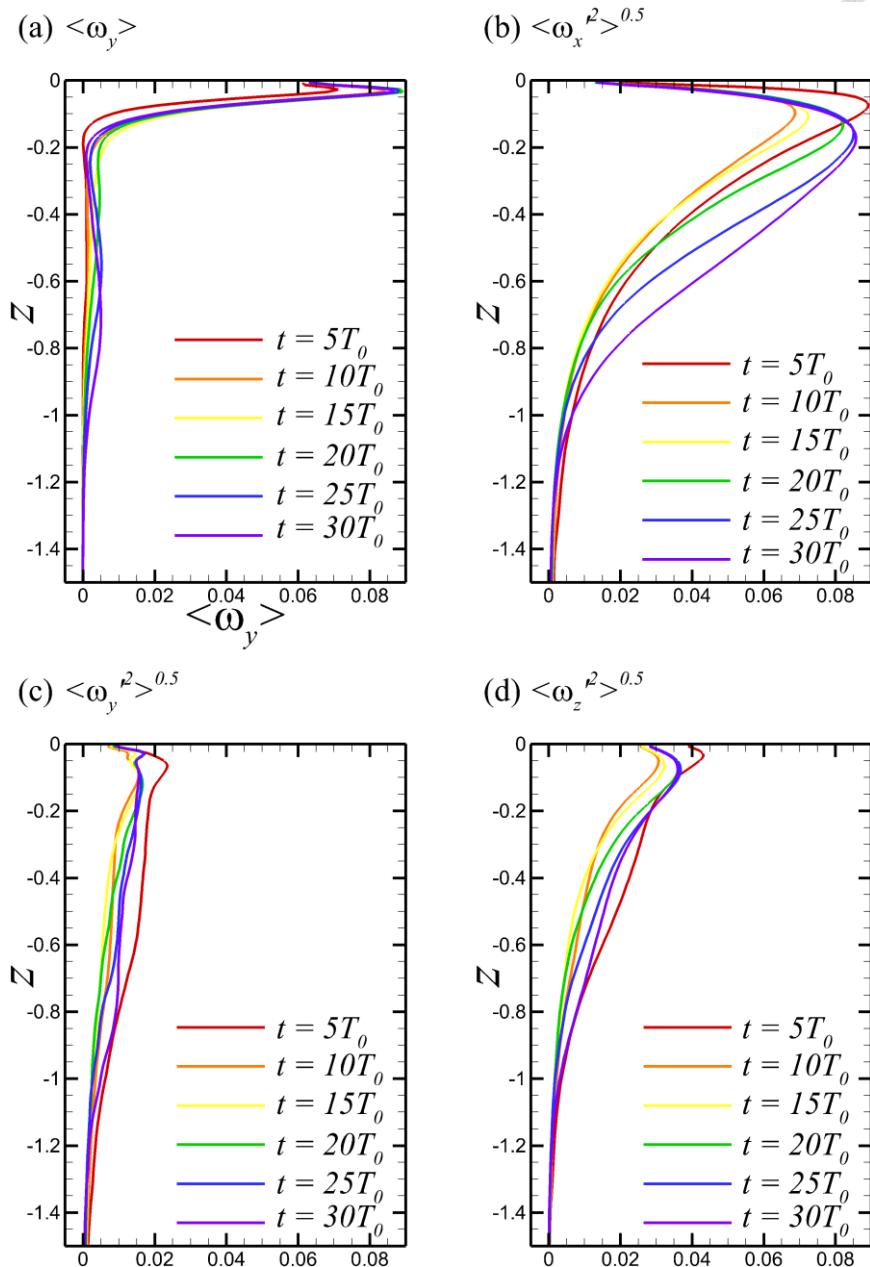
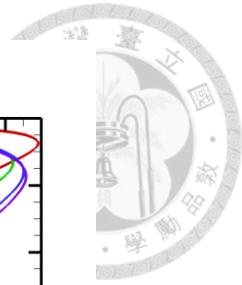


圖 2-38：波長 15cm 於不同時間之渦度剖面圖。圖 a 為平均跨流向渦度，圖 b 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 c 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 d 為垂直向渦度擾動之方均根。

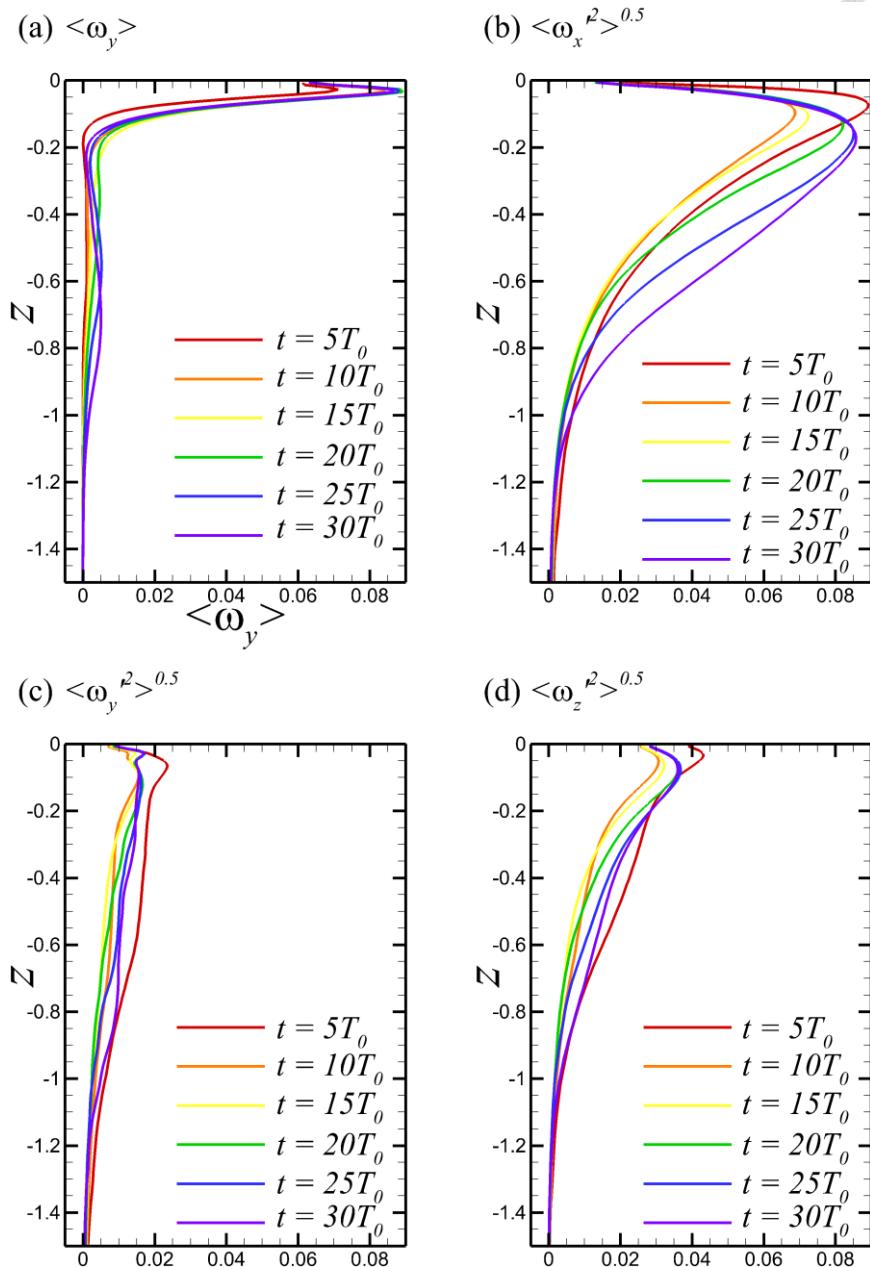
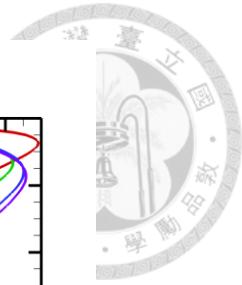


圖 2-39：波長 20cm 於不同時間之渦度剖面圖。圖 a 為平均跨流向渦度，圖 b 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 c 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 d 為垂直向渦度擾動之方均根。



2.2 相位平均

於前一小節之結果可知不同時間之渦度隨水深變化趨勢，而此小節則是透過相位平均方式表現渦度於不同相位上之分布特性。由於本研究之數值模擬中，波浪僅朝沿流向傳遞，而於跨流向可視為同相位，故可透過跨流向之平均達到相位平均之效果，即渦度擾動作跨流向平均，而得 $x-z$ 平面的分布圖，並由圖可知不同相位之渦度擾動分布特性，然而渦度擾動之平均趨近於零，故以方均根來呈現結果，而此處方均根之平均即跨流向平均。

圖 2-40 至 圖 2-45 為波長 7.5cm，時間分別為 $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30T_0$ 之渦度分布圖，可發現沿流向渦度擾動與垂直向渦度擾動明顯與相位有關。沿流向渦度擾動分布於接近水面處，且於波背處之強度較強，波前處較弱；垂直向渦度擾動則於波峰處之強度較強，波谷處較弱。然而隨時間發展，渦度擾動逐漸朝水深較深處發展，而沿流向渦度擾動於波前處亦漸漸增強，並有於沿流向延續而不間斷之趨勢。跨流向渦度擾動之分布則與相位無明顯之關係。

波長 15cm（如圖 2-46 至 圖 2-51）及波長 20cm（如圖 2-52 至 圖 2-57）之渦度擾動相位平均的分布與波長 7.5cm 之結果相似。

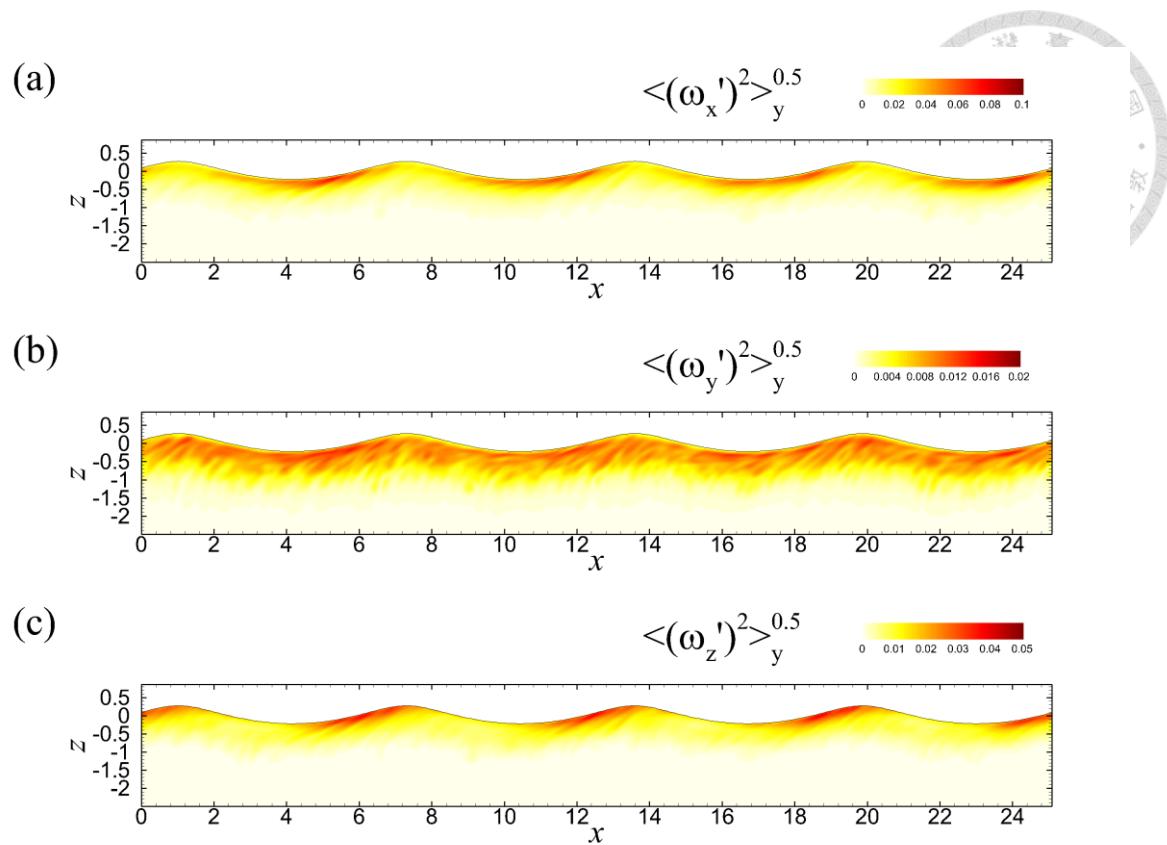


圖 2-40：波長為 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

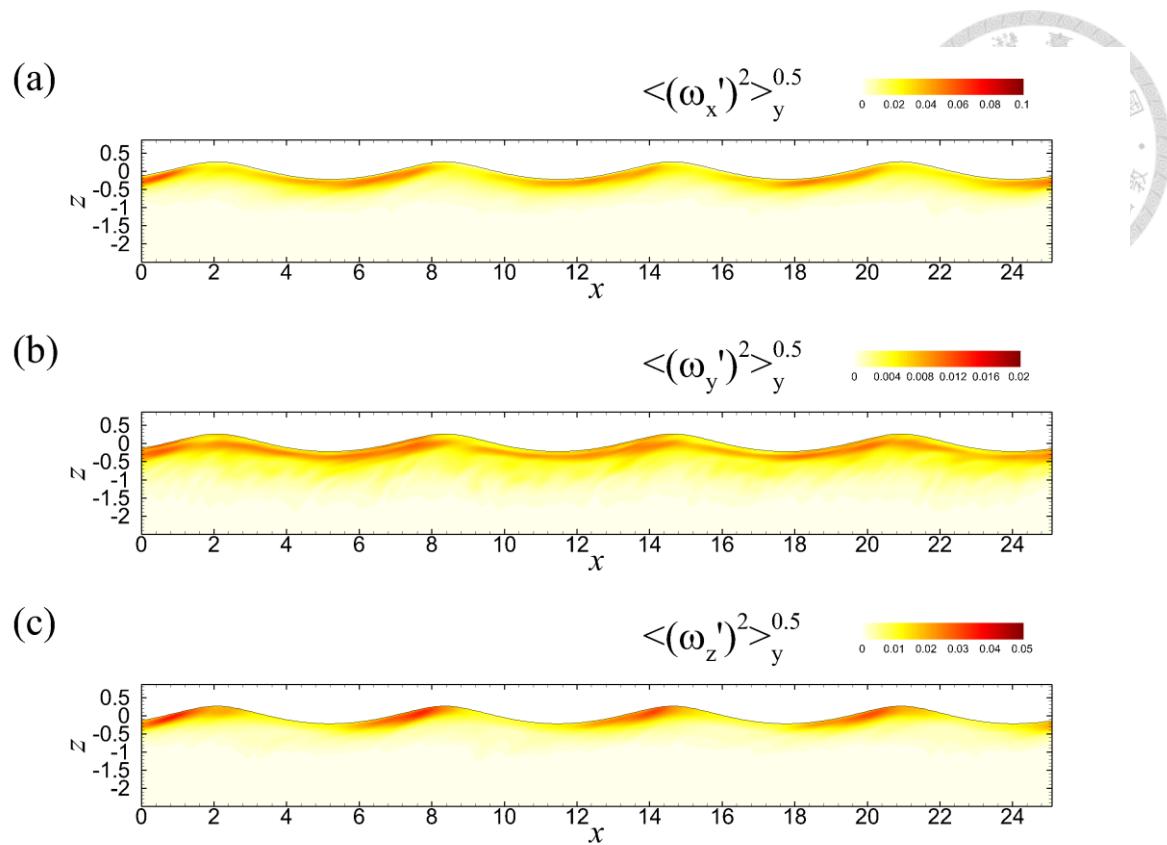


圖 2-41：波長為 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

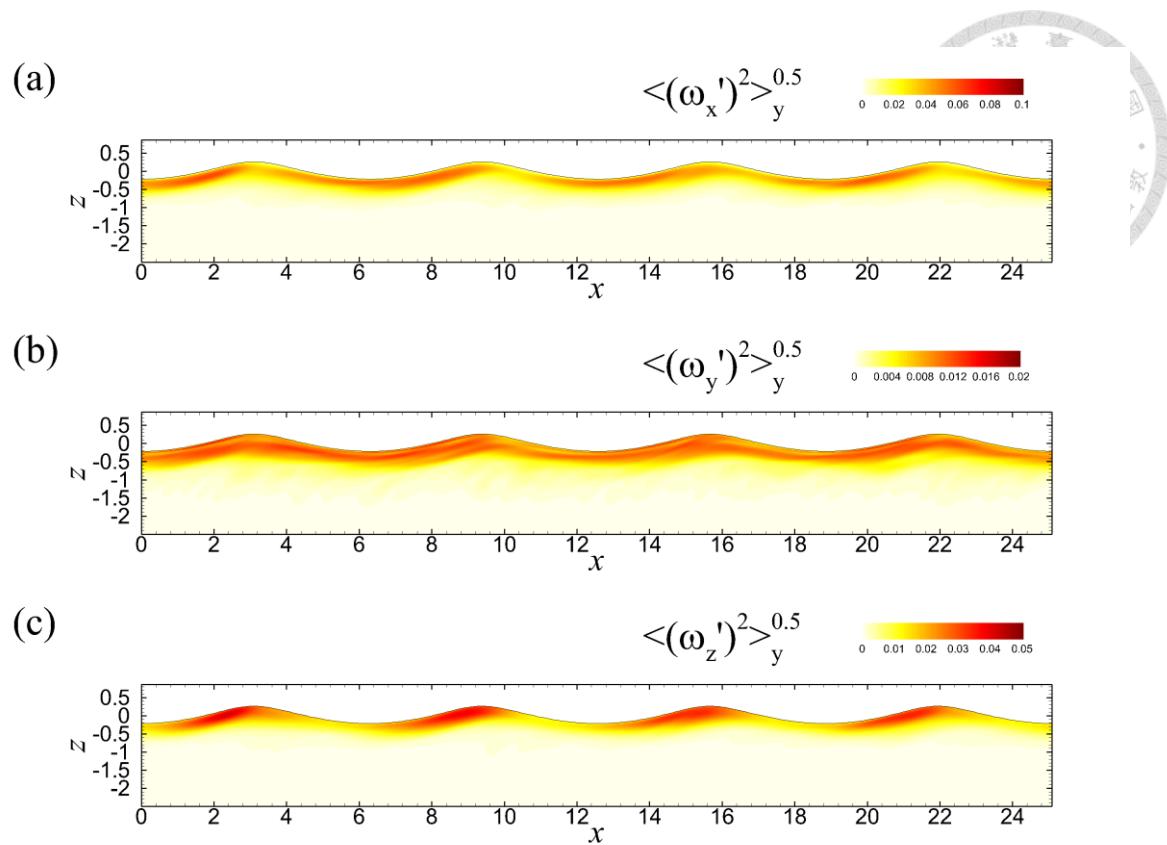


圖 2-42：波長為 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

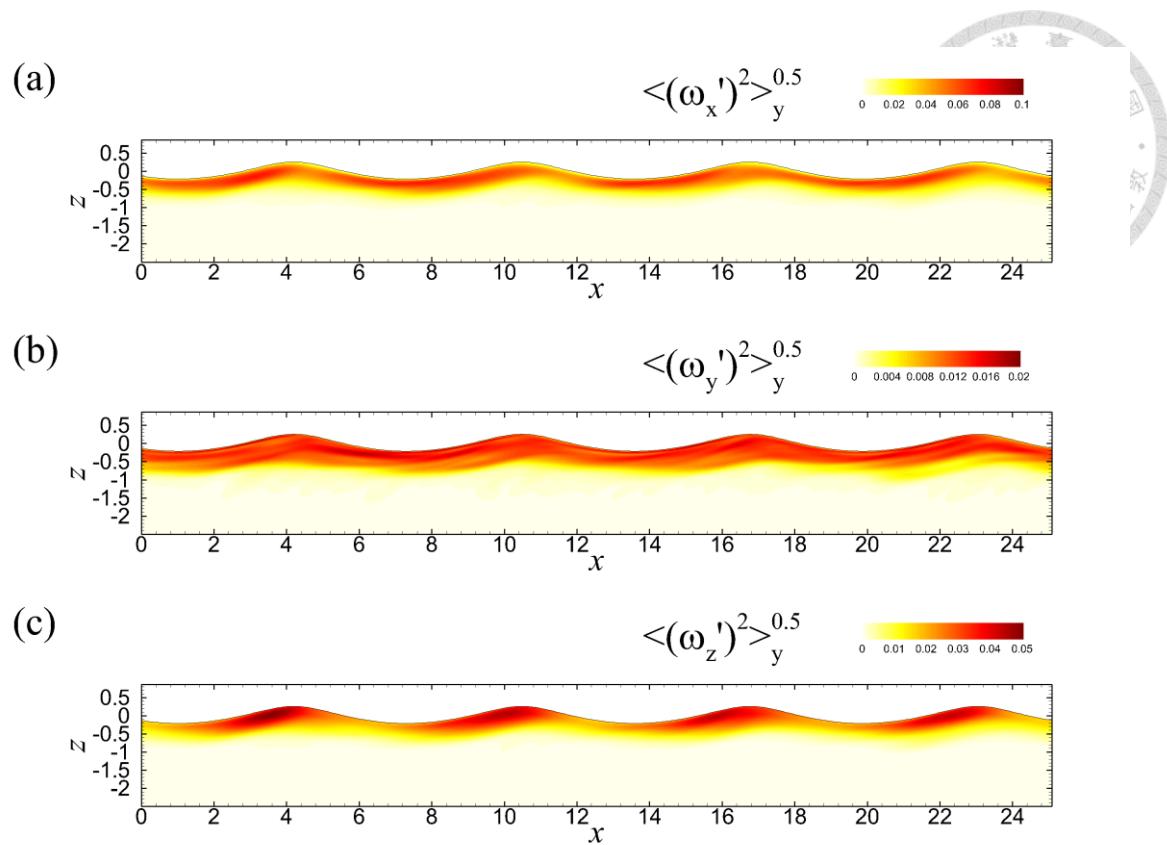


圖 2-43：波長為 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

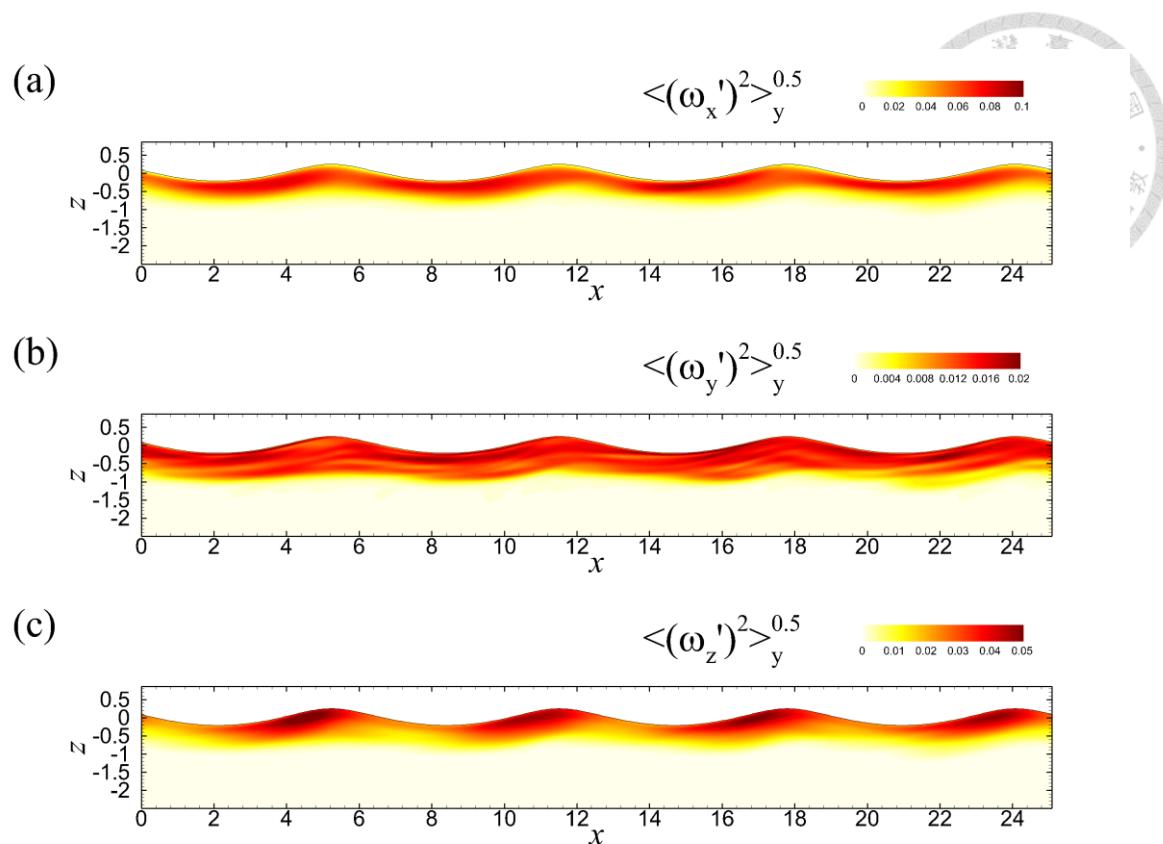


圖 2-44：波長為 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

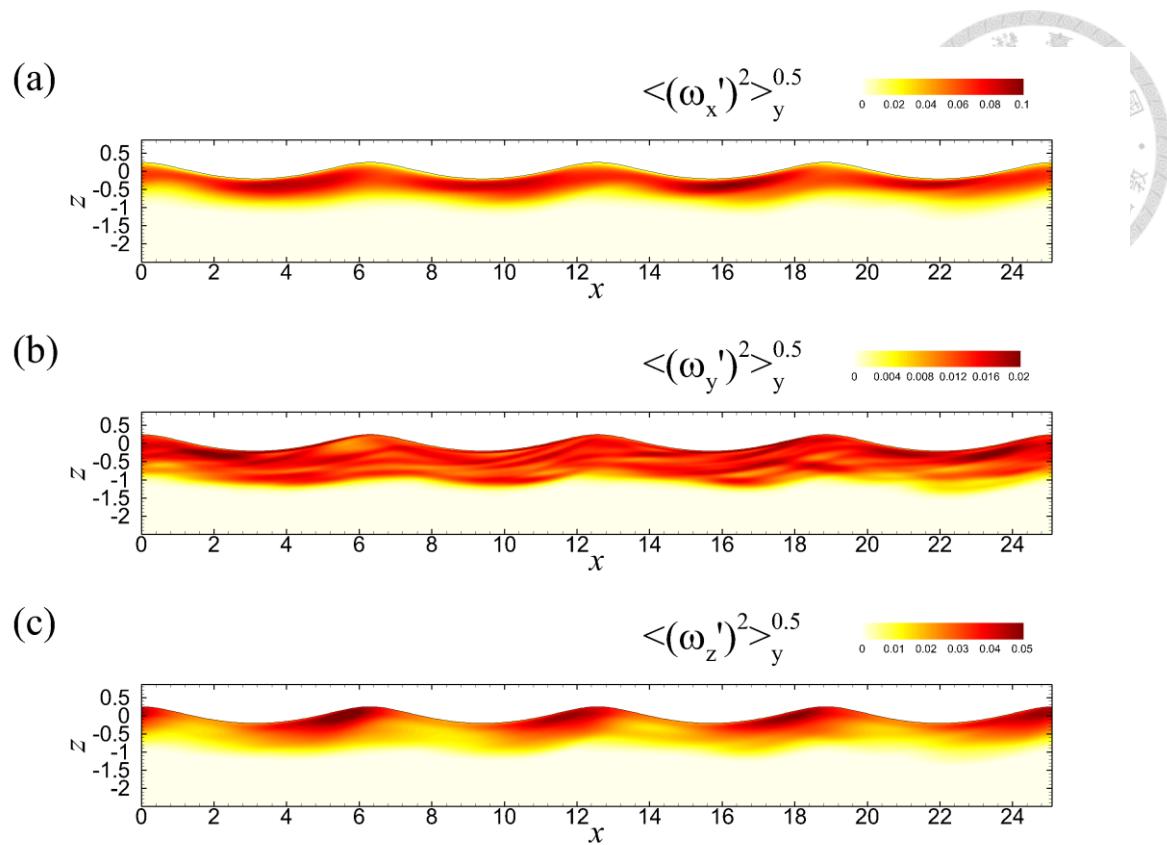


圖 2-45：波長為 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

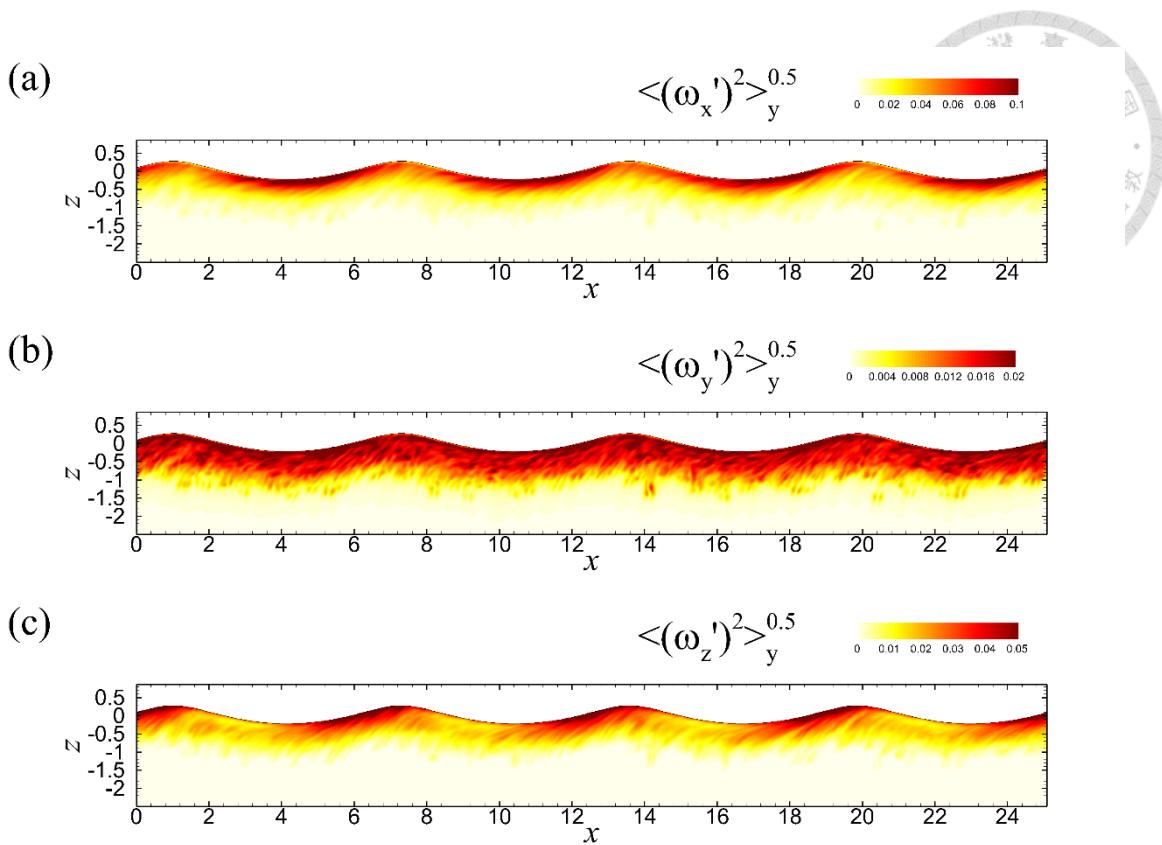


圖 2-46：波長為 15cm 於 $t = 5T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

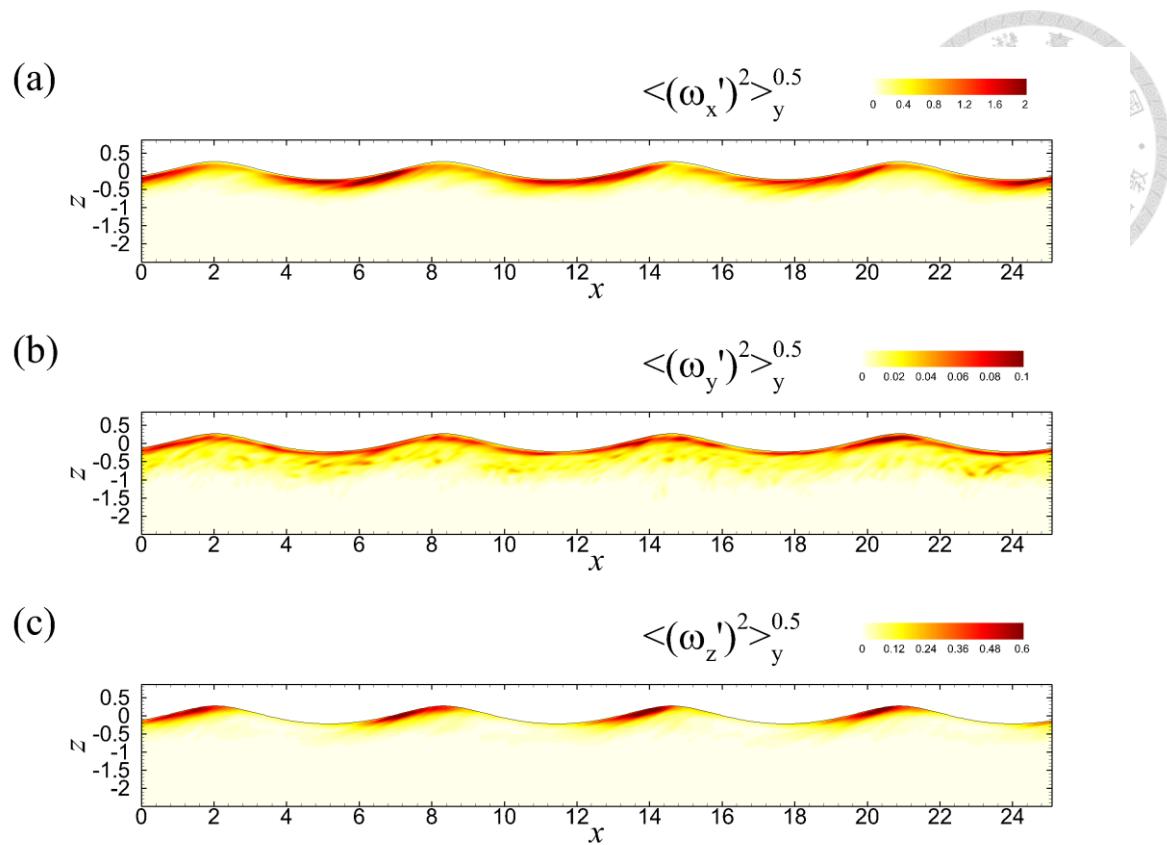


圖 2-47：波長為 15cm 於 $t = 10T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

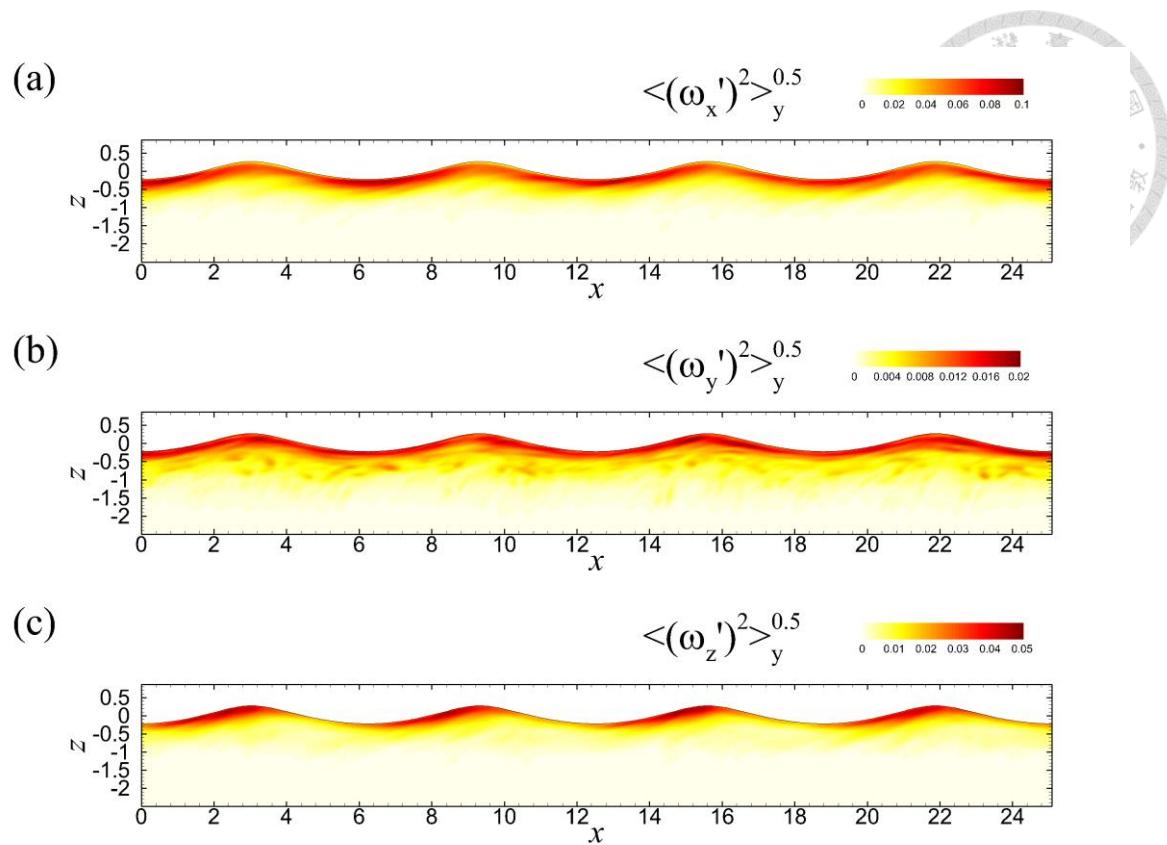


圖 2-48：波長為 15cm 於 $t = 15T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

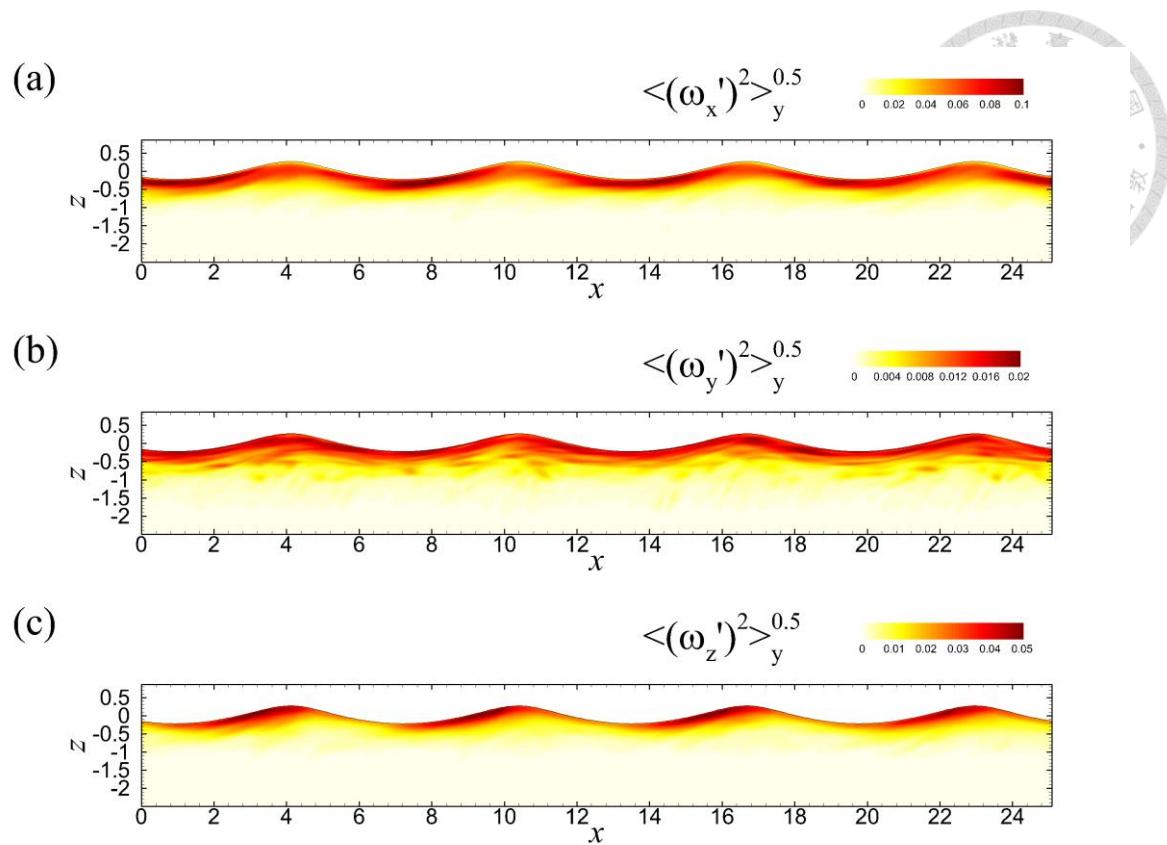


圖 2-49：波長為 15cm 於 $t = 20T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

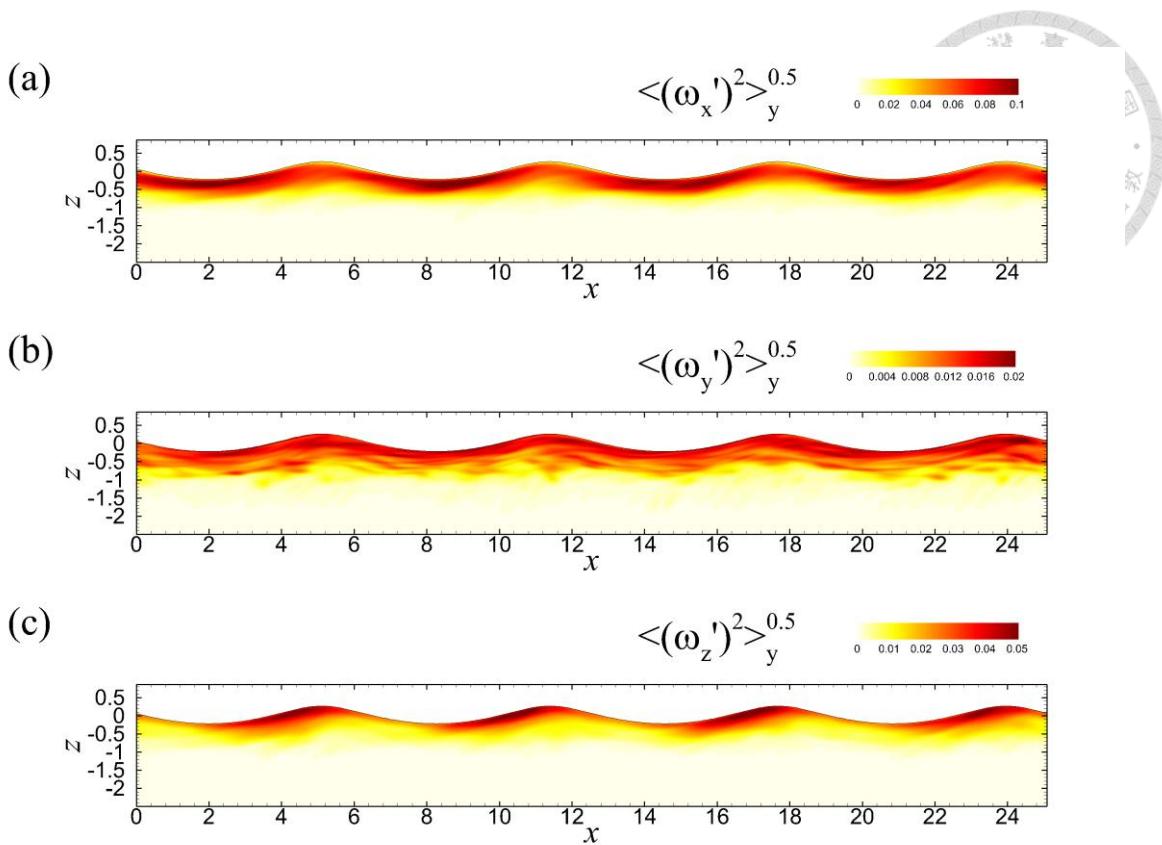


圖 2-50：波長為 15cm 於 $t = 25T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

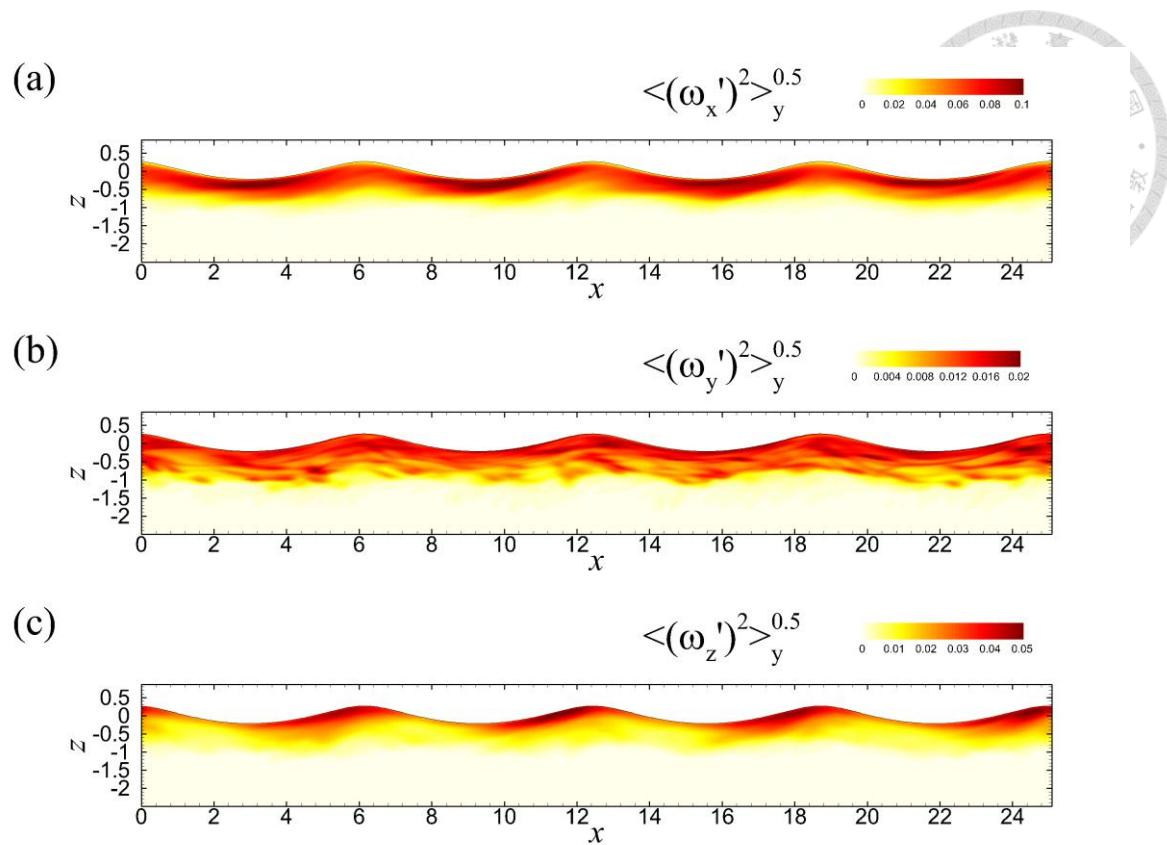


圖 2-51：波長為 15cm 於 $t = 30T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

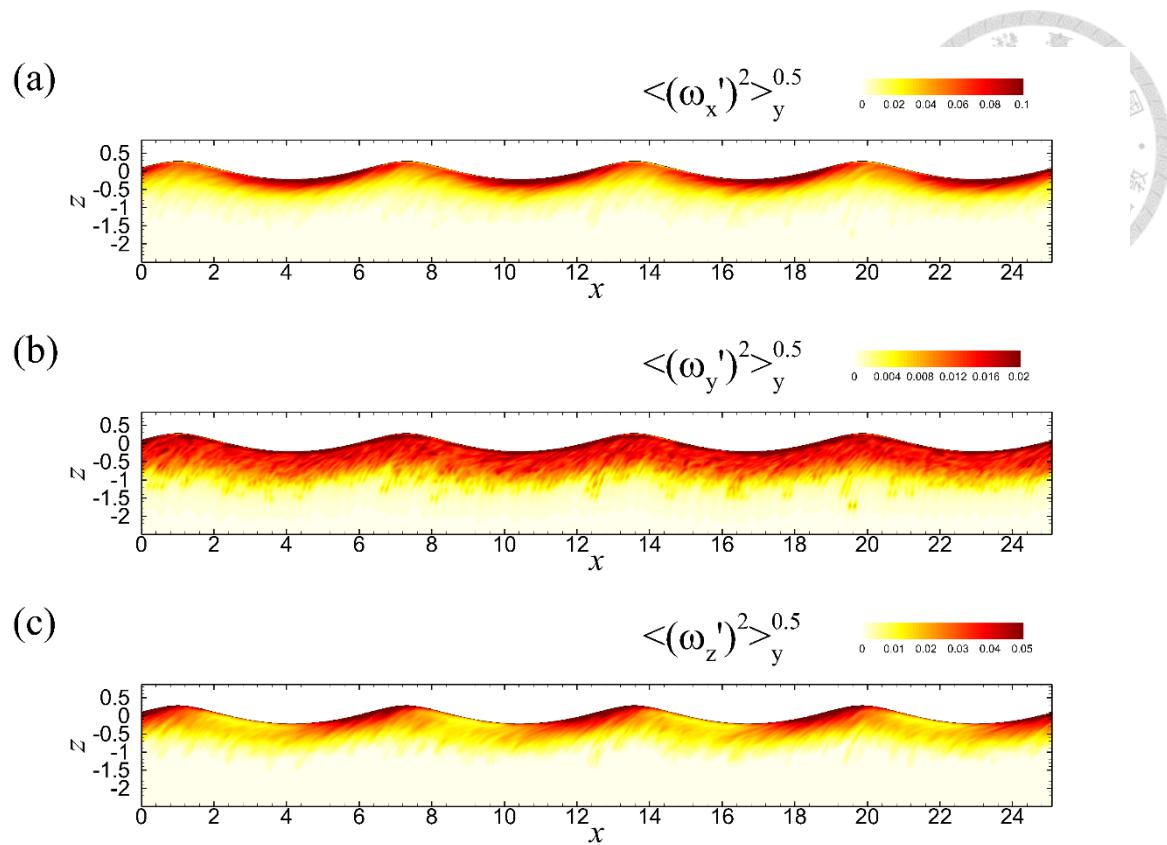


圖 2-52：波長為 20cm 於 $t = 5T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

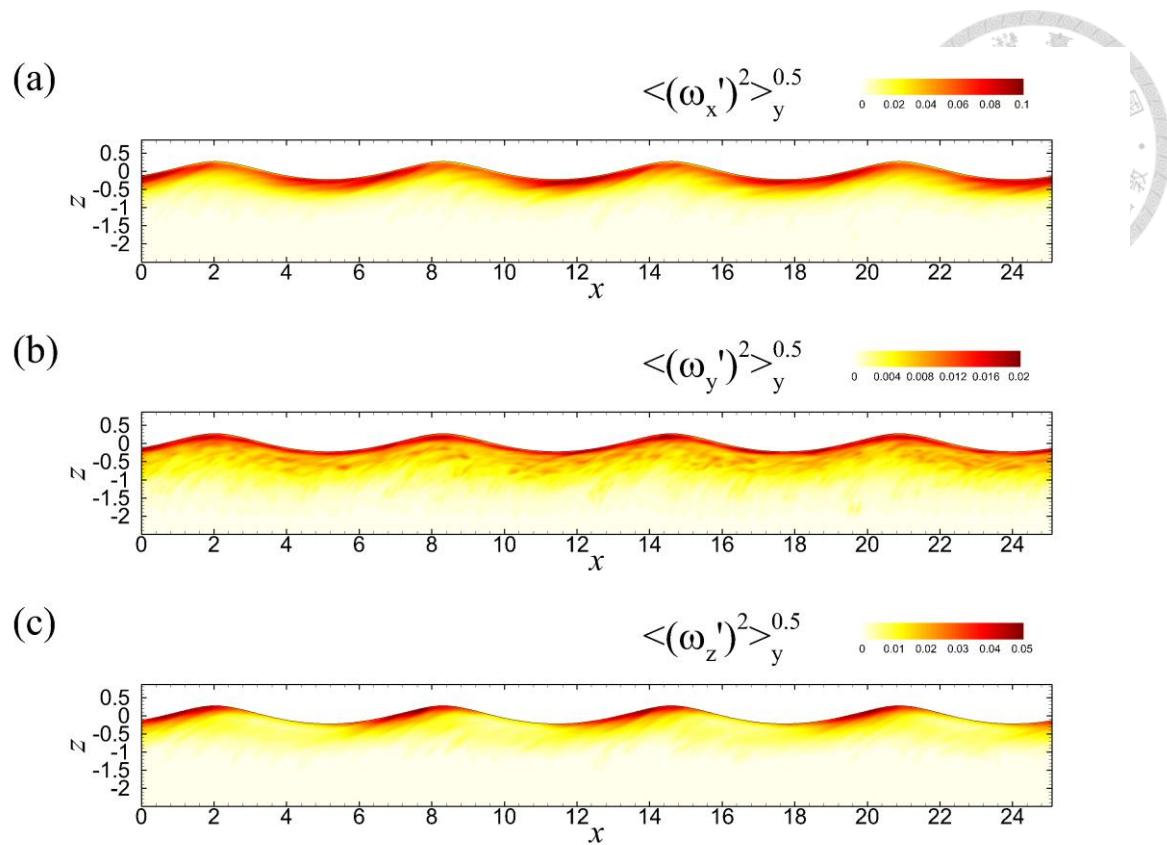


圖 2-53：波長為 20cm 於 $t = 10T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

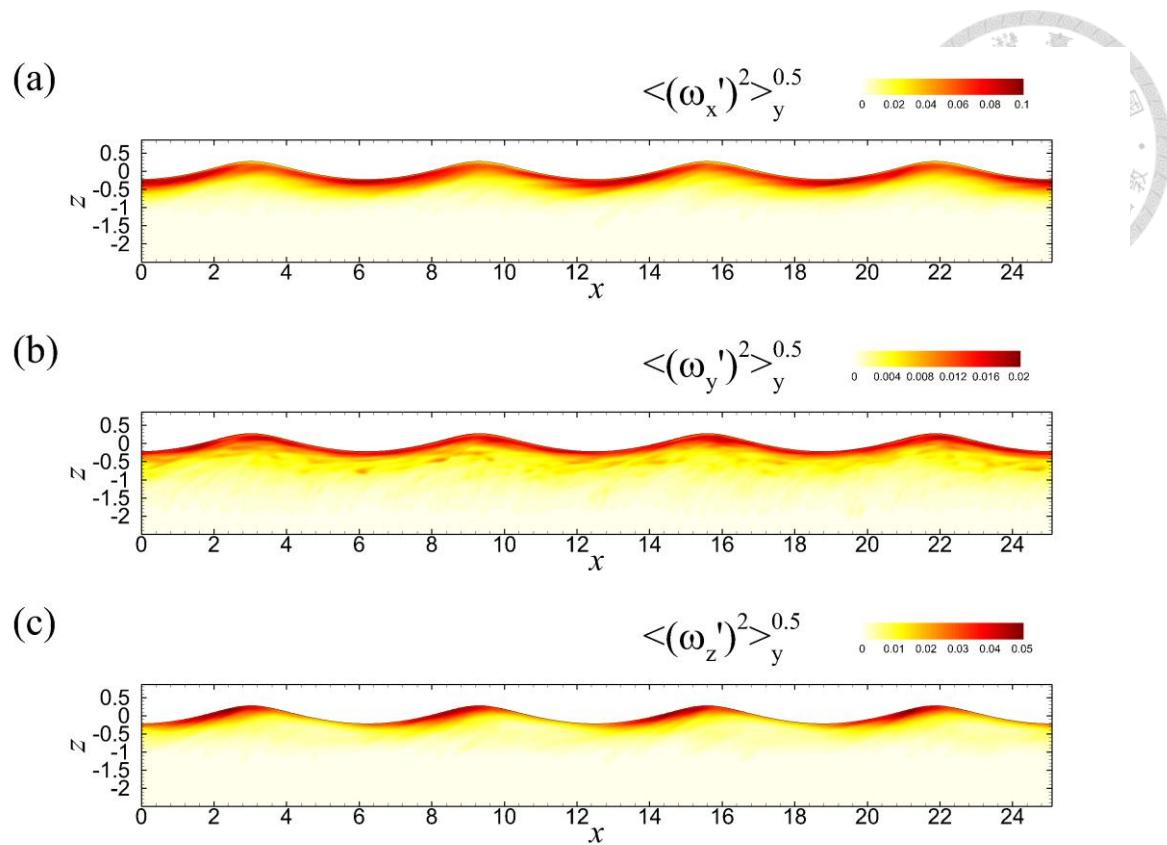


圖 2-54：波長為 20cm 於 $t = 15T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

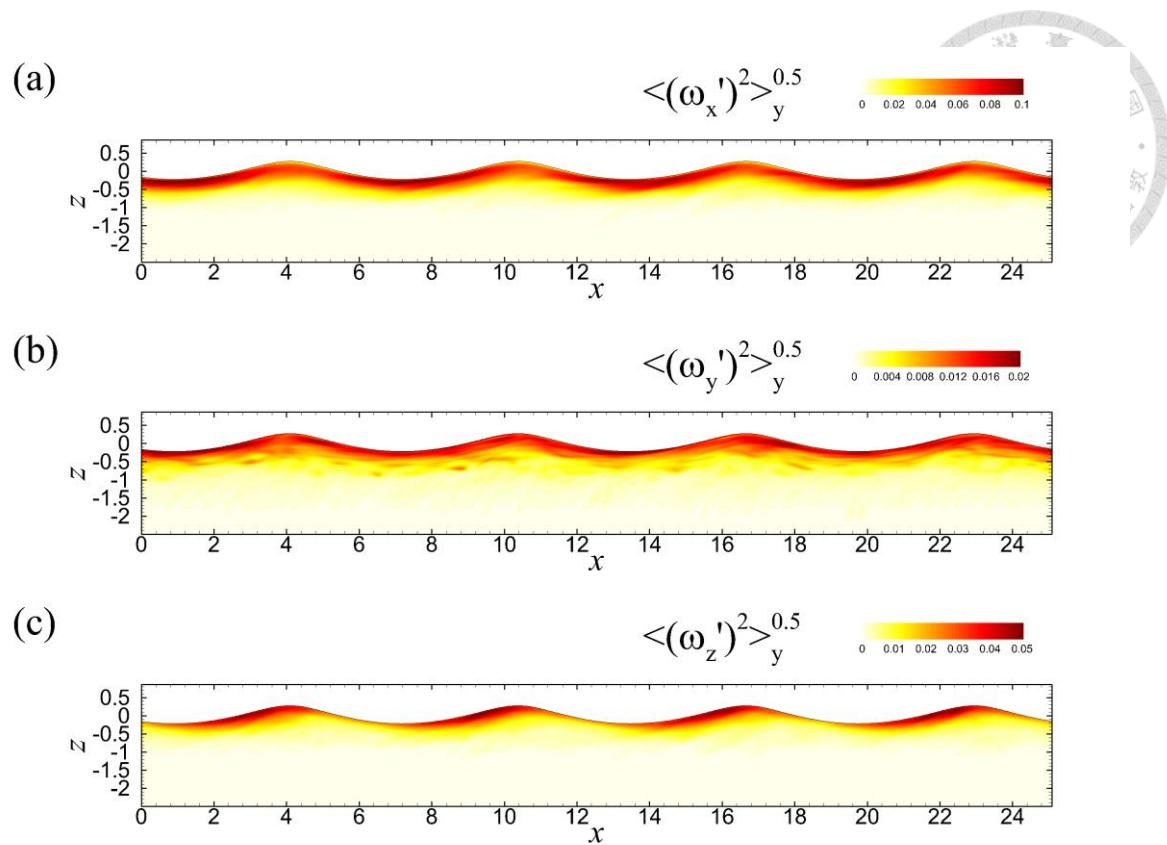


圖 2-55：波長為 20cm 於 $t = 20T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

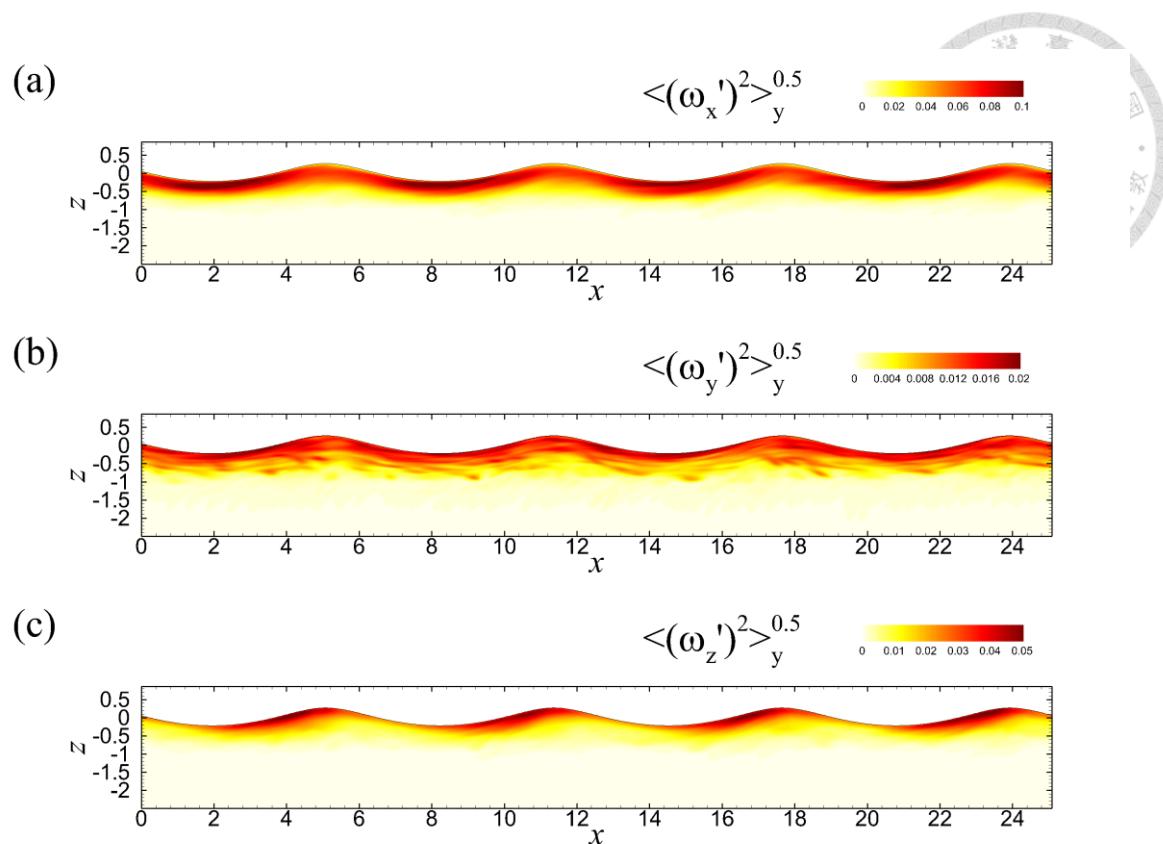


圖 2-56：波長為 20cm 於 $t = 25T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。

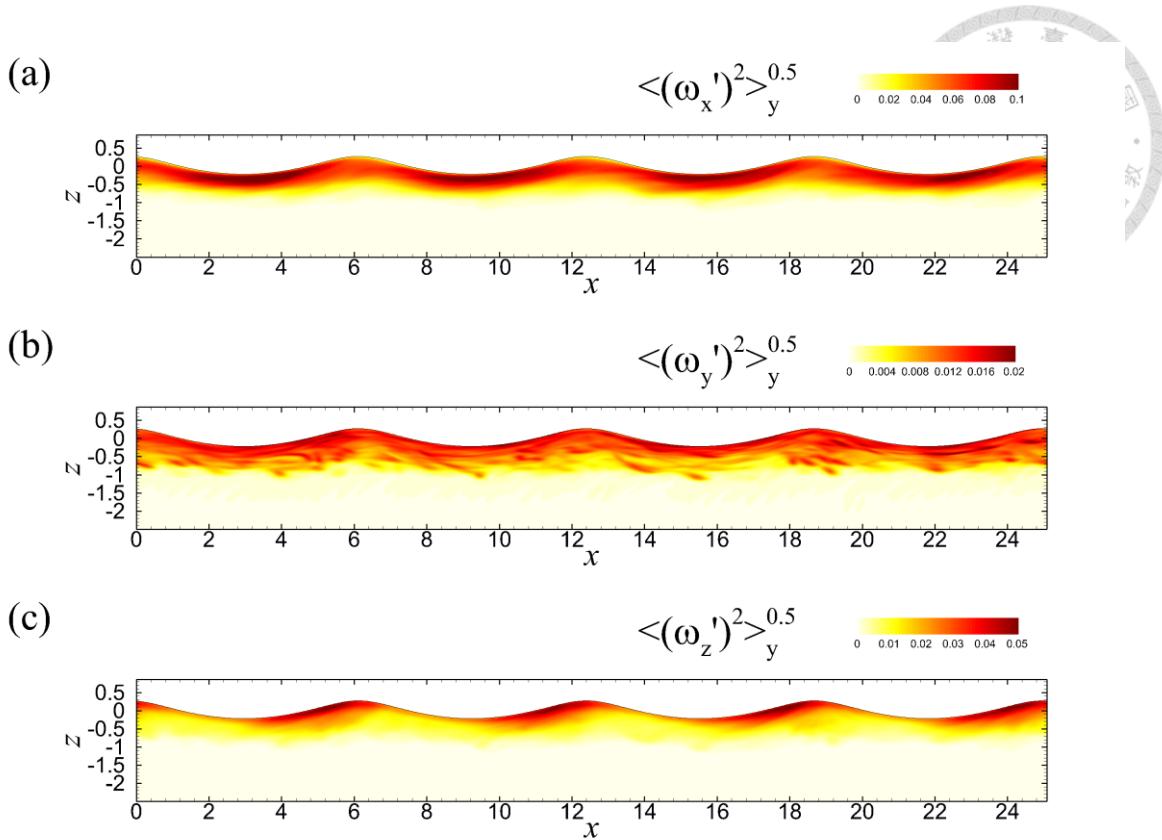


圖 2-57：波長為 20cm 於 $t = 30T_0$ 時渦度擾動之方均根分布圖，其平均為相位平均。圖 a 為沿流向渦度擾動之方均根，圖 b 為跨流向渦度擾動之方均根，圖 c 為垂直向渦度擾動之方均根。



2.3 沿流向平均

透過觀察數值模擬的資料中，發現不論是溫度、速度或是渦度的分布，在沿流向（stream-wise）的變化不大，故利用統計之概念對其作沿流向平均（stream-wise averaging, $\langle u \rangle_x$ ），得到 $y-z$ 平面的分布圖。藉由平均可以突顯分布趨勢，並消除次要的結構。除此之外，由於沿流向之邊界為週期條件，平均後可以消除波浪效應，留下平均流場（mean flow, \bar{u}_t ）與擾動（fluctuation, $\langle u_i' \rangle_x$ ）：

$$\langle u_i(\xi, \psi, \zeta) \rangle_\xi(\psi, \zeta) = \bar{u}_t(\zeta) + \langle u_i'(\xi, \psi, \zeta) \rangle_\xi(\psi, \zeta), \quad (2-1)$$

然而這些結構主要是表現在擾動項，故仍需要再扣除平均流場，即

$$\langle u_i'(\xi, \psi, \zeta) \rangle_\xi(\psi, \zeta) = \langle u_i(\xi, \psi, \zeta) \rangle_\xi(\psi, \zeta) - \langle u_i(\xi, \psi, \zeta) \rangle(\zeta). \quad (2-2)$$

由於在物理區間 (x, y, z) (physical domain) 的隨波坐標系統 (wave following coordinates) 中，自由液面 (free surface) 會隨波浪升降，若作沿流向平均則會受到不同相位 (phase) 的影響，因此選擇在計算區間 (ξ, ψ, ζ) (computational domain) 的直角坐標 (rectangular coordinates) 中作沿流向平均，再將所得之平面轉換至物理區間。

考慮波長為 7.5cm 之流場，由於數值模擬是一時間序列的資料，當流場尚未穩定而將發展時為時間 $t = 5T_0$ (圖 2-58、圖 2-59)，至發展成熟之 $t = 30T_0$ (圖 2-68、圖 2-69) 所對應之擾動場平均分布。在圖 2-58 (a) 中，靠近水面之溫度擾動分布可以看出低溫條痕 (streaks) 的結構並可計算低溫條痕之數目，。由綠色框標示中，可以發現低溫處對應到較高沿流向速度 (圖 2-58(b))；跨流向速度 (圖 2-58(c)) 的分布依特性則分為兩層，上層為輻合 (converge) 而下層為發散 (diverge)，即在跨流向上，上層流體匯聚於低溫處，而下層流體於低溫處向外發散；垂直向速度 (圖 2-58(d)) 則在低溫處流體下沉，而在高溫處湧升。故由跨流向與垂直向速度擾動分布可以發現，在低溫條痕處有一對環流 (circulation) 影響溫度分布，而此相關紊流結構 (coherent turbulent structure) 特性與朗繆爾環流 (Langmuir circulation) 相似 [14, 17]。

欲探討此相關紊流結構之特性，故加以分析渦度場 (vorticity field) 分布，透過對作沿流向平均而得到。由於前述之速度擾動分布，發現相關紊流結構之主要構成可以視為成對之沿流向渦度擾動，於圖 2-59 (a) 之綠色框中，可以發現明



顯成對之沿流向渦度擾動結構。在低溫條痕之左側，即 $+y$ 軸方向，為沿流向渦度擾動之正值，而右側則為負值，符合前述之環流的觀察。在垂直向渦度擾動分布（如圖 2-59(c)）與沿流向渦度擾動一致，而跨流向渦度擾動分布可分為上下兩層，上層為負值、下層為正值。然而以強度作比較，沿流向渦度擾動約為跨流向渦度擾動之五倍、垂直向渦度擾動之兩倍，故主要結構為沿流向渦度擾動，亦可由圖 2-37 而得之。隨著時間發展在 $t = 30T_0$ 時（圖 2-68、圖 2-69），分布特性與 $t = 5T_0$ 時相當，而趨勢更加顯著。

比較不同波長之流場，如圖 2-70 至圖 2-81 為波長 15cm 之結果、圖 2-82 至圖 2-93 為波長 20cm 之結果，隨著波長變大而其流場亦隨之紊亂，然而低溫條痕與水面下相關紊流結構之特性則為一致，唯其結構較難輕易辨識。針對其條痕數目作比較，波長 7.5cm 與 15cm 之流場，其條痕數目隨時間有先減後增之趨勢，於 $t = 30T_0$ 時之個數分別約為 11 與 14 條；波長 20cm 之流場其條痕數目隨時間逐漸減少，於 $t = 30T_0$ 時之個數約為 16 條。比較不同波長之流場，其條痕數目將隨波長變大而增加。

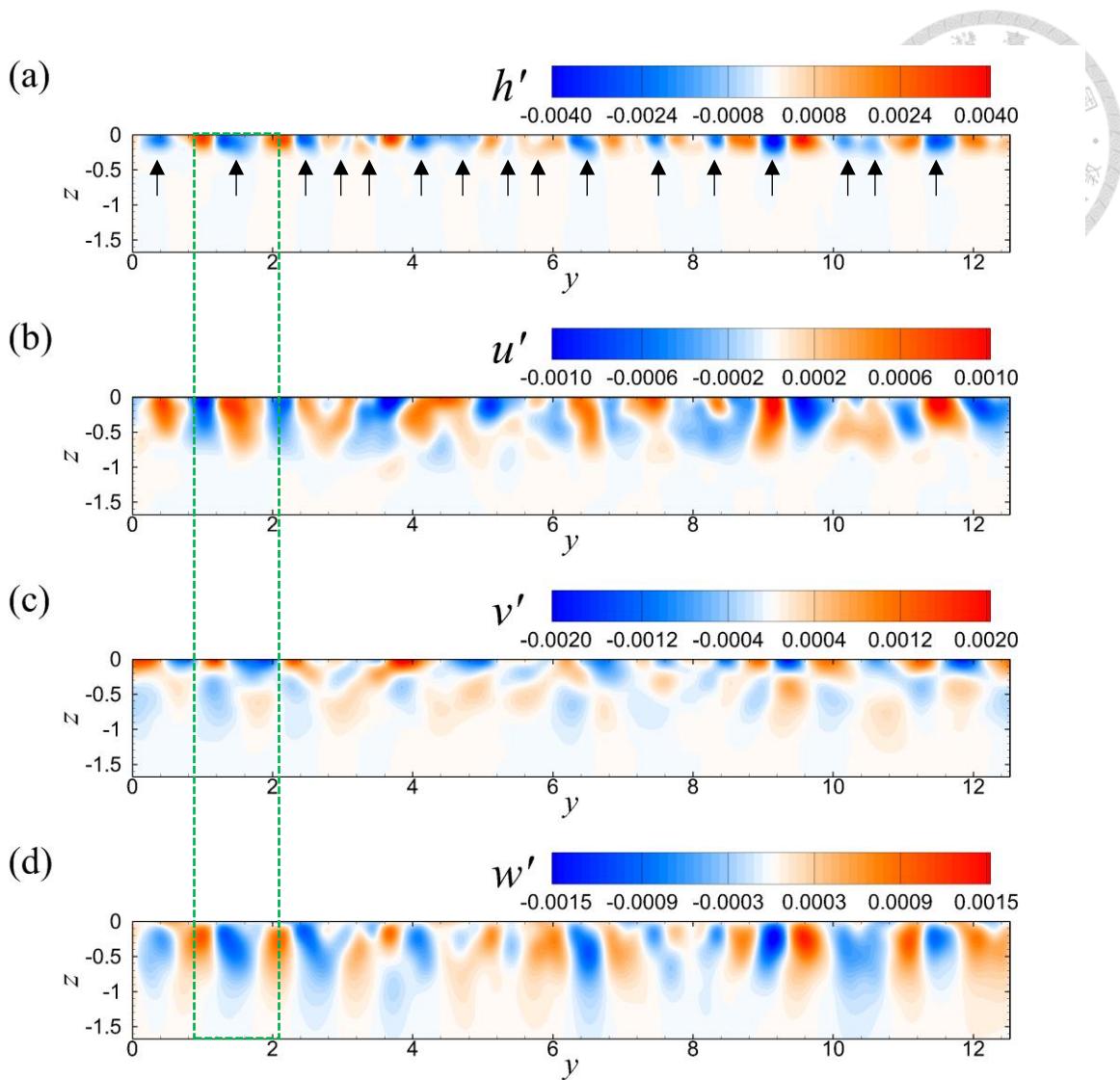


圖 2-58：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

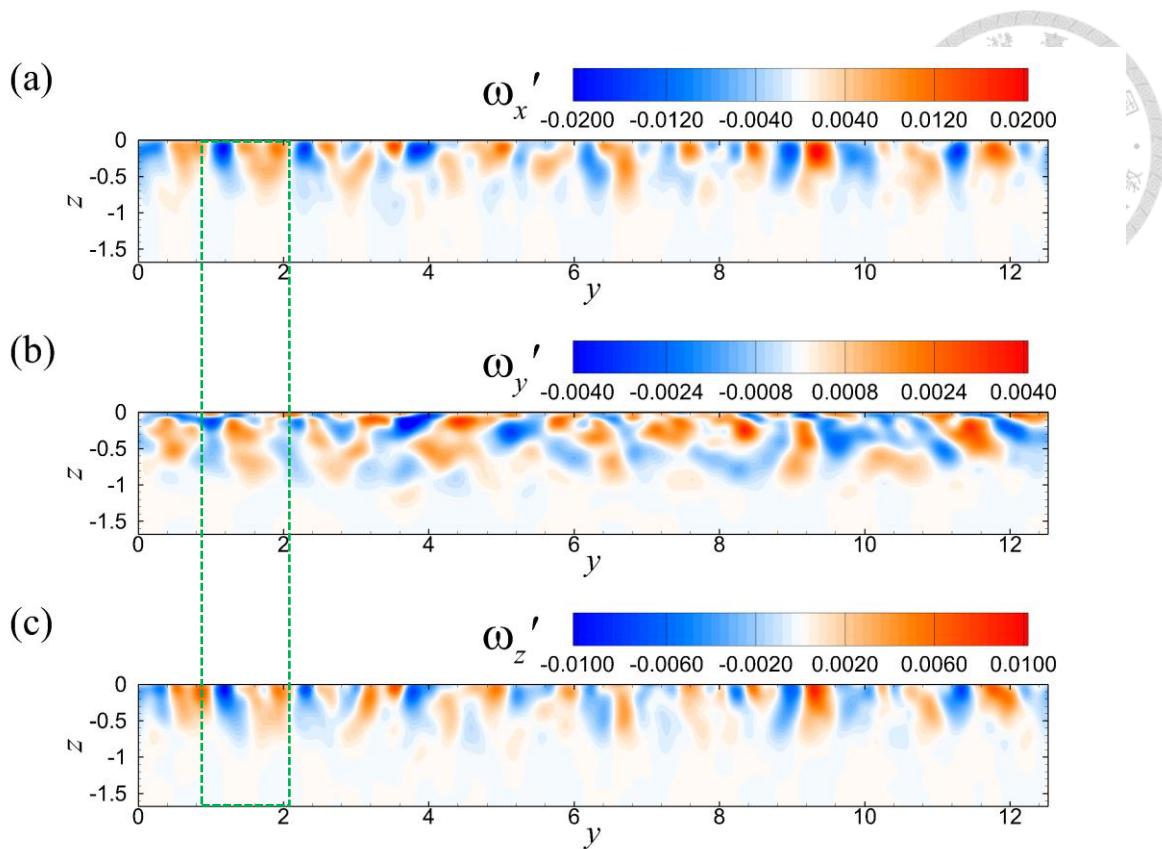


圖 2-59：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

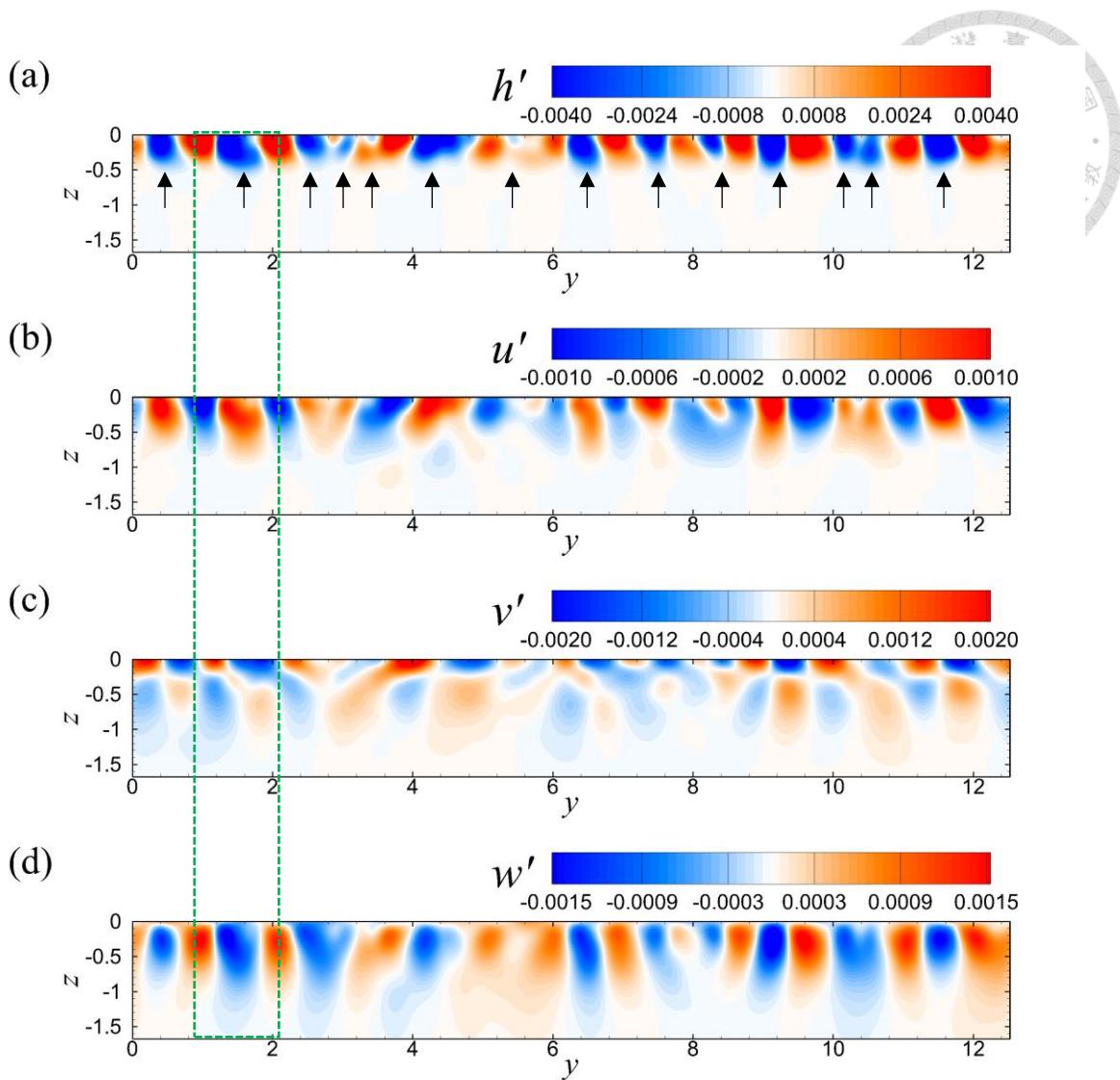


圖 2-60：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。
 圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

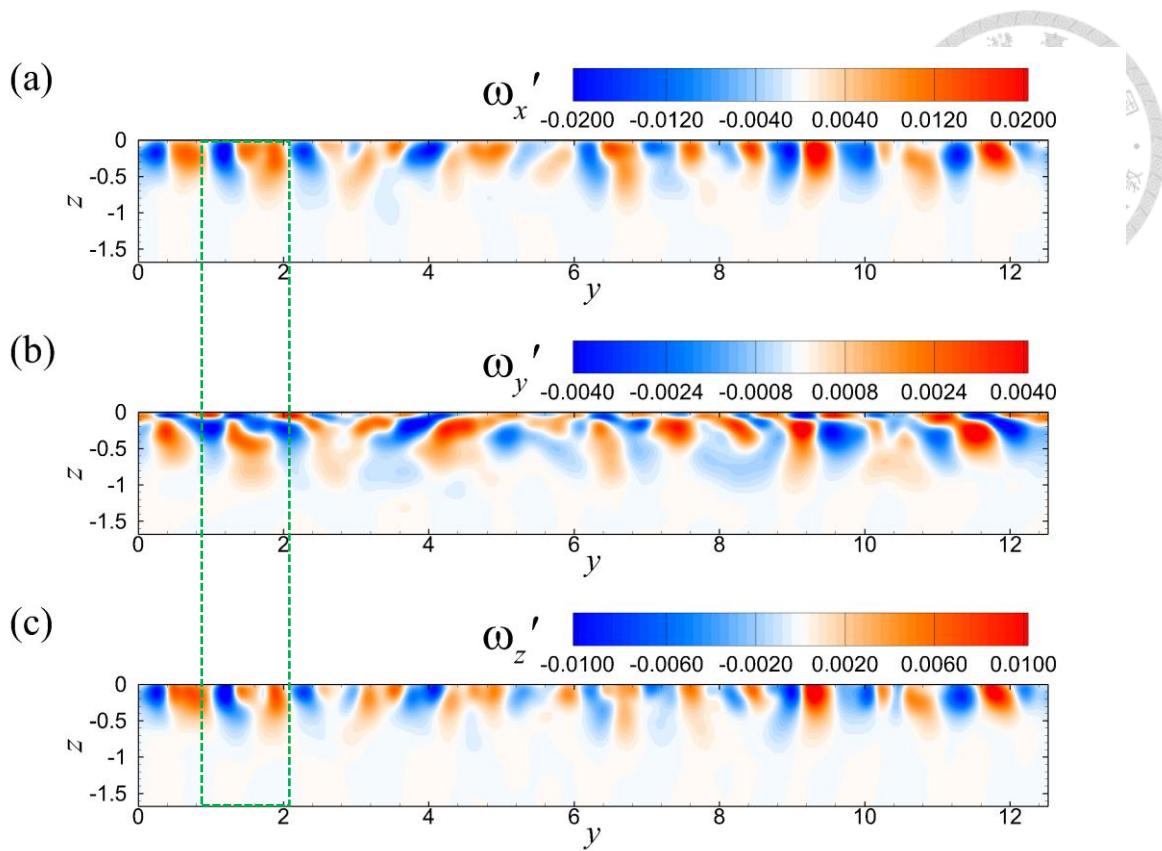


圖 2-61：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

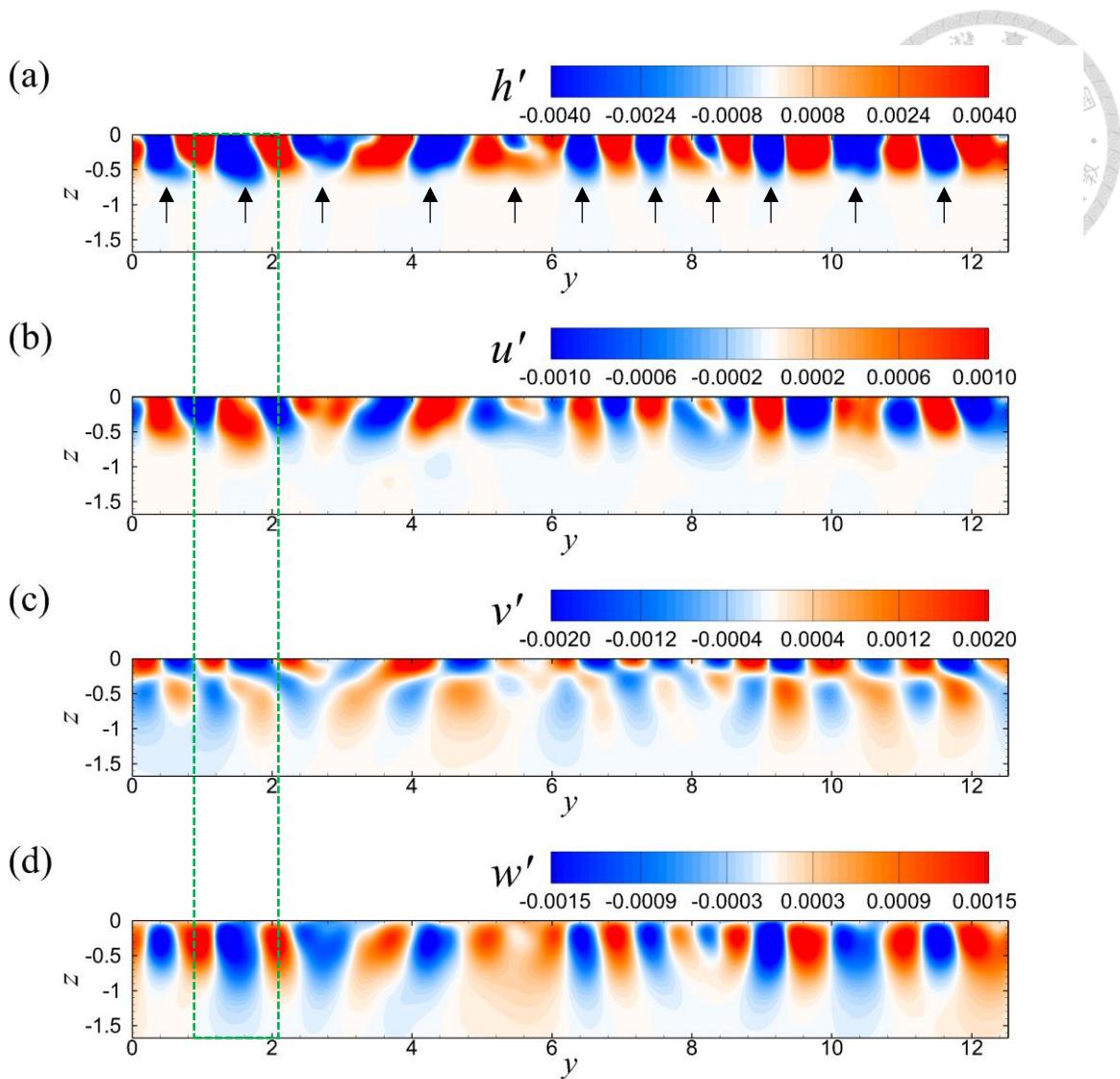


圖 2-62：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。
 圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

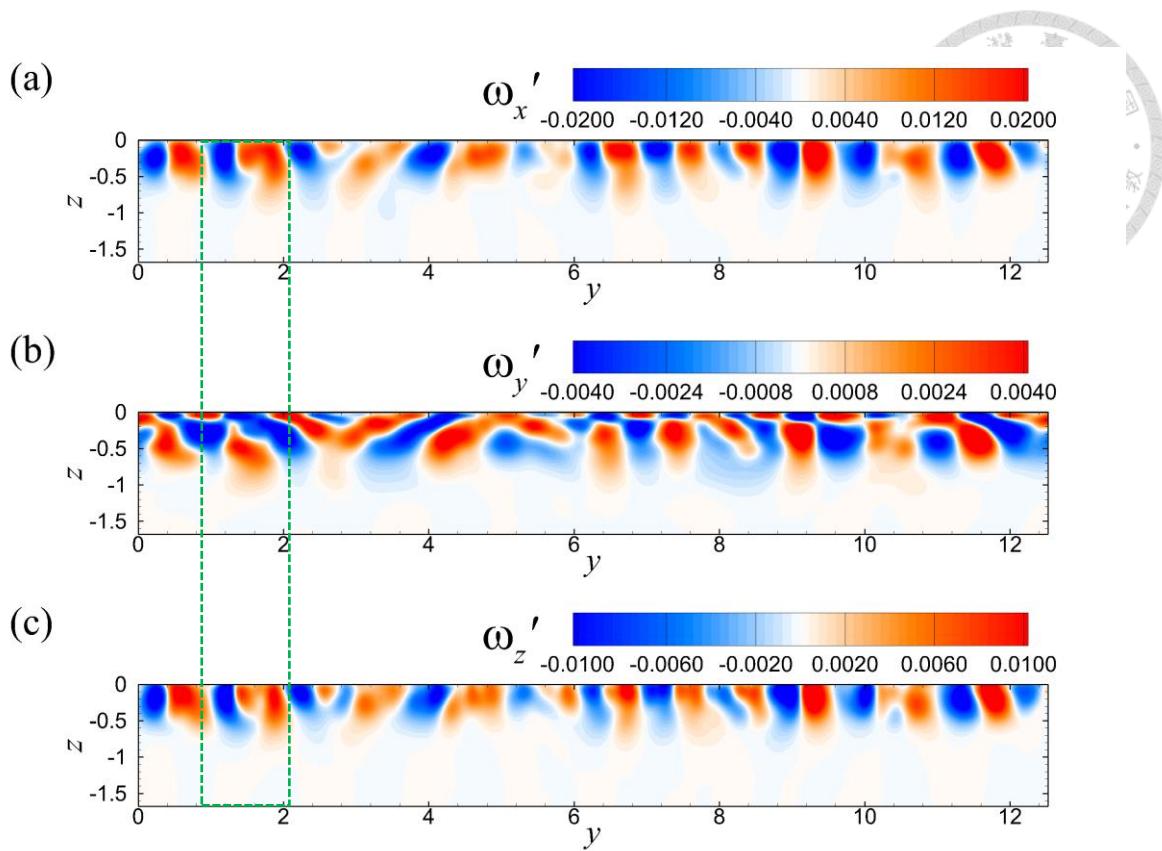


圖 2-63：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

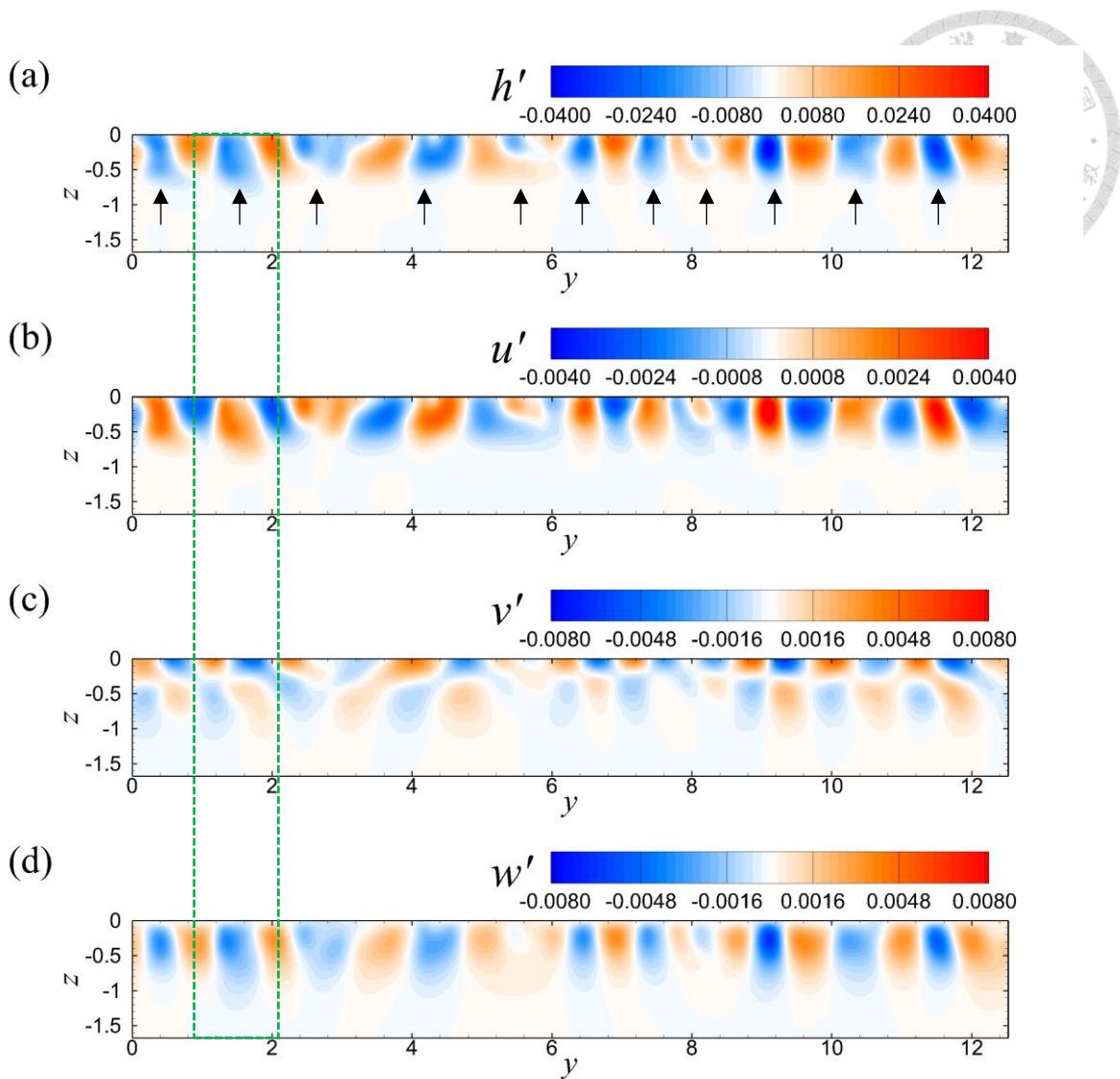


圖 2-64：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。
 圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直
 向速度分布。

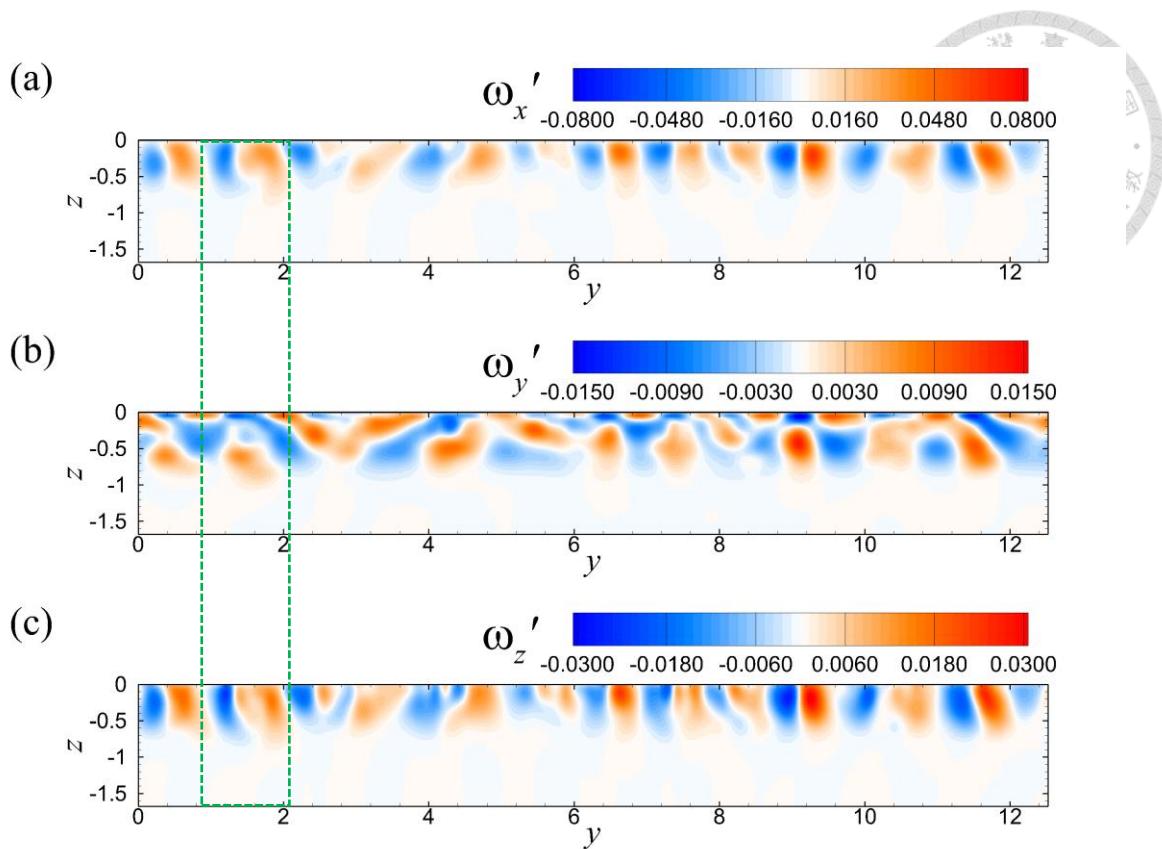


圖 2-65：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

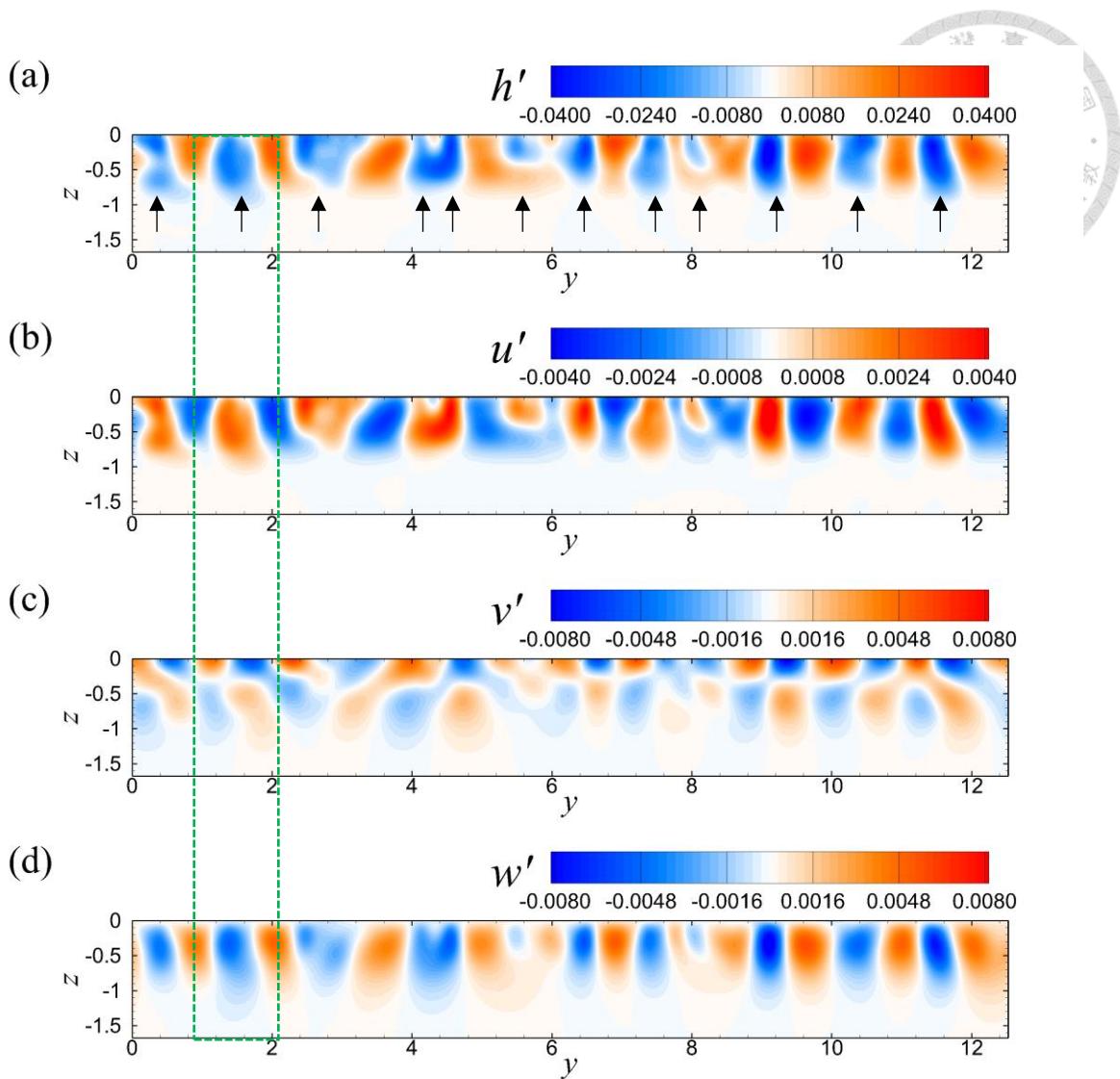


圖 2-66：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。
 圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直
 向速度分布。

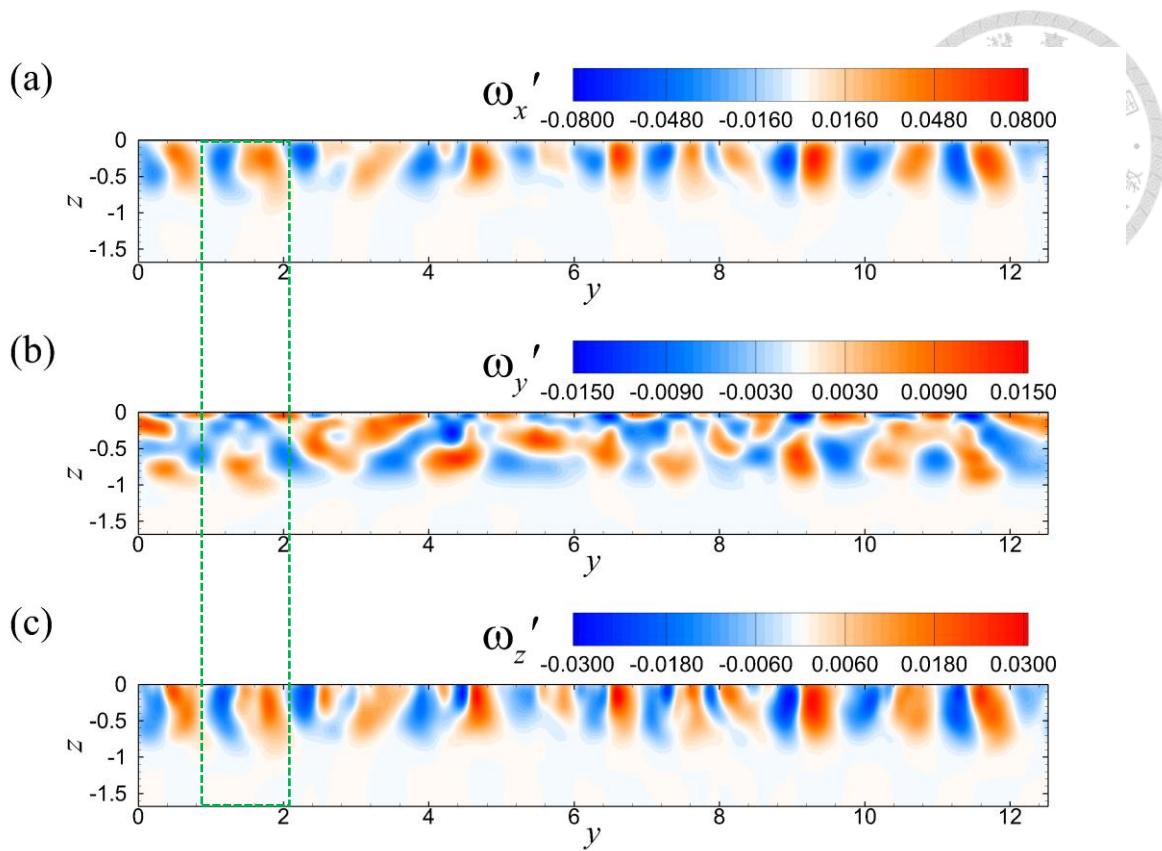


圖 2-67：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

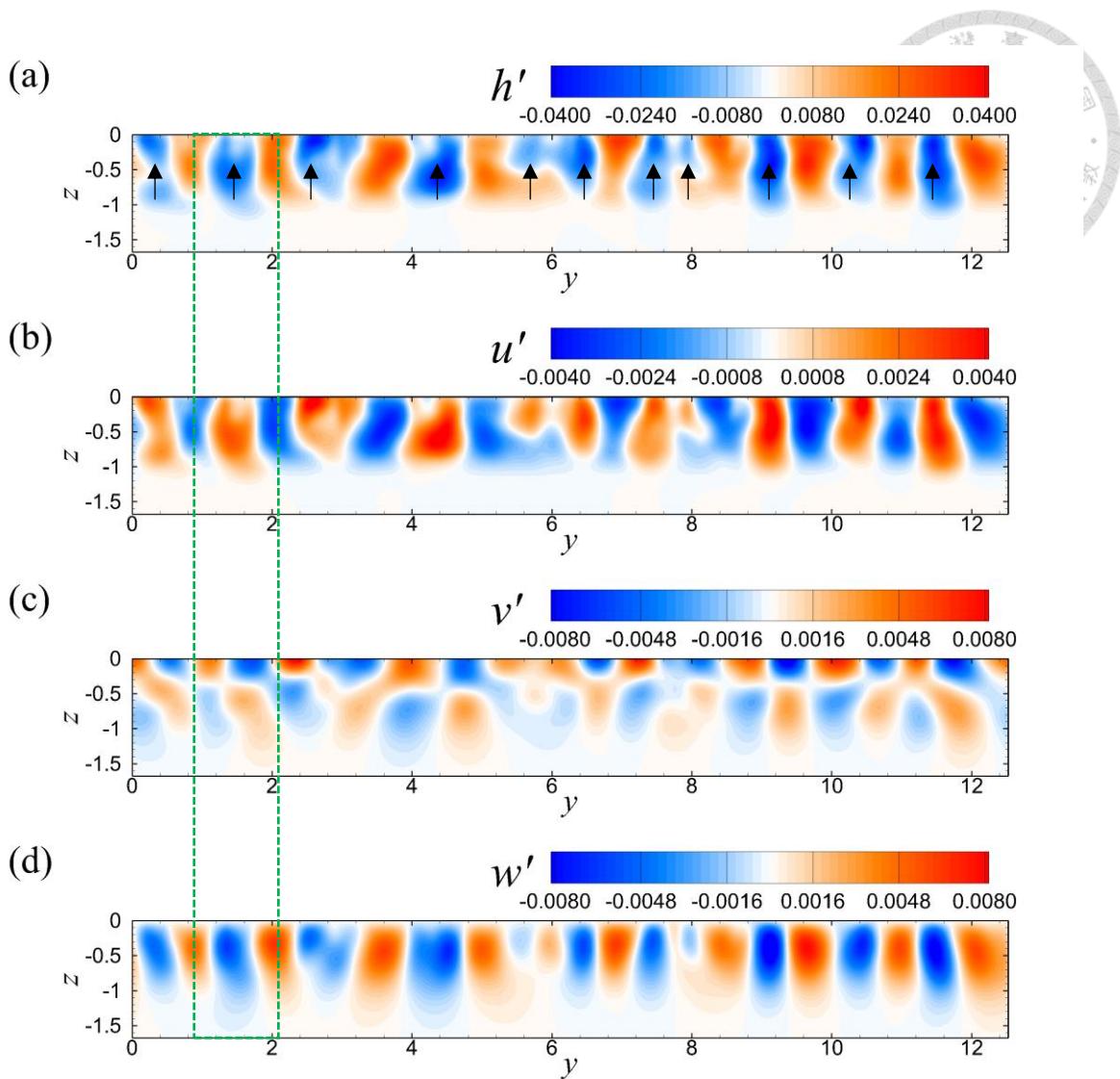


圖 2-68：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。
 圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直
 向速度分布。

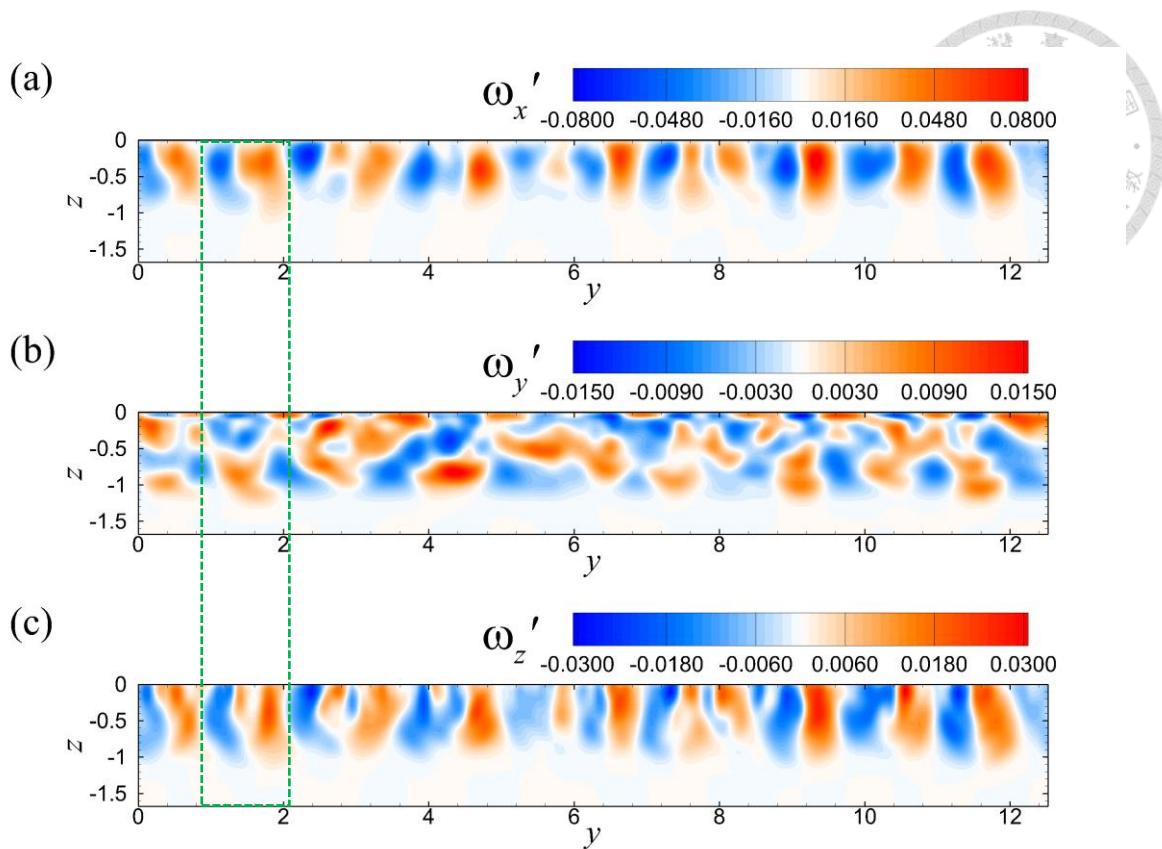


圖 2-69：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

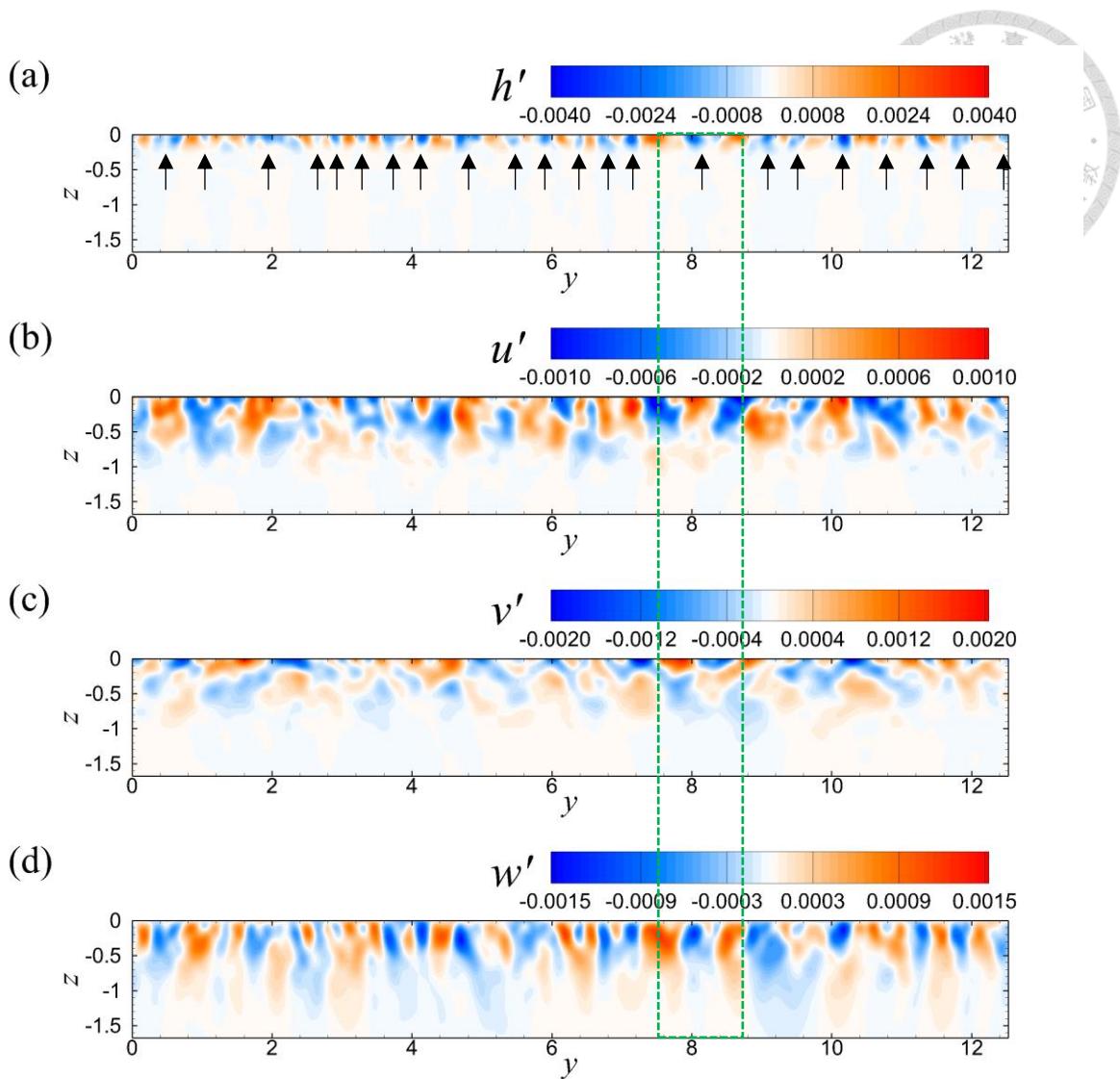


圖 2-70：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

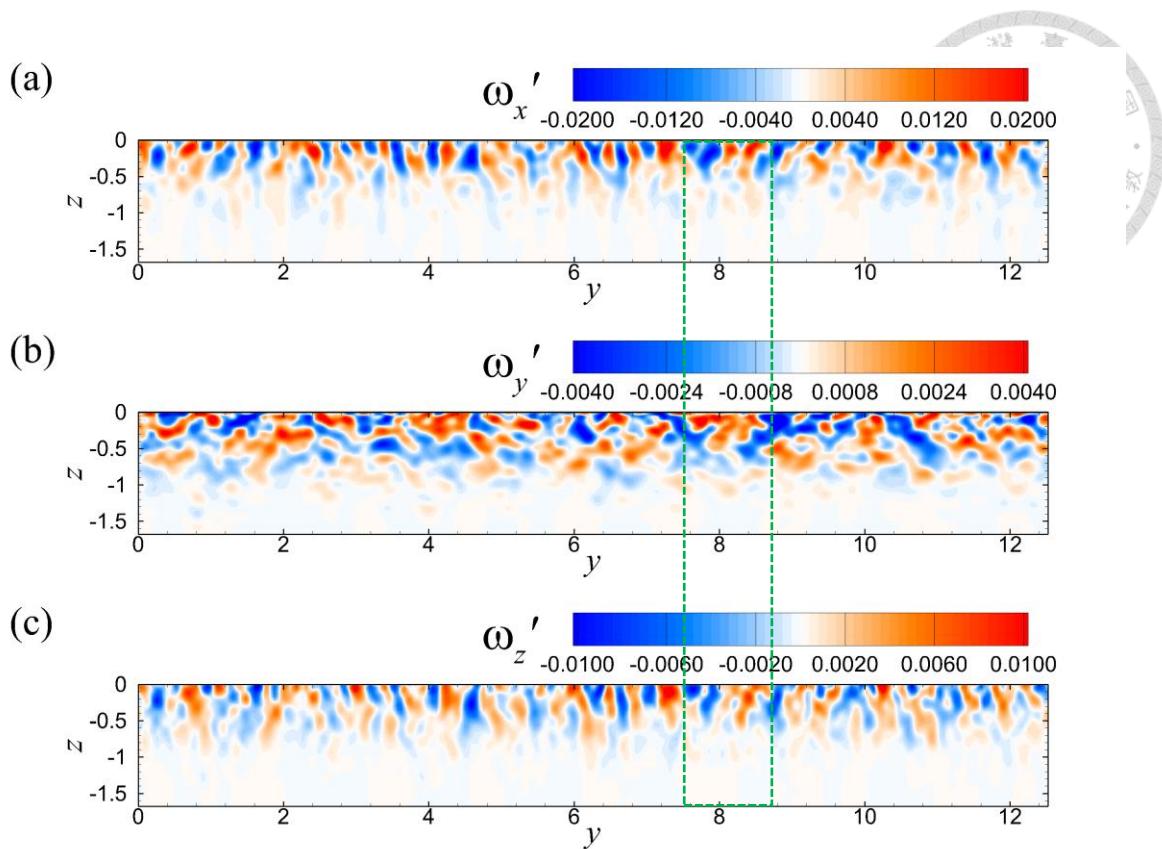


圖 2-71：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

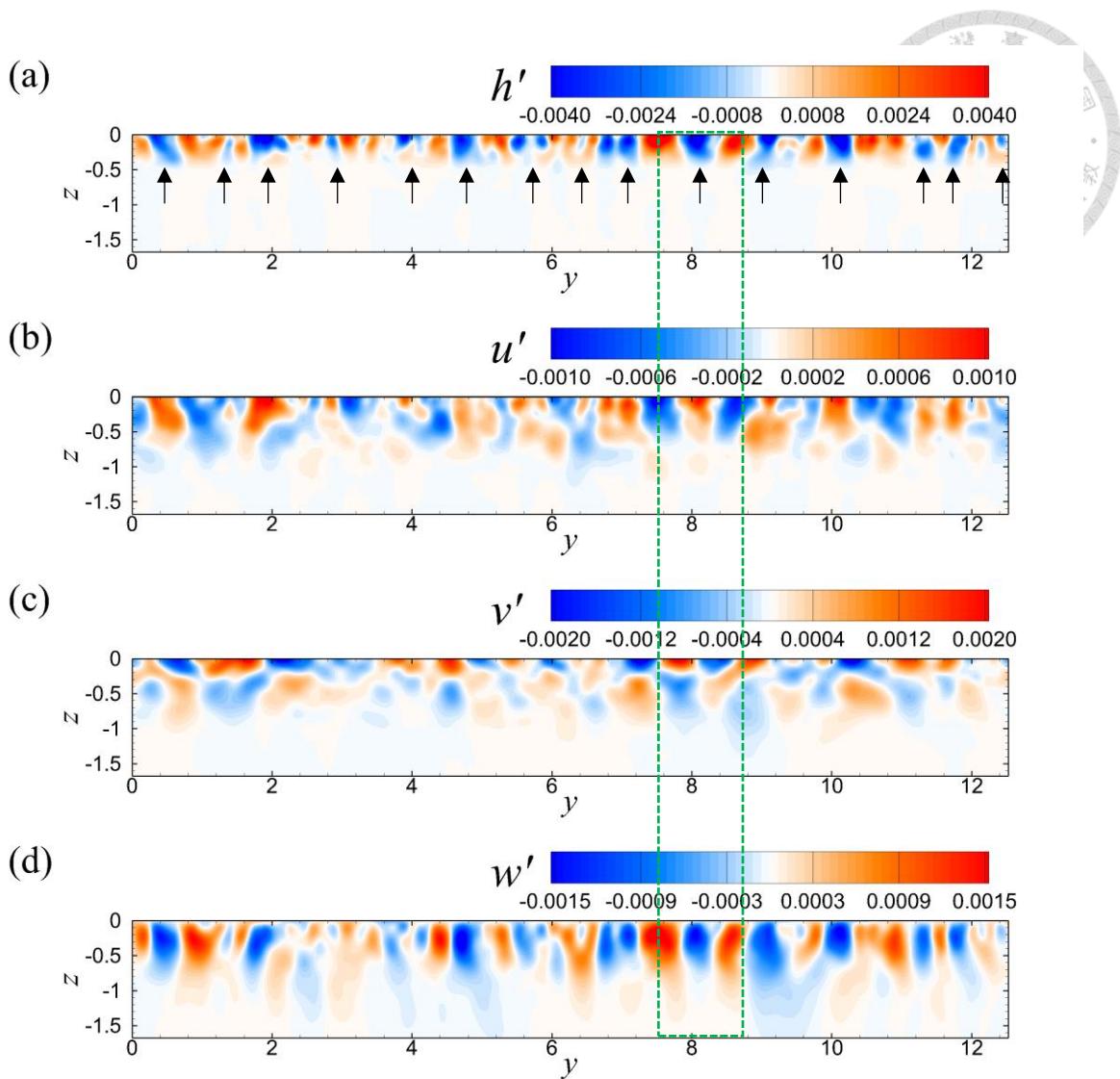


圖 2-72：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

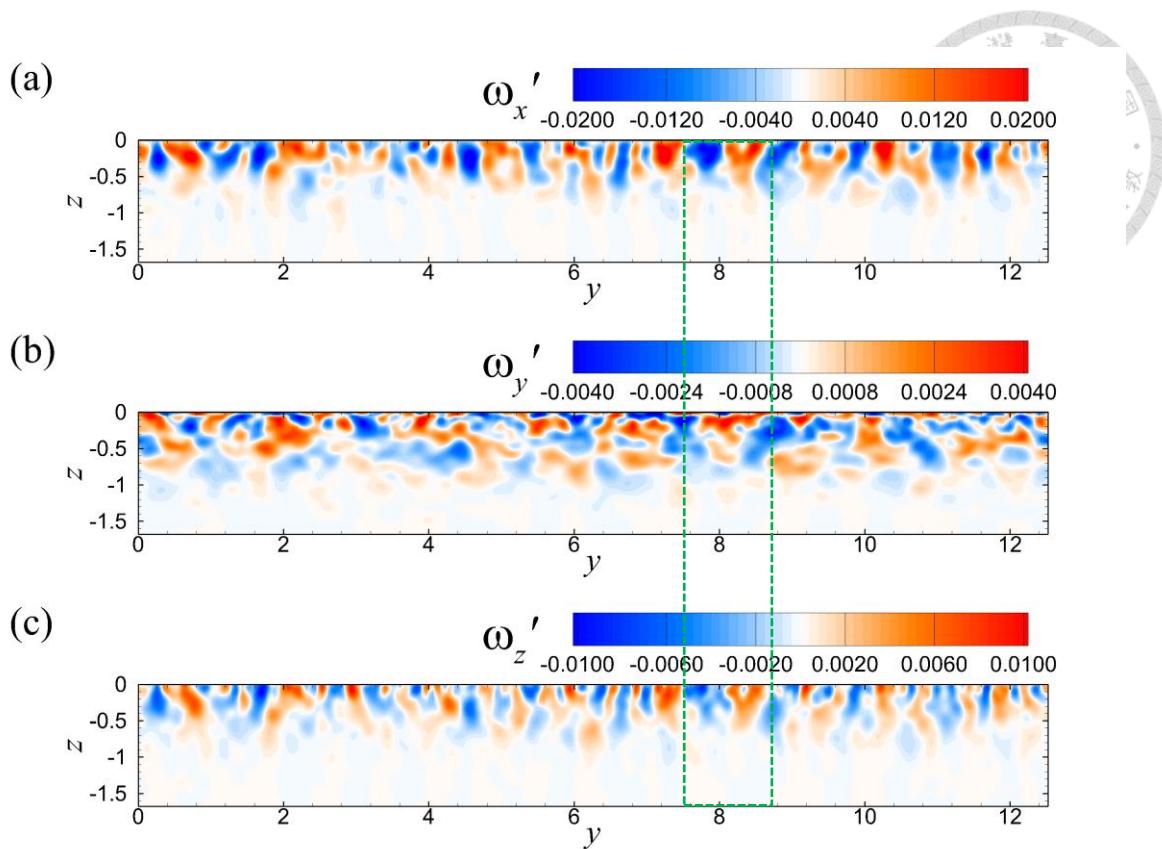


圖 2-73：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

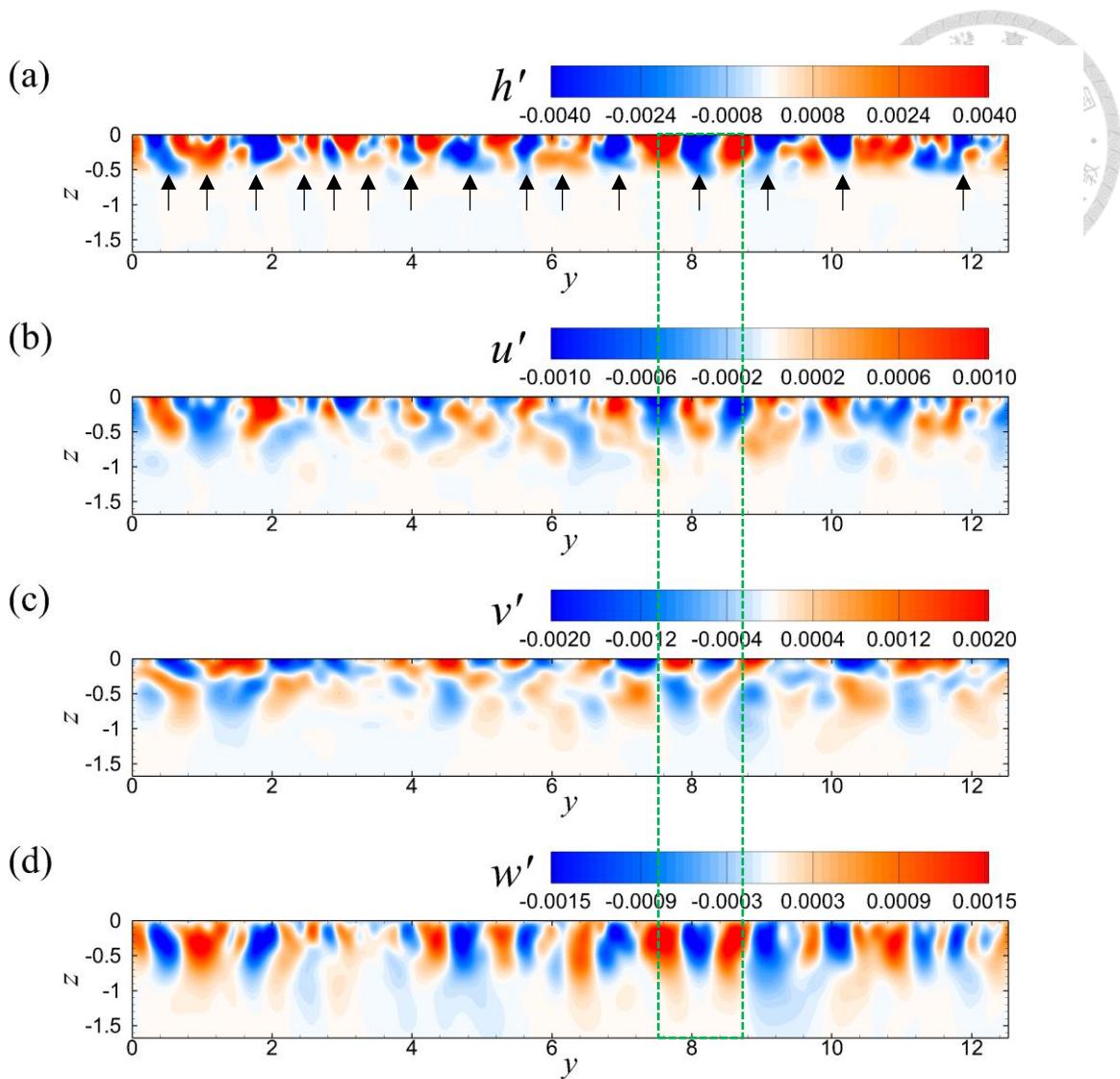


圖 2-74：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

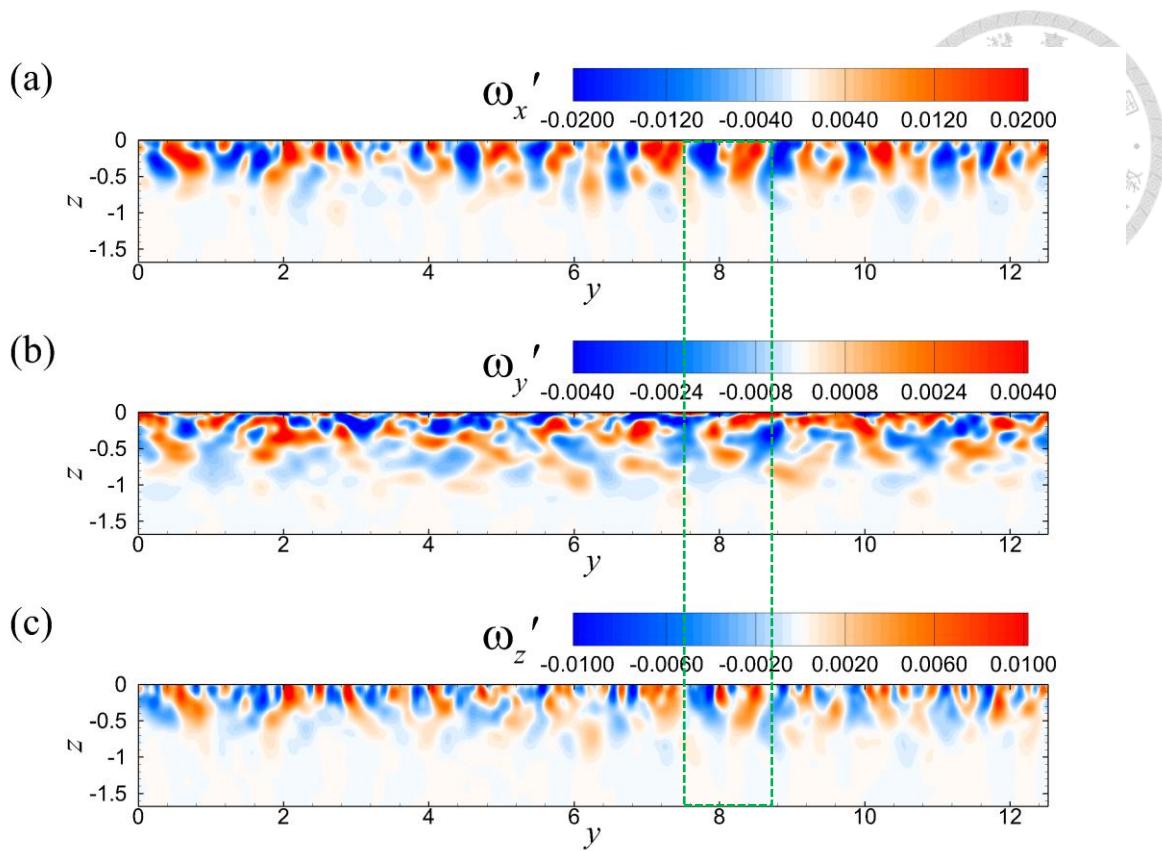


圖 2-75：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

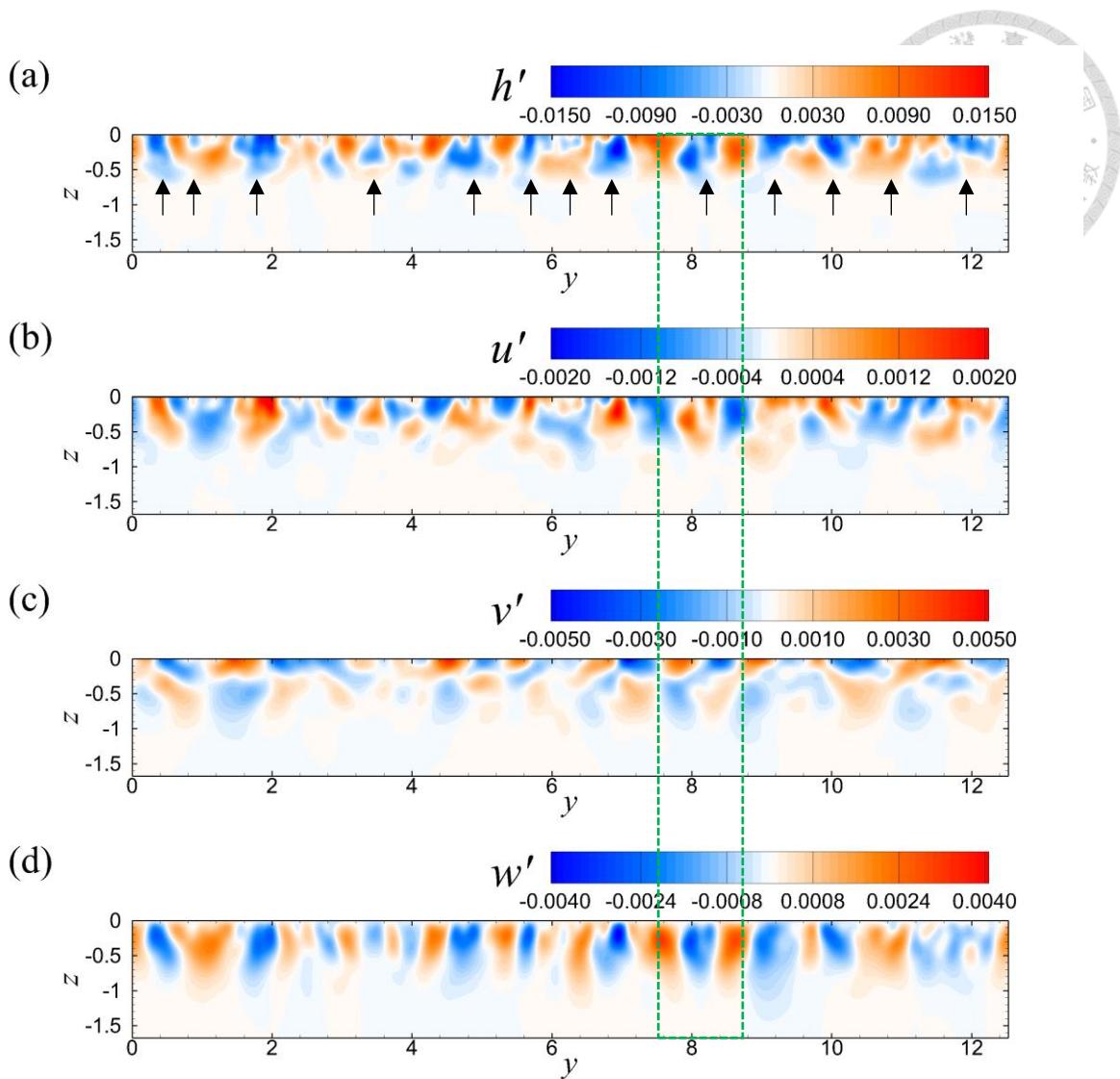


圖 2-76：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

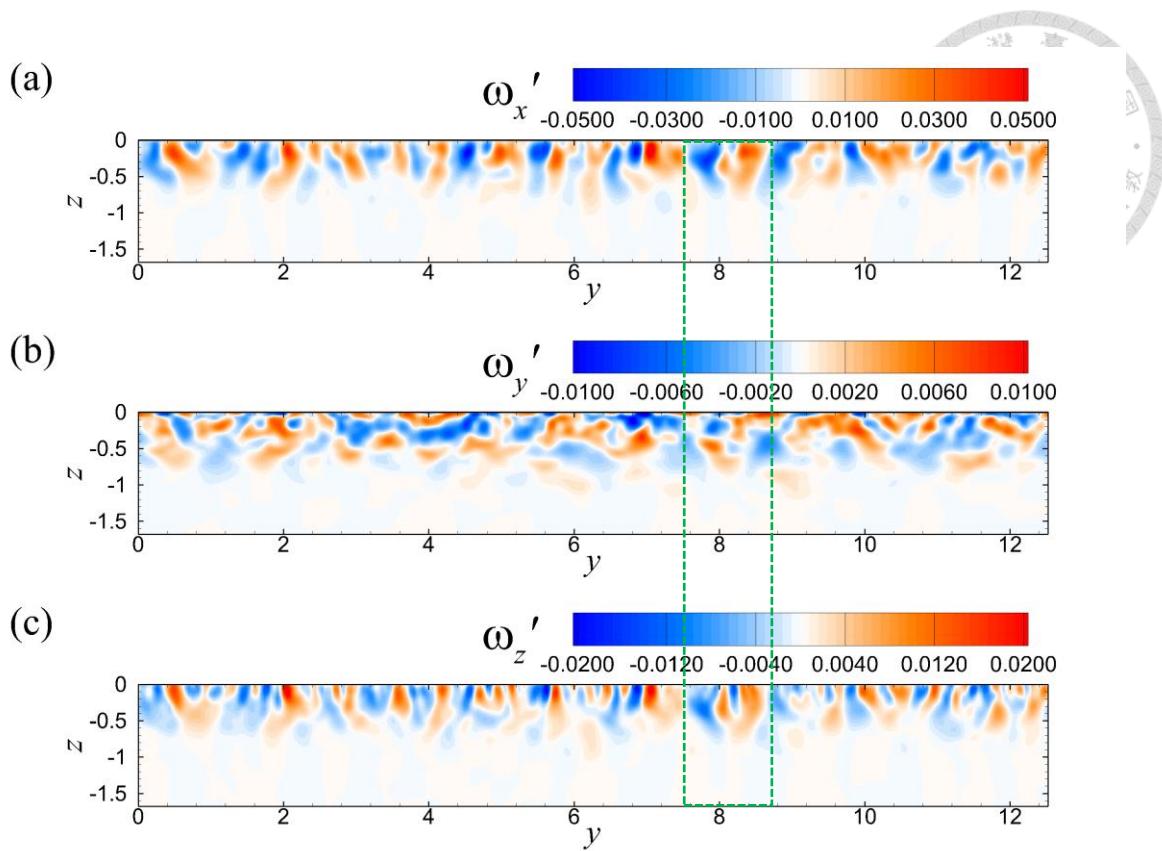


圖 2-77：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

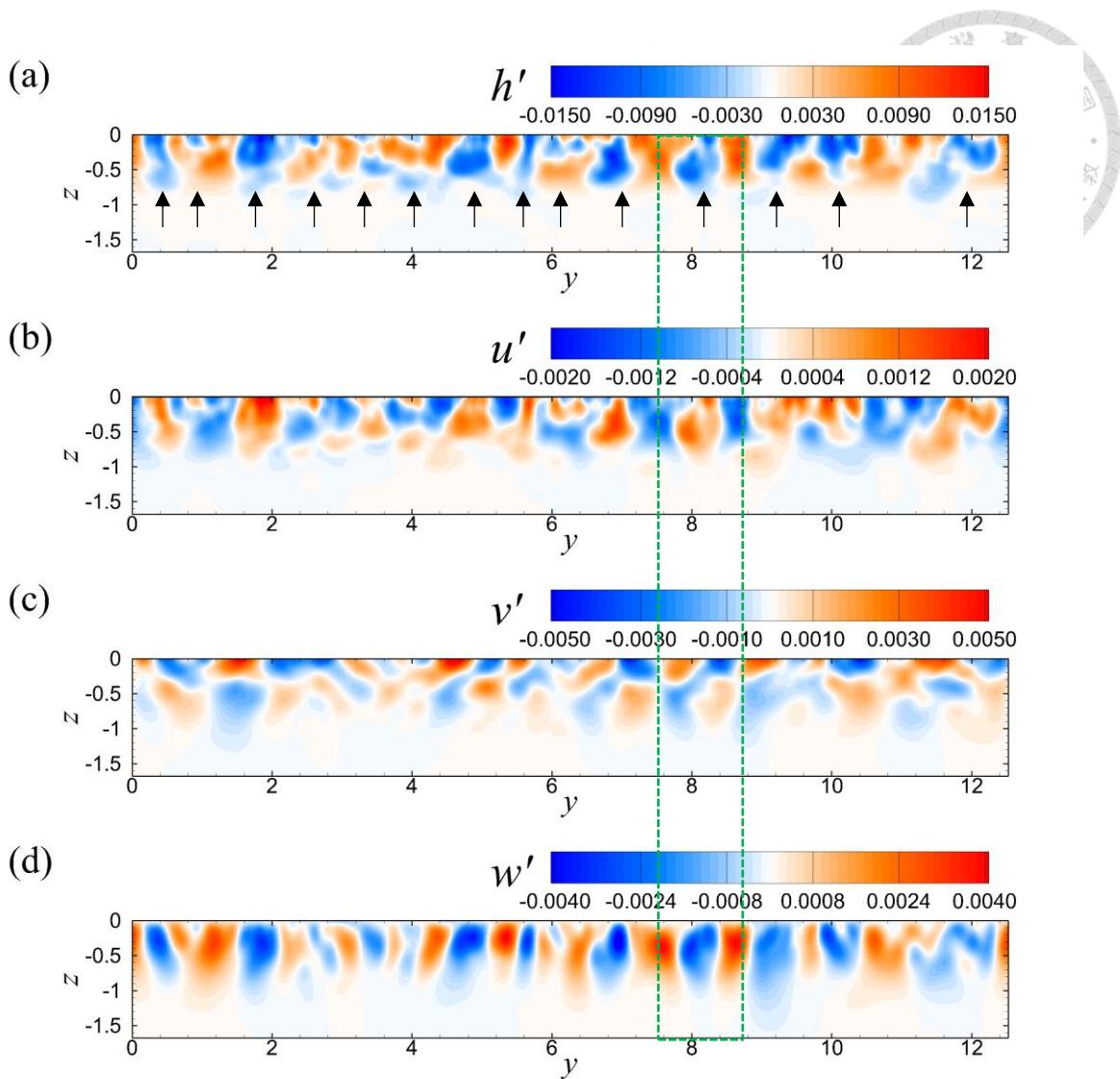


圖 2-78：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

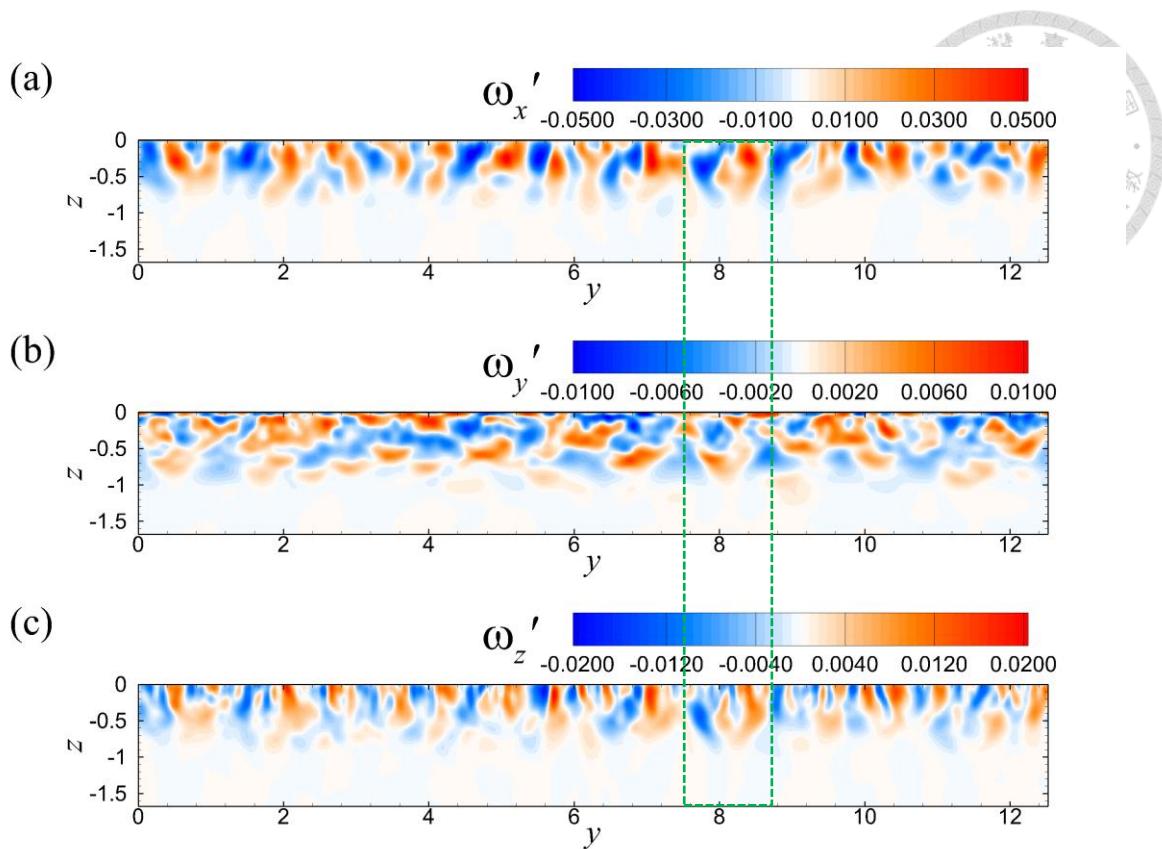


圖 2-79：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

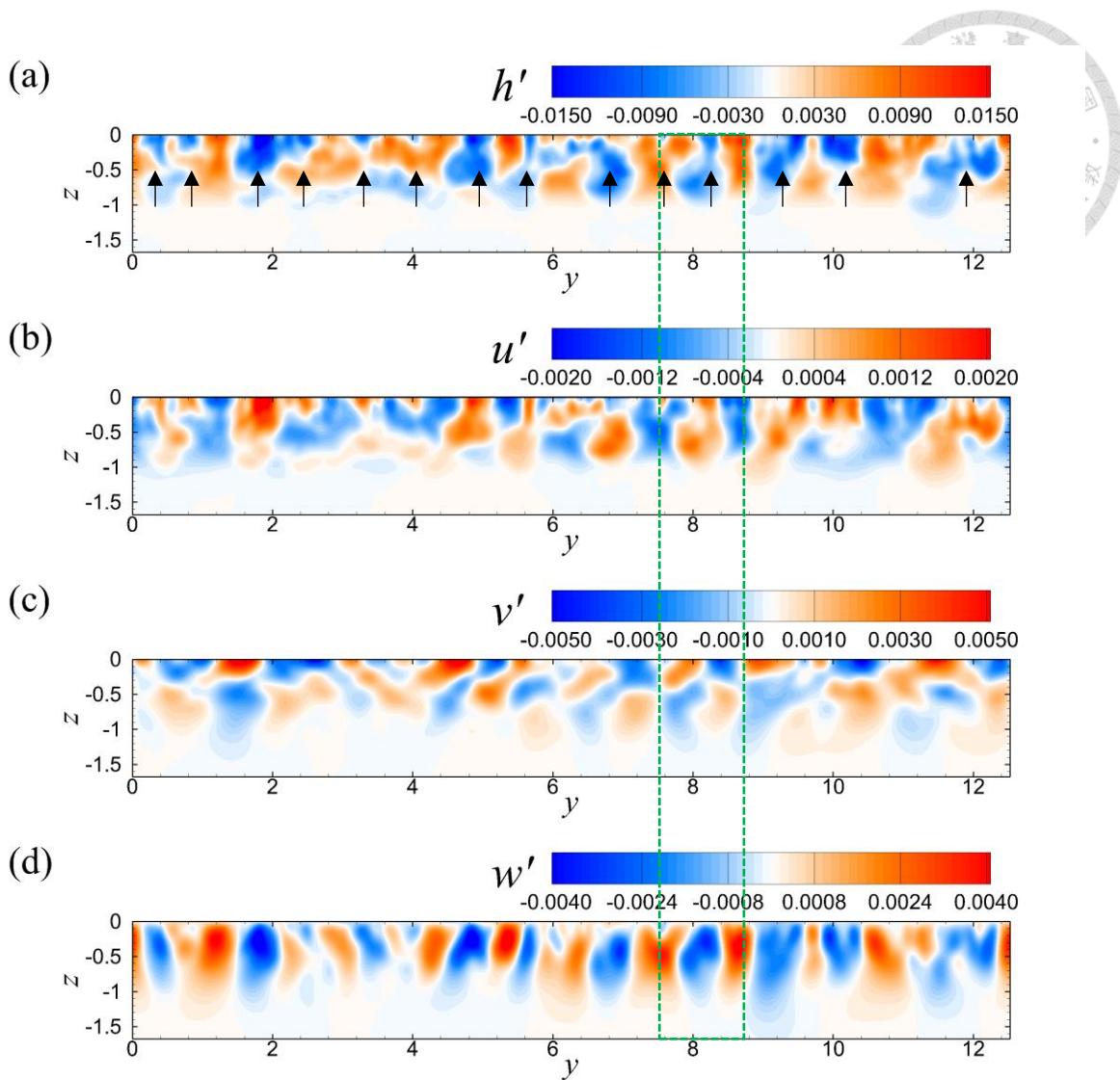


圖 2-80：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

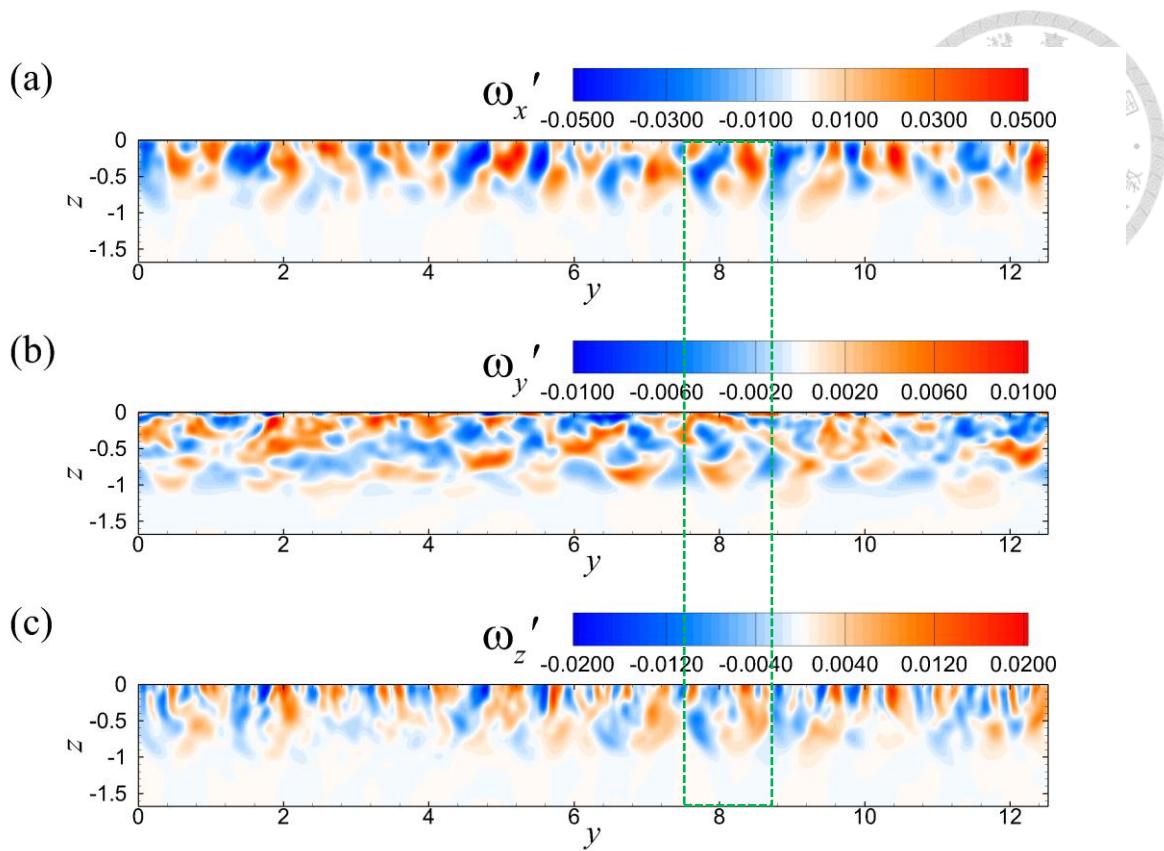


圖 2-81：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

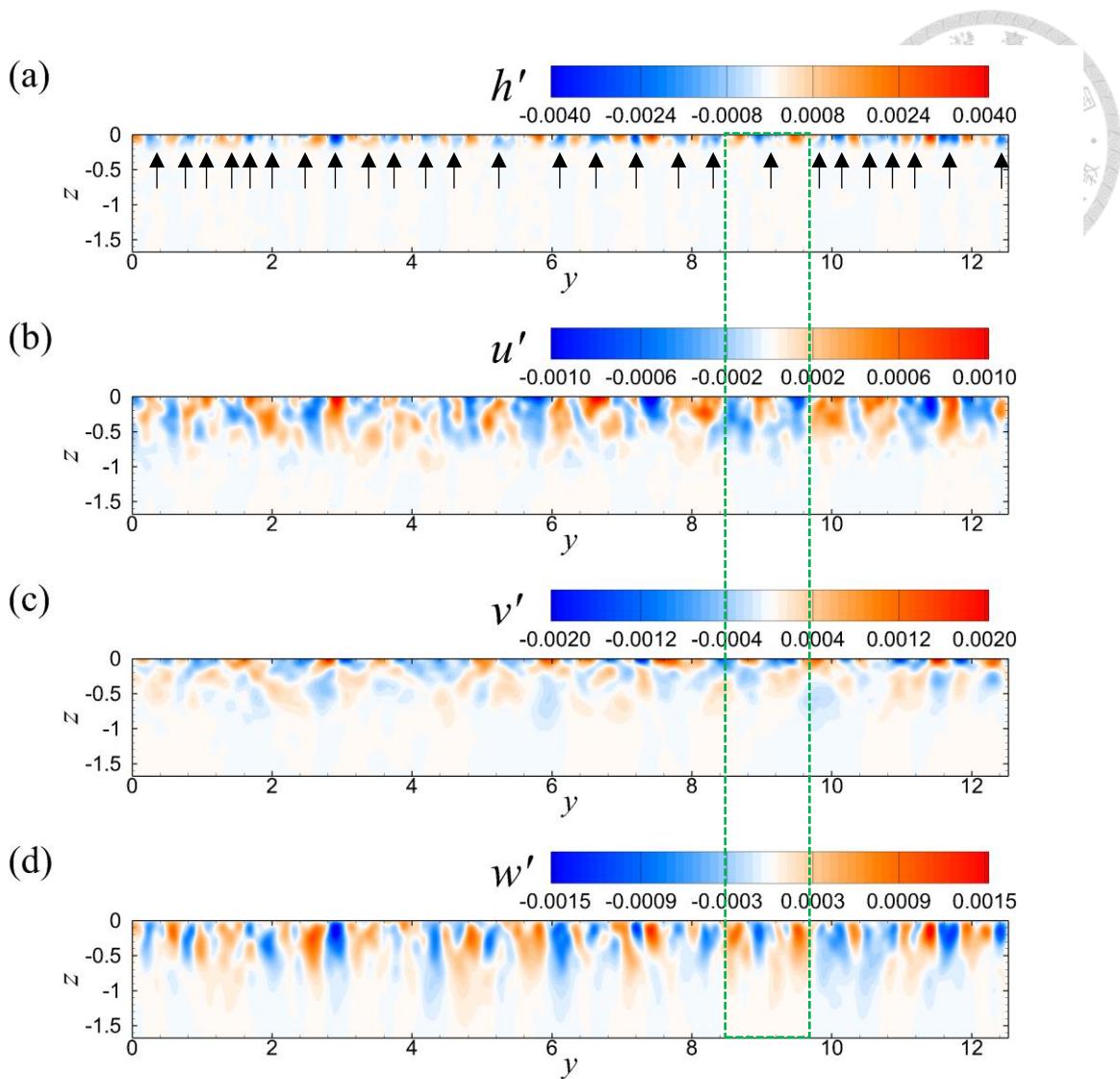


圖 2-82：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

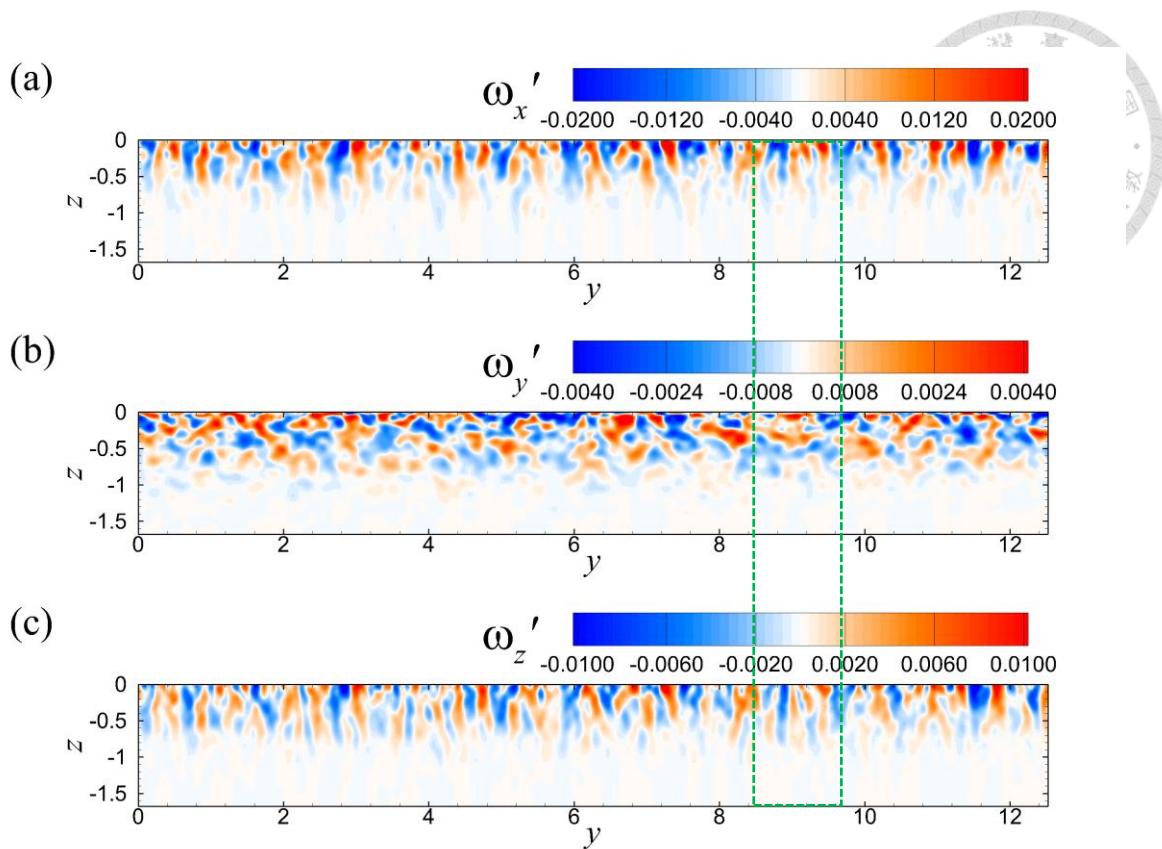


圖 2-83：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

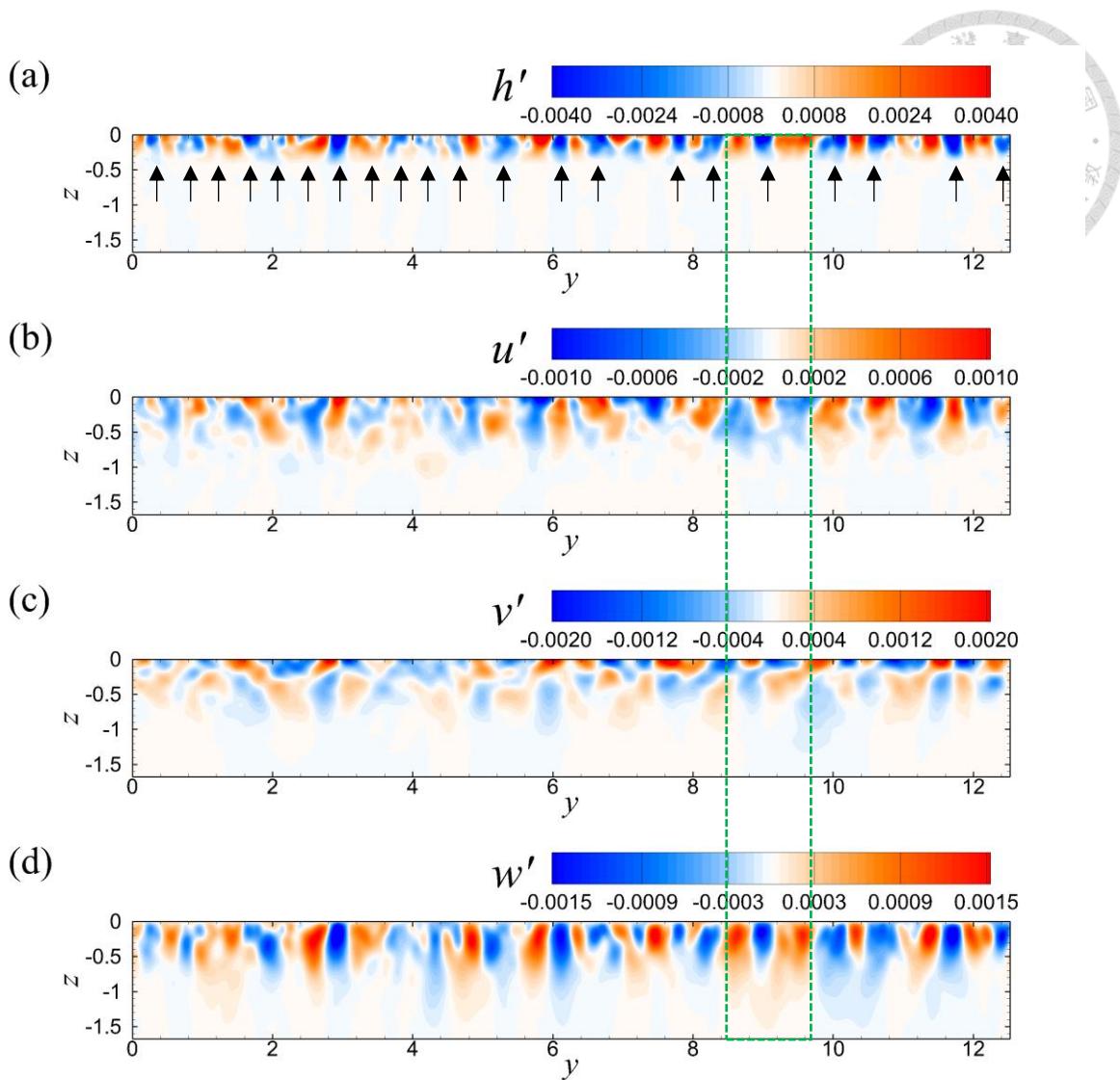


圖 2-84：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

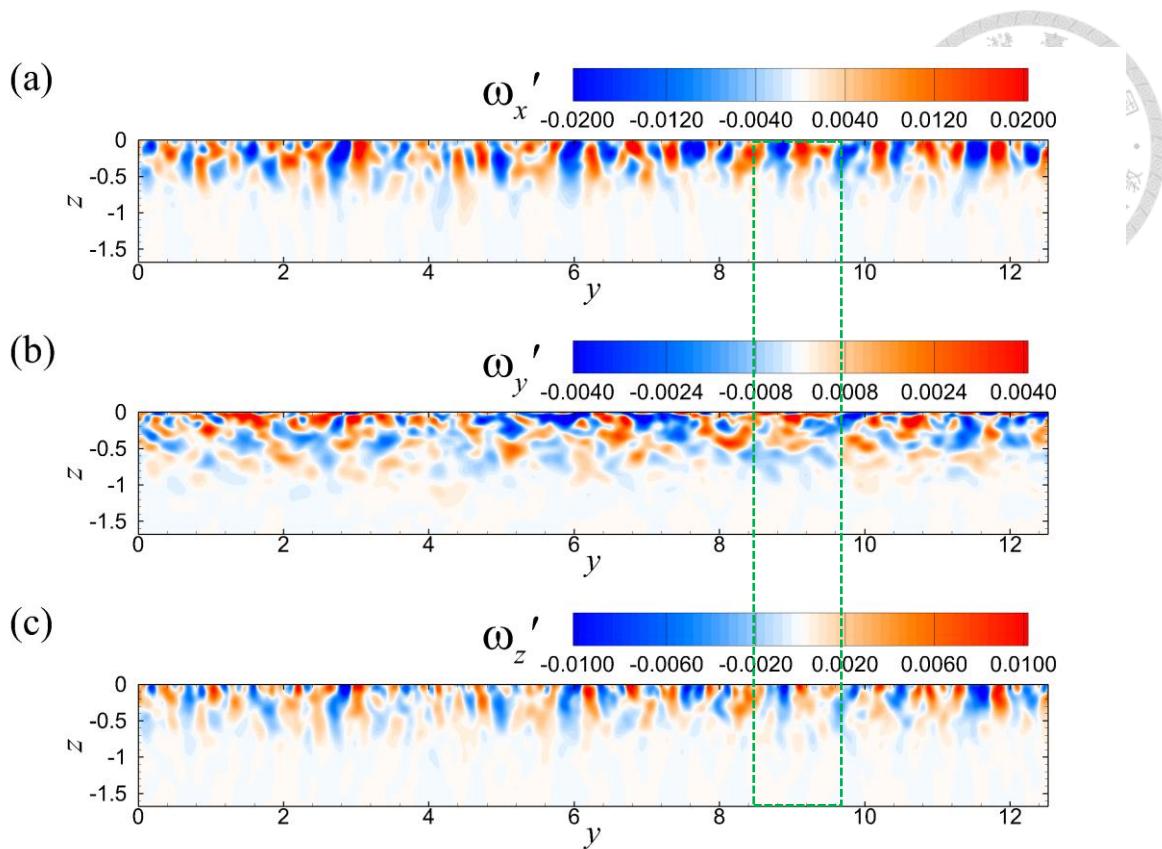


圖 2-85：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

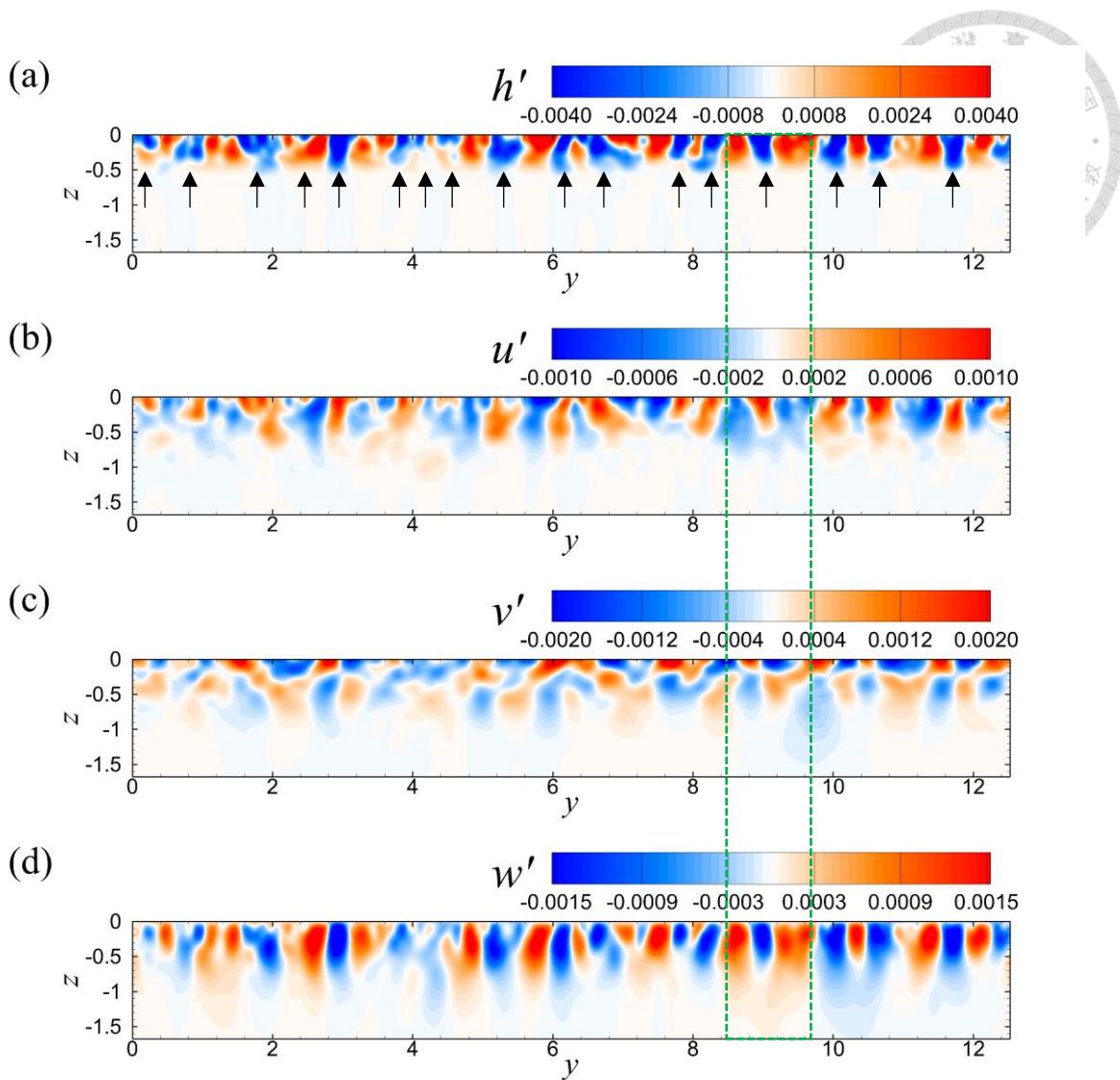


圖 2-86：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

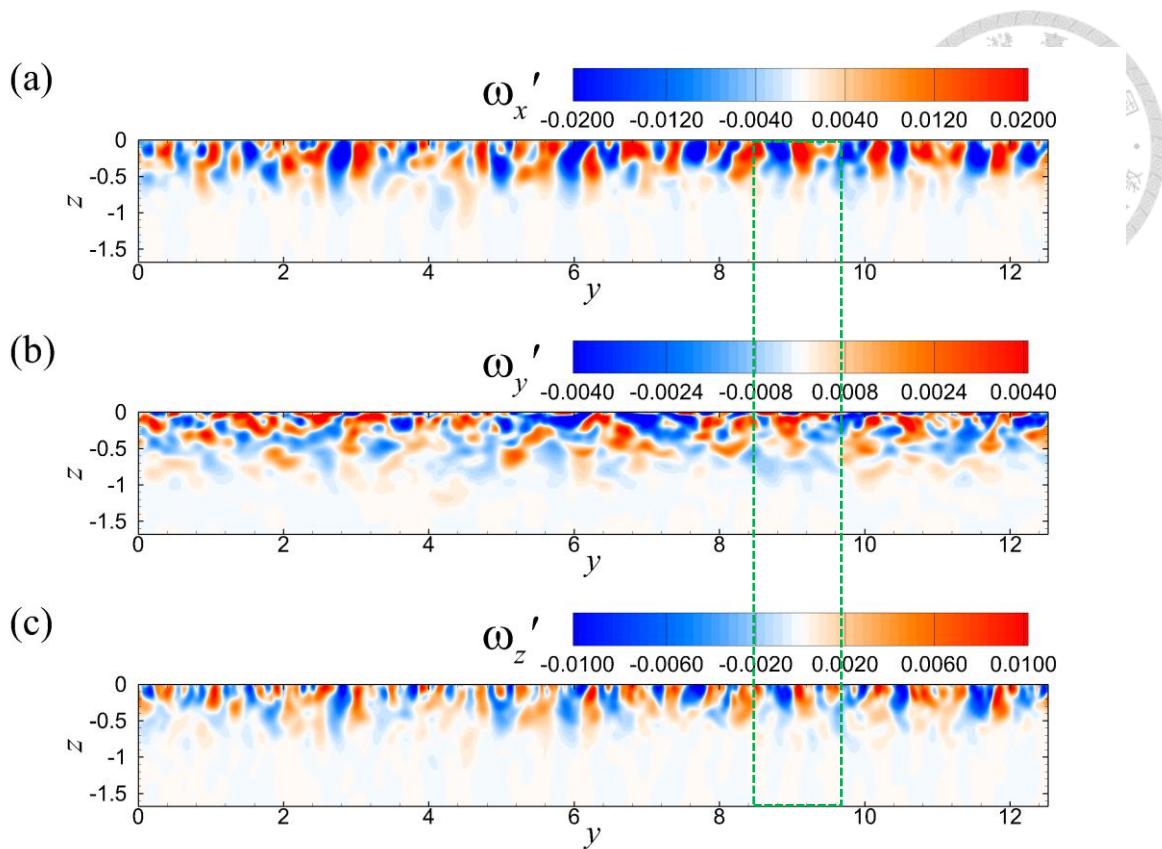


圖 2-87：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

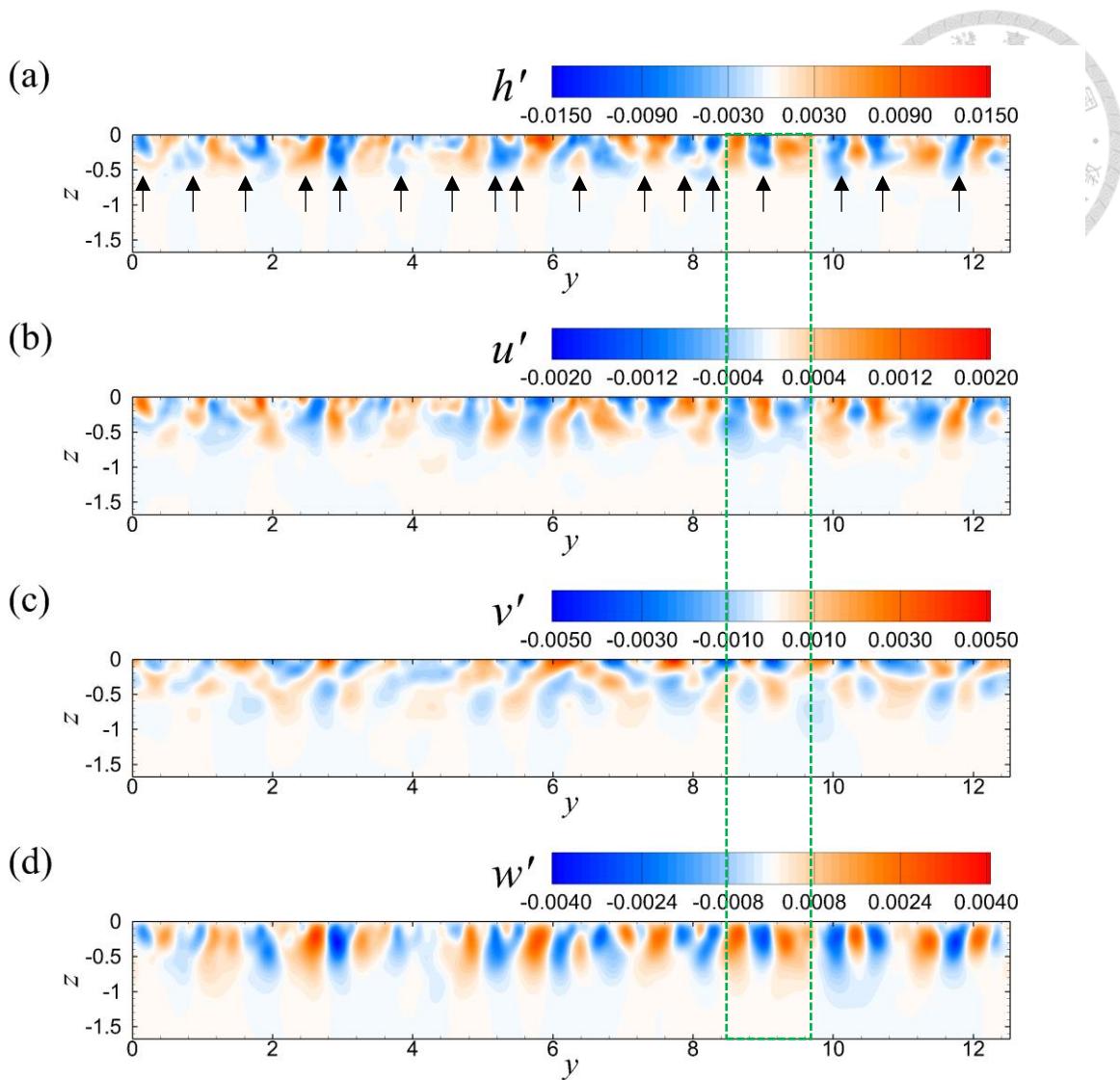


圖 2-88：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

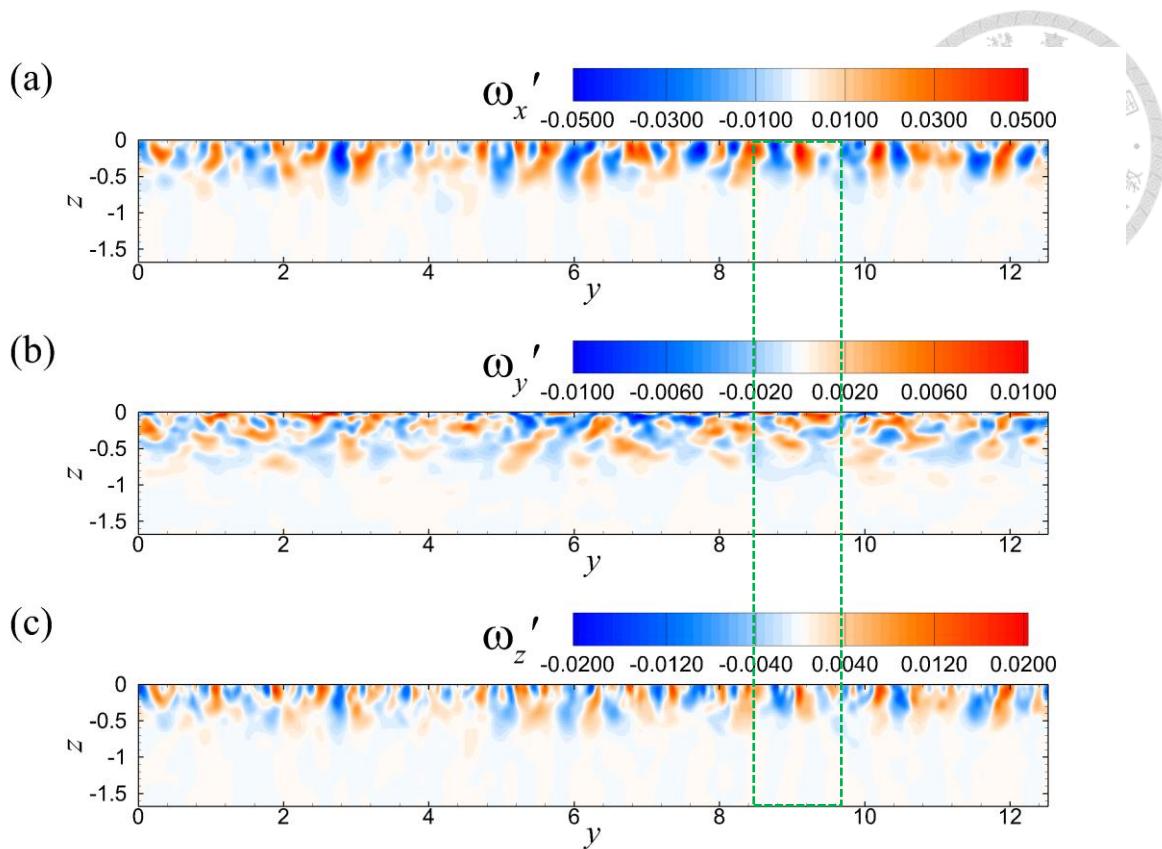


圖 2-89：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

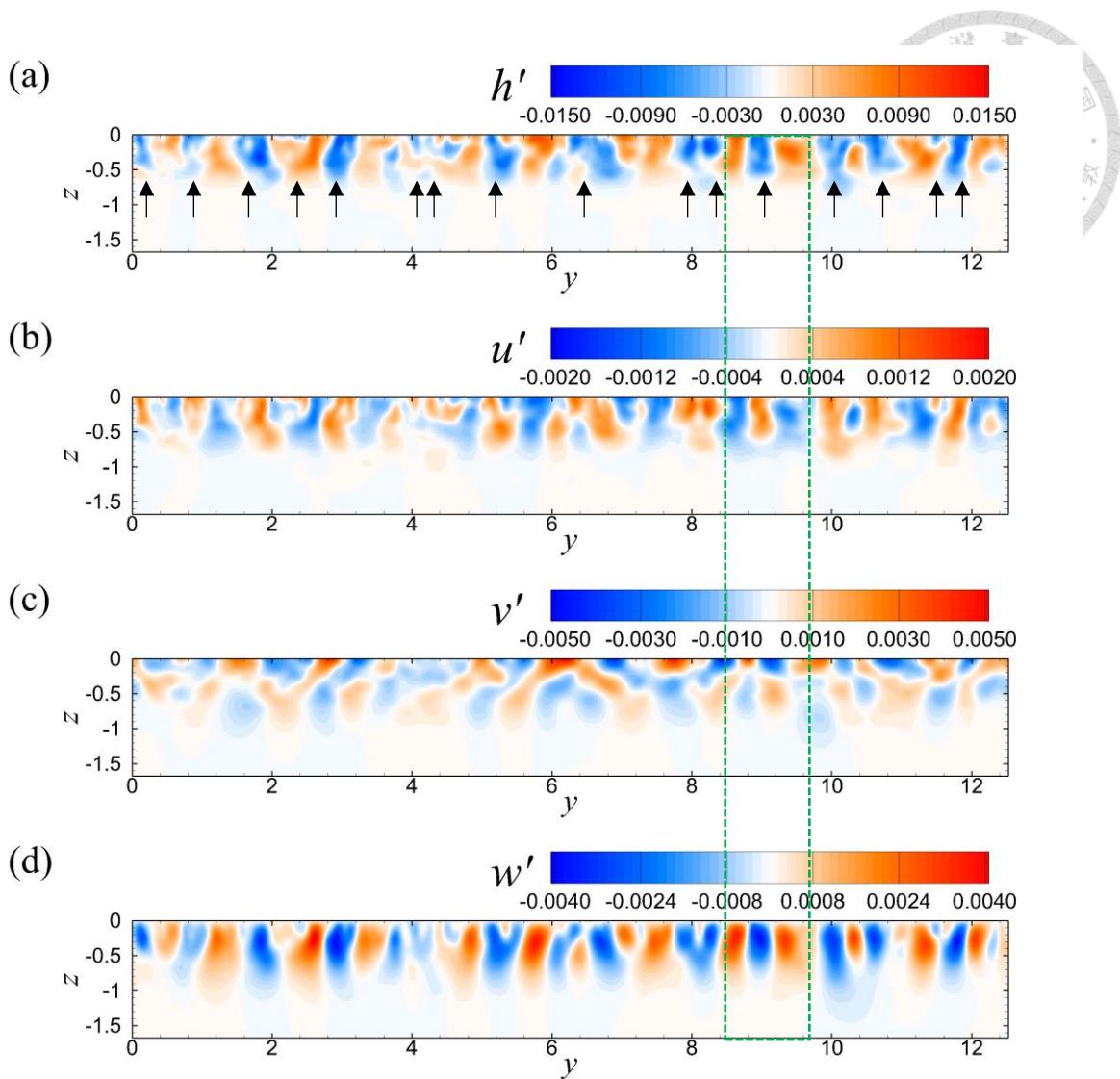


圖 2-90：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

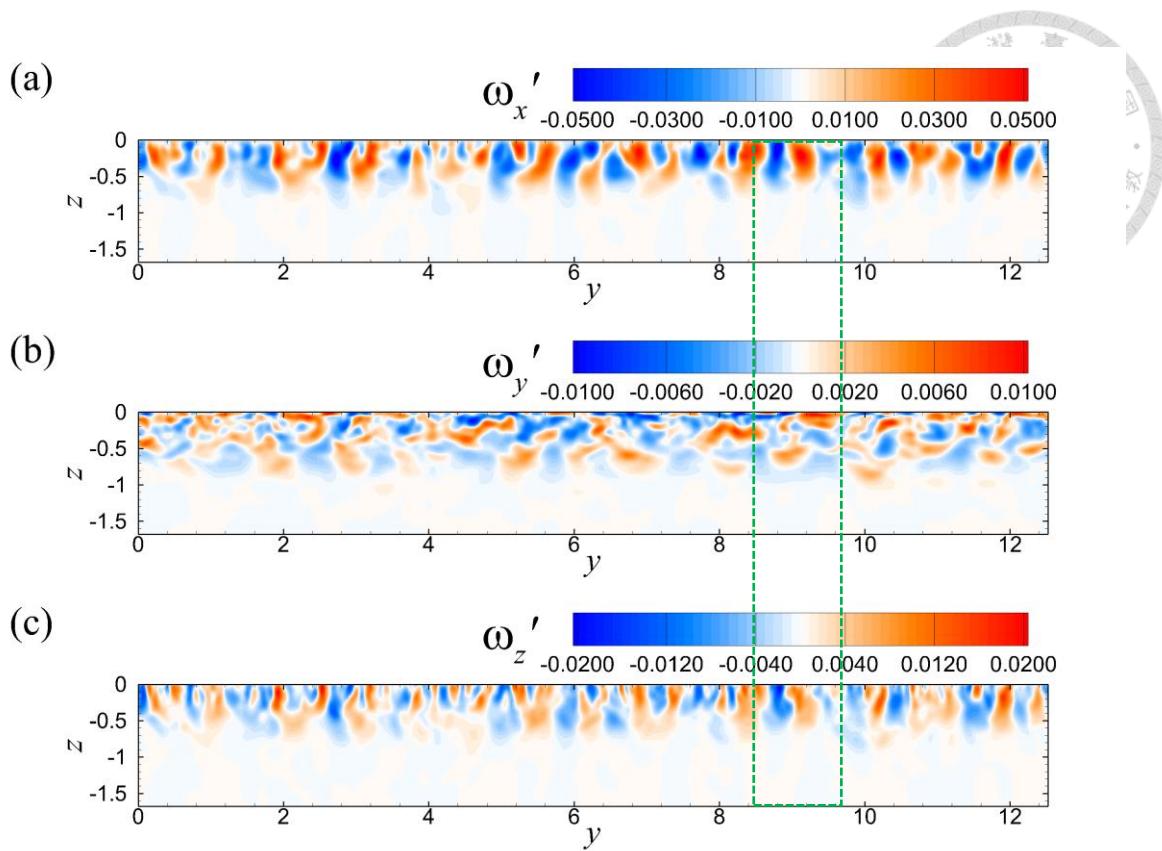


圖 2-91：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。

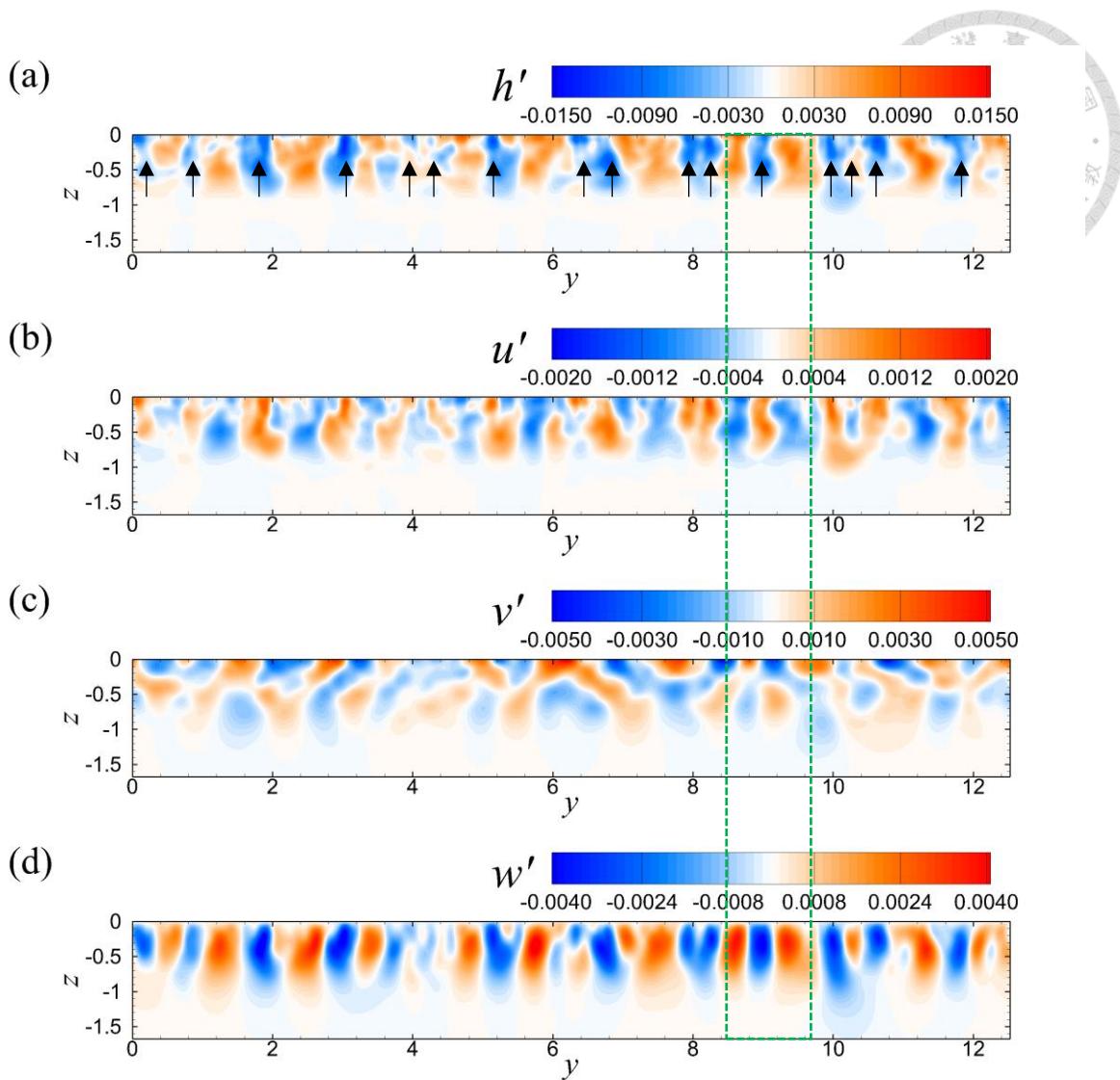


圖 2-92：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為溫度分布；圖 b 為沿流向速度分布；圖 c 為跨流向速度分布；圖 d 為垂直向速度分布。

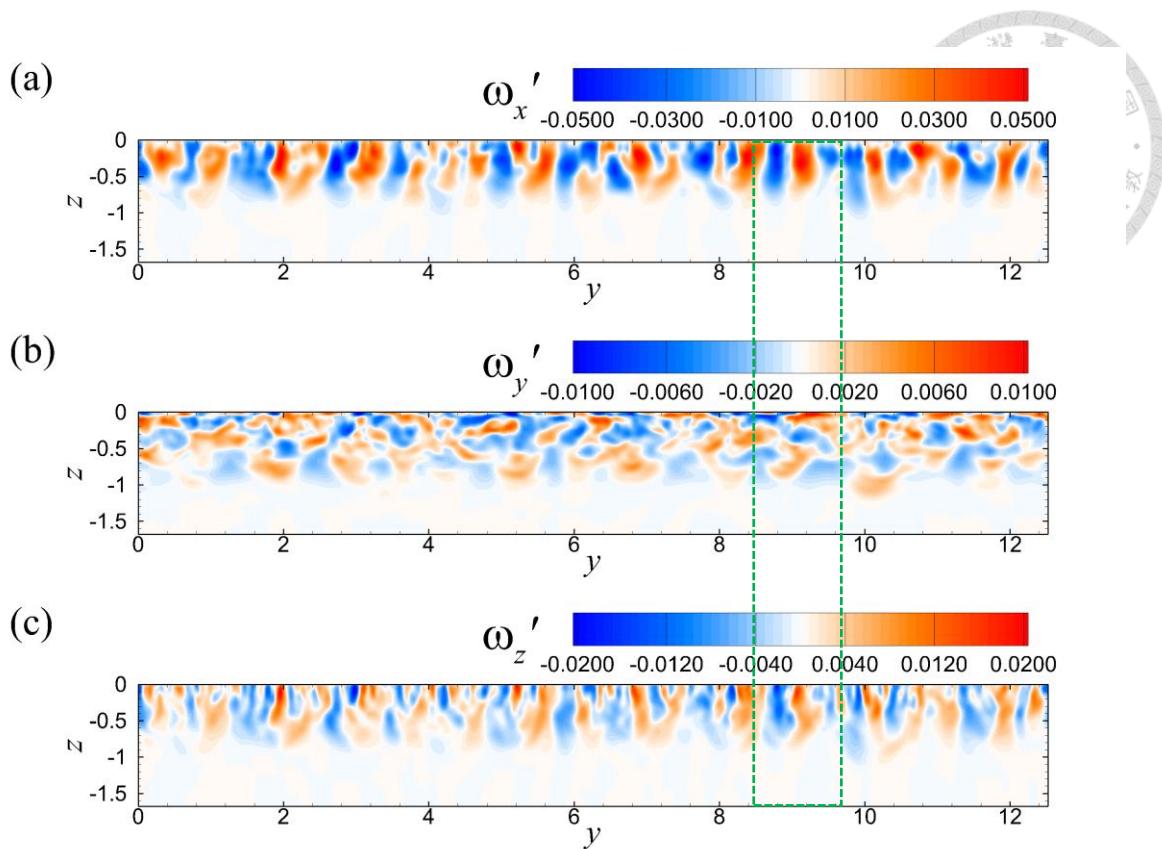


圖 2-93：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時的沿流向平均之分布， x 軸為出紙面方向。

圖 a 為沿流向渦度分布；圖 b 為跨流向渦度分布；圖 c 為垂直向渦度分布。



2.4 涡度方向角度

在前一節中，利用沿流向平均之方法，發現主要之相關紊流結構為成對之沿流向渦度。此節亦是以統計之觀點，進一步探討相關紊流結構於三維流場中之結構特性，以 Moin 和 Kim [6] 所使用之方法，各別計算每層渦度向量場（vorticity vector field）之傾角（inclination angle）並加以統計而繪製成直方圖（histogram），藉此判斷相關紊流結構的主要傾角之分布特性。

針對渦度向量場之傾角，其定義為：

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega'_y}{\omega'_x} , \quad (2-3)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega'_z}{\omega'_x} . \quad (2-4)$$

由此定義可將 θ 視為渦度之水平角， φ 則是垂直角，兩者角度皆介於 $\pm 180^\circ$ 之間，於 $+x$ 軸方向為 0° ，於 $+y$ 軸或 $+z$ 軸方向為 90° 。

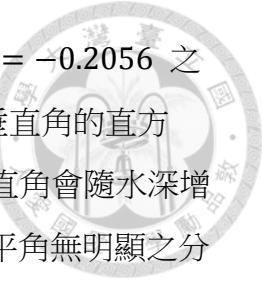
然而本研究之數值模擬資料是隨波坐標系統，故於計算區間內計算各網格點的傾角，並考慮不同渦度強度下設計權重（weighting），著重於渦度較強之方向，並加以統計傾角分布次數。其權重為

$$\omega'_{xy} = \frac{\omega'_x^2 + \omega'_y^2}{\langle \omega'_x^2 + \omega'_y^2 \rangle|_z} , \quad (2-5)$$

$$\omega'_{xz} = \frac{\omega'_x^2 + \omega'_z^2}{\langle \omega'_x^2 + \omega'_z^2 \rangle|_z} , \quad (2-6)$$

其中 $\langle \cdot \rangle|_z$ 表示為對該層之平均，由上二式可知，較強之渦度所佔權重較多。所得直方圖之橫軸為傾角，組距（class interval）為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。

波長 7.5cm 於各時間點之不同水深的傾角直方圖如圖 2-94 至圖 2-99，水深之選取方式為依照 2.1 小節之結果，針對渦度擾動之峰值作為選定水深，藉此觀察其渦度傾角分布。圖 2-94 為時間在 $t = 5T_0$ 時之結果，由圖 2-94 (a) 為在水深 $z = -0.047$ 之水平角的直方圖可知，角度分布集中在 -5° 與 -175° ，即跨流向渦度擾動遠小於沿流向渦度擾動，且沿流向渦度擾動為正值或負值。圖 2-94 (b) 為垂直角的直方圖，角度分布多集中在 25° 至 30° 與 -150° 至 -155° ，即



相關紊流結構傾斜而與水平面有一夾角。圖 2-94 (c) 為在水深 $z = -0.2056$ 之水平角的直方圖，角度分布集中在 0° 與 180° 。圖 2-94 (d) 為垂直角的直方圖，角度分布多集中在 20° 至 25° 與 -155° 至 -160° ，與垂直角會隨水深增加而減少，並逐漸平行於沿流向。在遠離自由液面邊界層後，水平角無明顯之分布特性（如圖 2-94 (e)、圖 2-94 (g)），而垂直角則逐漸趨於 0° 與 180° （如圖 2-94 (f)、圖 2-94 (h)）。

圖 2-95 為時間在 $t = 10T_0$ 之傾角直方圖。圖 2-95 (a) 在水深 $z = -0.047$ 處，水平角分布集中在 -5° 至 -10° 與 -170° 至 -175° ；圖 2-99 (b) 在水深 $z = -0.047$ 處，垂直角分布集中在 35° 與 -145° ；圖 2-99 (c) 在水深 $z = -0.2056$ 處，水平角分布集中在 0° 至 -5° 與 -175° 至 -180° ；圖 2-99 (d) 在水深 $z = -0.2056$ 處，垂直角分布集中在 25° 至 30° 與 -150° 至 -155° ；圖 2-99 (e) 在水深 $z = -0.8078$ 處，水平角分布集中在 0° 至 5° 與 -160° ；圖 2-99 (f) 在水深 $z = -0.8078$ 處，垂直角分布集中在 20° 至 25° 與 -155° 至 -160° ；而圖 2-99 (g) 水深 $z = -1.0169$ 處，水平角分布集中在 0° 至 5° 與 160° ；圖 2-99 (h) 在水深 $z = -1.0169$ 處，垂直角分布集中在 15° 至 20° 與 -175° 。

圖 2-95 至圖 2-97 之結果相似，水平角開始略為偏離 0° 與 180° ，其趨勢逐漸往水深較深處 ($z = -1.0169$) 發展。然而到 $t = 25T_0$ 時（如圖圖 2-98），於水深 $z = -1.0169$ 時發生改變，原先水平角趨於 0° 與 180° ，而此時水平角集中在 45° 至 135° 之間，峰值於 45° 。

圖 2-99 為時間在 $t = 30T_0$ 之傾角直方圖。圖 2-99 (a) 在水深 $z = -0.047$ 處，水平角分布集中在 -15° 至 -20° 與 -160° 至 -165° ；圖 2-99 (b) 在水深 $z = -0.047$ 處，垂直角分布集中在 40° 與 -140° ；圖 2-99 (c) 在水深 $z = -0.2056$ 處，水平角分布集中在 -5° 至 -10° 與 -170° 至 -175° ；圖 2-99 (d) 在水深 $z = -0.2056$ 處，垂直角分布集中在 25° 至 30° 與 -150° 至 -155° ；圖 2-99 (e) 在水深 $z = -0.8078$ 處，水平角分布與圖 2-99 (c) 相同；圖 2-99 (f) 在水深 $z = -0.8078$ 處，垂直角分布集中在 20° 至 25° 與 -155° 至 -160° ；而圖 2-99 (g) 水深 $z = -1.0169$ 處，水平角分布集中在 -90° 與 45° 至 135° ；圖 2-99 (h) 在水深 $z = -1.0169$ 處，垂直角分布集中在 35° 至 40° 與 -140° 至 -145° 。



比較圖 2-94 至圖 2-99 之差異，可以發現隨著時間增加，成對之沿流向渦度漸漸往下發展，水平夾角雖於水面略有變化，仍接近 0° 與 180° ，而垂直角隨時間之變化不大。在水深 $z = -1.0169$ 時，由圖 2-37 可知道渦度擾動值較淺水深處變小許多，故即使角度分布具有趨勢，然其紊流結構較弱而非主要結構處。

波長 15cm 之渦度方向角度分布如圖 2-100 至圖 2-105，而波長 20cm 之結果如圖 2-106 至圖 2-111，其中為了與波長 7.5cm 之結果作比較，故針對相同之無因次化水深作為選取深度。兩者之渦度角度分布與波長 7.5cm 之結果相近，除了 $t = 25, 30T_0$ 時於水深 $\zeta = -0.8, -1$ 之水平角分布，波長 15cm 與 20cm 之水平角分布，其角度仍有集中於 0° 與 180° 之趨勢。比較三者之共通點，於較靠近水面之紊流結構，其主要之水平方向為 $\pm x$ 軸，並與水平面有一夾角，其隨水深變深而逐漸變小。

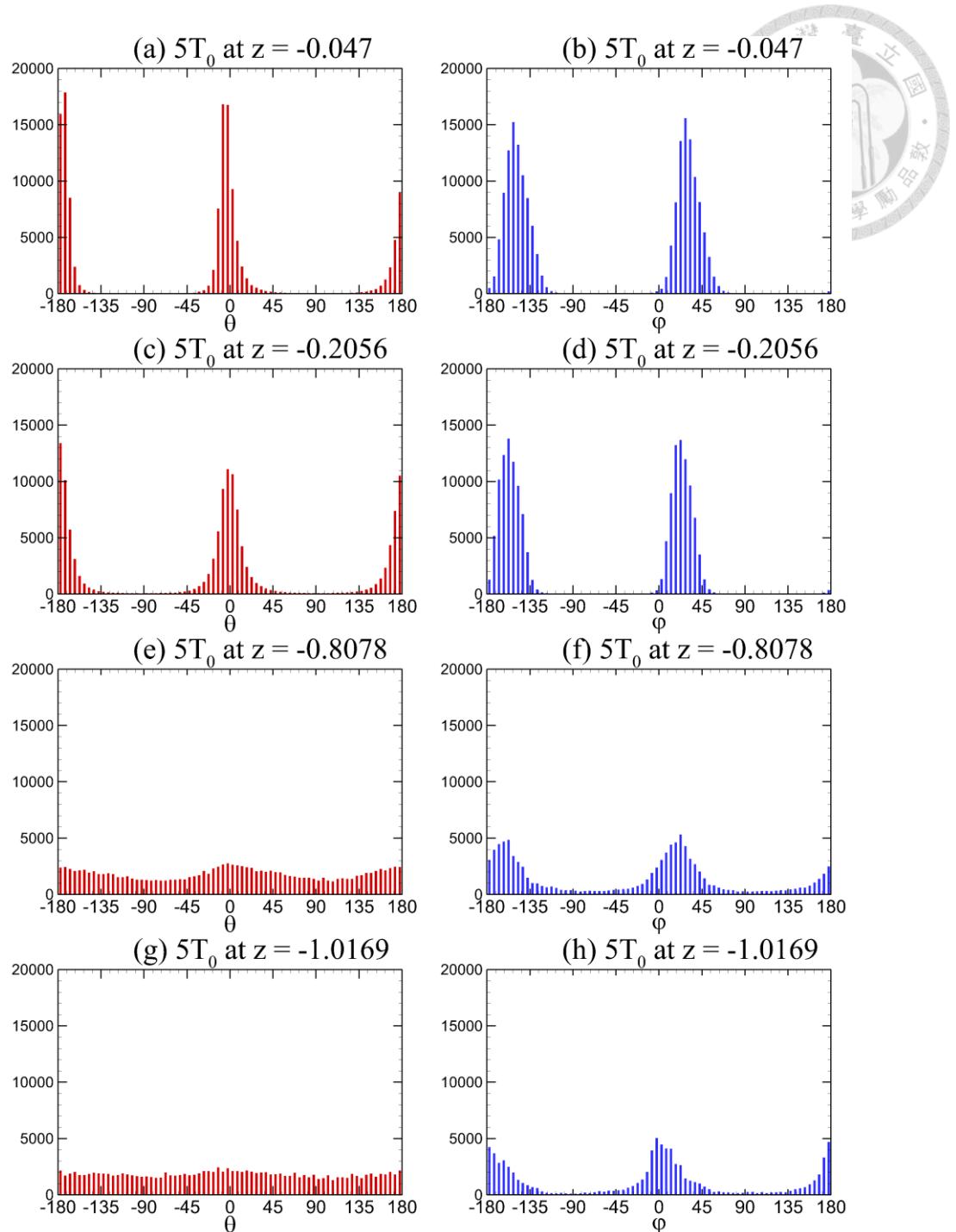


圖 2-94：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

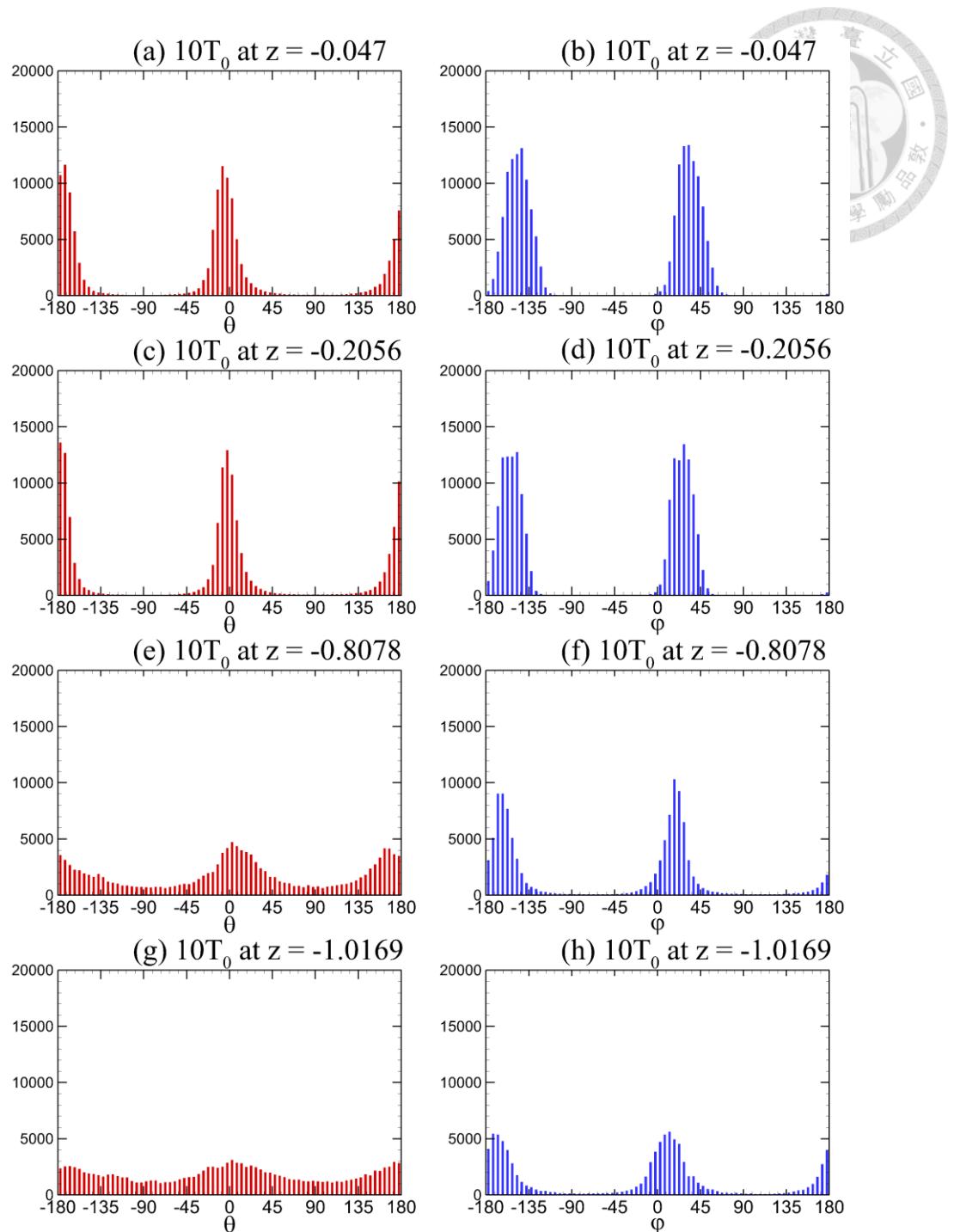


圖 2-95：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

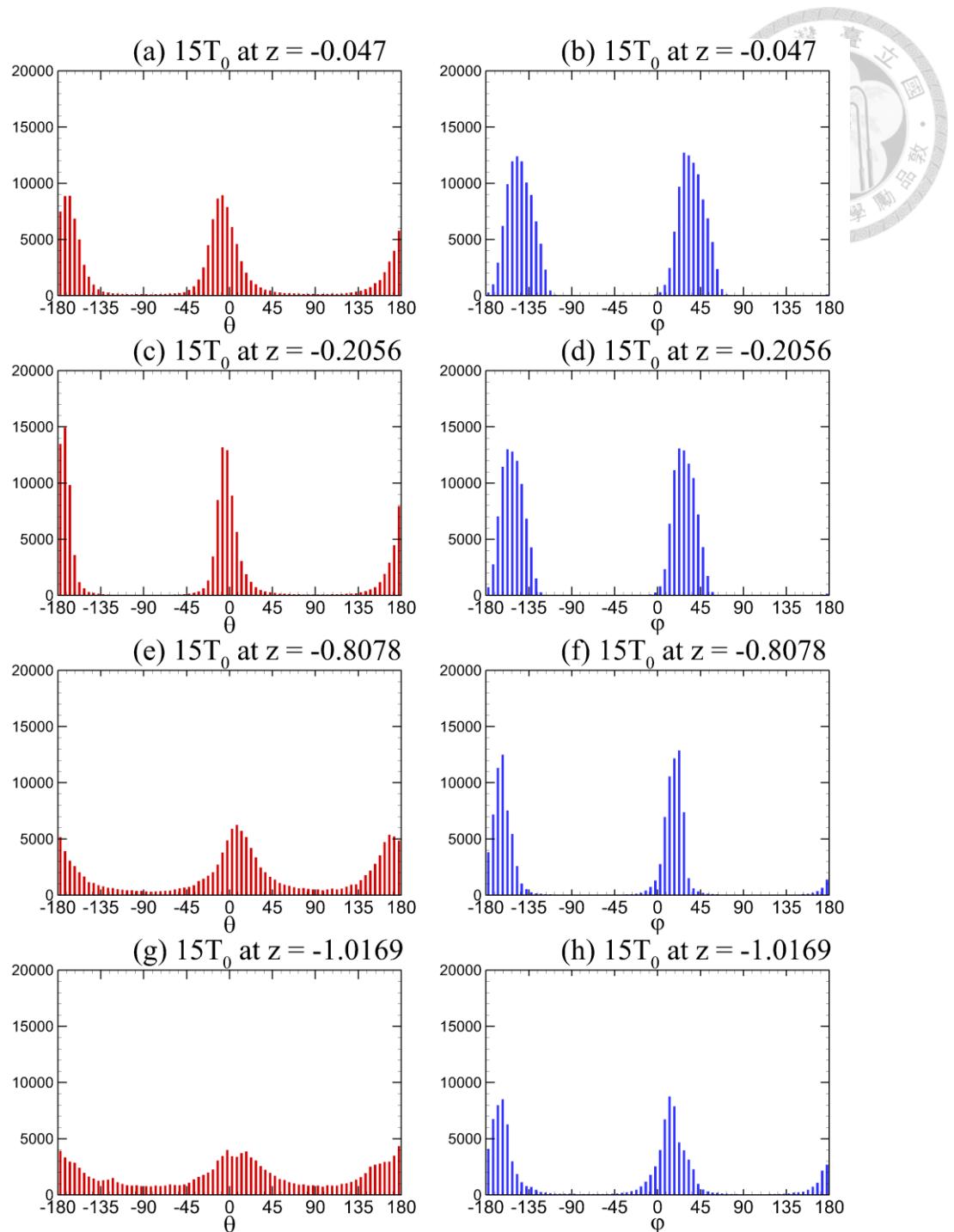


圖 2-96：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

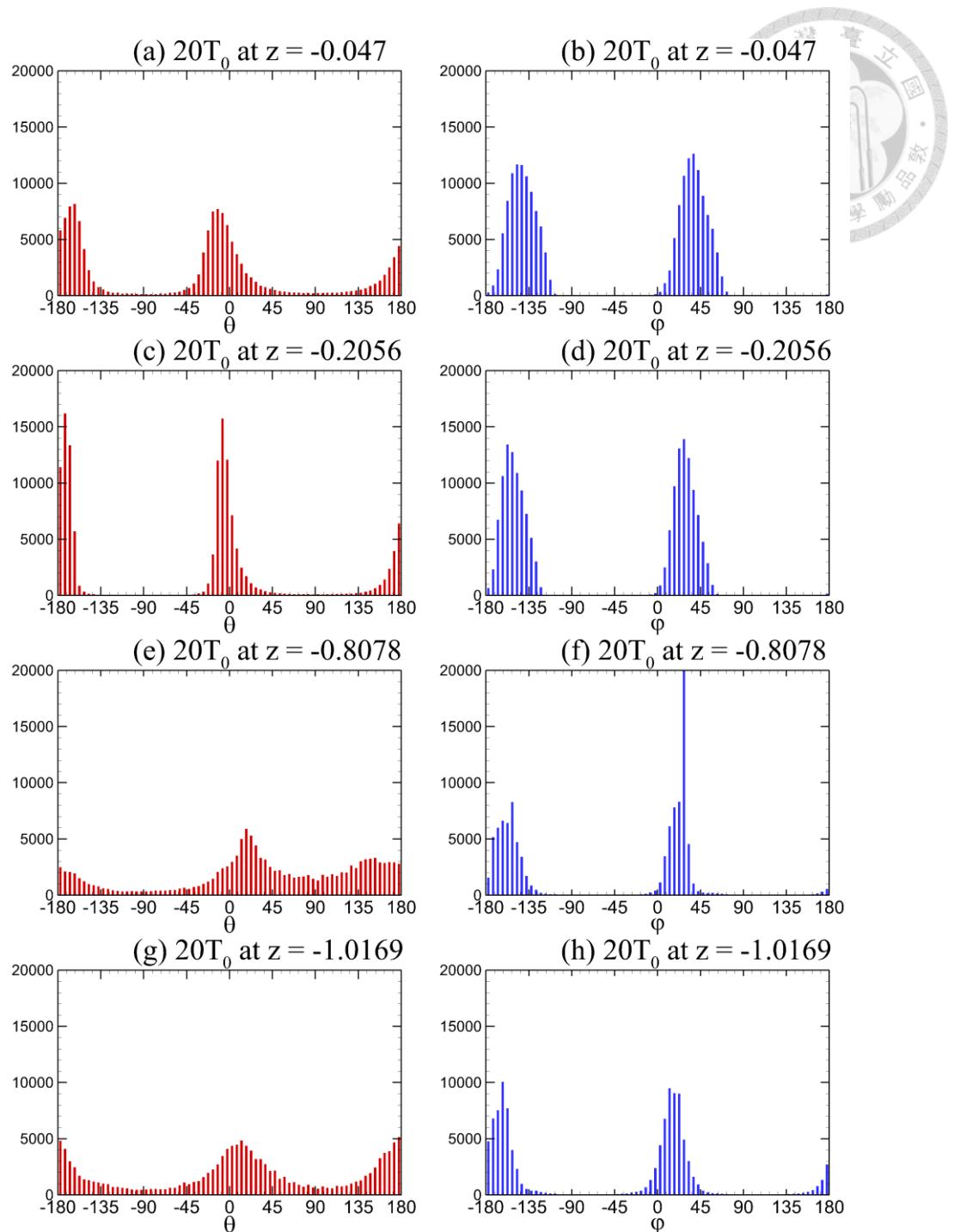


圖 2-97：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

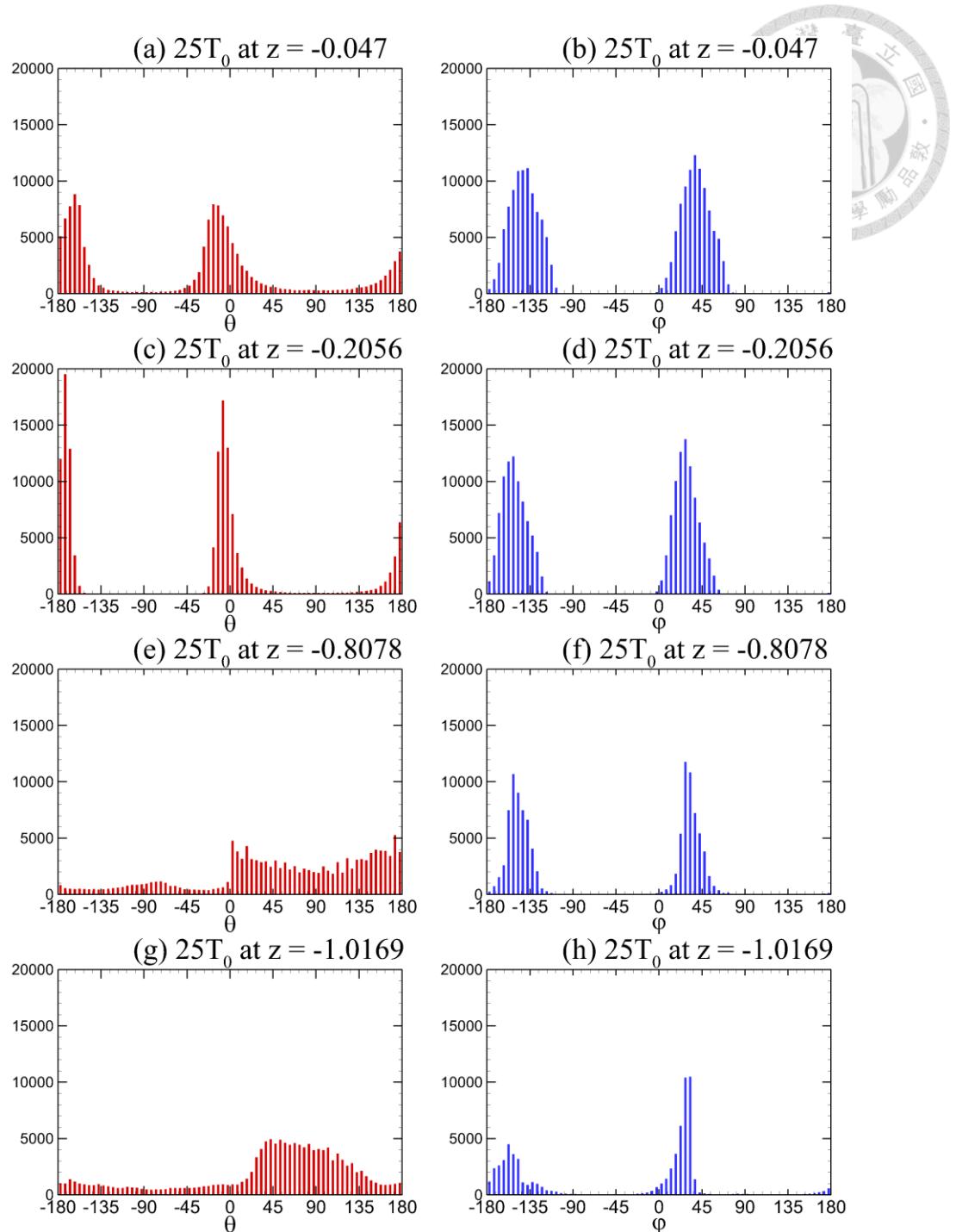


圖 2-98：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

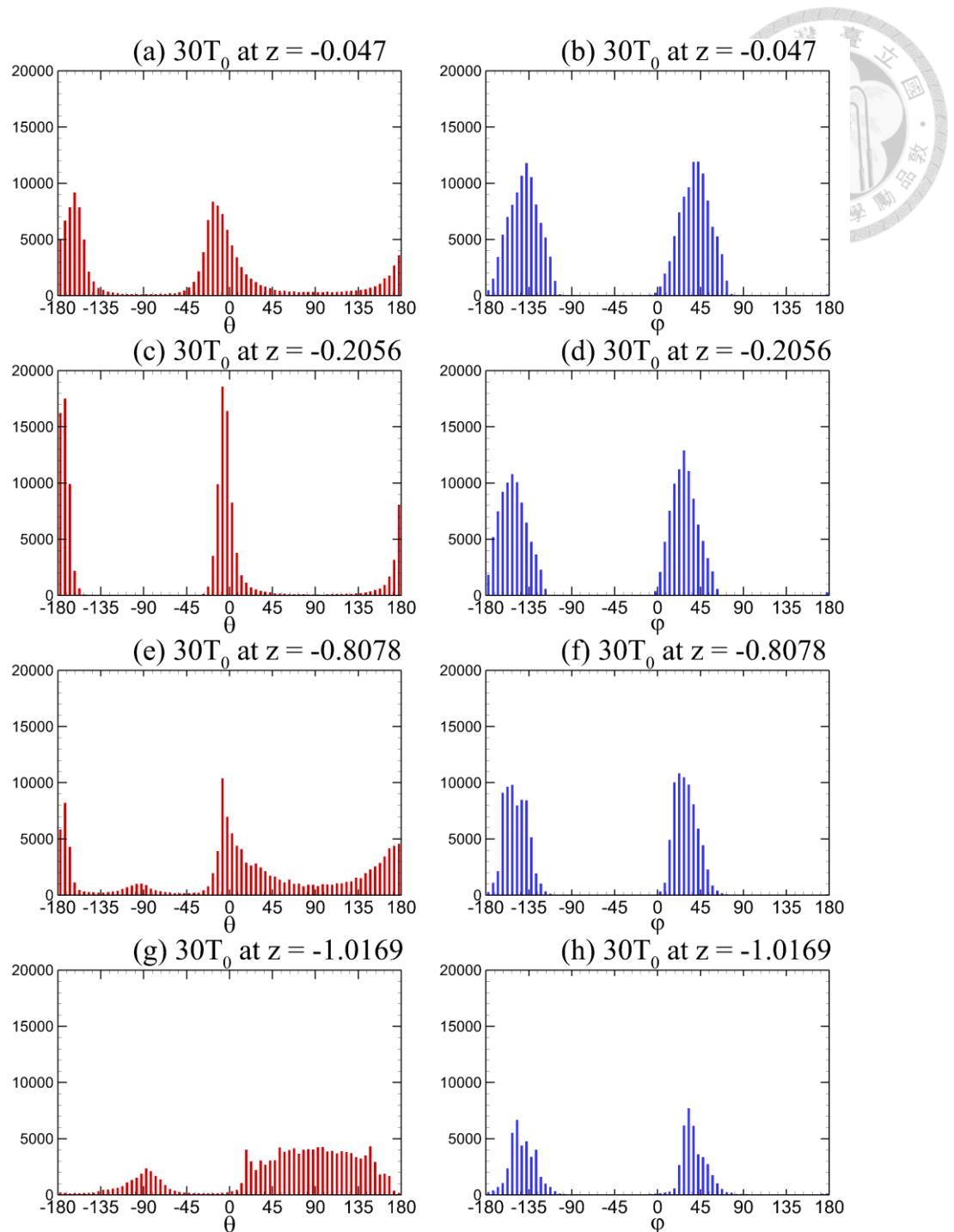


圖 2-99：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

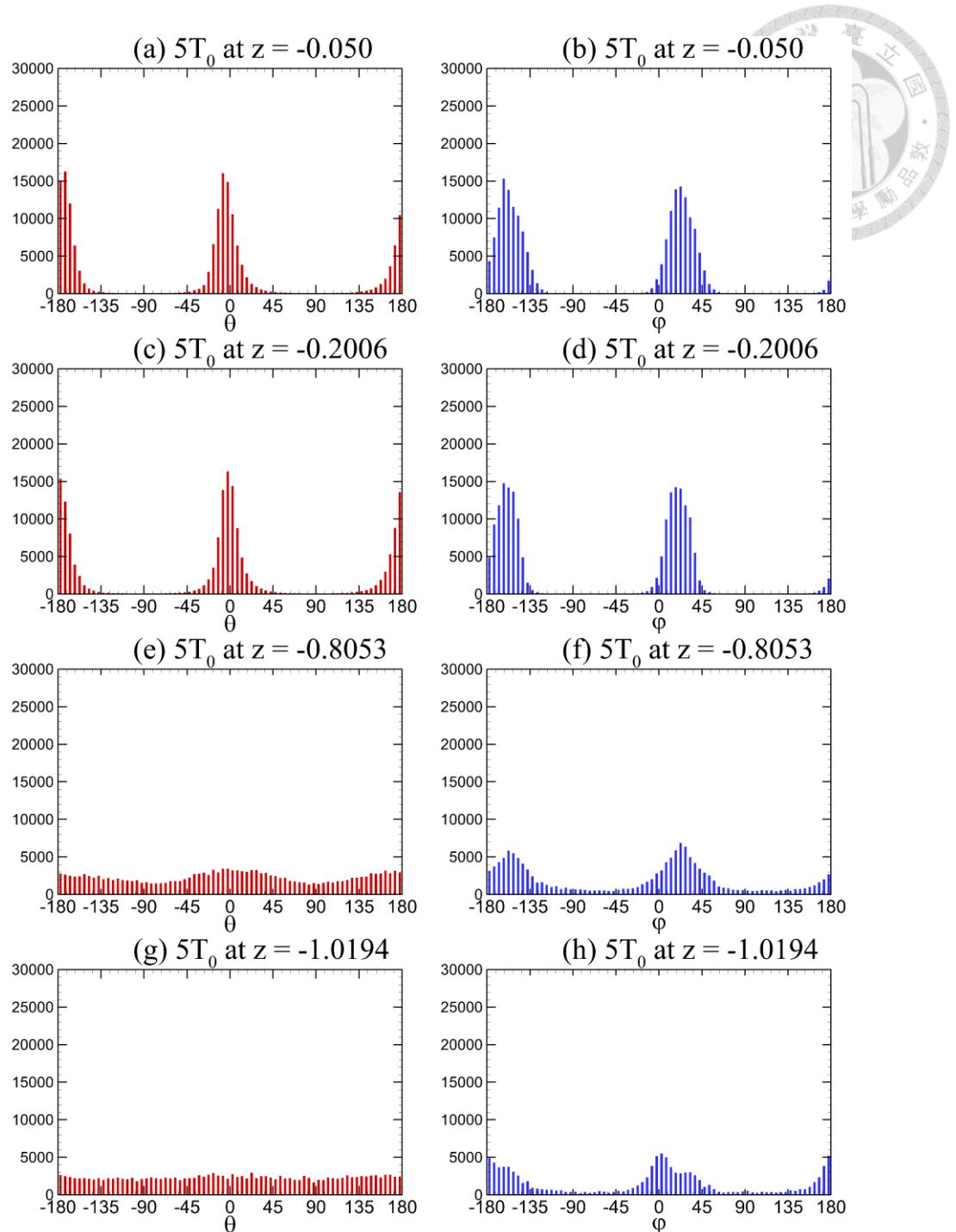


圖 2-100：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

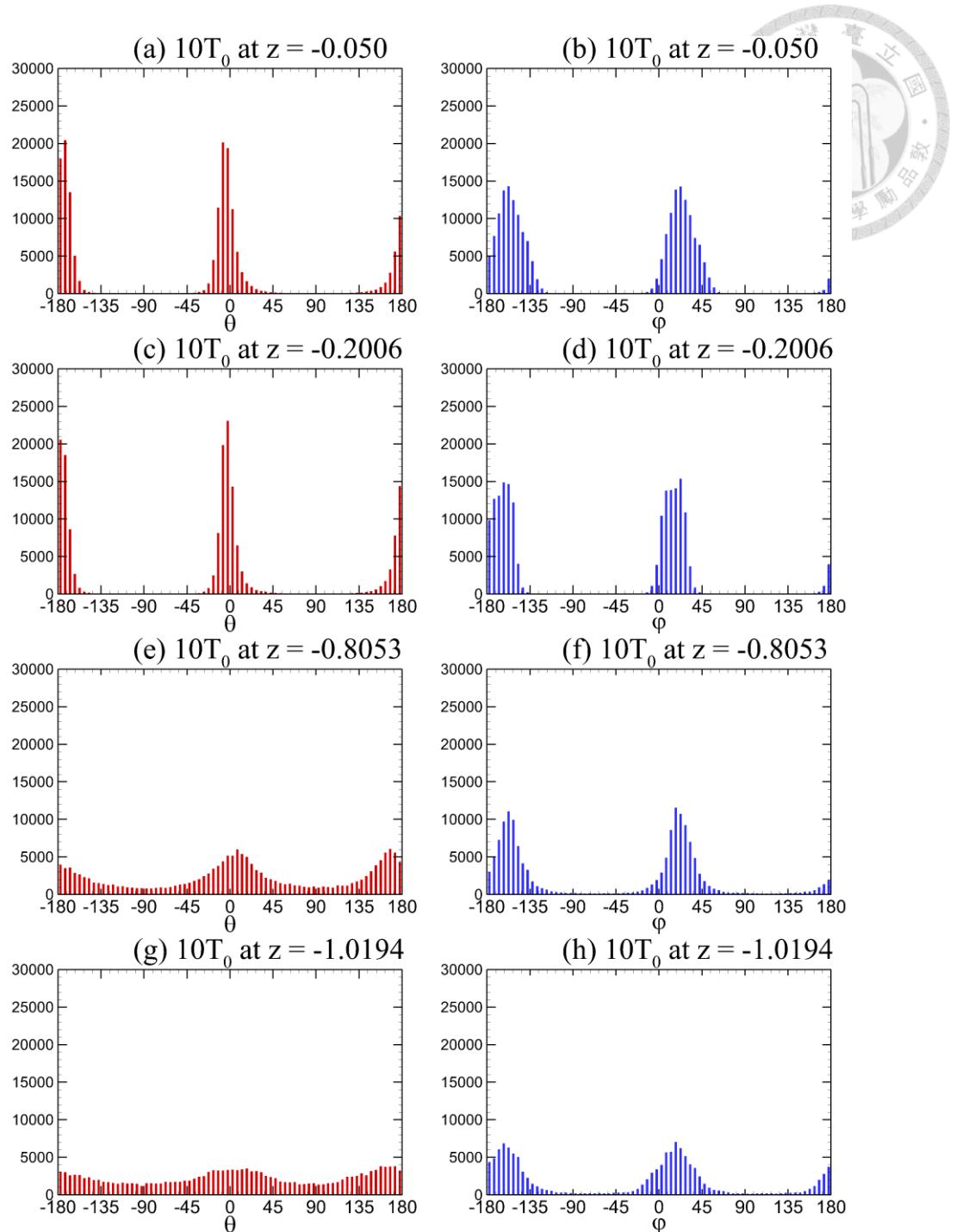


圖 2-101：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

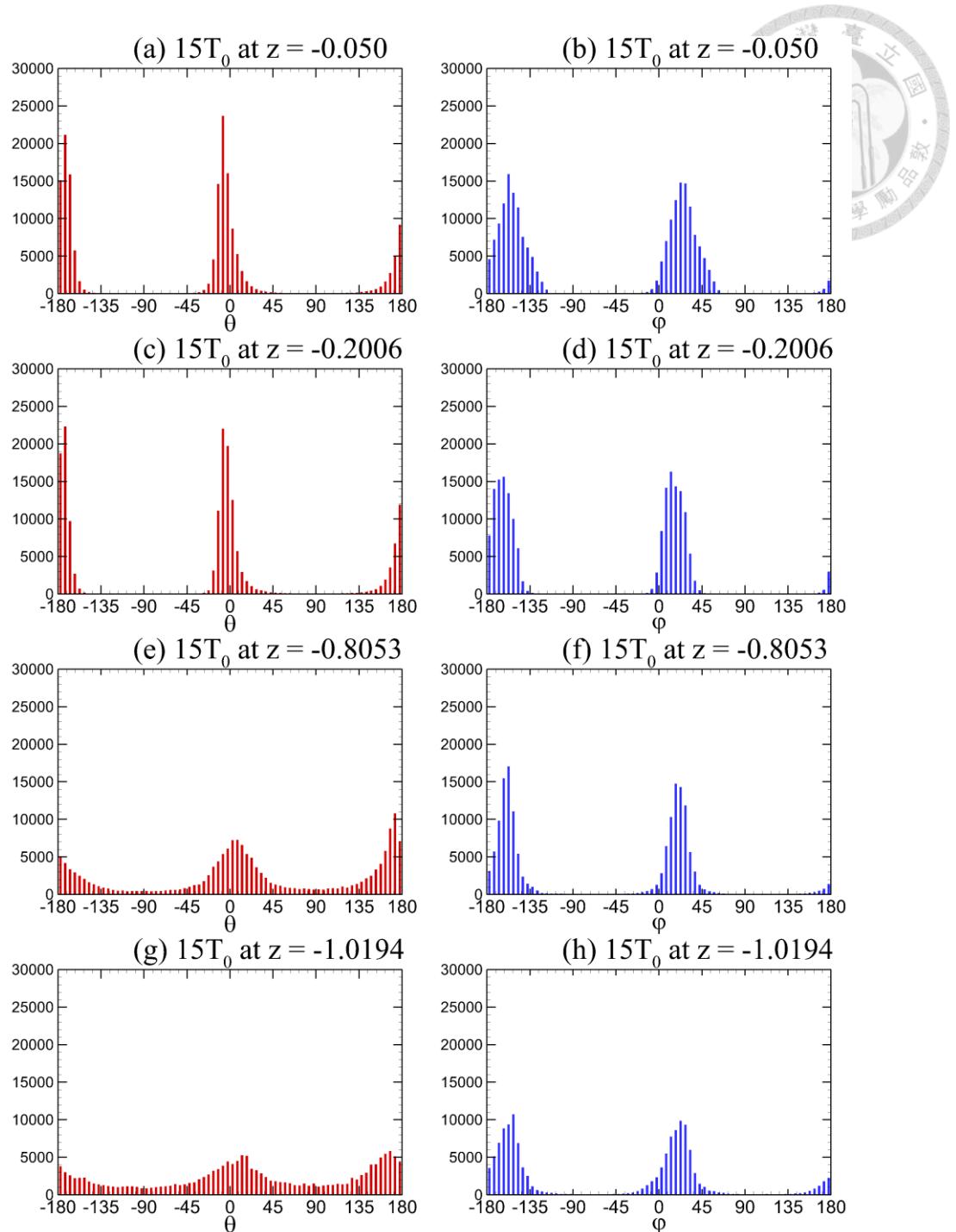


圖 2-102：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

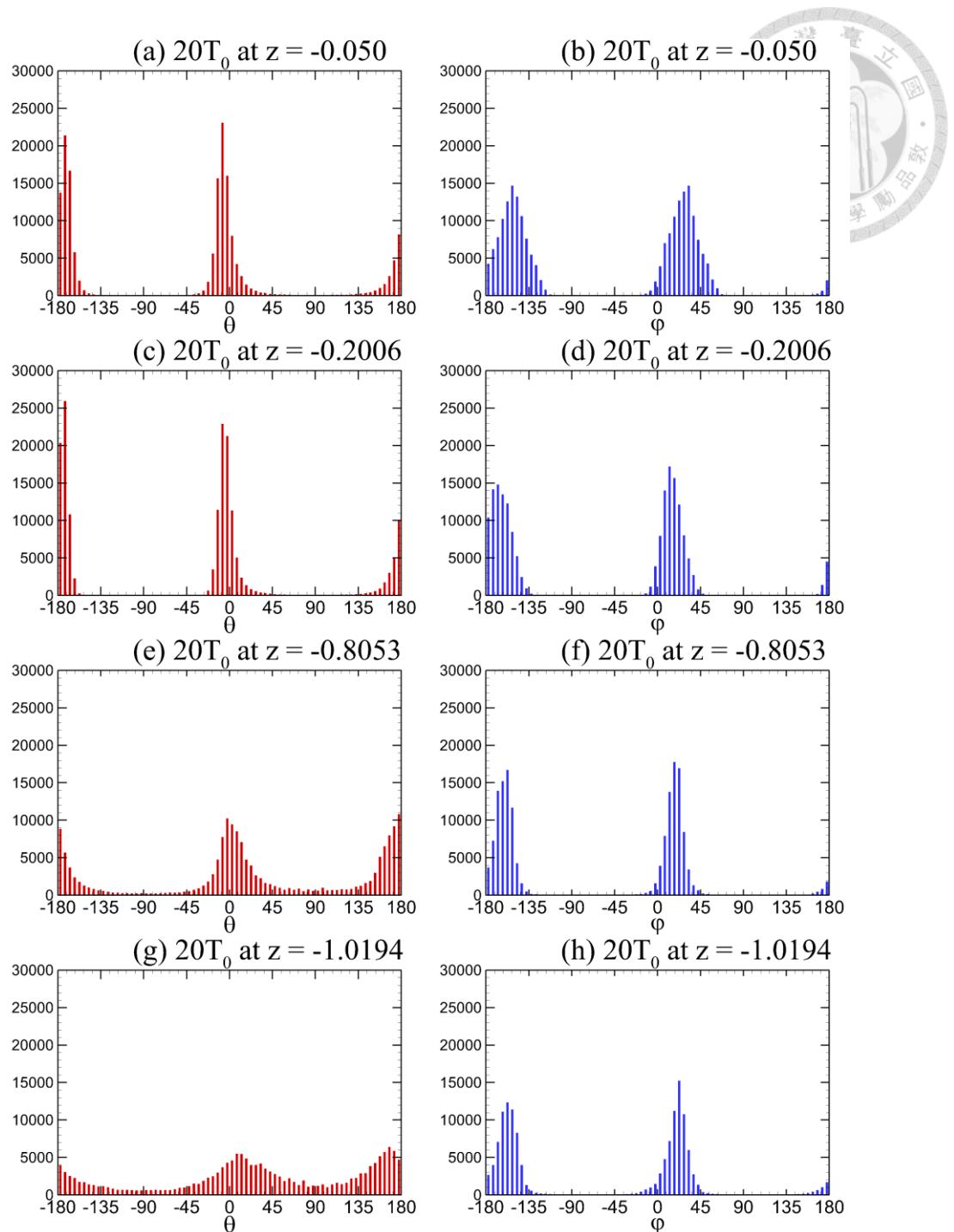


圖 2-103：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

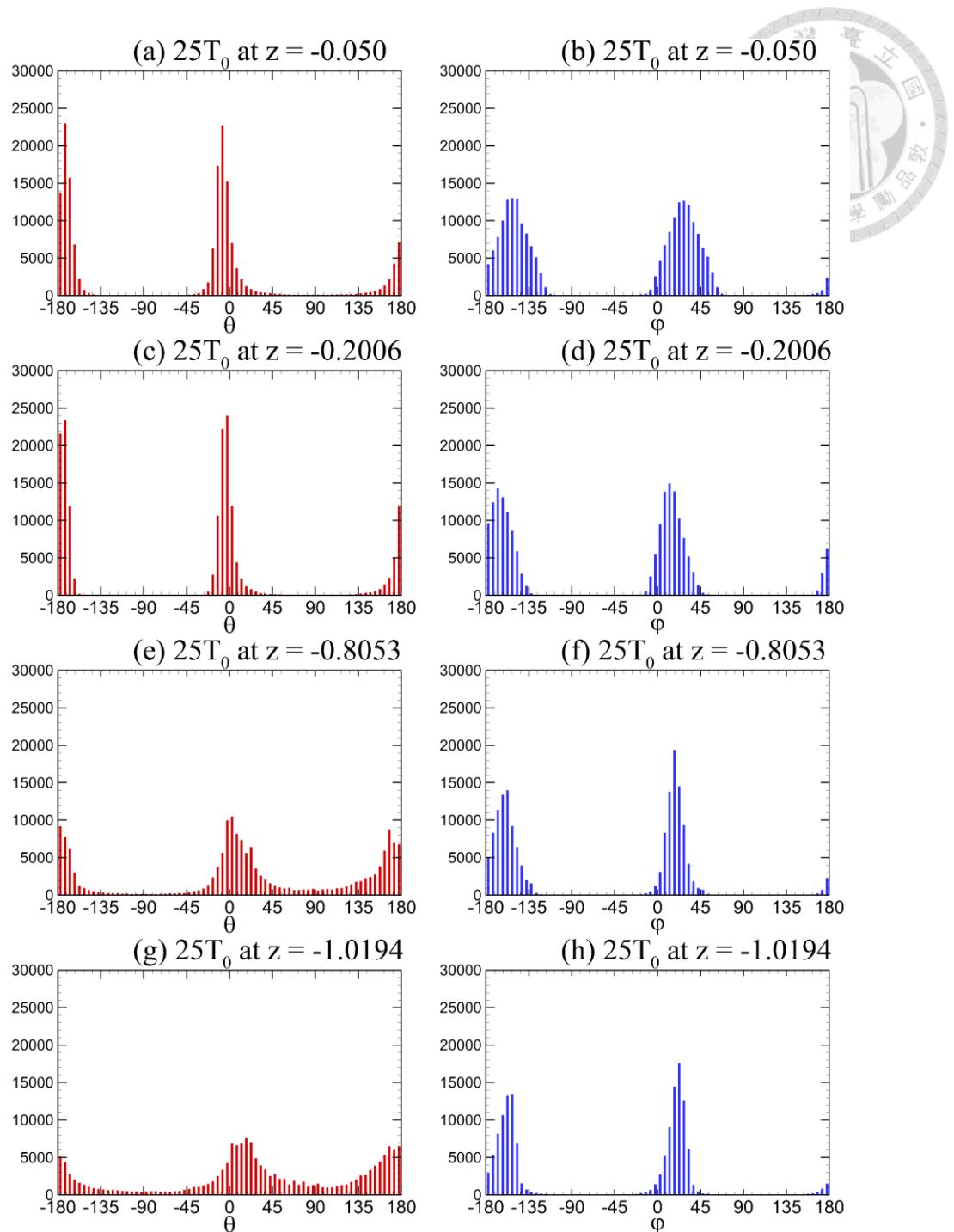


圖 2-104：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

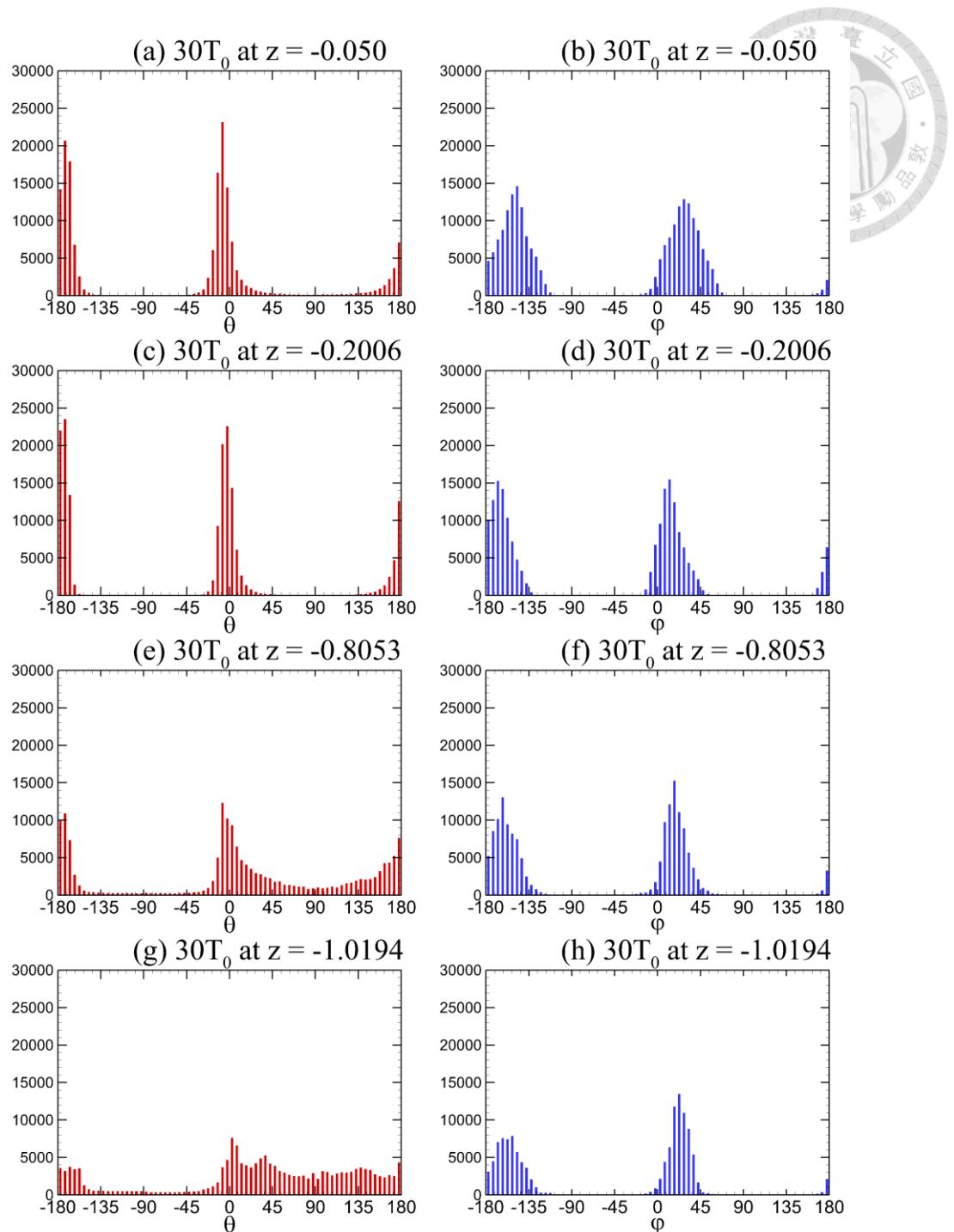


圖 2-105：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

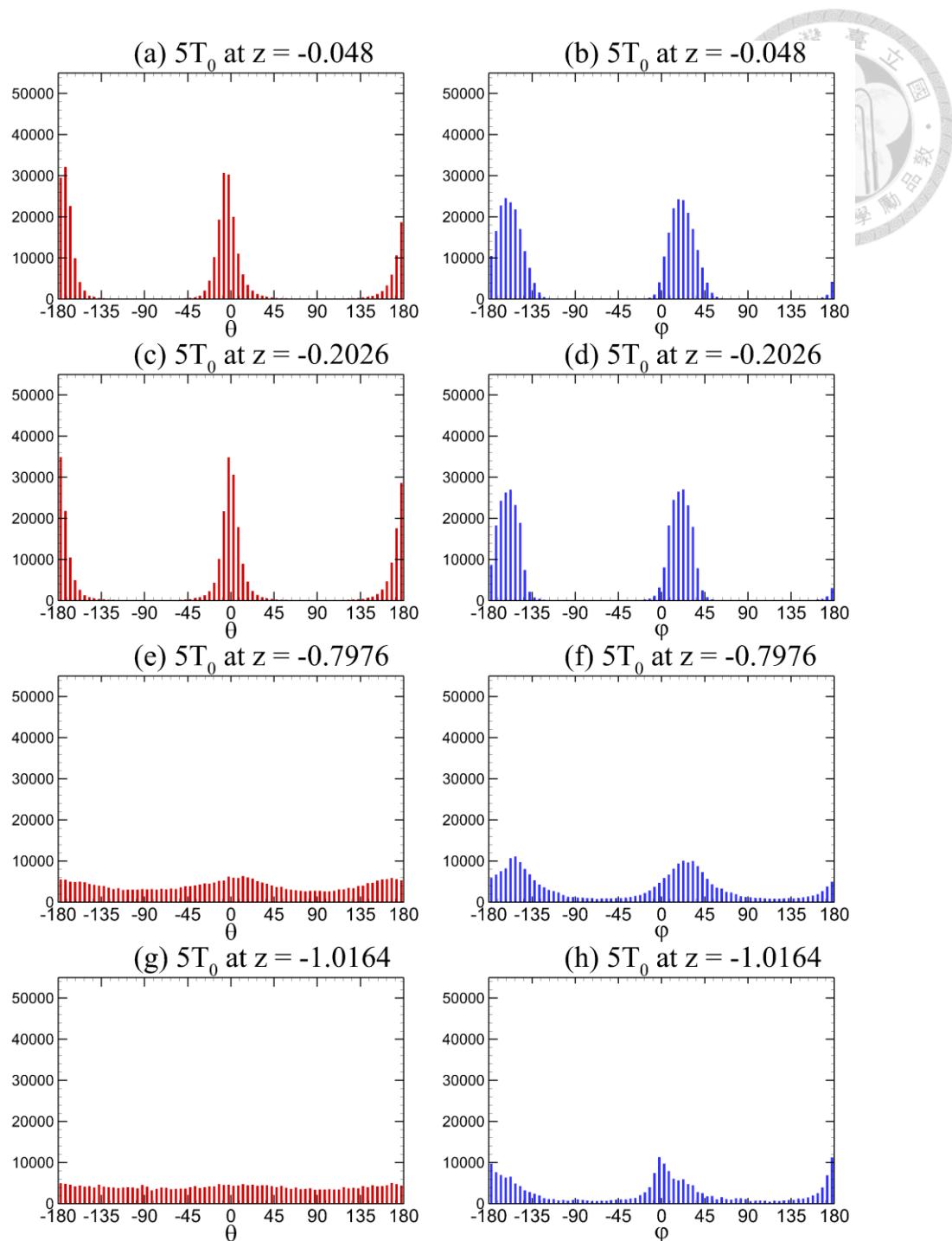


圖 2-106：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

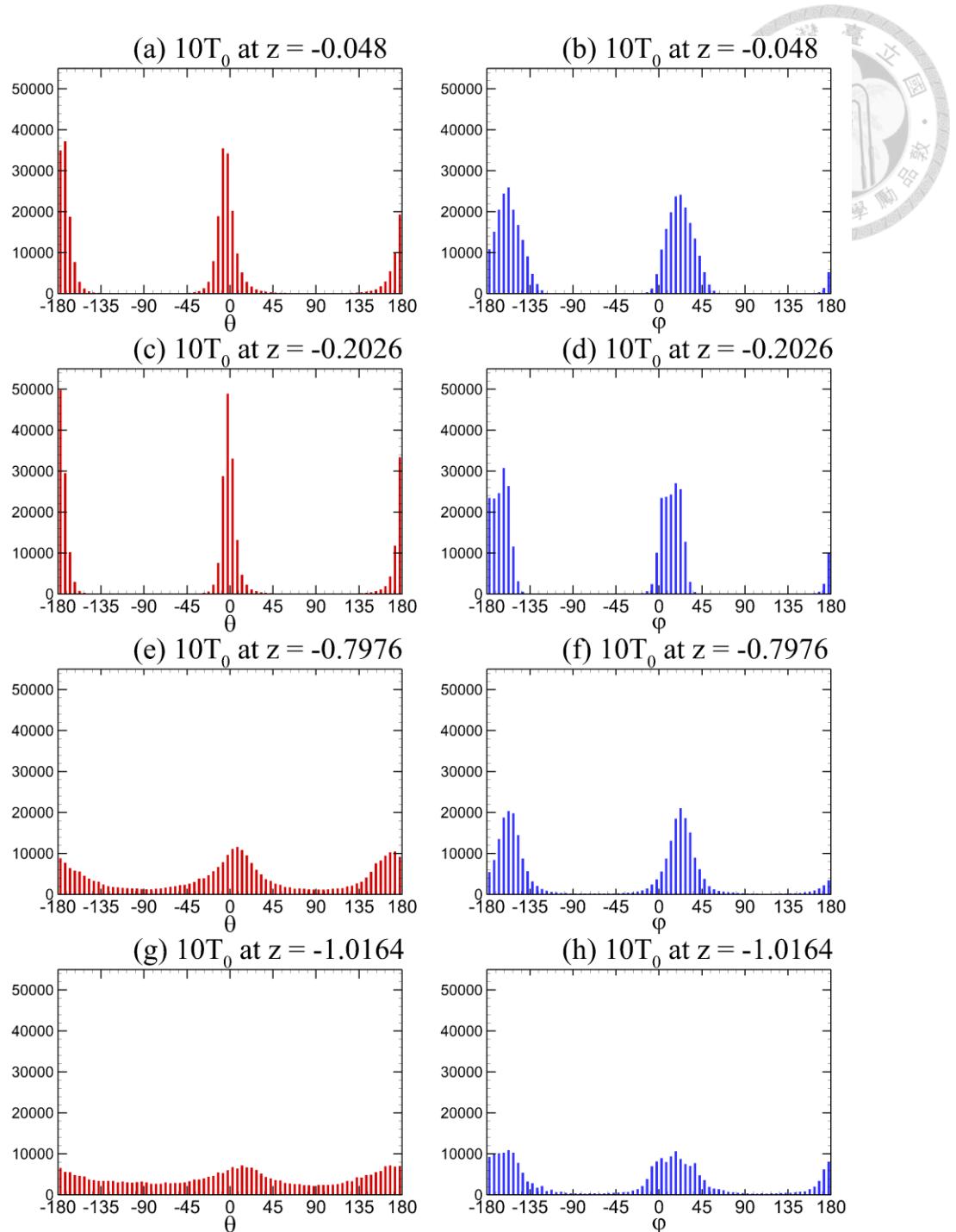


圖 2-107：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

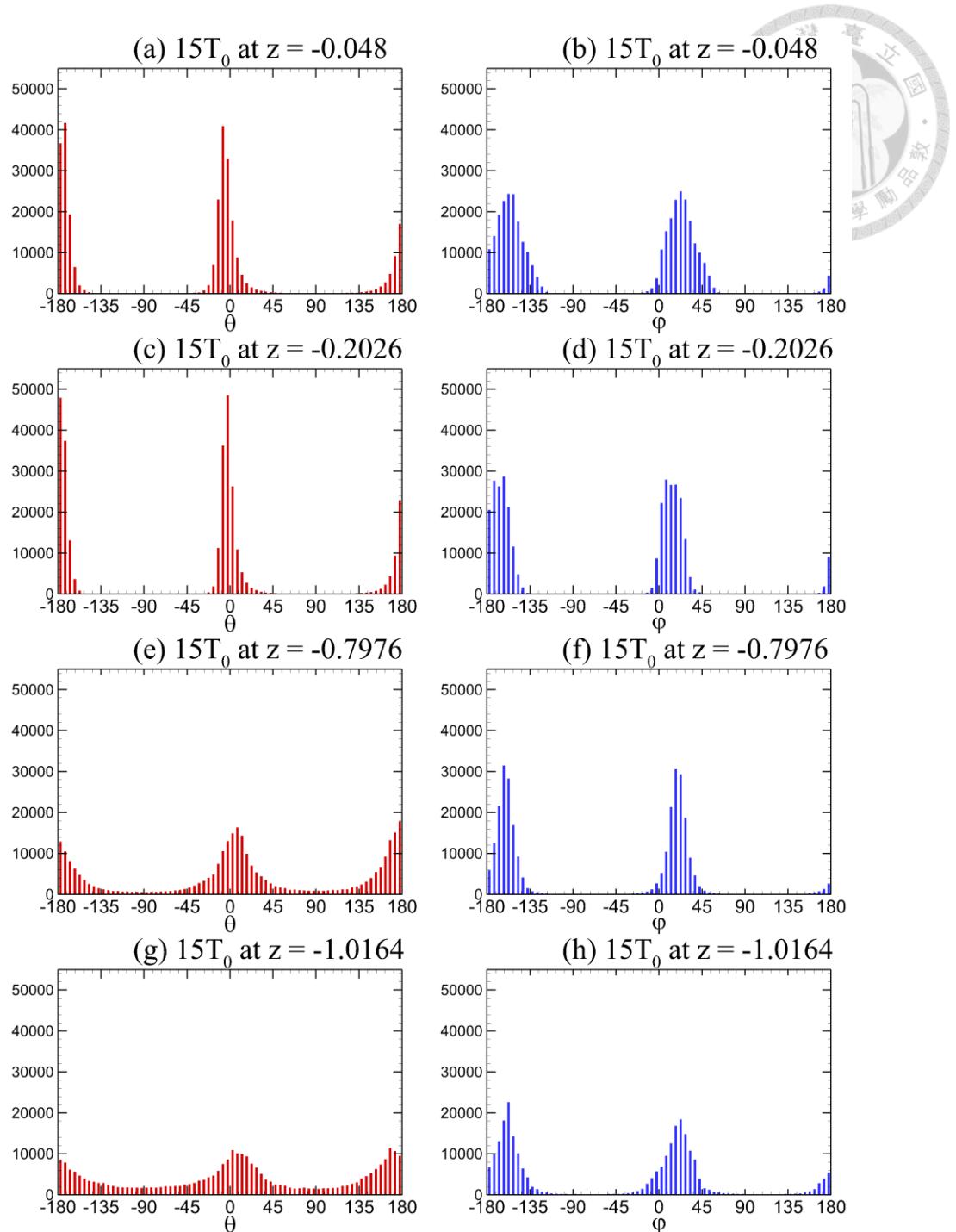


圖 2-108：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

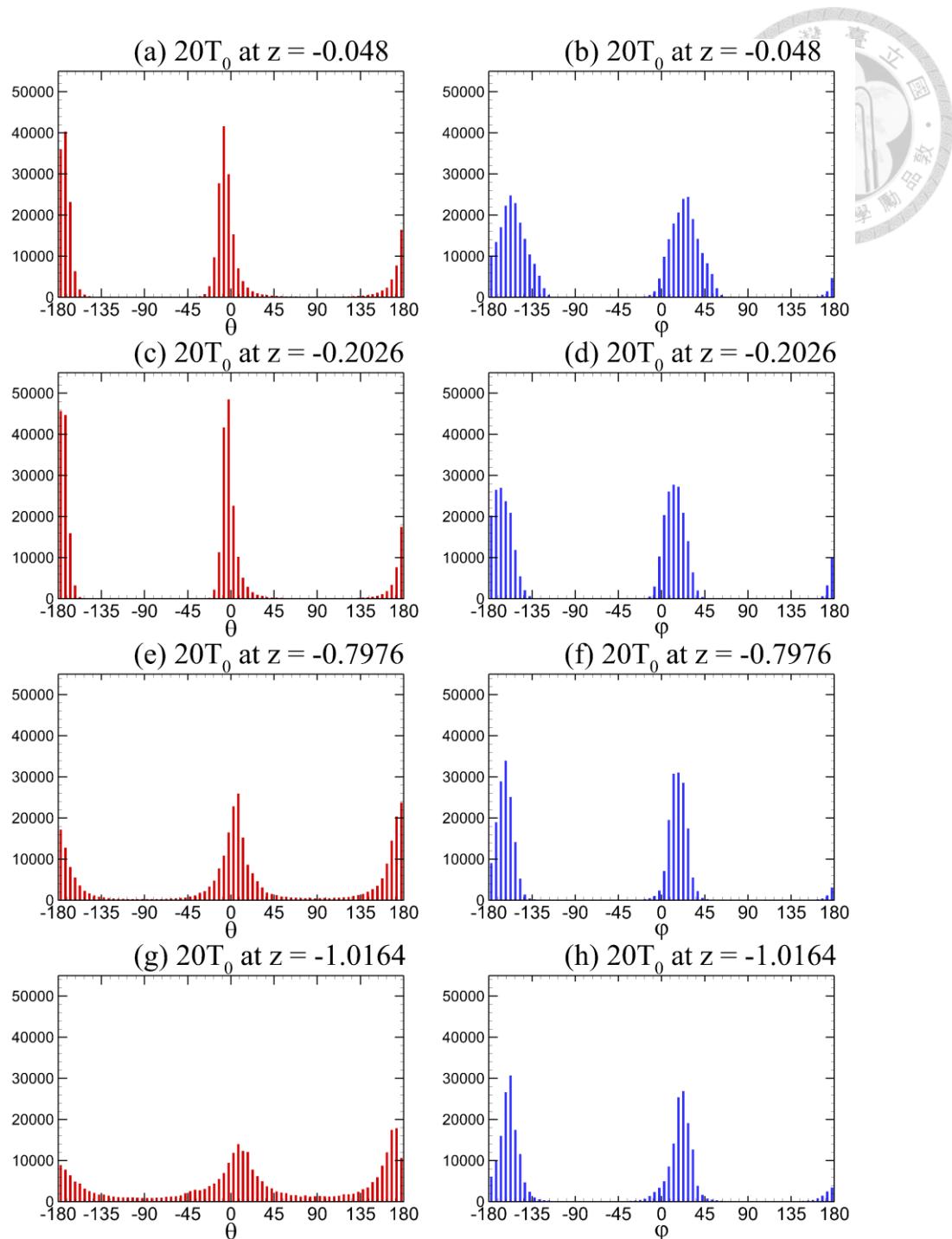


圖 2-109：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

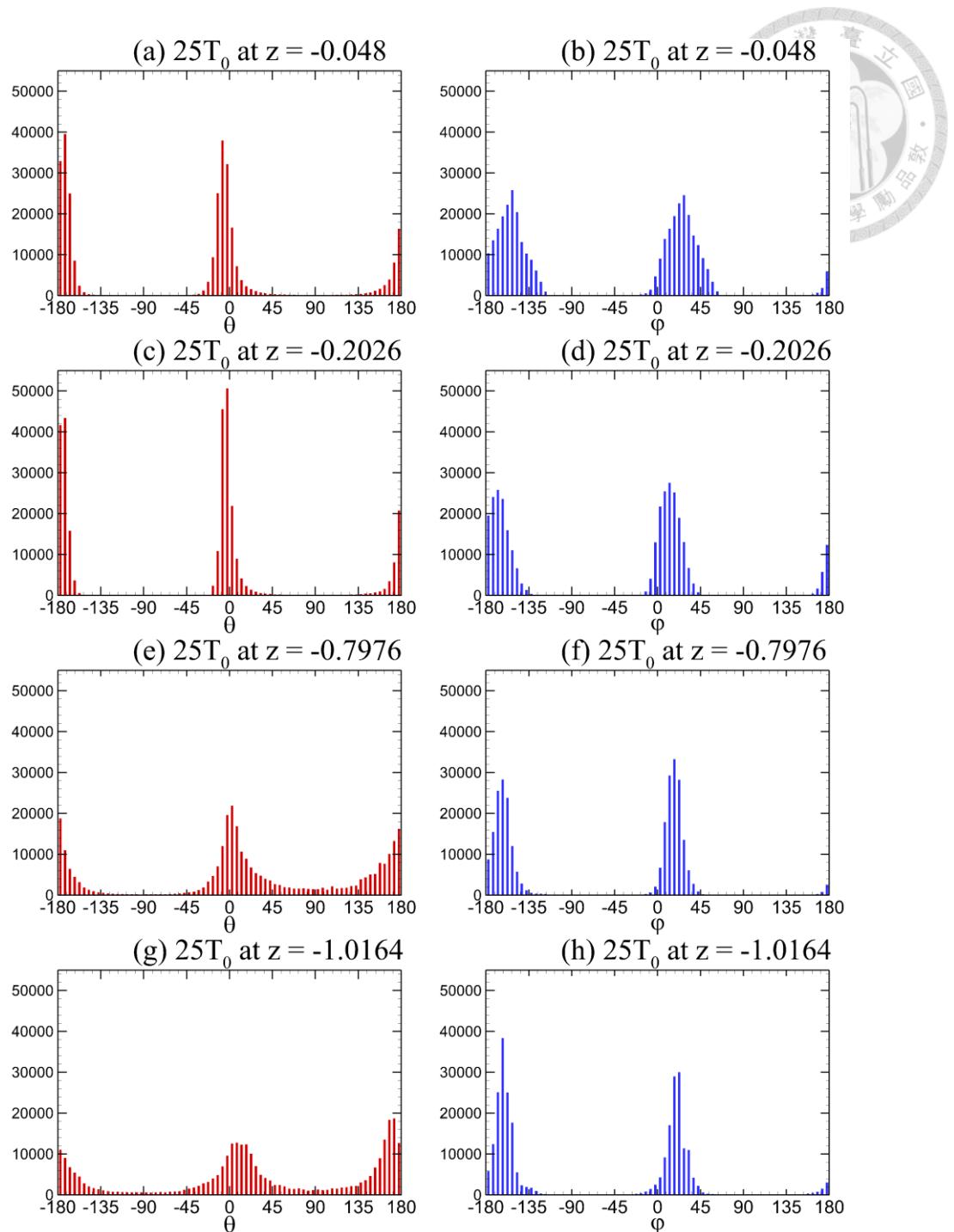


圖 2-110：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。

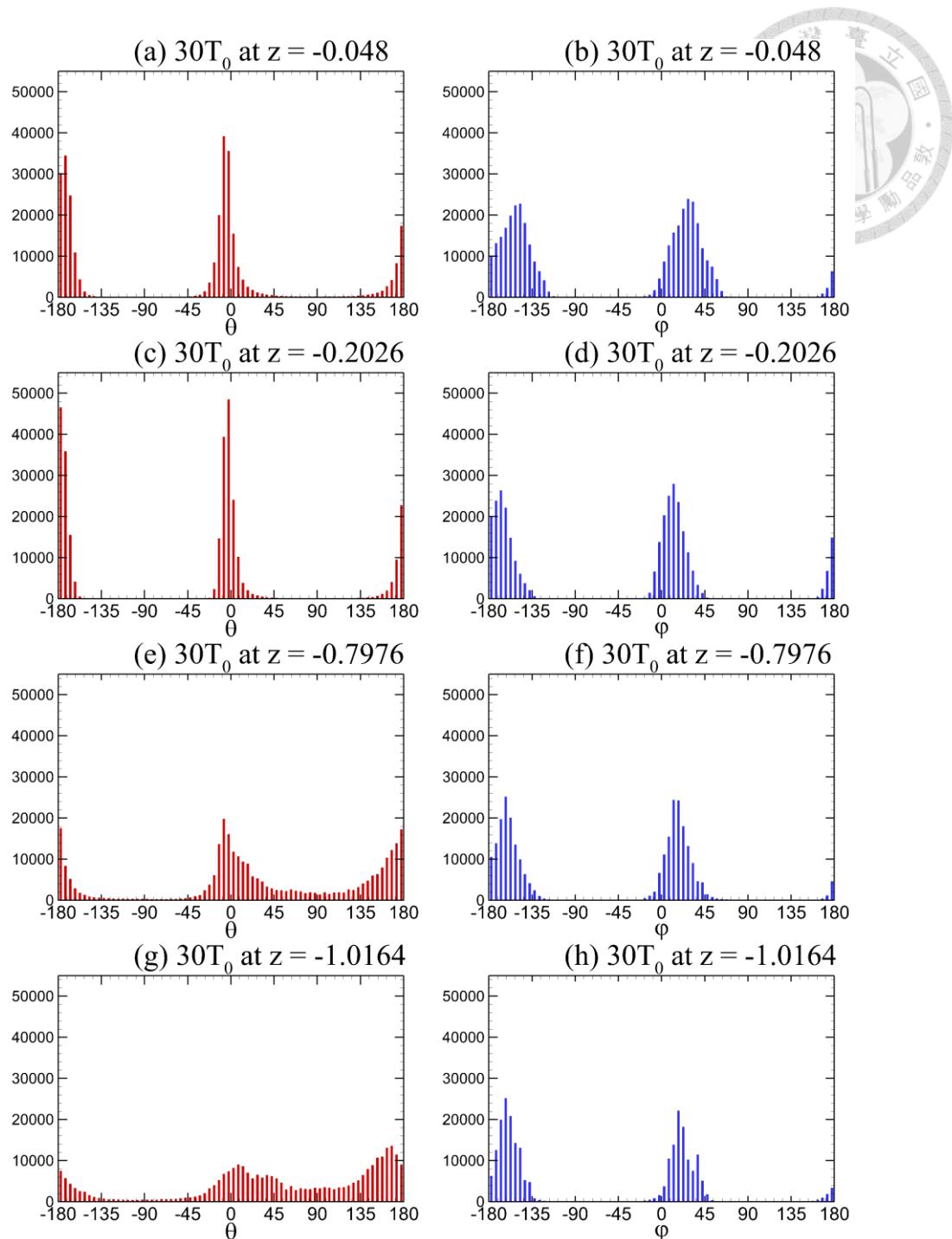


圖 2-111：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時之不同深度的渦度傾角直方圖。橫軸為傾角，而其組距為 5° ，縱軸是加權後之累積次數。左圖（紅色）是 θ 分布，右圖（藍色）是 φ 分布。



2.5 涡旋結構辨識

前述幾節之方法皆是用統計方式分析紊流流場，探究存在流場中相關紊流結構之特性。然而這些方法只是初步了解相關紊流結構，無法實際於三維流場中直接觀察，若能利用渦旋之特性，依此作為判斷是否為渦旋結構之準則，並以此準則應用於流場中，即可標示出紊流結構並藉此可視化。

故需先定義渦旋，Lugt [18] 認為渦旋即許多流體質點於同一中心作旋轉運動，而 Robinson [2] 對此提出更具體之定義，認為渦旋存在時，隨渦旋核心移動之座標系統中，與其垂直之平面上之瞬時流線應為環狀或螺線形。藉此定義，有三種較簡易且直覺之辨識方法來判別渦旋：

1. 觀察渦度分布特性，由於渦旋即作旋轉運動，故可用渦度表示其旋轉之程度。但渦度為向量場 (vector field)，需同時考量三個分量，故不易於觀察，且易誤判，如平板流具一速度梯度，然而非旋轉運動。
2. 以渦度擬能 (enstrophy)，即渦度平方之一半，其為純量場 (scalar field)，而不需要考慮三個分量，較上述之方法利於觀察。然而若各分量渦度強度間差異過大，易使渦度擬能之呈現上，忽略較弱之渦度結構。
3. 使用渦線 (vortex line)，即渦度切線方向之連線來呈現結構。渦線越密之處表示渦度越強，能描繪出結構輪廓而不受到渦度強度之影響，但需要透過主觀選擇點位。

上述之方法共同缺陷為非伽立略不變量 (Galilean invariant)，即辨識結果會受到平均流之影響，故在以下四小節提出四種符合伽立略不變量之辨識方法，分別為 Hunt 等人 [9] 提出速度梯度張量之第二不變量，Chong 等人 [10] 提出速度梯度張量之複數特徵值，Jeong 和 Hussain [11] 提出 $S^2 + \Omega^2$ 之第二特徵值，Zhou 和 Adrian [12] 提出渦流強度。

於 Jeong 和 Hussain 之 1995 年文章 [11] 中，透過不同流場分析 Hunt、Chong、Jeong 和 Hussain 所提出的方法間之辨識差異，說明 $S^2 + \Omega^2$ 之第二特徵值較能準確地辨識出渦旋結構。而 Zhou 和 Adrian 基於 Chong 等人 [10] 提出之概念，針對其複數特徵值之虛數部份作探討，並作為辨識準則。本研究針對上述四種辨識方法之結果，探討不同準則間之差異，並藉此找出結構特性。

2.5.1 速度梯度張量之第二不變量 (The second invariant of ∇u)



此方法是由 Hunt 等人 [9] 提出，定義渦旋 (vortex) 為同時滿足兩條件的區域，一是具有局部壓力最小值 (local pressure minimum)，二是速度梯度張量之第二不變量為正值。

對於渦旋之物理現象，在穩態無黏性之平板流 (steady inviscid planar flow) 中，其壓力在旋轉運動之軸心上為局部最小值，使壓力梯度與離心力 (centrifugal force) 達到平衡，即旋轉平衡 (cyclostrophic balance)。故以局部壓力最小值作為判斷渦旋之準則。然而 Jeong 和 Hussain [11] 指出當速度梯度張量之第二不變量為正值時，將會自動滿足局部壓力最小值，故本研究採用此準則。

速度梯度張量可以表示為

$$\nabla \mathbf{u} = u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2-7)$$

其中速度 $\mathbf{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}$ 。速度梯度張量之特徵方程式 (characteristic equation) 則可寫作

$$\sigma^3 + P\sigma^2 + Q\sigma + R = 0, \quad (2-8)$$

$$P = -u_{i,i}, \quad (2-9)$$

$$Q = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2-10)$$

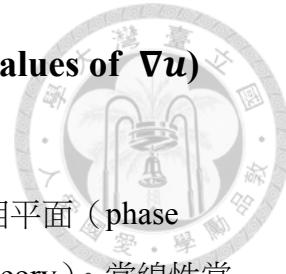
$$R = -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2-11)$$

其中 σ 為特徵值 (eigenvalues)； P 為第一不變量，若考慮不可壓縮流體 (incompressible fluid) 則 $P = 0$ ； Q 為第二不變量； R 為第三不變量。

為探討第二不變量之物理意義，將 Q 以張量表示為 $Q = 1/2(u_{i,i}^2 -$

$u_{i,j}u_{j,i}$)，若考慮流體不可壓縮下 $u_{i,i} = 0$ ，並將速度梯度張量分解為應變率張量 (strain rate tensor) 及轉動張量 (rotation tensor)，如 $u_{i,j} = S_{ij} + \Omega_{ij}$ ，則可改寫第二不變量為 $Q = 1/2 (\|\Omega_{ij}\|_F^2 - \|S_{ij}\|_F^2)$ ，其中 $\|\cdot\|_F$ 為 Frobenius 範數，故第二不變量可視為流體在剪應變率 (shear strain rate) 與轉動之間的局部平衡，而此準則判定渦旋之條件為當流體之轉動大於應變，換言之，當 Q 為正值時，則表示該點為渦旋內部。

2.5.2 速度梯度張量之複數特徵值 (The complex eigenvalues of ∇u)



此方法由 Chong 等人 [10] 提出，判斷渦旋之依據是藉由相平面 (phase plane method，見附錄一) 之概念中臨界點理論 (critical point theory)。當線性常微分方程式之系統 (the linear systems of differential equations) 中，其特徵值若為複數則所代表該點之局部流線圖形 (local streamline pattern) 為封閉或螺旋 (spiral) 狀，故符合 Robinson [2] 對於渦旋之定義，因此可藉此作為判斷渦旋之依據。

若考慮特徵值為複數形態之情況時，可由速度梯度張量之特徵方程式的判別式 (discriminant, Δ) 判斷特徵值之數系，若判別式為負值代表其特徵值為三實數根，為零時則有一重根，而對於判別式為正值時，代表特徵值具有一實數根與一對共軛複數根，因此當判別式為正值滿足相平面為封閉或螺旋，即該點位於渦旋內。

考慮三維速度之一階常微分方程式：

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{x}, \quad (2-12)$$

其中 $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ ，空間變數 $\mathbf{x}(x, y, z, t) = (x(t), y(t), z(t))$ ，或以矩陣型式表示

$$\frac{dx}{dt} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (2-13)$$

對於此系統之解為

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{V}_1 e^{\sigma_1 t} + c_2 \mathbf{V}_2 e^{\sigma_2 t} + c_3 \mathbf{V}_3 e^{\sigma_3 t}, \quad (2-14)$$

其中 c_1 、 c_2 與 c_3 為常數， \mathbf{V}_1 、 \mathbf{V}_2 與 \mathbf{V}_3 為速度梯度張量之特徵向量 (eigenvectors)， σ_1 、 σ_2 與 σ_3 為速度梯度張量之特徵值。由臨界點理論可知，若特徵值為一實數與一對共軛複數 (conjugate complex numbers)，則對應之相平面為封閉或螺旋。由於特徵方程式 (式 2-8) 為一元三次方程式，其三根具有公式解，故探討特徵值之數系型態，可藉由一元三次方程式之判別式判斷：

$$\Delta = \left(-\frac{P^3}{27} - \frac{R}{2} + \frac{PQ}{6} \right)^2 + \left(\frac{Q}{3} - \frac{P^2}{9} \right)^3, \quad (2-15)$$



若具一對共軛複數根則判別式大於零 ($\Delta > 0$)，在不可壓縮流體下可簡化為

$$Q^3 > -\frac{27}{4}R^2 , \quad (2-16)$$

與 2.5.1 小節之準則 $Q > 0$ 作比較，

$$Q^3 > 0 \geq -\frac{27}{4}R^2 , \quad (2-17)$$

則發現比 2.5.1 小節之準則較為寬鬆。

2.5.3 $S^2 + \Omega^2$ 之第二特徵值 (The second eigenvalues λ_2 of $S^2 + \Omega^2$)

Jeong 和 Hussain [11] 延續局部壓力最小值與渦旋結構之間距有關聯的概念，並進而改良，因其認為僅憑局部壓力發生最小值時，並非能完全判定為渦旋結構，會有誤判的情況發生，而局部壓力最小值不足以當成判別渦旋之準則的缺陷，其原因具有二：

1. 非穩態應變 (unsteady straining) 會造成局部壓力最小值，卻非對應流體將作旋轉運動。如考慮一非穩態非旋軸對稱且具有停滯點之流場， $u_r = -\alpha(t)r$ 、 $u_\theta = 0$ 及 $u_z = 2\alpha(t)z$ 時， $\alpha(t)$ 即為應變率 (strain rate)，當 $d\alpha/dt - \alpha^2 > 0$ 時，於任意 $r-\theta$ 之平面皆具一局部壓力最小值，然而此流場之運動非為旋轉運動。
2. 在旋轉運動中，黏滯效應會消除局部壓力最小值。換言之，若為無黏滯效應之旋轉運動時，壓力梯度使流體達到旋轉平衡，造成旋轉中心為一局部壓力最小時，然而若有黏滯效應時，則於旋轉平衡中需多考量黏滯力之影響，使於旋轉中心之局部壓力最小值的特性消失。

故針對上述兩個缺陷，Jeong 和 Hussain 藉以排除兩效應，並期待得到較佳之準則，故提出 λ_2 準則。

針對局部壓力最小值，可透過 $p_{,ij}$ 來辨別，其為海森 (Hessian) 矩陣。故一開始考慮 Navier-Stokes 方程式：

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,kk} , \quad (2-18)$$

其中 $D\omega_i/Dt$ 為對速度之物質導數 (material derivative)，可表示成

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k u_{i,k} , \quad (2-19)$$

而 p 為壓力， ν 為運動黏滯係數 (kinematic viscosity)。對式 2-18 取梯度 (gradient) 得

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + u_{k,j} u_{i,k} + u_k u_{i,jk} = -\frac{1}{\rho} p_{,ij} + \nu u_{i,jkk} , \quad (2-20)$$

上式之 $p_{,ij}$ 即為此方法主要之關鍵。將速度梯度張量以卡式分解 (Cartesian decomposition) 成對稱矩陣 (symmetric matrix, S_{ij}) 與反對稱矩陣 (antisymmetric matrix, Ω_{ij})：

(2-21)

$$u_{ij} = S_{ij} + \Omega_{ij},$$

其中 S_{ij} 為應變率張量 (strain rate tensor)，可表示成

(2-22)

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

Ω_{ij} 為旋轉張量 (rotation tensor)，可表示成

(2-23)

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2-23)$$

故將式 2-21 代入並改寫式 2-20，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (S_{ij} + \Omega_{ij}) + u_k (S_{ij} + \Omega_{ij})_{,k} + \mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2 + S_{ik} \Omega_{kj} + \Omega_{ik} S_{kj} \\ = -\frac{1}{\rho} p_{,ij} + \nu (S_{ij} + \Omega_{ij})_{,kk}, \end{aligned} \quad (2-24)$$

其中

$$\mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2 = S_{ik} S_{kj} + \Omega_{ik} \Omega_{kj}. \quad (2-25)$$

可將式 (2-24) 拆解成反對稱部分：

$$\frac{D \Omega_{ij}}{Dt} - \nu \Omega_{ij,kk} + S_{ik} \Omega_{kj} + \Omega_{ik} S_{kj} = 0, \quad (2-26)$$

即為渦度傳輸方程式 (vorticity transport equation)，以及對稱部分：

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} - \nu S_{ij,kk} + \mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2 = -\frac{1}{\rho} p_{,ij}, \quad (2-27)$$

由於前述之非穩態應變與黏滯效應對局部壓力最小值之影響，故不考慮式 2-26 之前兩項。當局部壓力最小值發生時， $p_{,ij}$ 有二特徵值為正值，則相對地 $\mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2$ 有兩特徵值為負值，故可藉由 $\mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2$ 的特徵值來判斷因旋轉運動所造成之局部壓力最小值。若 $\mathbf{S}^2 + \boldsymbol{\Omega}^2$ 特徵值為 λ_1 、 λ_2 與 λ_3 ，且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ，則上述準則可改為

$$\lambda_2 < 0. \quad (2-28)$$

2.5.4 速度梯度張量之複數根之虛數部分—渦流強度 (The image part)

σ_{ci} of the complex eigenvalues of ∇u , swirling strength)



此準則於 Zhou 和 Adrian [12] 之文章中介紹與使用，方法與 2.5.2 小節相似，其概念亦是以局部流線之型態作為辨識條件，差異在於並非判斷特徵值之數系型態，而是當特徵值具複數根時，進而以複數之虛數部分作為判斷依據。

式 2-7 之速度梯度張量可透過對角化分解成

$$\nabla u = [V_r \ V_{cr} \ V_{ci}] \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cr} & \sigma_{ci} \\ 0 & -\sigma_{ci} & \sigma_{cr} \end{bmatrix} [V_r \ V_{cr} \ V_{ci}]^{-1}, \quad (2-29)$$

其中改寫 2.5.2 小節之表示，特徵值之三根為：

$$\sigma_1 = \sigma_r, \quad (2-30a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{cr} + i\sigma_{ci}, \quad (2-30b)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{cr} - i\sigma_{ci}; \quad (2-30c)$$

特徵向量表示為：

$$V_1 = V_r, \quad (2-31a)$$

$$V_2 = V_{cr} + iV_{ci}, \quad (2-31b)$$

$$V_3 = V_{cr} - iV_{ci}, \quad (2-31c)$$

並將式 2-14 轉換至以 $\{V_r \ V_{cr} \ V_{ci}\}$ 為基底向量 (basis vectors) 之局部曲線坐標 (local curvilinear coordinate, (x_1, x_2, x_3))，故局部流線可表示為：

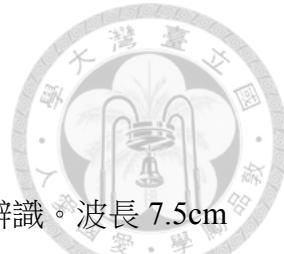
$$x_1(t) = c_r e^{\sigma_r t}, \quad (2-32a)$$

$$x_2(t) = e^{\sigma_{cr}t} \left[c_c^{(1)} \cos(\sigma_{ci}t) + c_c^{(2)} \sin(\sigma_{ci}t) \right], \quad (2-32b)$$

$$x_3(t) = e^{\sigma_{cr}t} \left[c_c^{(2)} \cos(\sigma_{ci}t) - c_c^{(1)} \sin(\sigma_{ci}t) \right], \quad (2-32c)$$

其中 c_r 、 $c_c^{(1)}$ 與 $c_c^{(2)}$ 為常數。

由式 2-32a 可看出沿 V_r 軸上流體會被壓縮或拉伸，而式 2-32b 與式 2-32c 中說明流體在 V_{cr} 與 V_{ci} 所構成之平面上作旋轉運動， σ_{ci} 則代表旋轉運動之強度，故稱渦流強度 (swirling strength)，而 σ_{ci}^2 則類同於渦度擬能，且其因次與其他準則相同，故以 σ_{ci}^2 作為準則判斷渦旋。



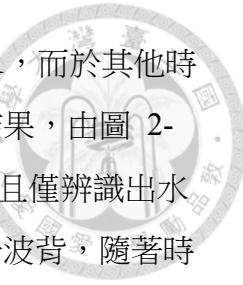
2.5.5 辨識結果

針對本研究之數值模擬資料，以上述之四種準則進行結構辨識。波長 7.5cm 之辨識結果（如圖 2-112 至圖 2-117）以等值曲面（iso-surface）呈現。圖 2-112 為時間在 $t = 5T_0$ 時之等值曲面圖，圖 2-112 (a) 是速度梯度張量之第二不變量 $Q = 0$ ，圖 2-112 (b) 是 $S^2 + \Omega^2$ 之第二特徵值 $\lambda_2 = -0.001$ ，圖 2-112 (c) 是速度梯度張量之判別式 $\Delta = 0$ ，圖 2-112 (d) 是渦流強度之平方 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 。比較這四張圖可以發現，四種方法皆能辨識出波浪效應所造成之結構，分布於波峰與波谷；而 Δ 與 σ_{ci}^2 之準則能辨識出部分水面下之結構，且由於門檻值之設定 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 與 $\Delta = 0$ 之準則為相等之條件，故使圖 2-112 (c) 及圖 2-112 (d) 之分布相當； λ_2 則能呈現水面下之結構。

圖 2-113 至圖 2-116 分別為時間在 $t = 10, 15, 20, 25T_0$ 時之等值曲面圖，其門檻值選取與圖 2-112 相同，而四種準則之辨識結果一致。然而比較與 $t = 5T_0$ 之差異在於 λ_2 之準則，原先能辨識出之水下結構，但此時則僅辨識出波浪效應之結構，而其他三種方法之結果保持一致， Q 之準則依舊僅辨識出波浪效應之結構， Δ 與 σ_{ci}^2 之準則能多辨識出部分水下之結構，且其隨時間逐漸變大。

觀察時間在 $t = 30T_0$ 時之辨識結果（如圖 2-117），其中各準則之等值曲面之等值曲面值選定皆一致。比較四種準則於此時間點之差異，與圖 2-112 之結果相同， Q 之準則依舊僅辨識出波浪效應之結構， λ_2 之準則能辨識出水下結構， Δ 與 σ_{ci}^2 之準則能辨識出部分水面下之結構。而比較四種準則於上述不同時間點之差異， λ_2 之準則僅在 $t = 5, 30T_0$ 時辨識出水面下結構，而 Δ 與 σ_{ci}^2 於不同時間點皆能辨識出部分水下結構，而由圖 2-112 (b) 與圖 2-117 (b) 可以發現水面下結構逐漸增強並於沿流向延伸。

由於上述之辨識結果，無法於各時間點完整呈現出水面下之紊流結構，故專注於探水面下之紊流結構，應將速度扣除平均速度及波浪效應而得之速度擾動，再進行四種準則之結構辨識，盼能消除上述波浪效應影響之結果，僅呈現水面下之紊流結構。波長 7.5cm 之辨識結果如圖 2-118 至圖 2-123，其時間分別為 $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30T_0$ 。圖 2-118 (a) 是速度梯度張量之第二不變量 $Q = 0.001$ ，圖 2-118 (b) 是 $S^2 + \Omega^2$ 之第二特徵值 $\lambda_2 = -0.001$ ，圖 2-118 (c) 是速度梯度



張量之判別式 $\Delta = 0$ ，圖 2-118 (d) 是渦流強度之平方 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ ，而於其他時間點之等值曲面值皆為相同。比較以速度擾動進行四種辨識準之結果，由圖 2-118 至圖 2-123 可知其辨識結果皆得到相同之結構而具有一致性，且僅辨識出水面下之紊流結構，而無波浪效應造成之結構。最初結構分布集中於波背，隨著時間發展，微小結構逐漸消失，而成對結構則漸漸朝沿流向延伸，於波前處之結構雖較波背處弱，但仍有在沿流向延續且不間斷之趨勢。

比較渦度擾動之等值曲面（如圖 2-36）與渦旋結構辨識（如圖 2-123）之結果，可發現辨識結果與沿流向渦度擾動和垂直向渦度擾動有相當之關係，即沿流向成對結構主要為沿流向渦度擾動和垂直向渦度擾動所構成。由於本研究之數值模擬資料僅考慮波浪效應，相較於前人應用於其他紊流流場之渦旋結構辨識結果而言，本研究之紊流結構較為單純，故渦旋結構辨識結果與沿流向及垂直向渦度擾動相當一致。

波長 15cm 之流場以速度進行辨識之結果如圖 2-124 至圖 2-129，而波長 20cm 之結果如圖 2-136 至圖 2-141。由上述之圖可發現波長不同之兩個流場，進行渦旋結構辨識之特性一致， Q 與 λ_2 之準則皆僅辨識出波浪效應之結構，而 Δ 與 σ_{ci}^2 之準則同時能辨識出波浪效應與水面下之紊流結構。而改以速度擾動進行辨識，其波長 15cm 之結果如圖 2-130 至圖 2-135，波長 20cm 之結果如圖 2-136 至圖 2-141。由圖可以發現四種辨識準則之結果皆為致性，其結構特性與波長 7.5cm 之流場相同，為沿流向成對之紊流結構，而隨時間發展結構逐漸朝沿流向延伸。

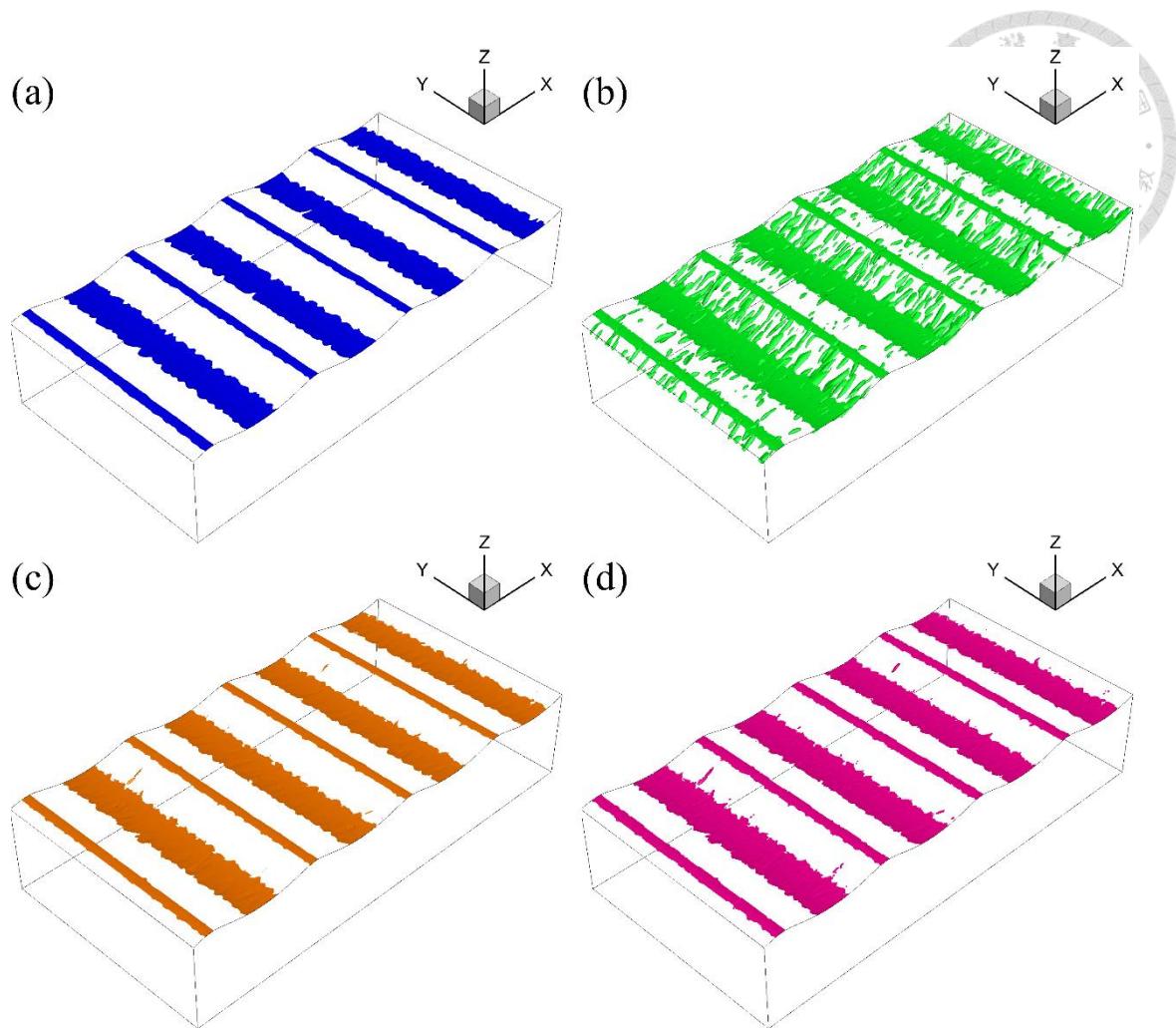


圖 2-112：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

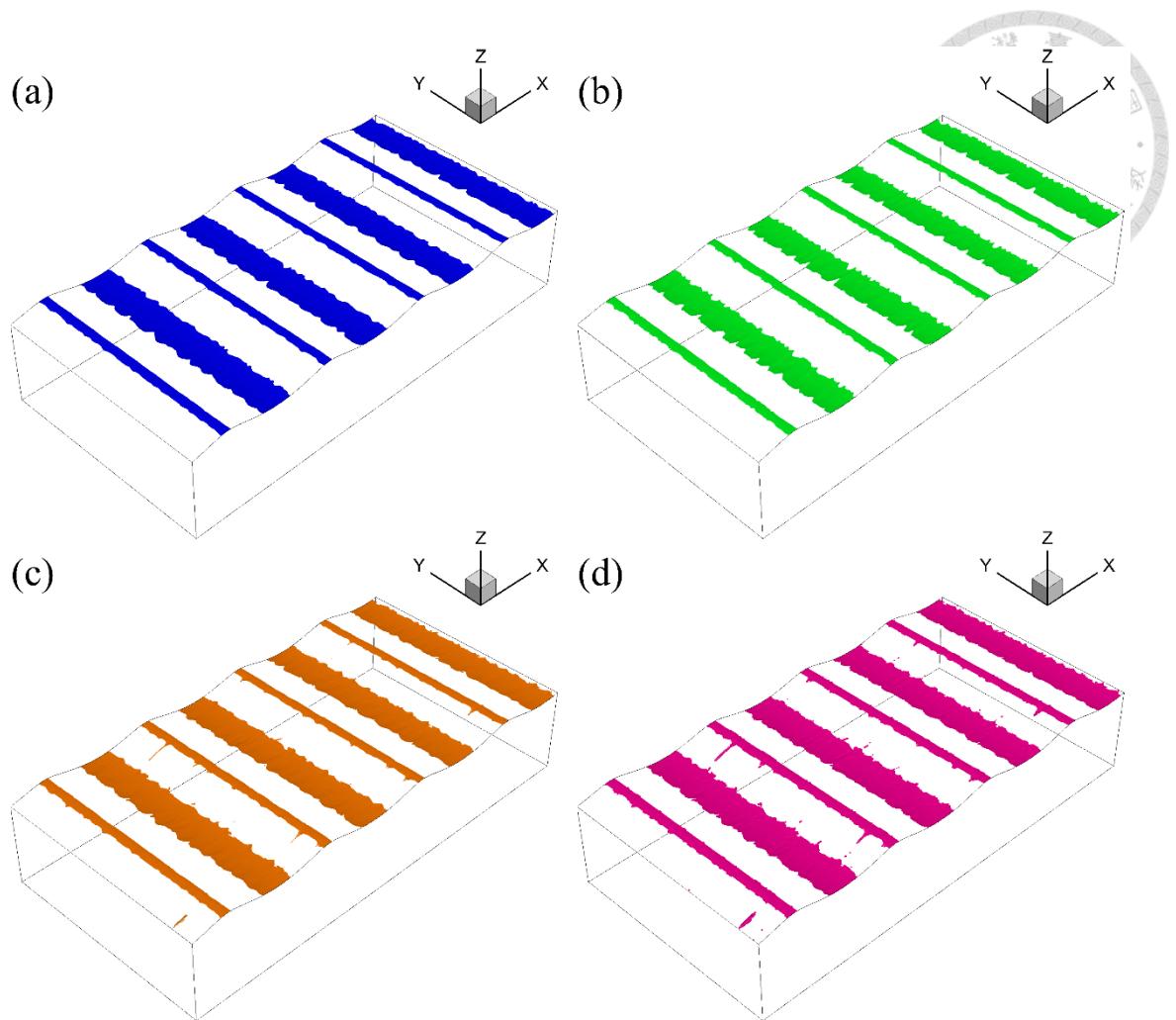


圖 2-113：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

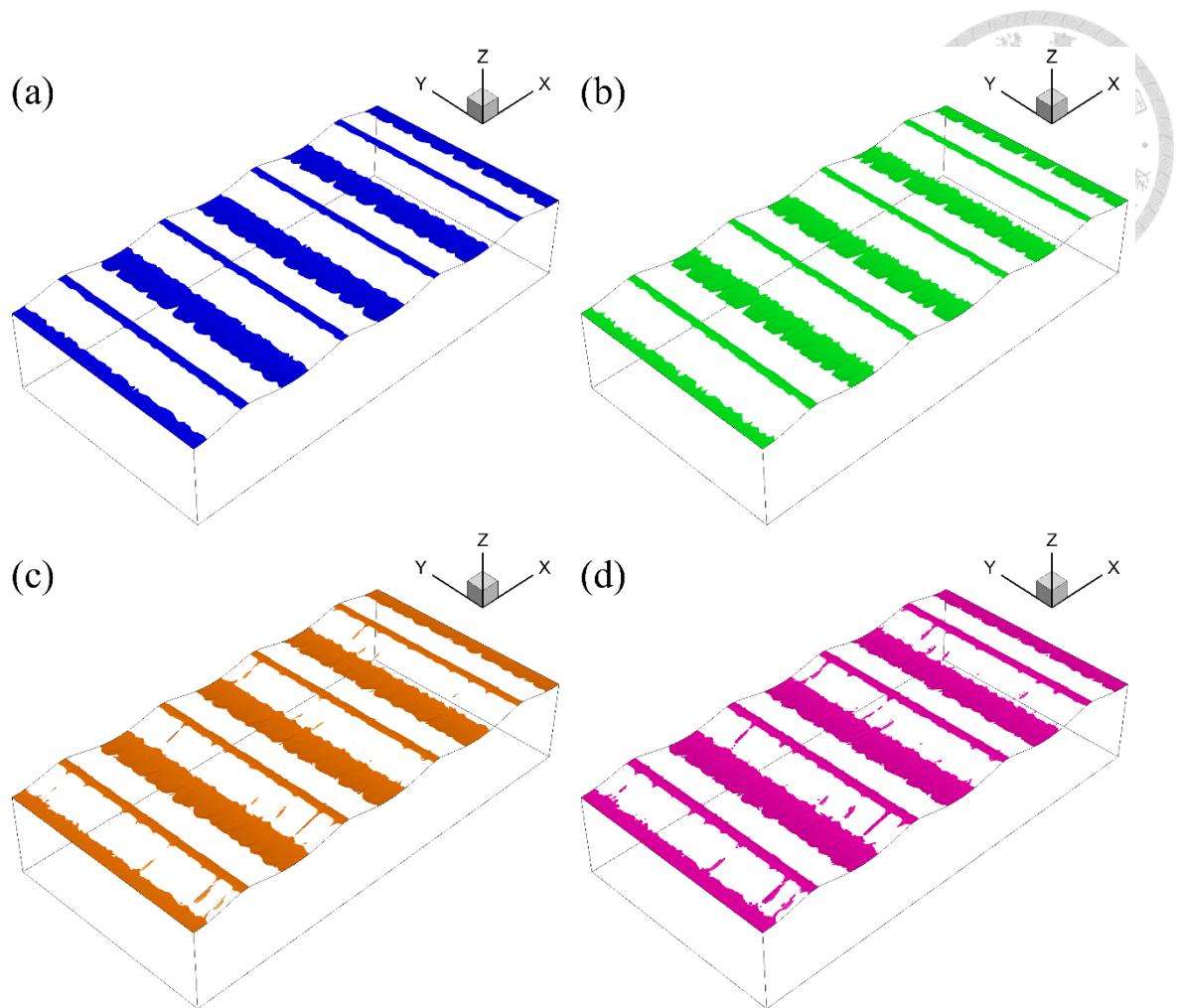


圖 2-114：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

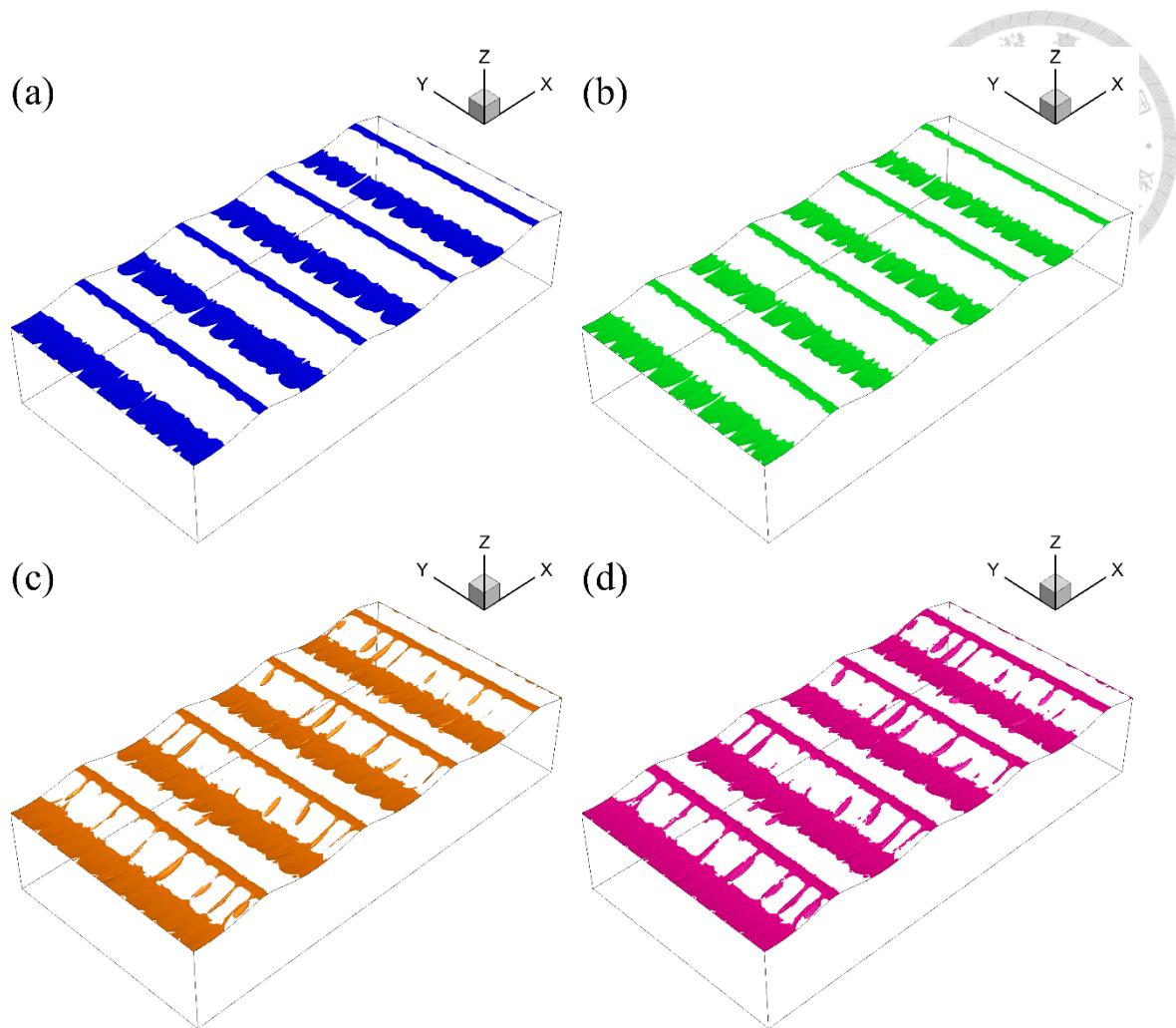


圖 2-115：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{cl}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{cl}^2 > 0$ 。

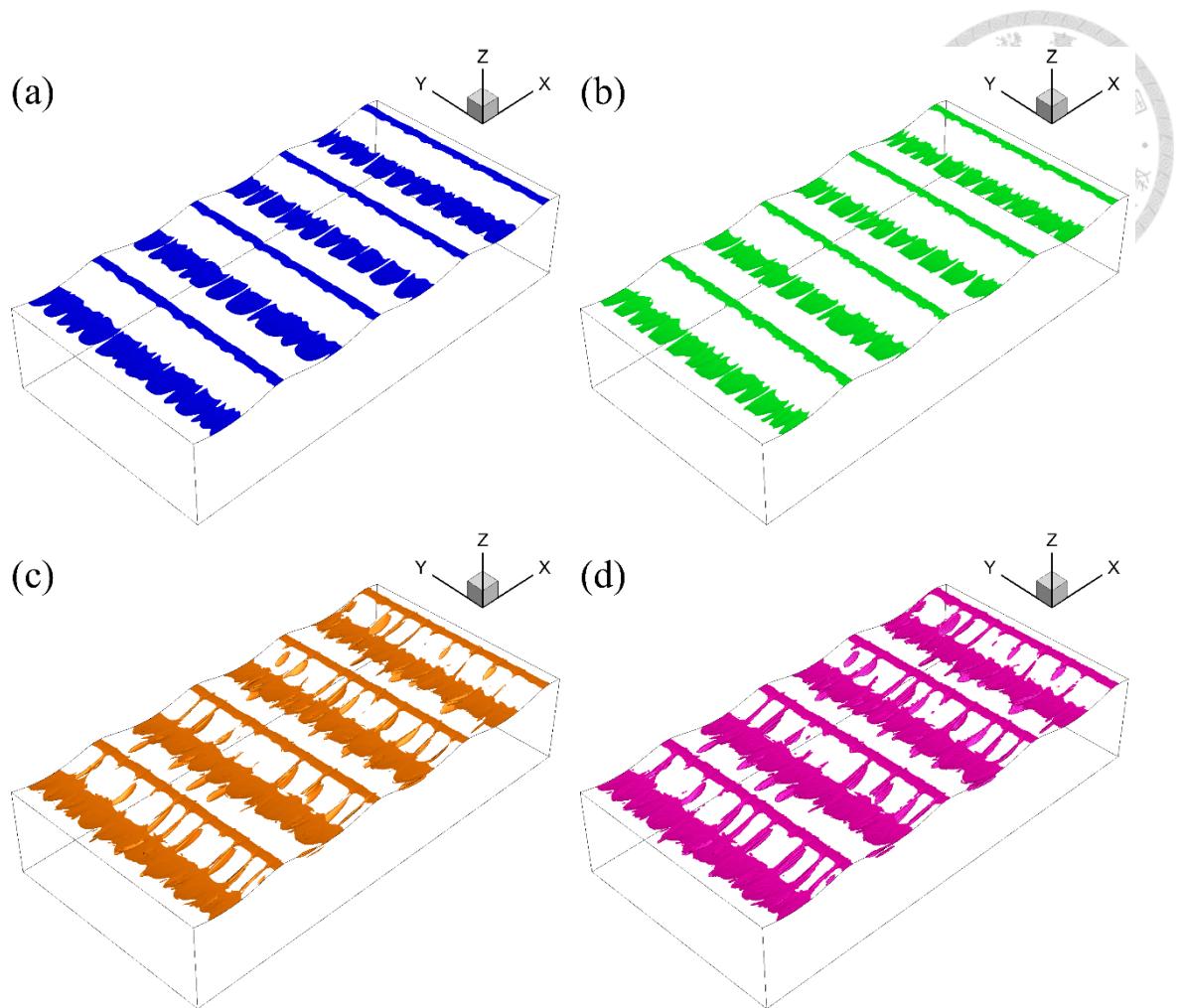


圖 2-116：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

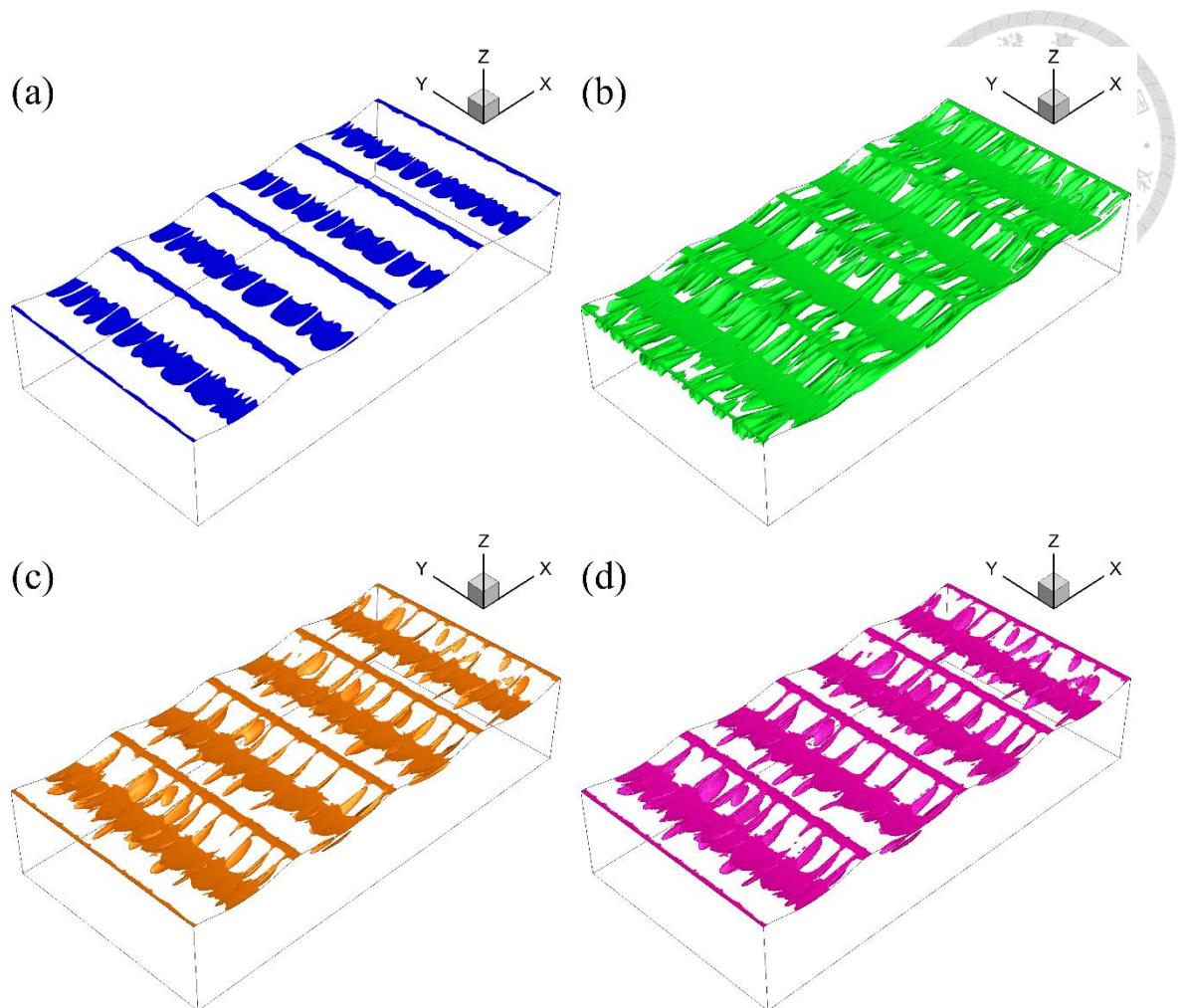


圖 2-117：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

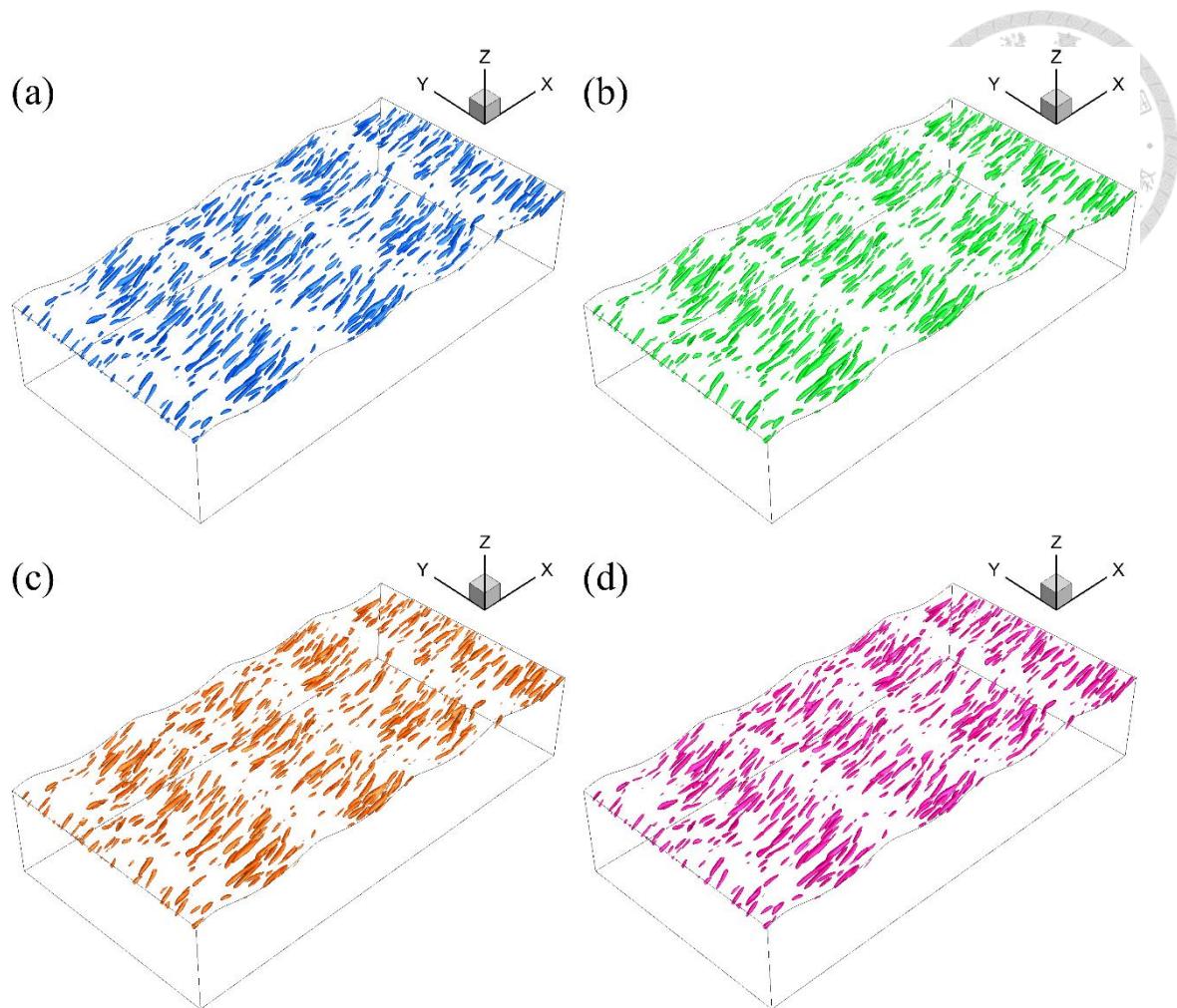


圖 2-118：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

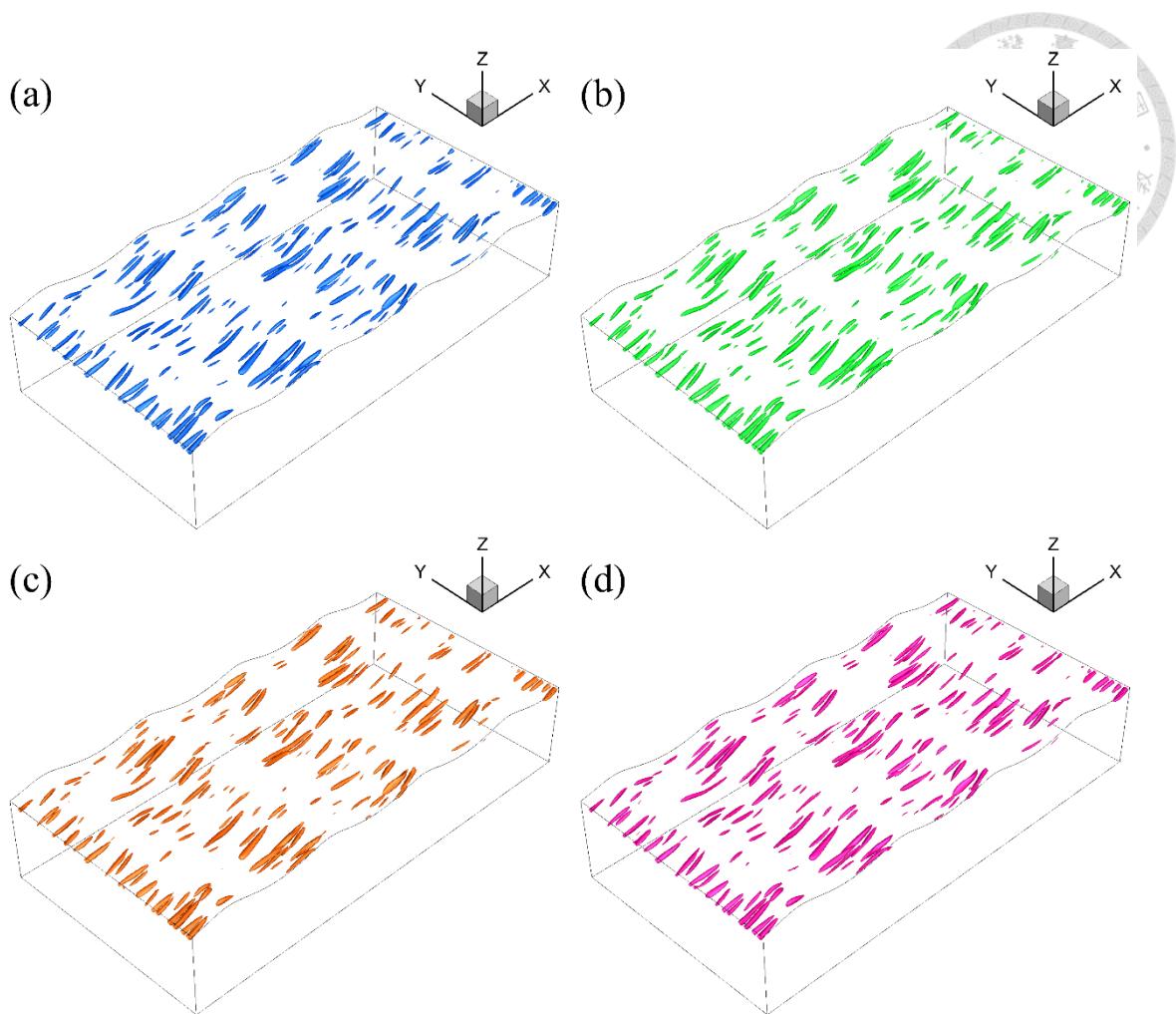


圖 2-119：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

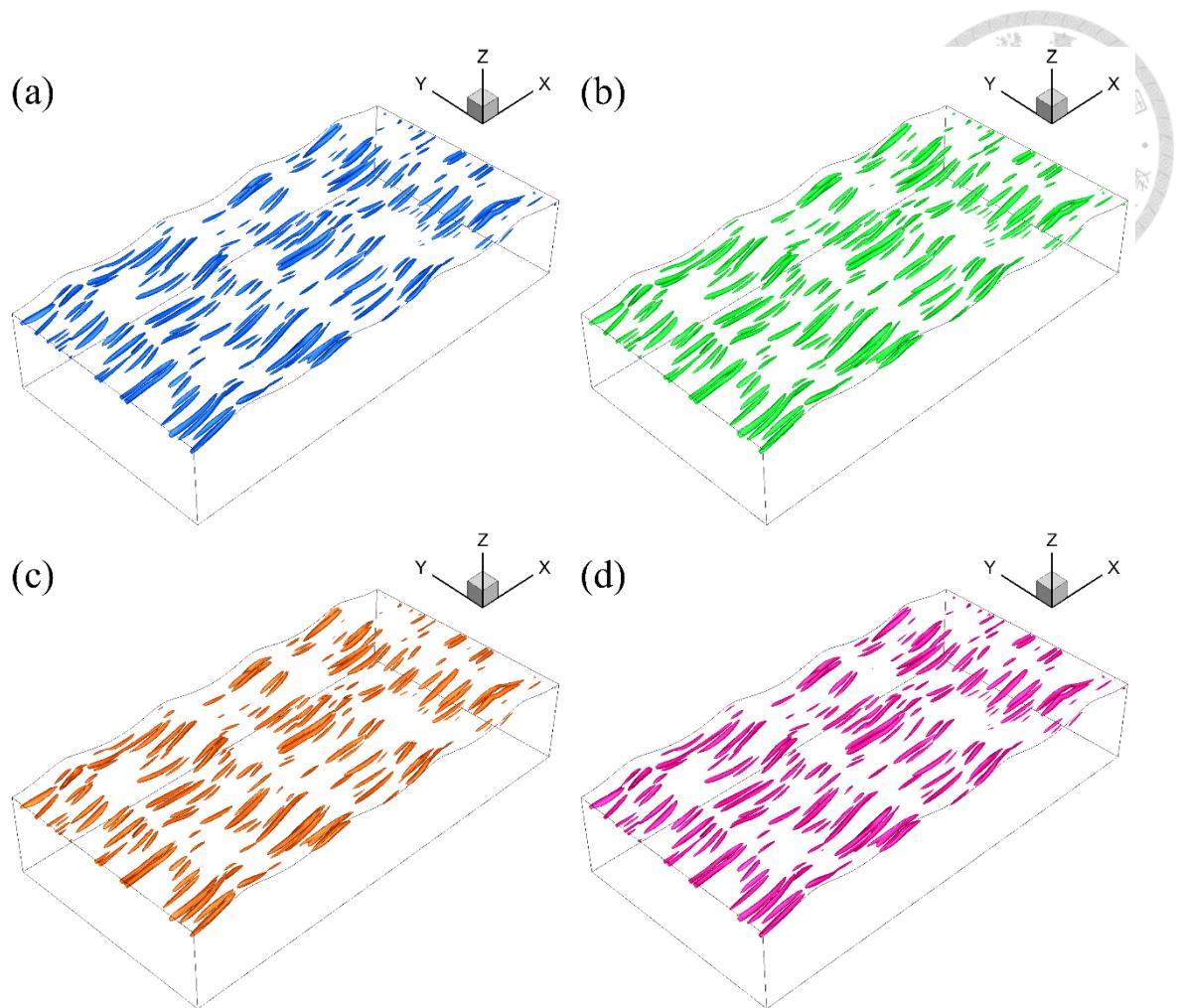


圖 2-120：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

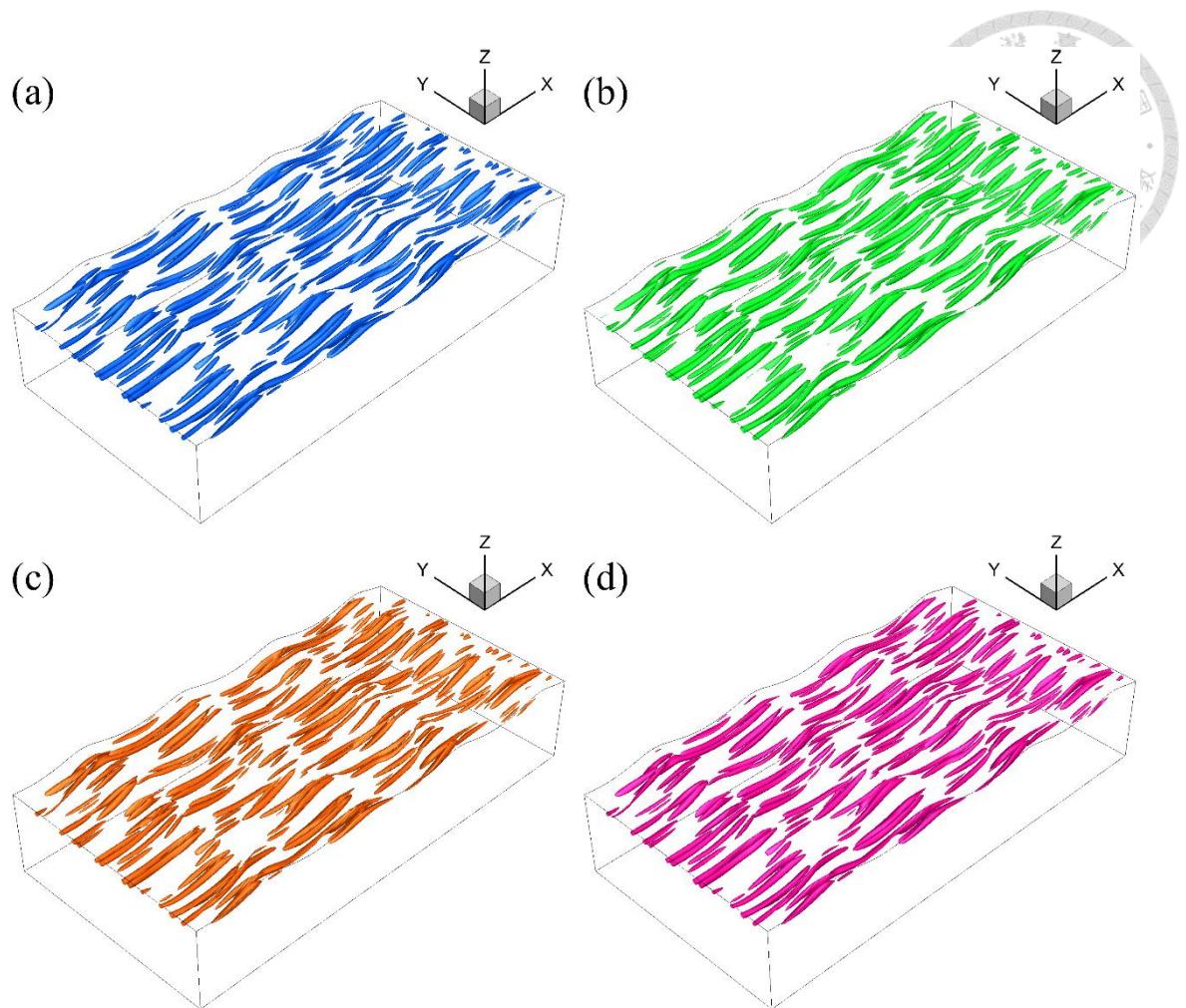


圖 2-121：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

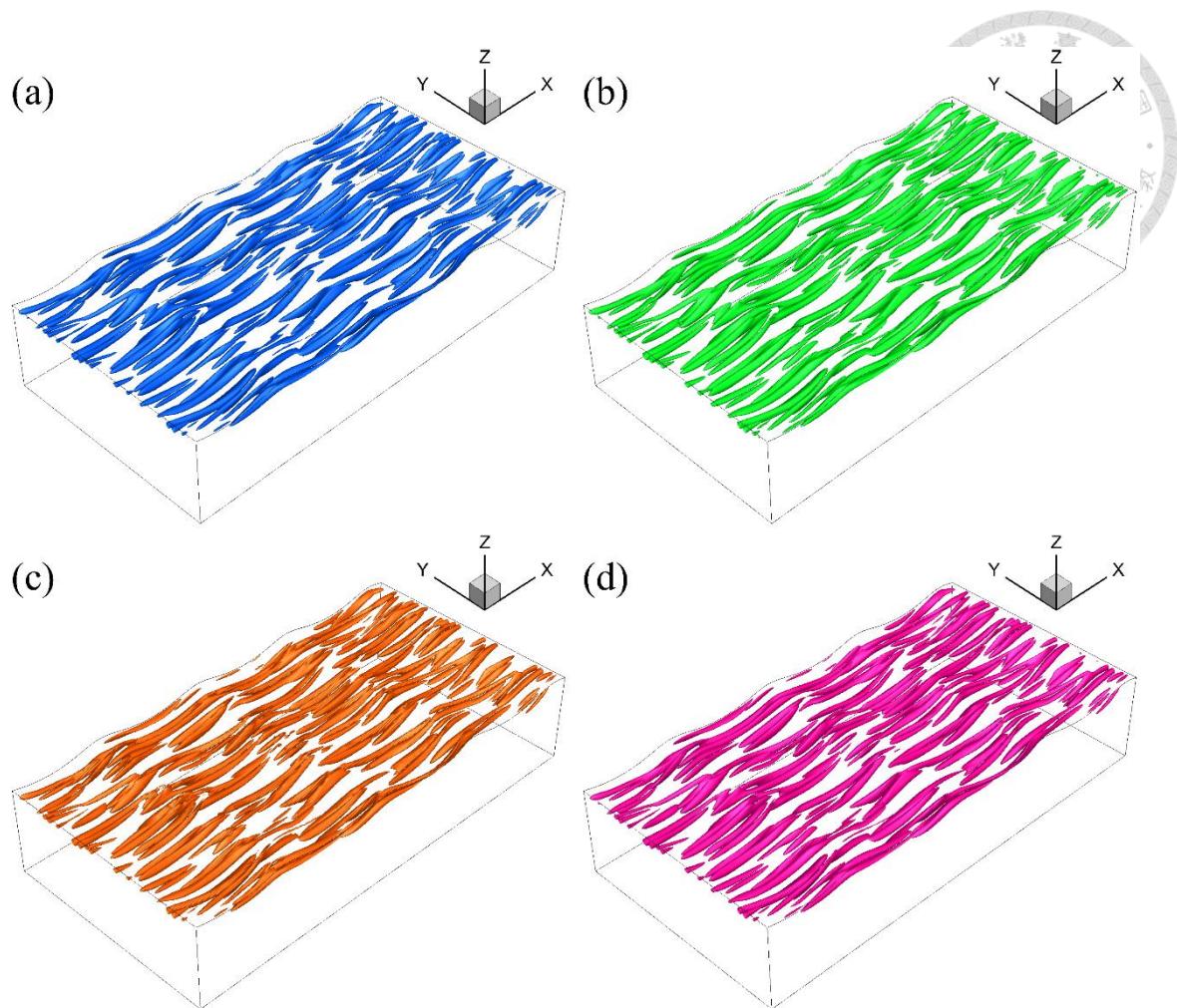


圖 2-122：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

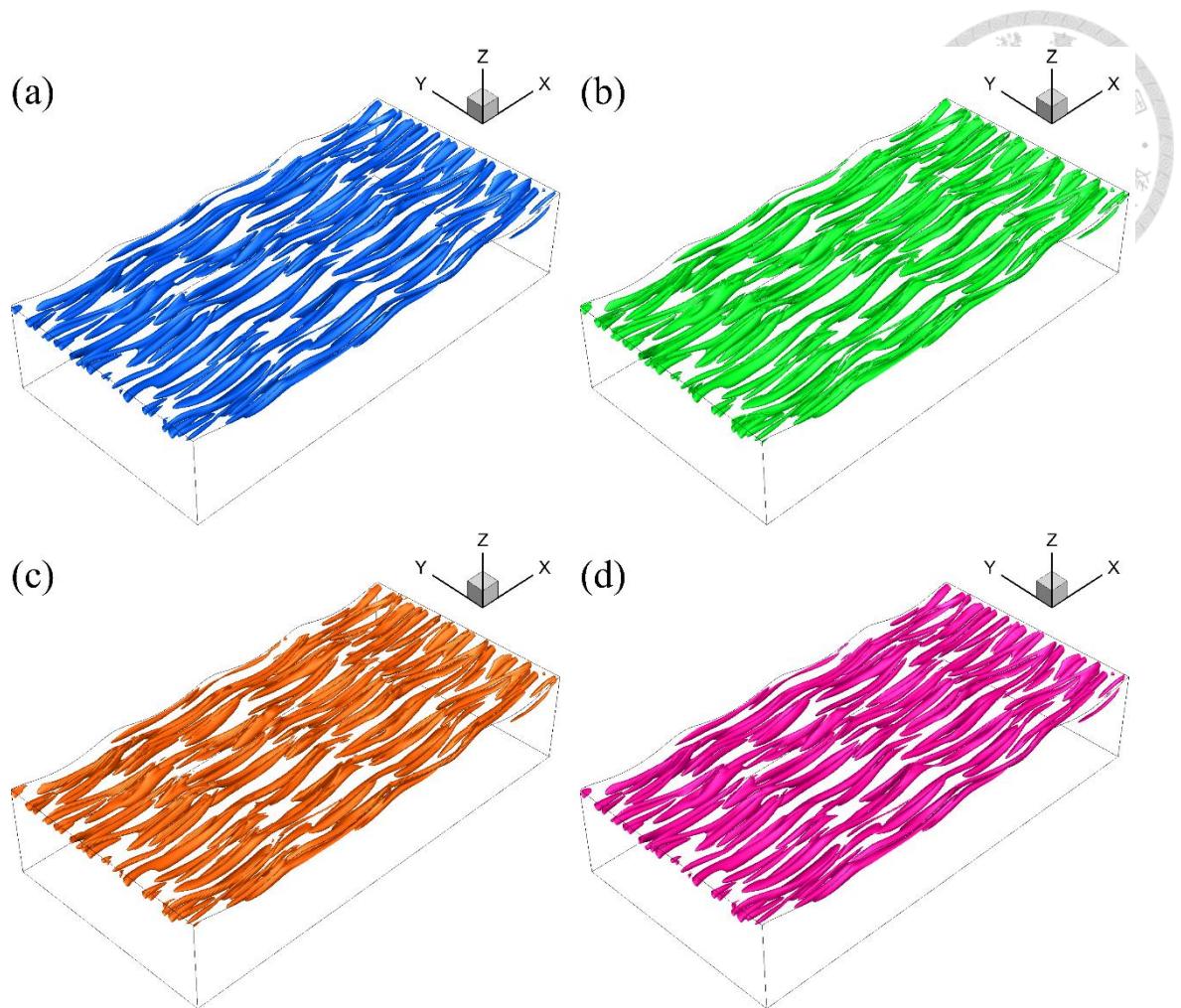


圖 2-123：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

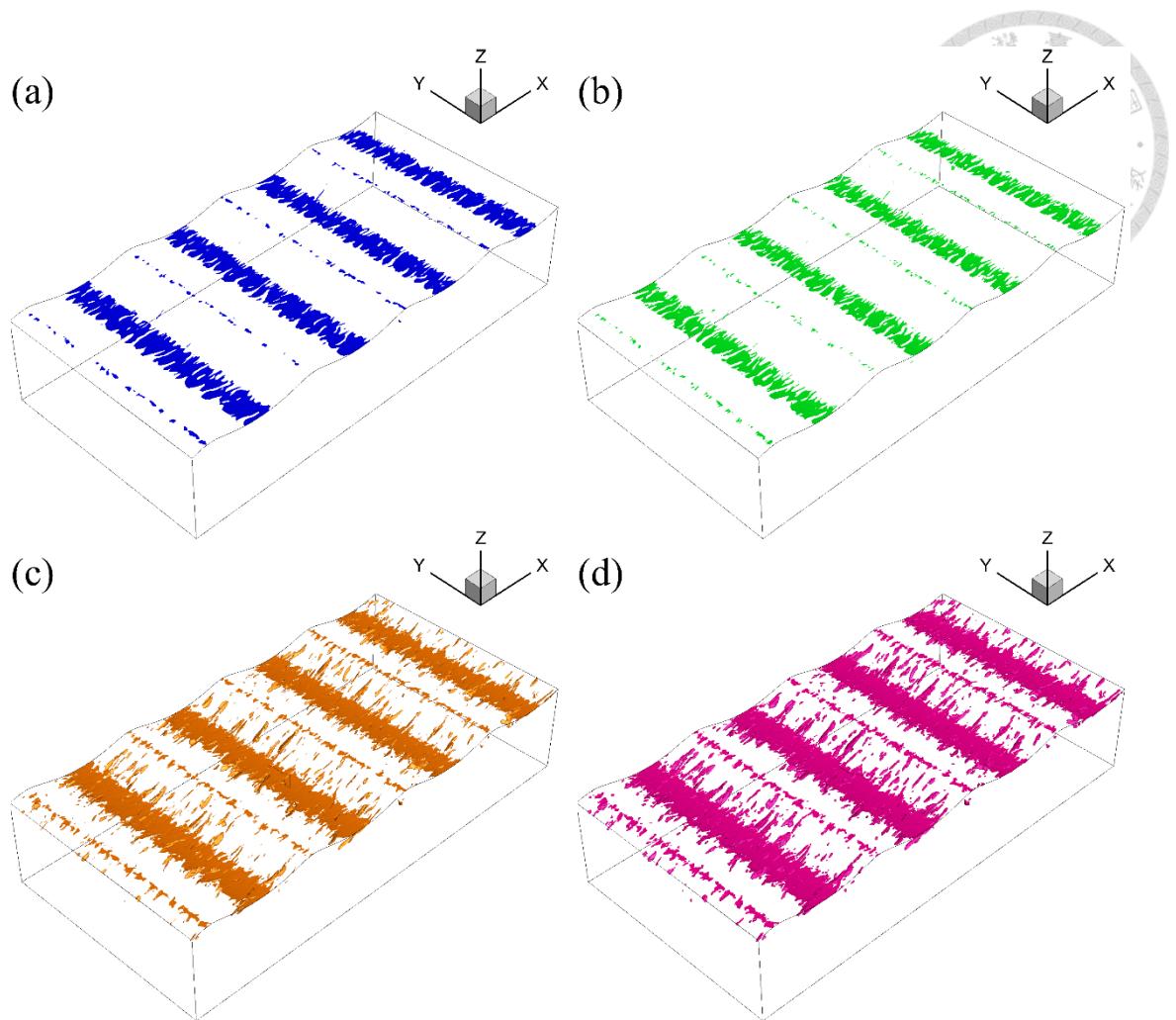


圖 2-124：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

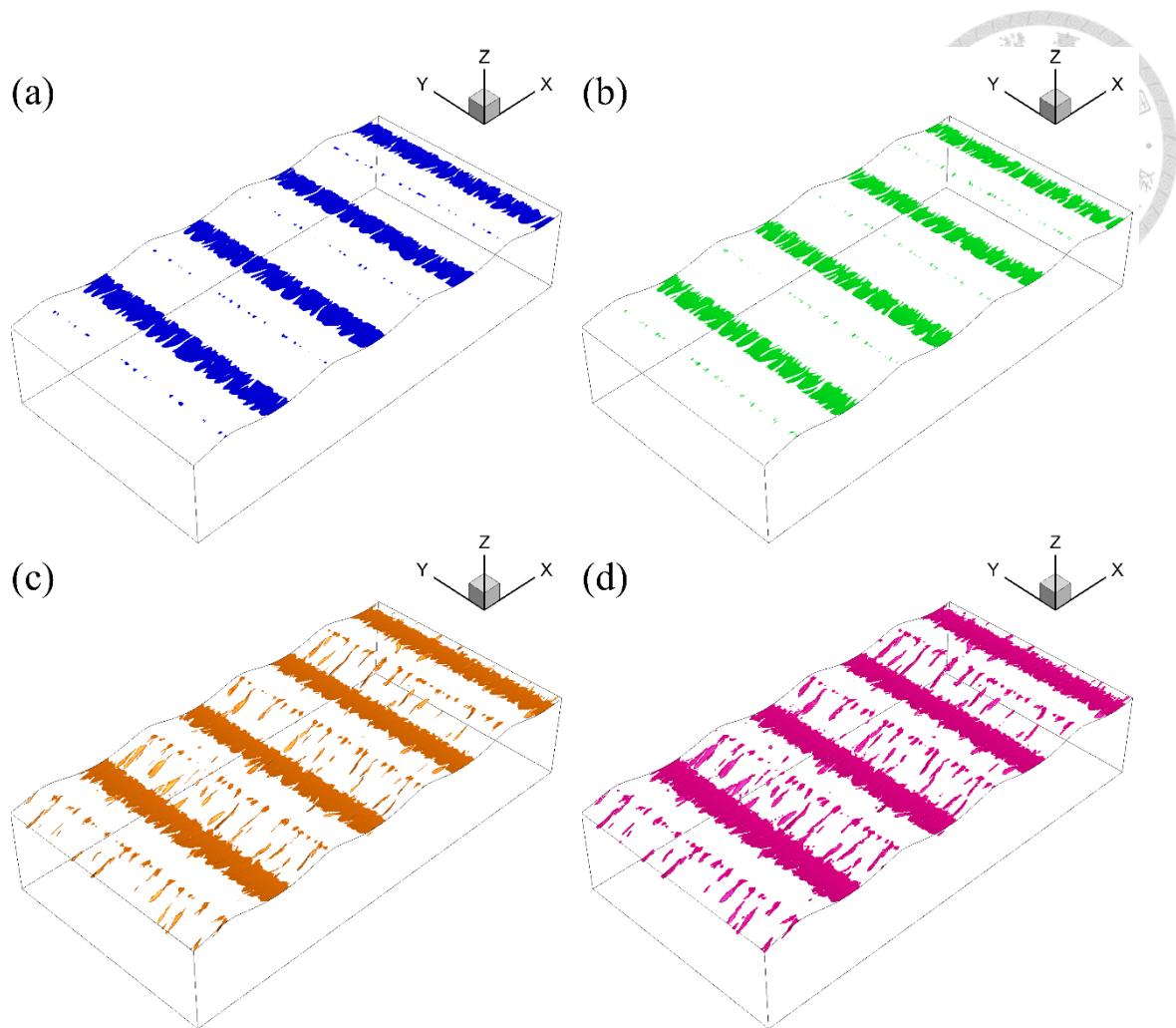


圖 2-125：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

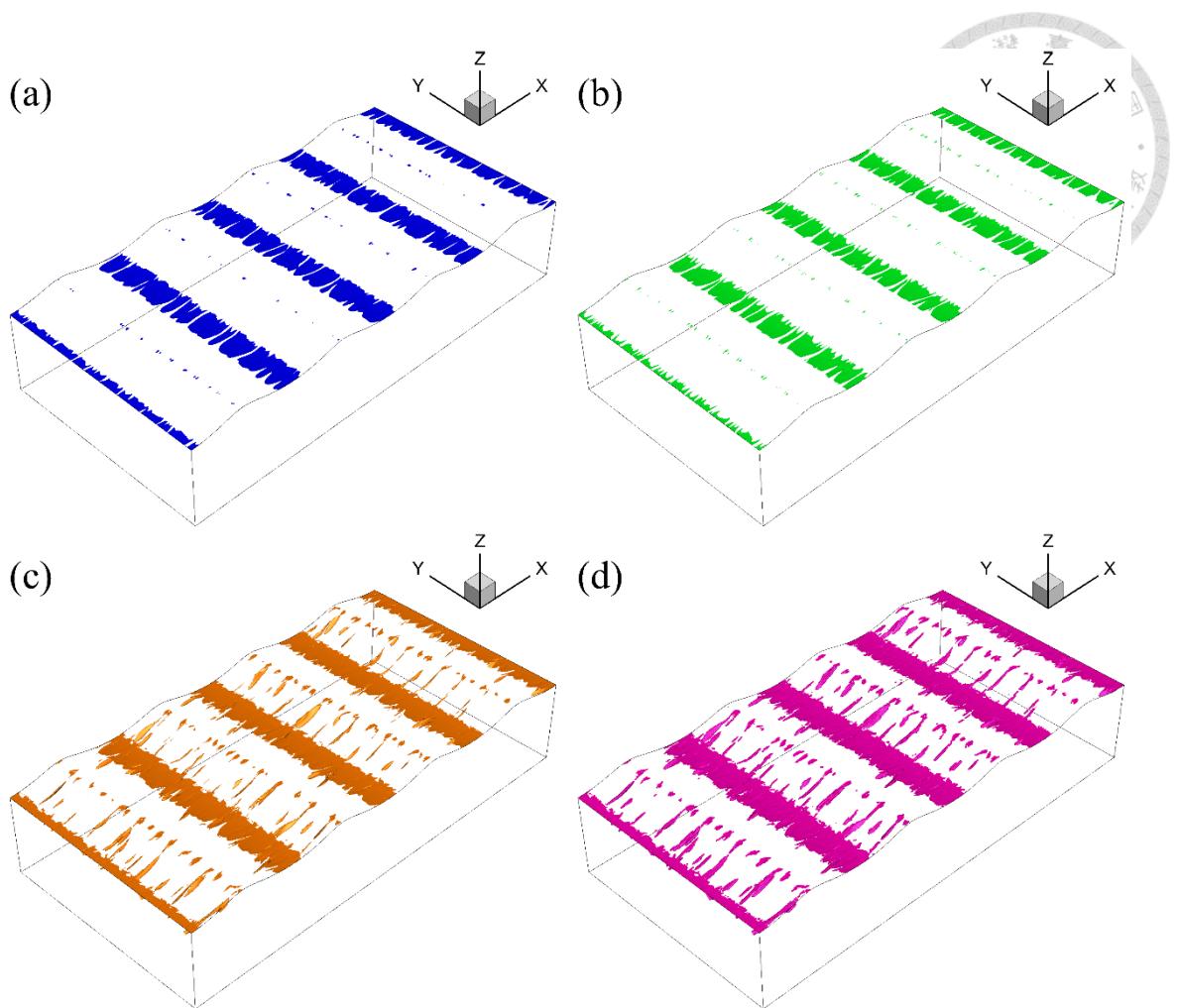


圖 2-126：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

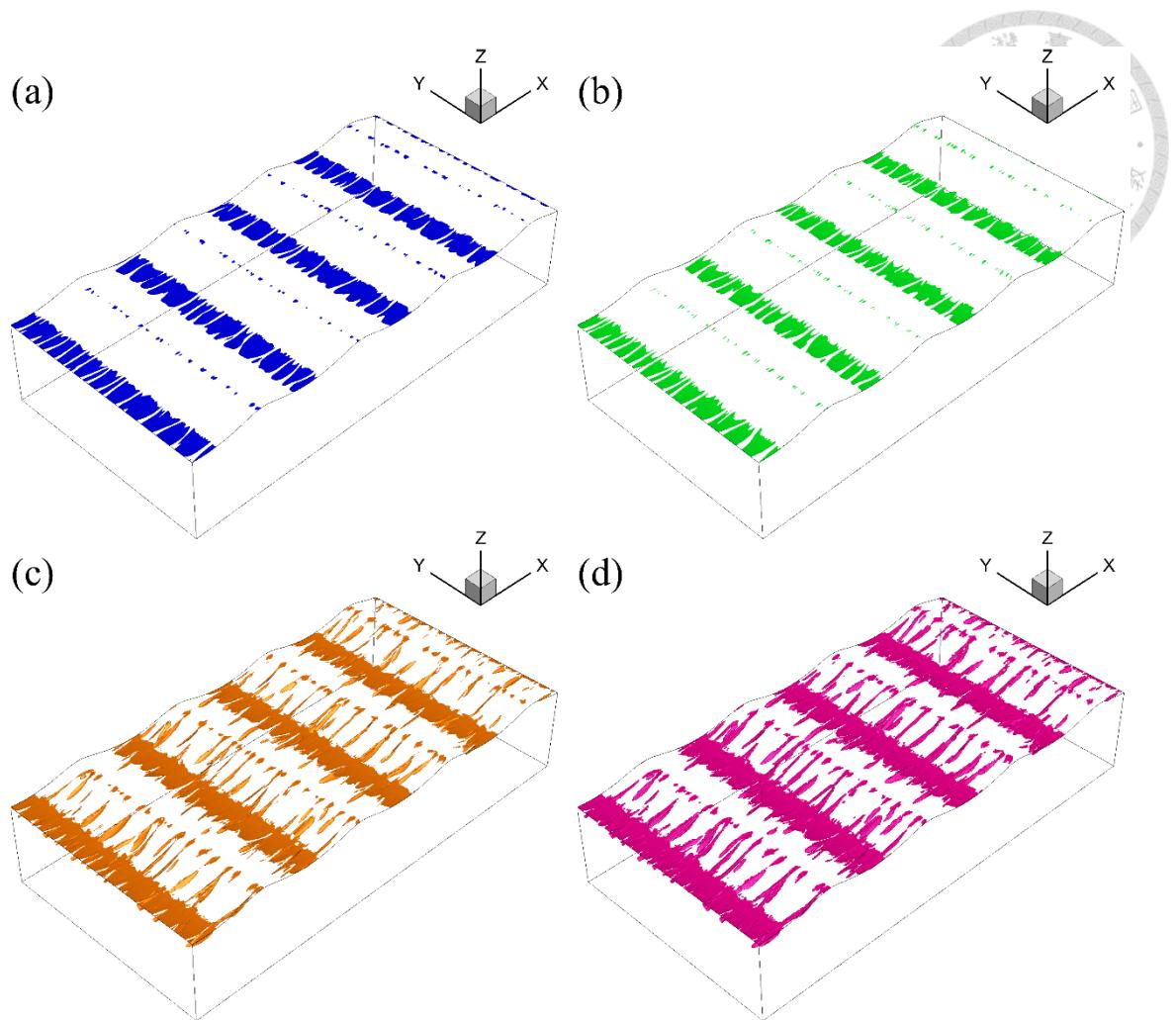


圖 2-127：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

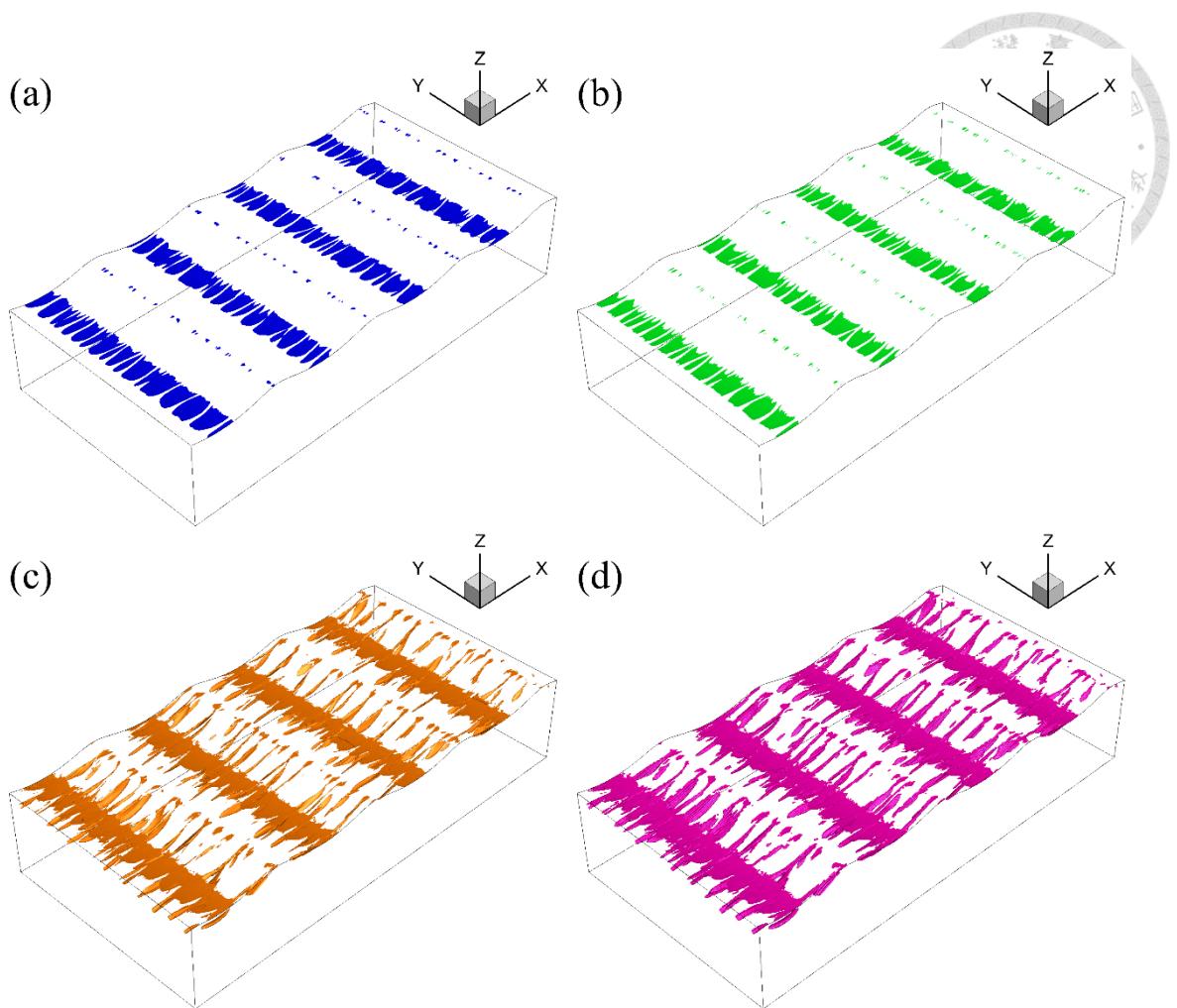


圖 2-128：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

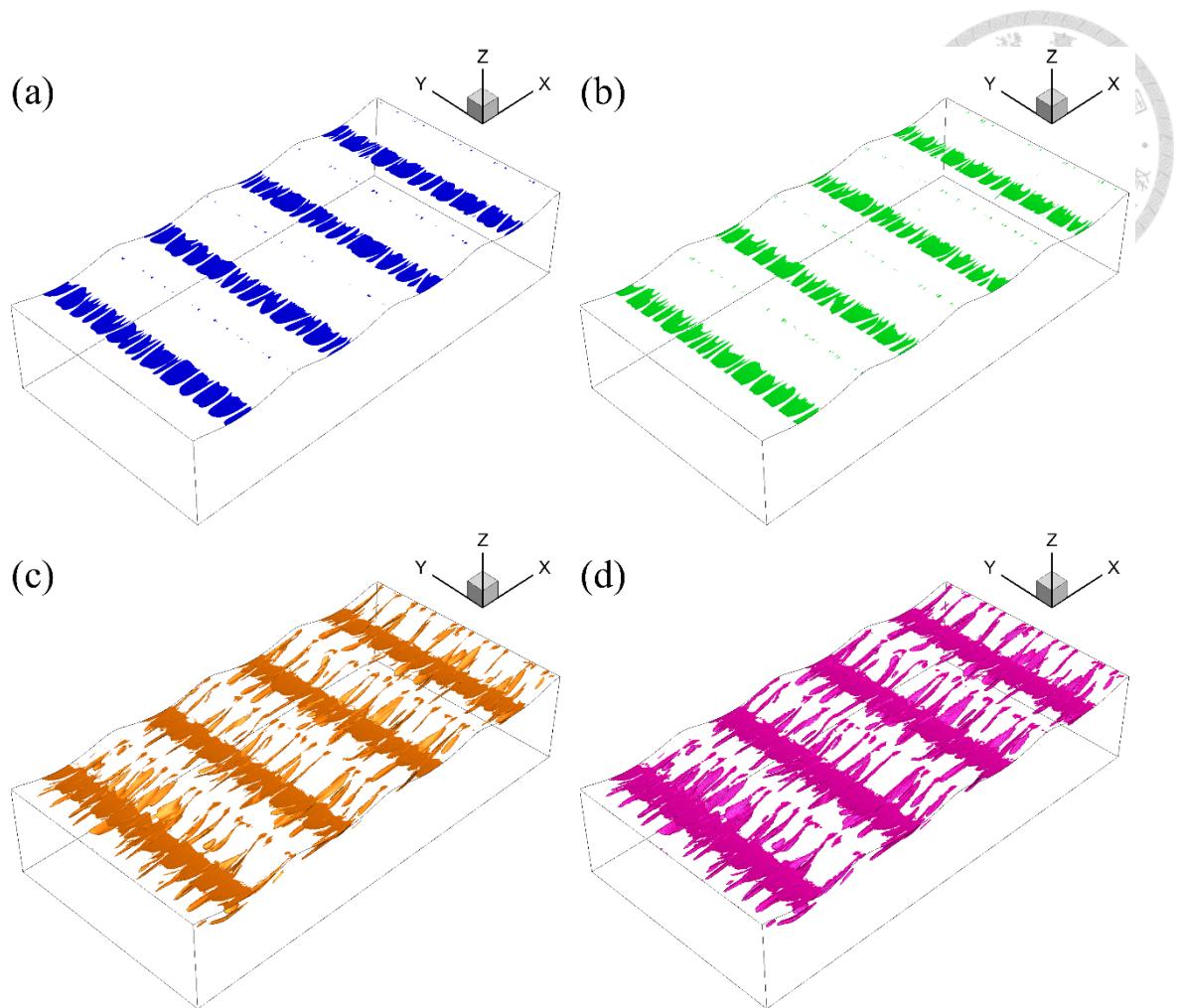


圖 2-129：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

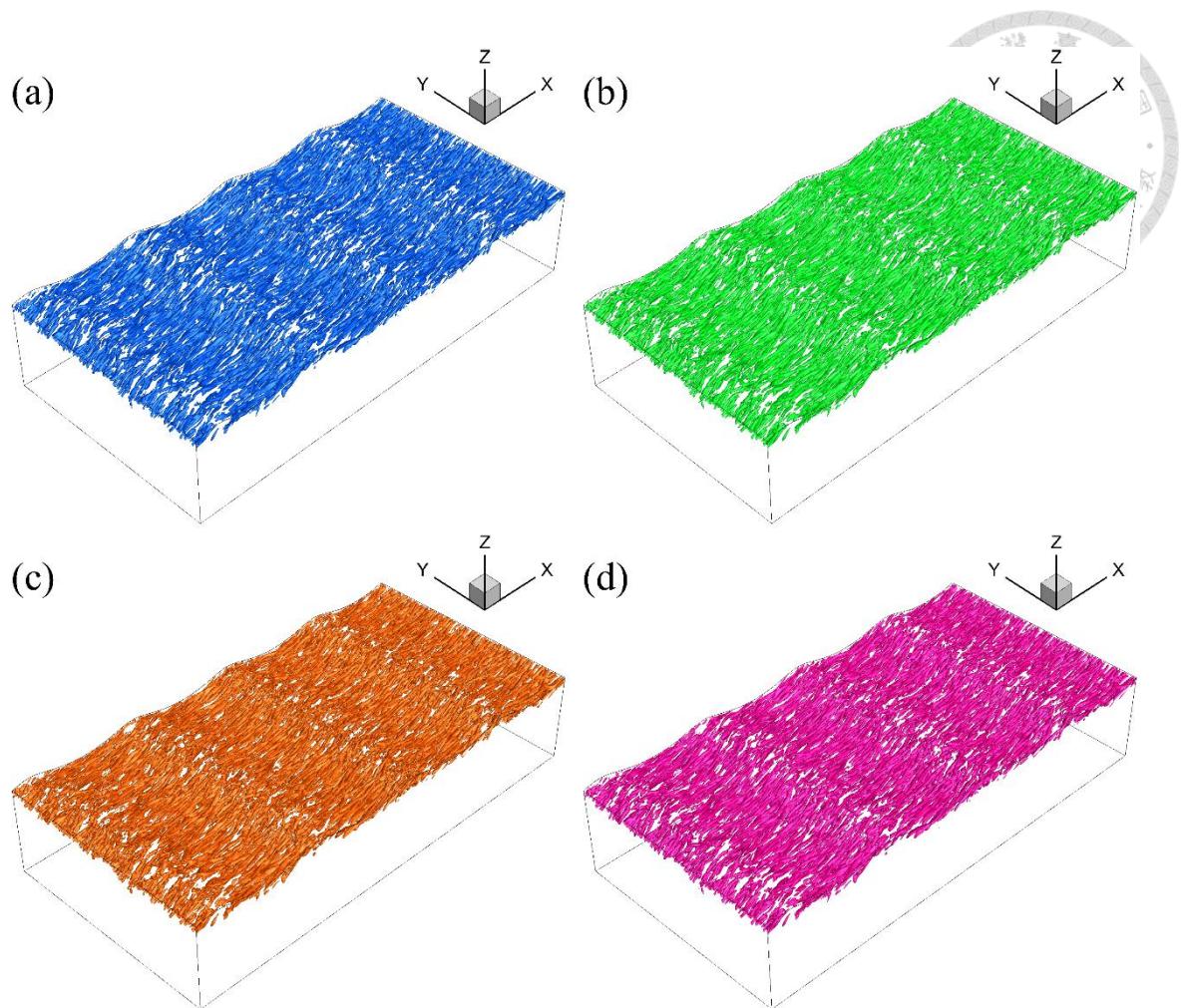


圖 2-130：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

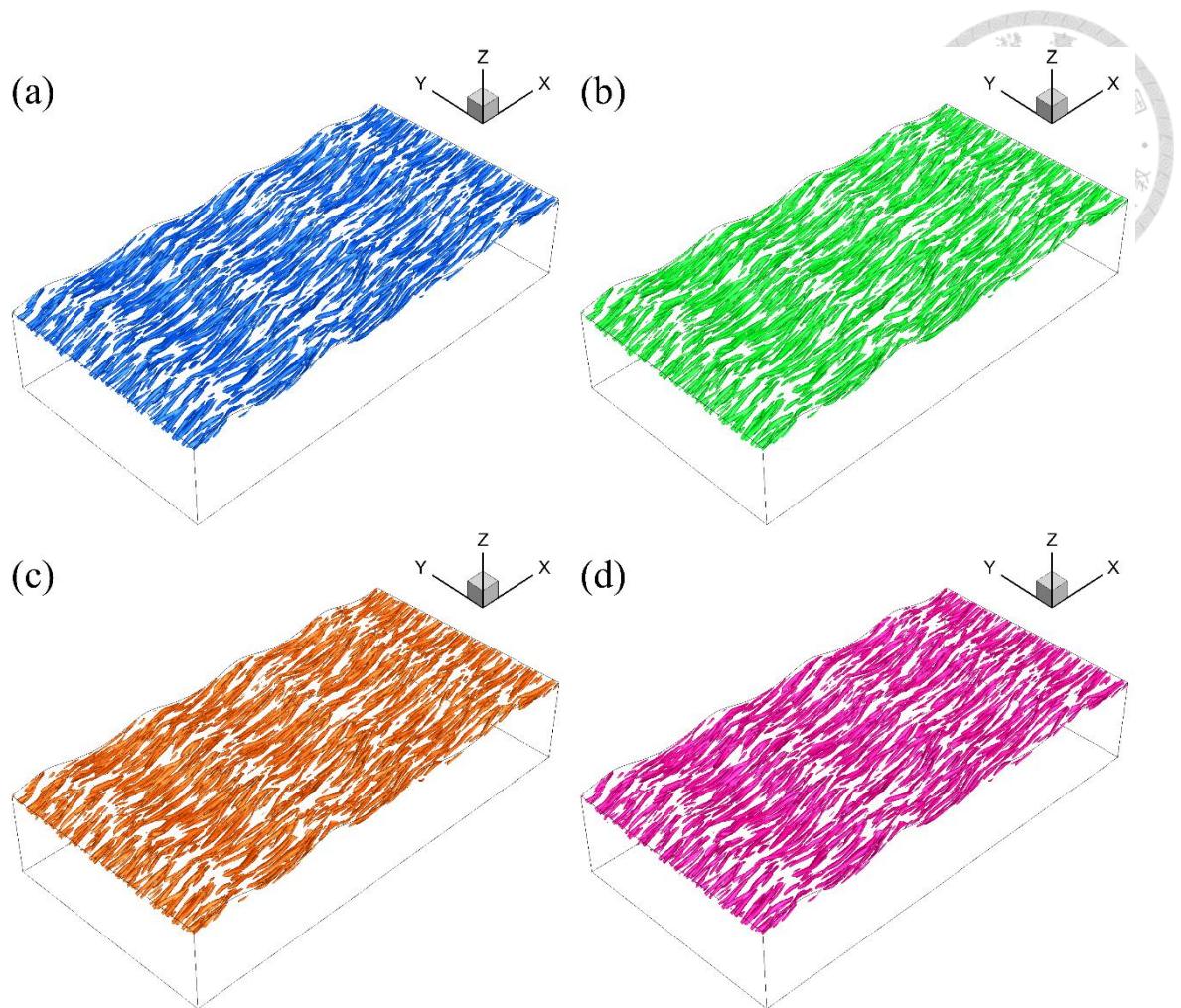


圖 2-131：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

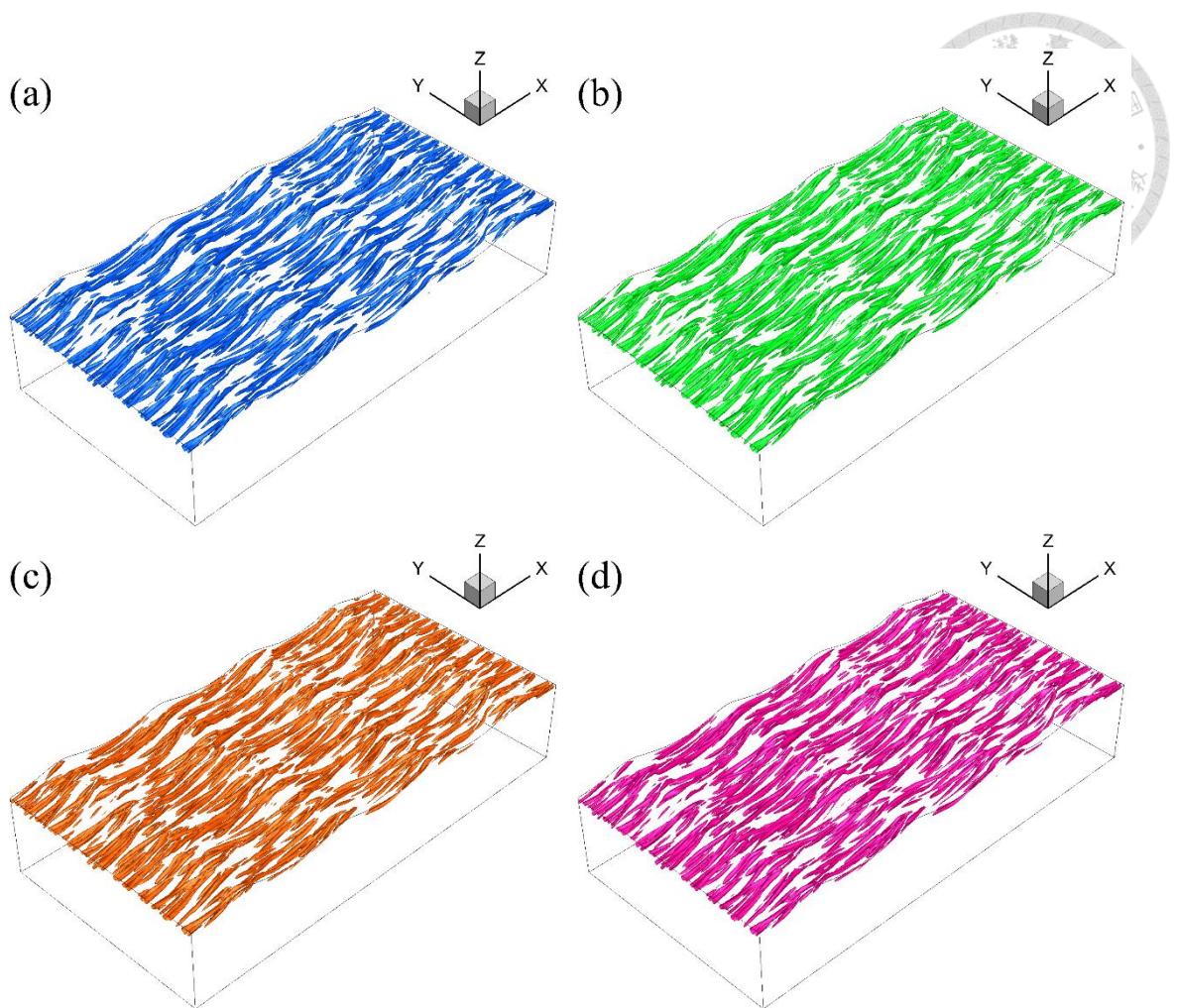


圖 2-132：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

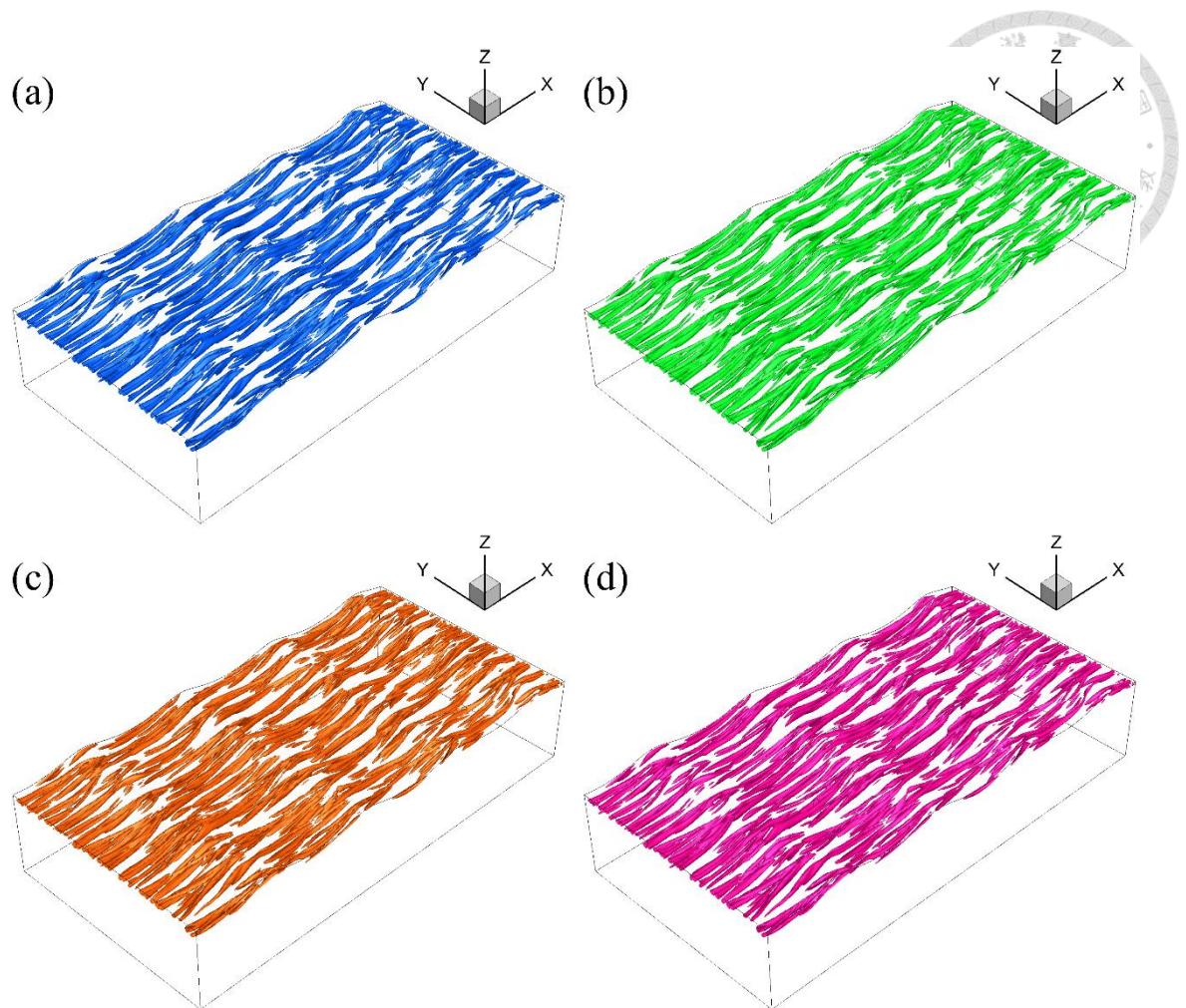


圖 2-133：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

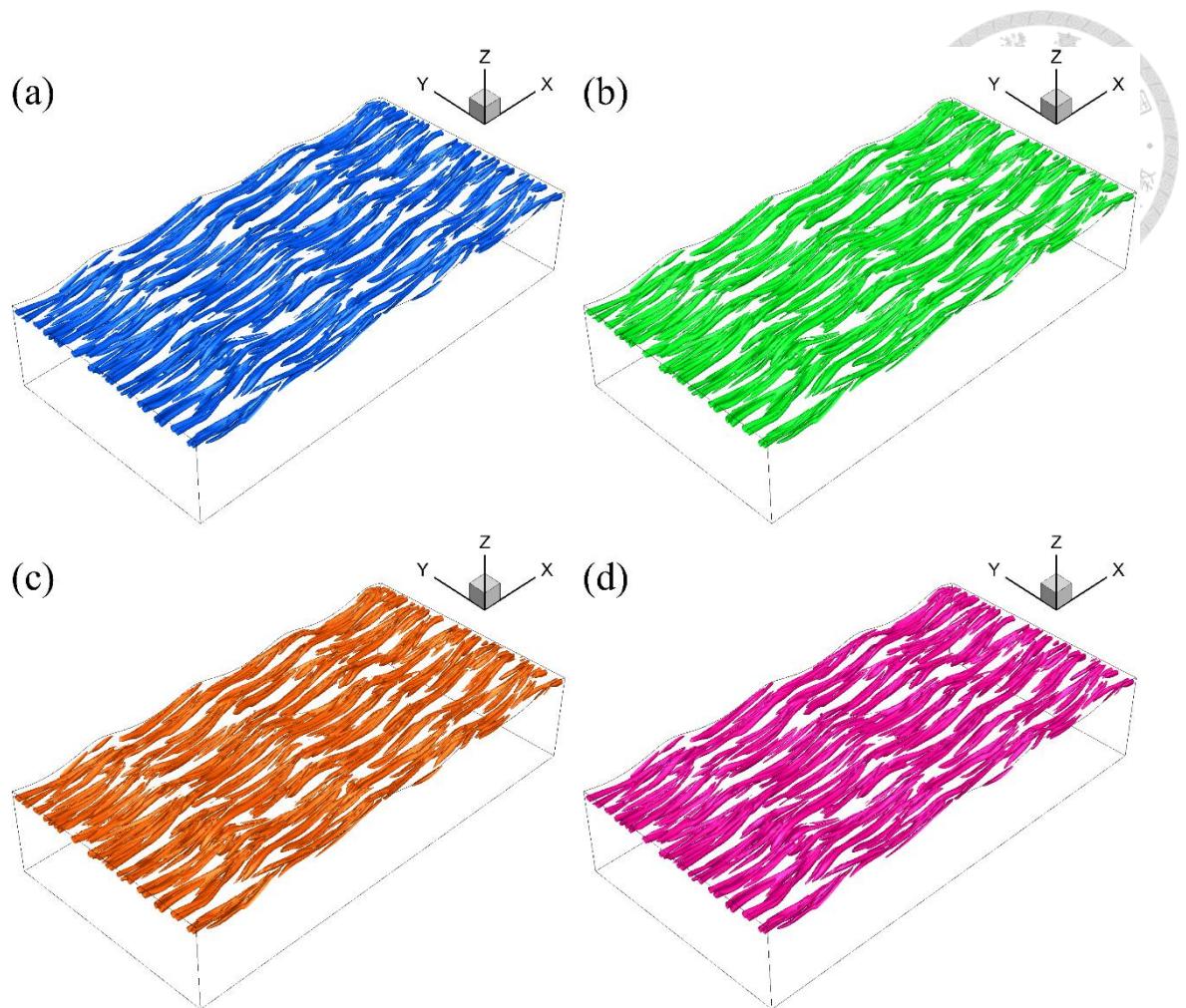


圖 2-134：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

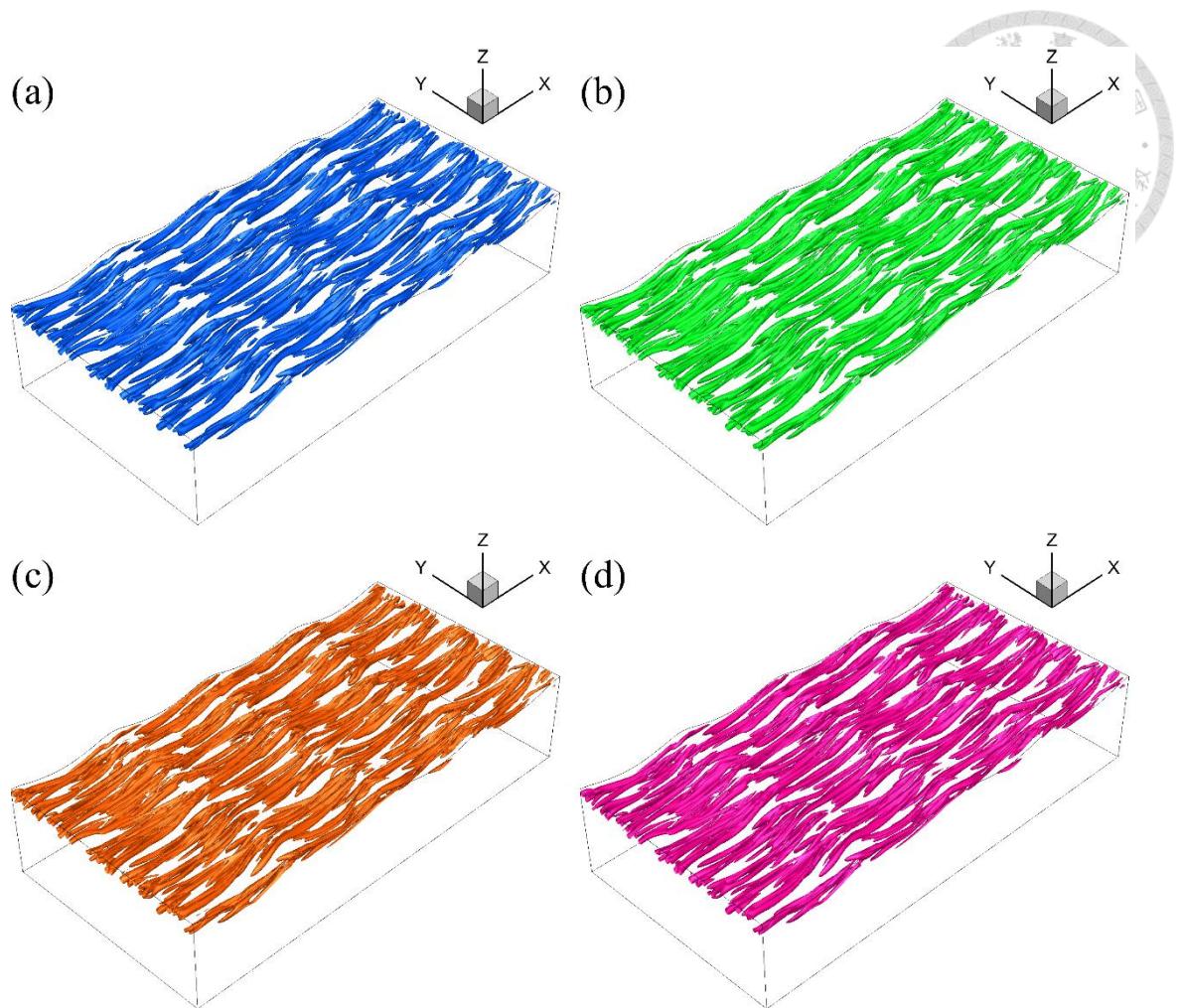


圖 2-135：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

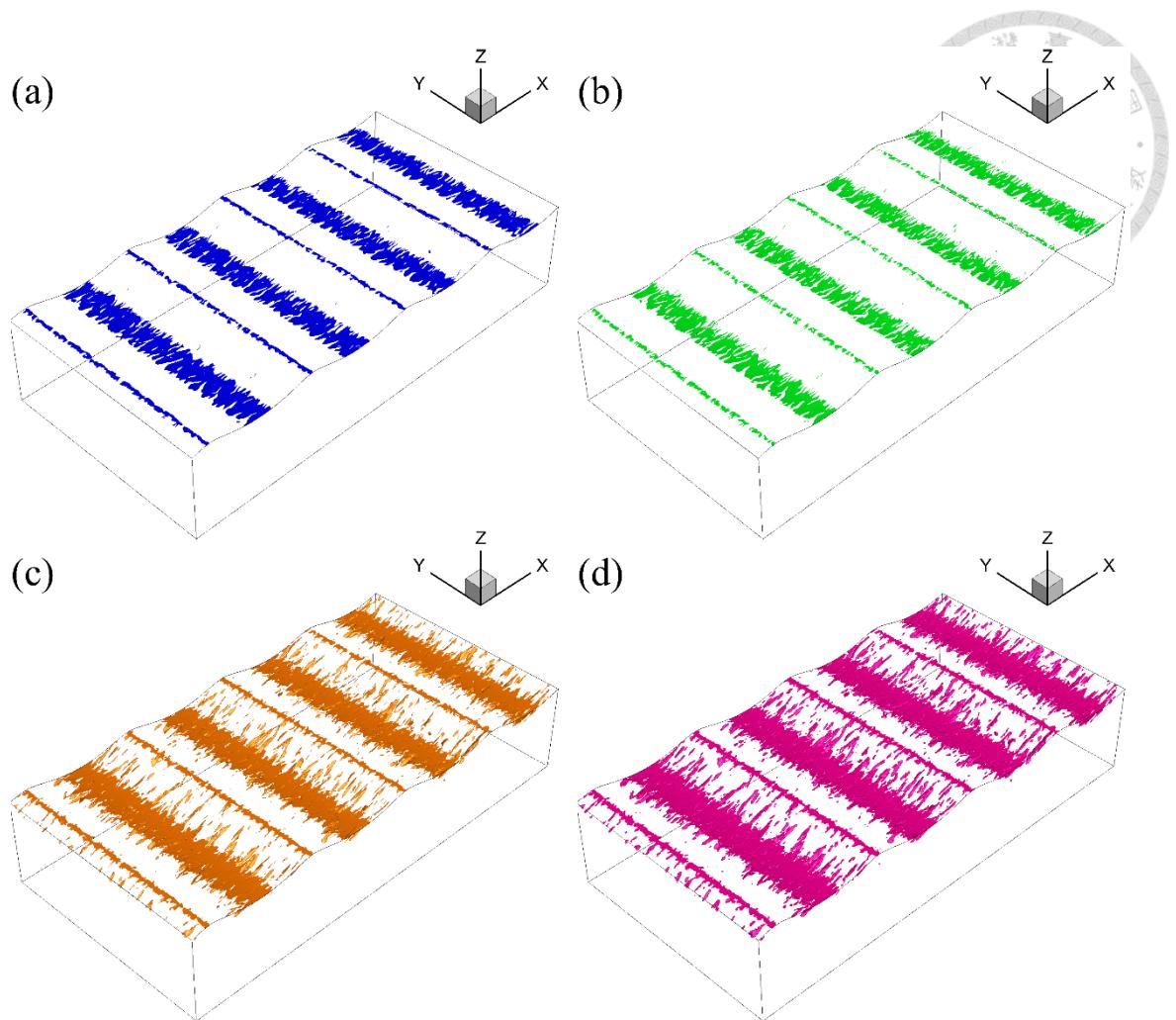


圖 2-136：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

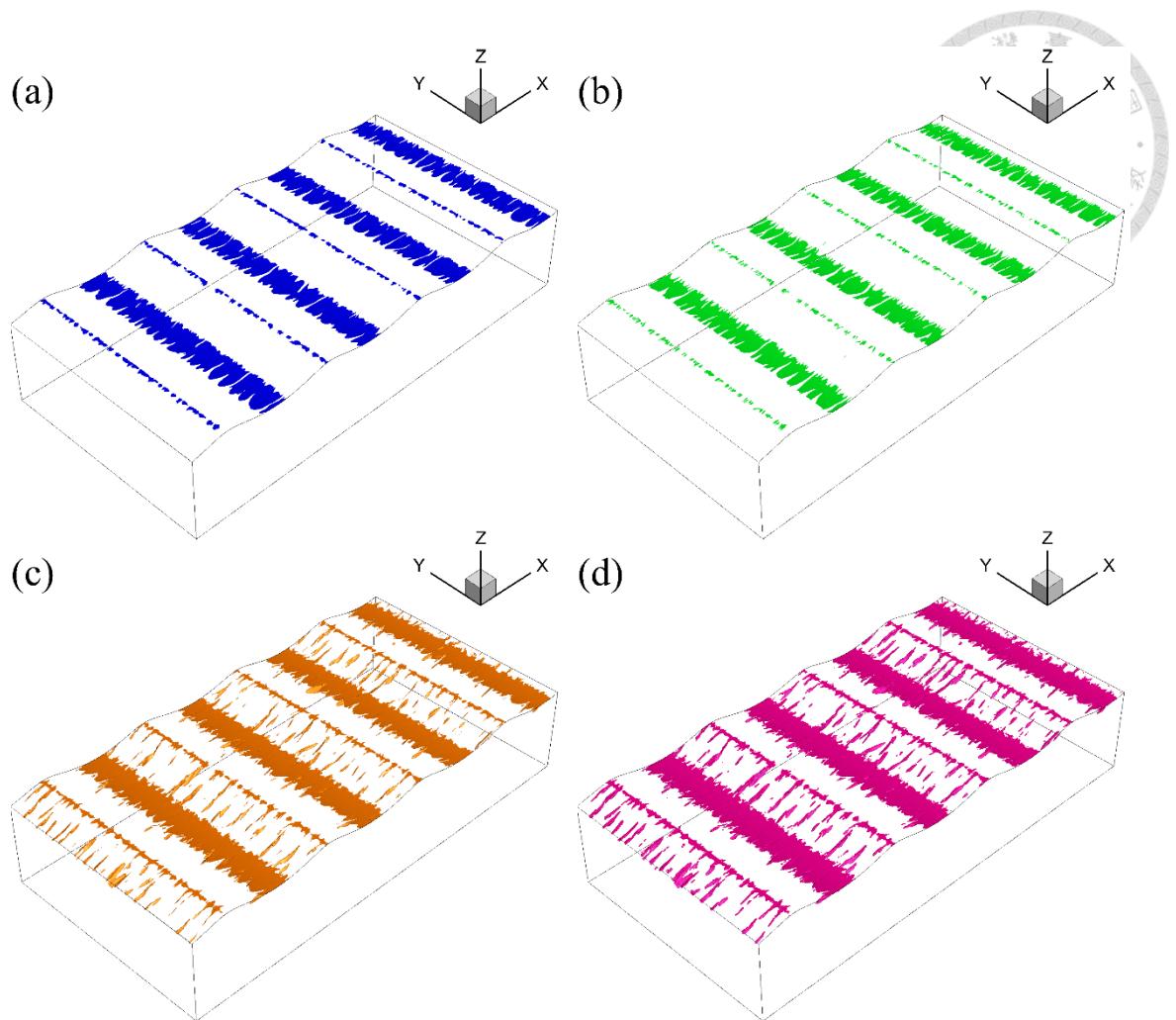


圖 2-137：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

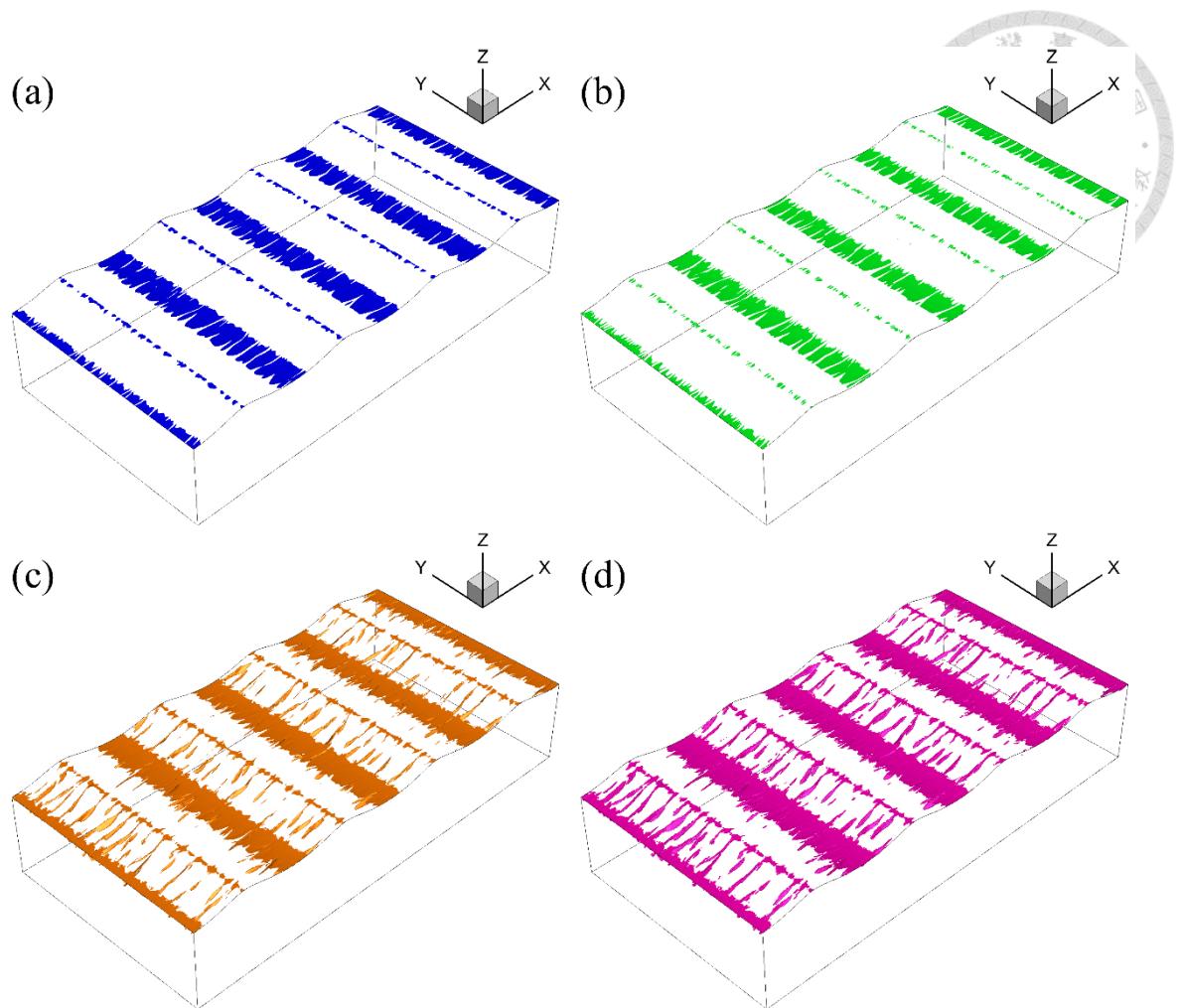


圖 2-138：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

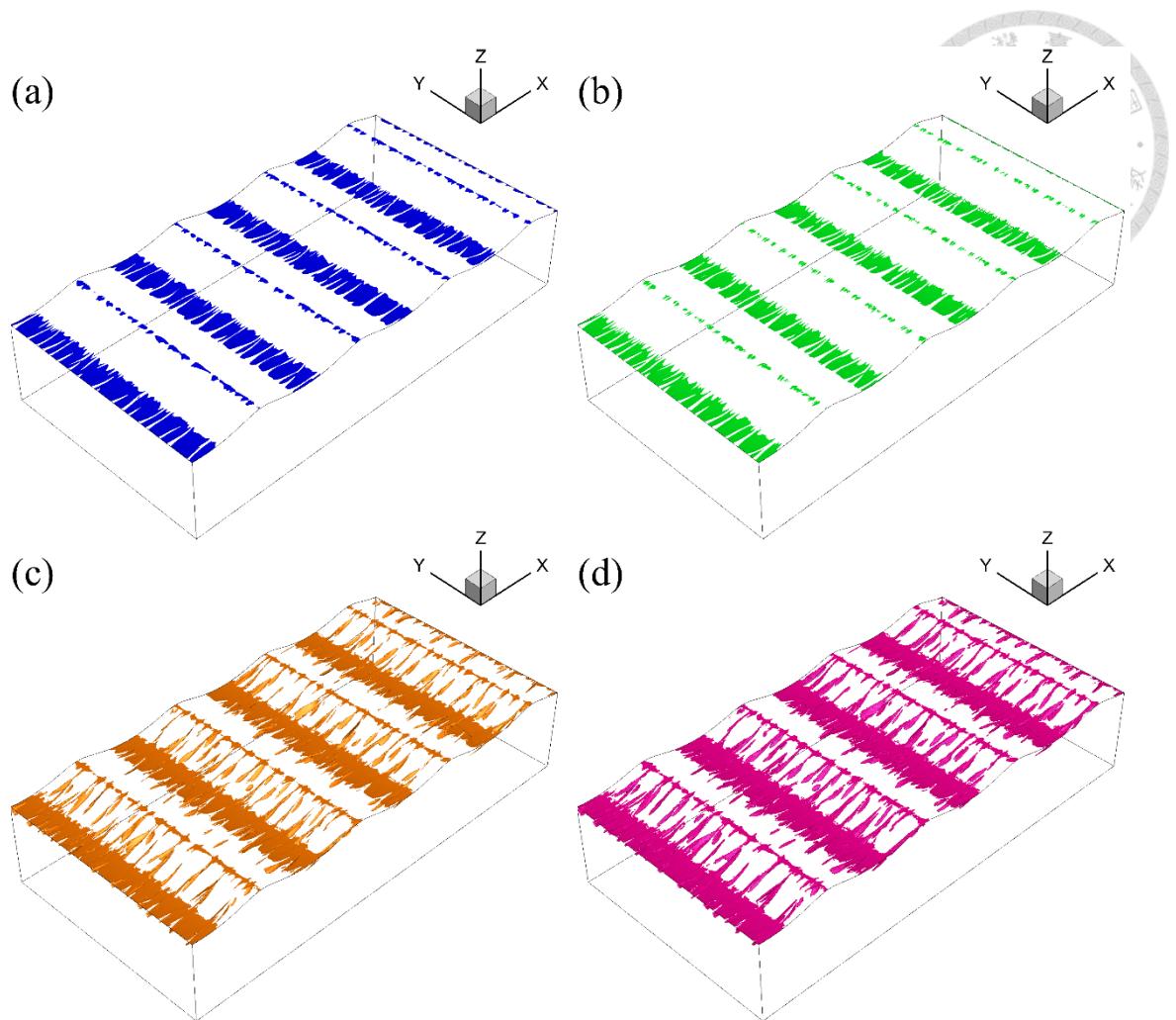


圖 2-139：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

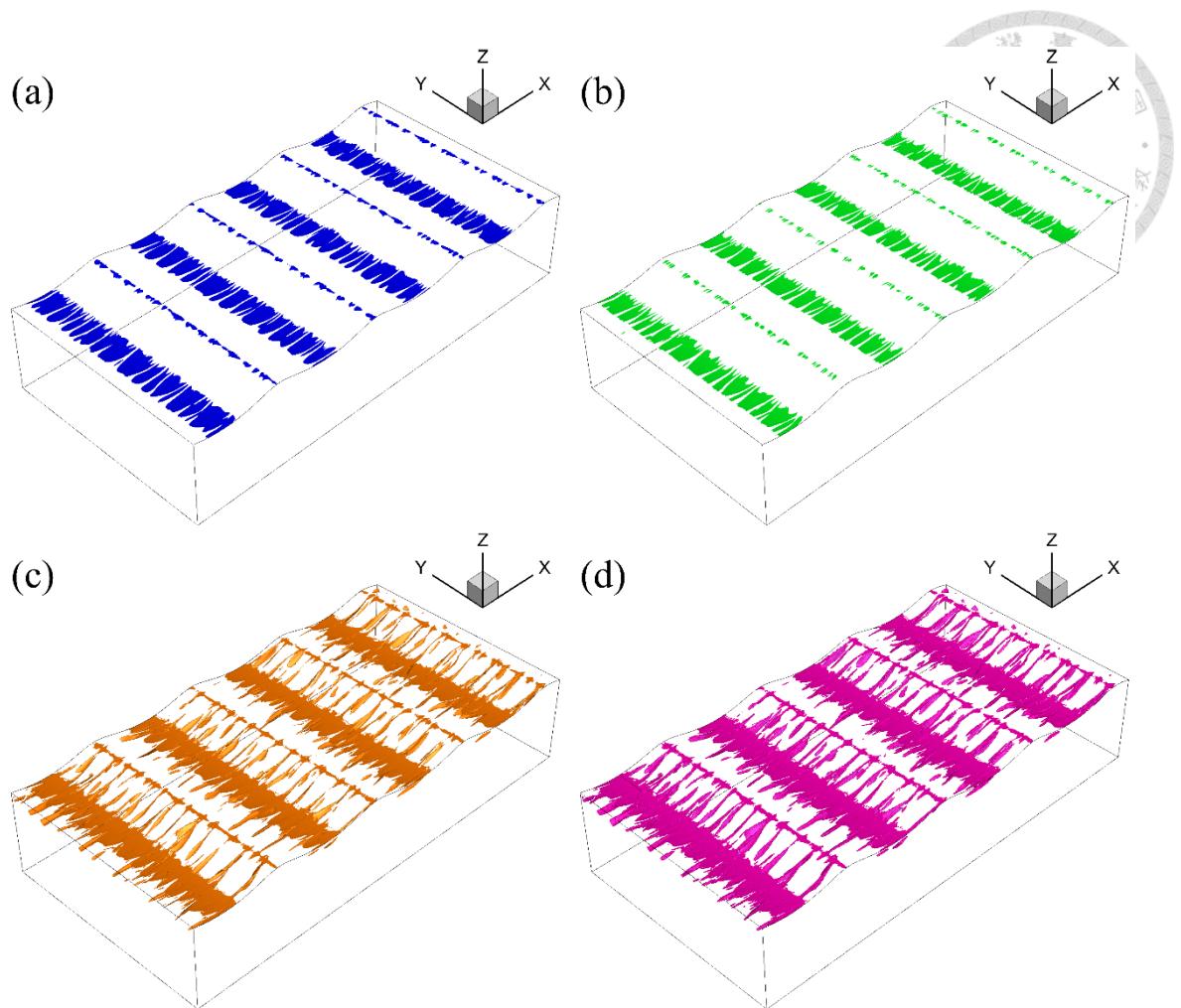


圖 2-140：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

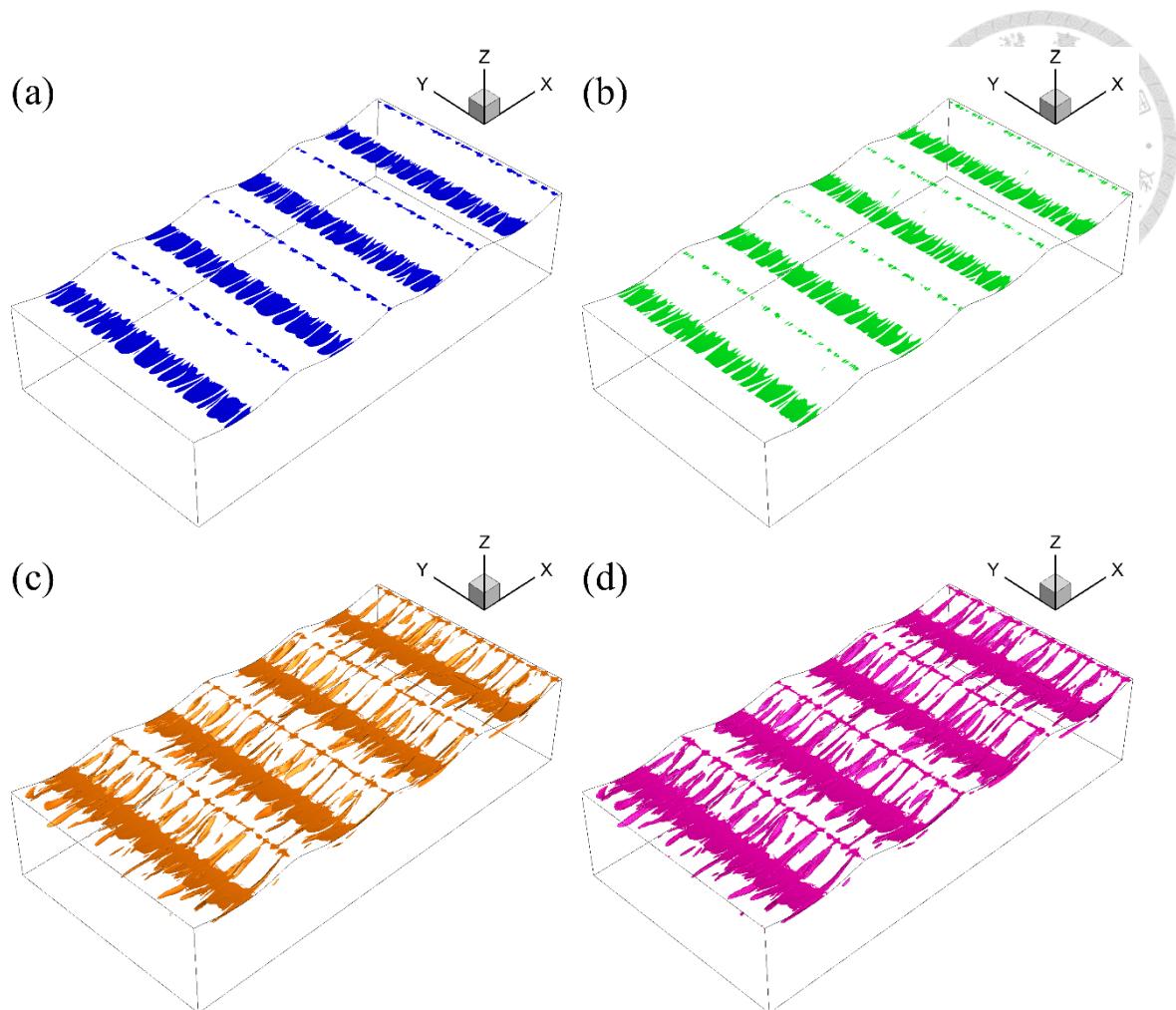


圖 2-141：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時，將原始速度進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0$ 。

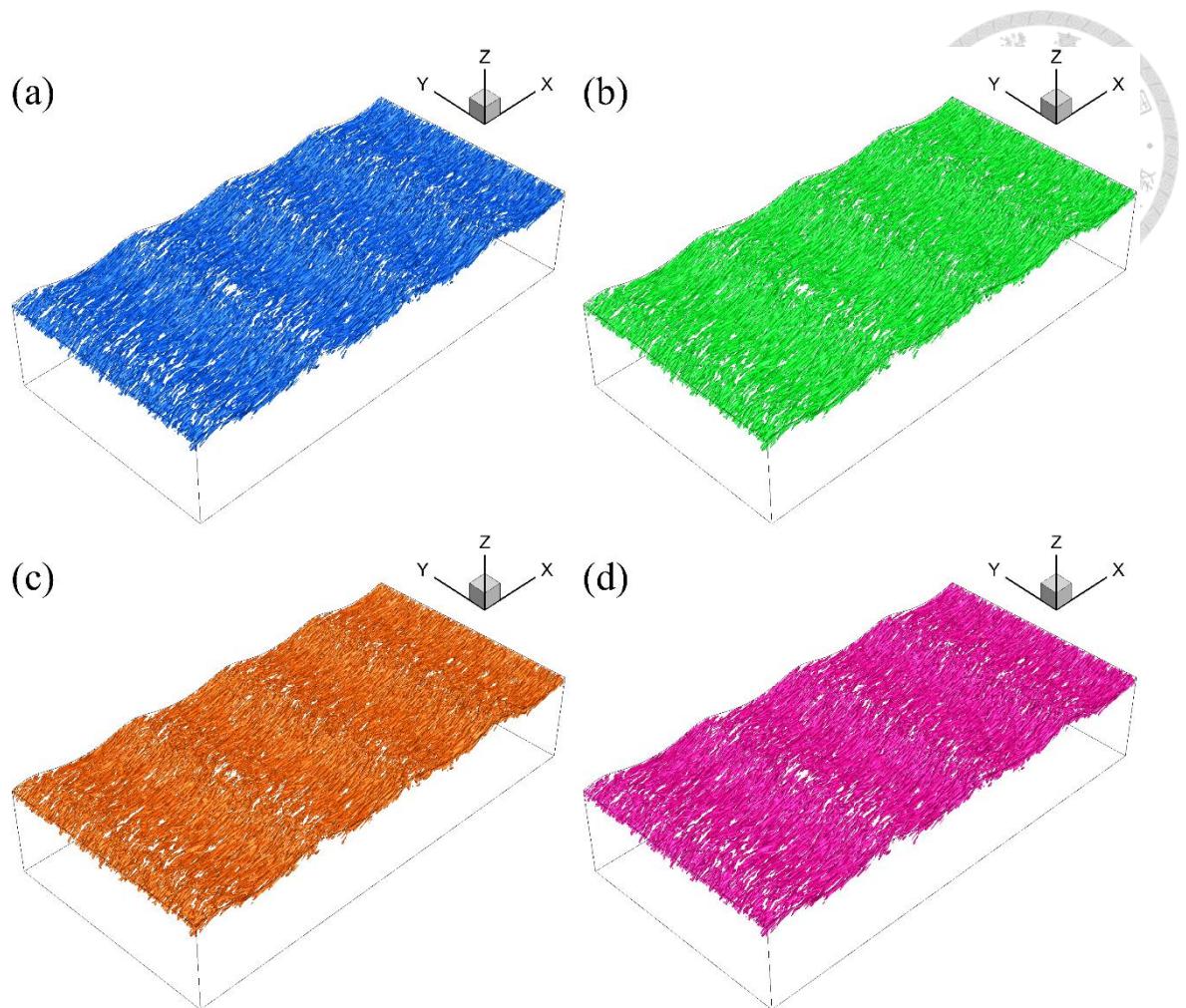


圖 2-142：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

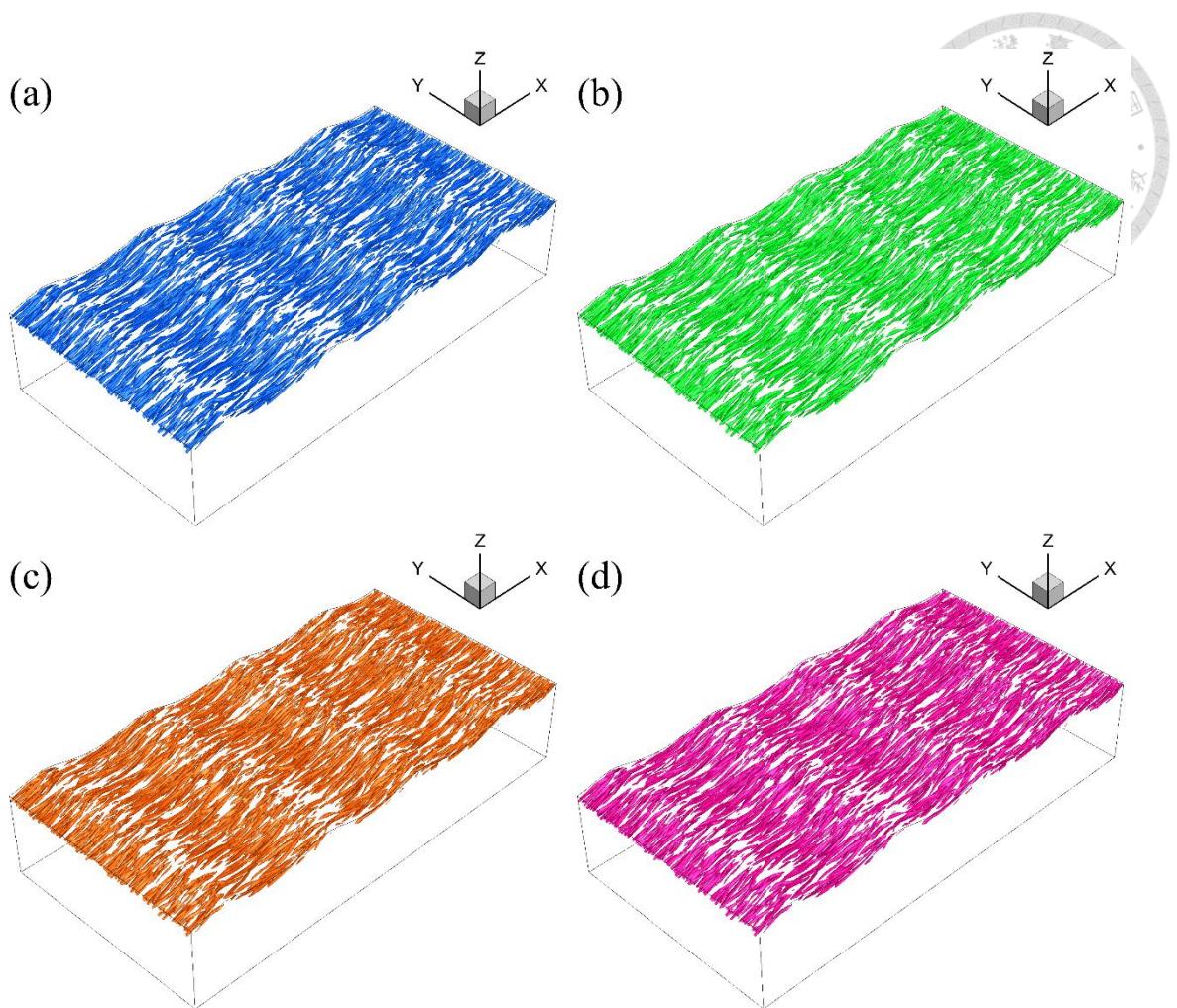


圖 2-143：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

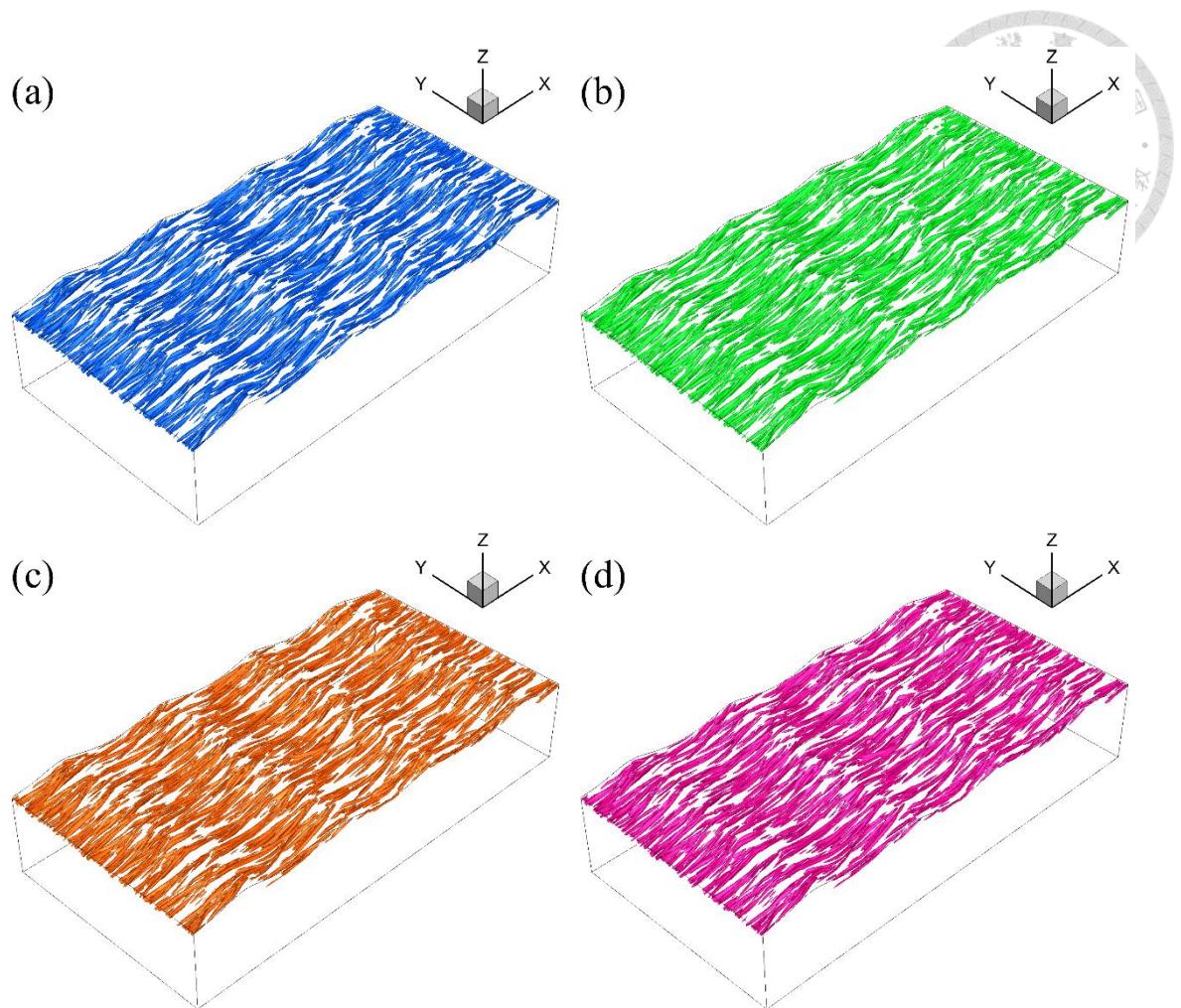


圖 2-144：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

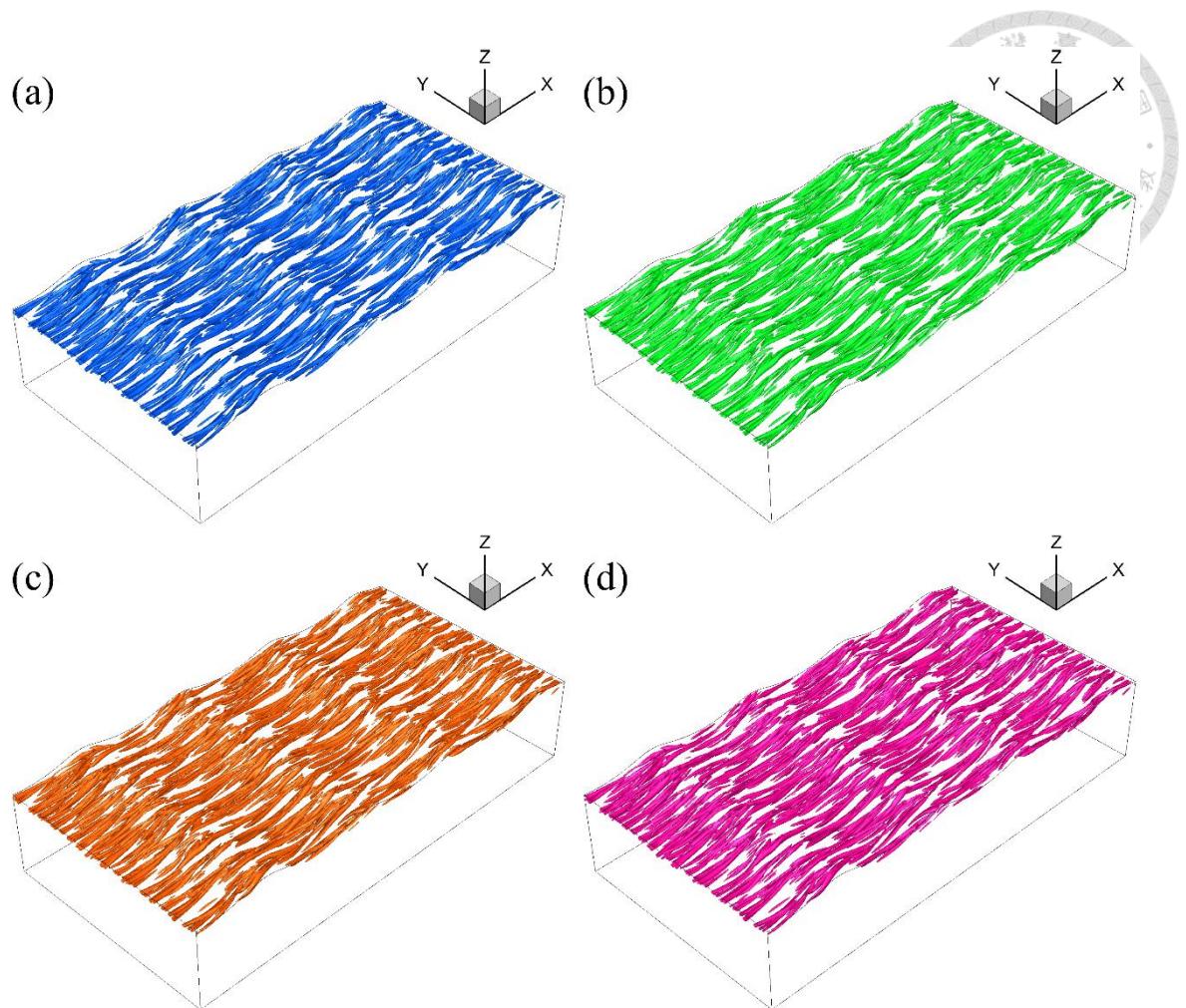


圖 2-145：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

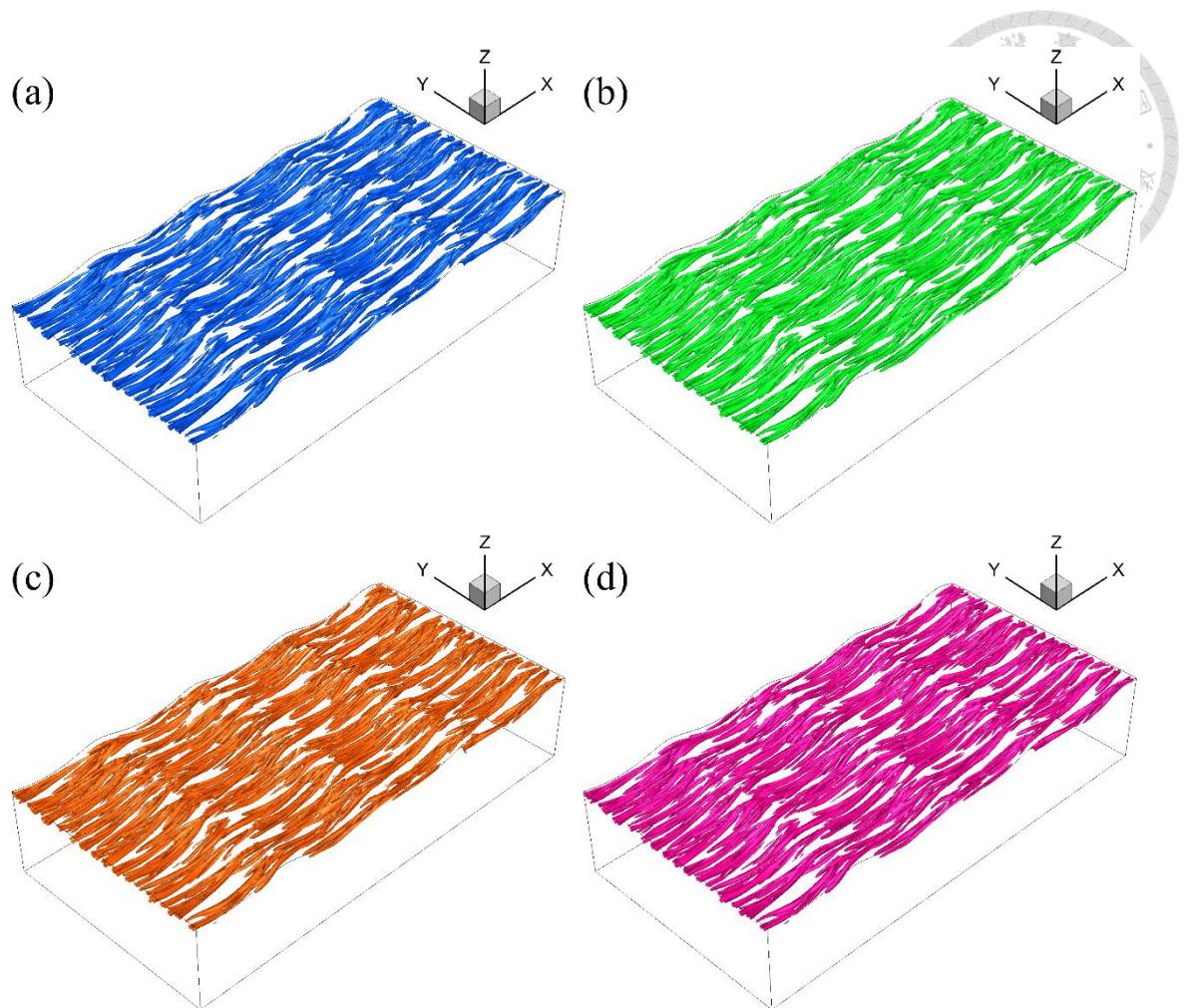


圖 2-146：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。

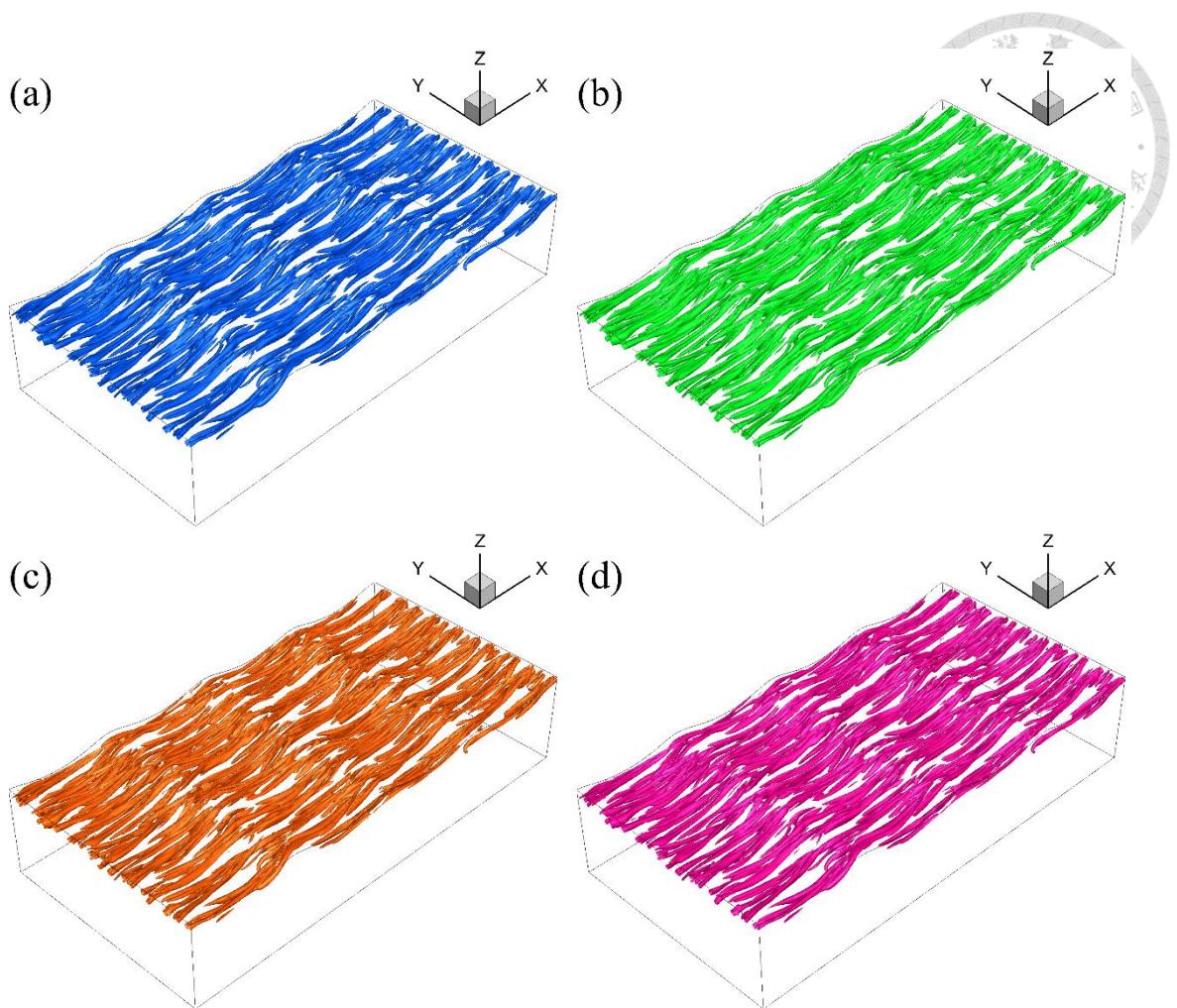


圖 2-147：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時，將速度擾動進行結構辨識。圖 a 為 $Q = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $Q > 0.001$ ；圖 b 為 $\lambda_2 = -0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\lambda_2 < -0.001$ ；圖 c 為 $\Delta = 0$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\Delta > 0$ ；圖 d 為 $\sigma_{ci}^2 = 0.001$ 之等值曲面，等值曲面內為 $\sigma_{ci}^2 > 0.001$ 。



2.6 條件平均法 (conditional averaging methods)

在前一小節之辨識結果中，發現流場充滿許多成對結構，若進而以條件平均法找出統計上之趨勢，並探討其特性，可與前一小節進行比較，並確認是否存在前一小節所未辨識出之結構。

Kim [8, 19] 針對牆面紊流邊界層 (wall turbulent boundary layer) 之髮夾型渦旋 (hairpin vortex) 結構，提出變數間隔空間平均法 (variable-interval space-averaging method, VISA) 來擷取特徵結構，主要概念有二：條件取樣 (conditional sampling)、整體平均 (ensemble averaging)。條件取樣是指先主觀決定符合欲觀察之結構特性的條件，進而找出流場中符合條件之位置點。整體平均是將符合條件之位置點作為次區間 (sub-domain) 中心，並將數個次區間之流場資料進行整體平均，而令原始複雜而紊亂的流場中，擷取出單一明顯之結構。

此方法之關鍵在於條件取樣，條件之差異會影響結果。Kim 和 Moin 於 1986 年 [8] 將不同條件彙整成一張表格，主要可分為兩類：

1. 變數間隔空間平均法，源自於針對實驗數據所發展之變數間隔時間平均法 (variable-interval time-averaging method, VITA) [7]，應用到數值模擬資料，將對時間之平均改為對空間平均，其條件為：

$$D(x, y, z^+, t_0, L) = \begin{cases} 1, & \text{if } \widehat{var} > ku_{rms}^2 \text{ and } \frac{\partial u}{\partial x} < 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (2-33)$$

其中

$$\widehat{var} = \widehat{u^2} - \widehat{u}^2, \quad (2-34)$$

$$\widehat{u}(x, y, z^+, t_0, L) = \frac{1}{L} \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} u(\xi, y, z^+, t_0) d\xi, \quad (2-35)$$

$$u_{rms} = \sqrt{\frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} u(x, y, z^+)^2 dy dx}, \quad (2-36)$$

而 k 為可視情況調整之參數， L 為視情況選定之積分長度。當 $D = 1$ 時為符合條件之位置點，並作為次區間之中心。

2. 象限法 (Quadrant methods)，利用髮夾型渦旋之特性，會造成射出



(ejection) 及掃射 (sweeping) 象限。射出現象為沿流向速度為負、垂直向速度為正，以垂直作坐標表示即為第二象限；反之掃射為沿流向速度為正、垂直向速度為負，即為第四象限。故可分別以此二現象作為取樣條件，則第二象限之條件 (QD-2) 為：

$$D(x, y, z, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{if } u' < 0, w' > 0 \text{ and } \frac{u'w'}{\langle u'w' \rangle_{xy}} > k, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (2-37)$$

而第四象限之條件 (QD-4) 為：

$$D(x, y, z, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{if } u' > 0, w' < 0 \text{ and } \frac{u'w'}{\langle u'w' \rangle_{xy}} > k, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (2-38)$$

其中 $\langle u'w' \rangle_{xy}$ 為沿流向與垂直向速度擾動乘積之固定水深下水平切面的平均， k 為可調整之參數，建議為 $k = 10$ ，選定偵測之水深分別為 $z^+ = 100$ 與 $z^+ = 21$ 。

本研究因流場之低溫高速條痕之特性，除了採用 QD-4 之條件取樣法之外，亦採用不同於上述之取樣條件，以跨流向渦度擾動之水平截面上局部最大值 (local maxima) 作為條件，因由前一小節之結果中，發現流場存在許多成對之沿流向渦度的結構，欲探討是否存在髮夾型渦旋，故針對其結構頭部為跨流向渦度之特性，以此為取樣條件，故可表示為：

$$D(\xi, \psi, \zeta_0, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega_y' \text{ is local maximum and } \omega_y' > (\omega_y'^2)^{0.5}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (2-39)$$

其中 ζ_0 為固定水深下進行偵測， $(\omega_y'^2)^{0.5}$ 為偵測截面之方均根值， $\omega_y' > (\omega_y'^2)^{0.5}$ 之選定是為了篩去跨流向渦度擾動過小之局部最大值。由於數值模擬資料之物理區間為隨波坐標系統，水面為波浪狀，不便於進行整體平均，故於計算區間之垂直座標系統中，以渦度擾動作條件平均法並呈現結果。

波長 7.5cm 之流場進行 QD-4 之條件平均法，選定之偵測截面為 $\zeta = 0.8552$ ，而 k 採用其建議值 $k = 10$ ，於時間分別為 $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30T_0$ 之結果如圖 2-148，條件取樣點數分別為 0、3720、1878、2262、2813、1043，於 $t = 5T_0$ 時無條件平均之結果，並以沿流向渦度擾動及跨流向渦度擾動之等值曲面表示，其值隨時間分別為 $\omega_x' = \pm 0.02, \pm 0.04, \pm 0.06, \pm 0.07, \pm 0.08$ 及 $\omega_y' = 0.004, 0.01, 0.015, 0.02, 0.025$ 。比較上述之結果，發現具有沿流向渦度為成對之



結構且其反向旋轉，並隨時間發展逐漸變大而朝沿流向延伸。跨流向渦度之正值分布於上述結構之前端而無相連，並隨時間發展亦朝沿流向延伸。

另以偵測截面為 $\zeta = 0.9008$ 進行 QD-4 之條件平均法， k 值和時間之選取亦與上述相同，其結果如圖 2-149，條件取樣點數分別為 2689、1710、2092、2073、789、173，而等值曲面之值為 $\omega'_x = \pm 0.03, \pm 0.003, \pm 0.04, \pm 0.07, \pm 0.06, \pm 0.09$ 及 $\omega'_y = 0.008, 0.008, 0.012, 0.015, 0.016, 0.024$ 。其結果與偵測截面為 $\zeta = 0.8552$ 之結果相似，然而差異在於 $t = 5T_0$ 之結果，其結構與前述之沿流向成對結構相同外，在結構前端處具跨流向渦度之正值，形成如逆髮夾型渦旋 (inverse hairpin vortex) 之結構。

改以本研究之取樣條件，其中水深以 $\zeta = 0.8552$ 作為偵測截面，其結果如圖 2-150。條件取樣點數分別為 481、227、110、40、63、96 個點，由於取樣條件為跨流向渦度擾動之局部最大值，故取樣點數較 QD-4 方法少。以等值曲面表示，其值分別為 $\omega'_x = \pm 0.01, \pm 0.01, \pm 0.02, \pm 0.07, \pm 0.07, \pm 0.07$ 及 $\omega'_y = 0.01, 0.005, 0.0075, 0.015, 0.015, 0.015$ 。其結果與上述之特性相似，該結構除了沿流向成對結構相同外，於 $t = 5, 10T_0$ 時在結構前端處具跨流向渦度之正值，形成如逆髮夾型渦旋之結構，與圖 2-149(a) 之結構相似，然而沿流向成對結構會隨著時間發展，而朝 $+x$ 軸方向延伸，而原先跨流向渦度於前端之結構，也朝 $+x$ 軸方向延伸，無法形成逆髮夾型渦旋。

以相同之取樣條件，於不同水深之結果 ($\zeta = 0.9008$) 如圖 2-151，條件取樣點數分別為 471、179、84、92、98、84 個點，等值曲面之值分別為 $\omega'_x = \pm 0.01, \pm 0.025, \pm 0.05, \pm 0.07, \pm 0.07, \pm 0.07$ 及 $\omega'_y = 0.01, 0.01, 0.01, 0.015, 0.015, 0.015$ 。其結果之結構特性亦與上述一致，而於 $t = 5T_0$ 時之結構形狀與逆髮夾型渦旋相似。

比較以上條件平均之結果，兩種不同之取樣條件於不同偵測水深之結果皆指出，水面下之相關紊流結構為成對之沿流向渦旋，且其反向旋轉。於流場較早之時間點 (如 $t = 5, 10T_0$)，結構如逆髮夾型渦旋形狀，然而由圖 2-37 可知此時渦度擾動逐漸變弱，由於模擬初始置入擾動而流場尚未穩定，無法判斷該結構為流場發展而成，或是模擬剛開始所置入之均勻雜訊擾動所影響。

波長 15cm 之流場進行 QD-4 之條件平均法，選定之偵測截面為 $\zeta = 0.8540$ ，為與波長 7.5cm 之流場作比較選取相同之 k 與時間，其結果如圖 2-



152，條件取樣點數分別為 27417、4205、3302、3424、3727、2737，而等值曲面之值分別為 $\omega'_x = \pm 0.008, \pm 0.02, \pm 0.03, \pm 0.035, \pm 0.045, \pm 0.05$ 及 $\omega'_y = 0.004, 0.005, 0.008, 0.01, 0.01, 0.015$ 。其結構特性亦與上述之結相同，於 $t = 5, 10, 15, 20T_0$ 時，結構皆如逆髮夾型渦旋（inverse hairpin vortex）般，而隨時間沿流向渦旋逐漸延伸。

另以偵測截面為 $\zeta = 0.9029$ 進行 QD-4 之條件平均法，並選取相同之 k 與時間，其結果如圖 2-153，條件取樣點數分別為 2816、2238、2533、3085、1850、924，而等值曲面分別為 $\omega'_x = \pm 0.03, \pm 0.03, \pm 0.04, \pm 0.05, \pm 0.06, \pm 0.08$ 及 $\omega'_y = 0.015, 0.01, 0.008, 0.01, 0.012, 0.014$ 。其結構特性亦與上述之結相似，然而點不同在於僅有 $t = 5T_0$ 時，結構皆如逆髮夾型渦旋般。

改以本研究之取樣條件，其中水深以 $\zeta = 0.854$ 作為偵測截面，其結果如圖 2-154，條件取樣點數分別為 1055、507、311、161、131、141 個點，而等值曲面分別為 $\omega'_x = \pm 0.01, \pm 0.01, \pm 0.015, \pm 0.025, \pm 0.04, \pm 0.04$ 及 $\omega'_y = 0.01, 0.005, 0.007, 0.007, 0.01, 0.01$ ，其結果與以 QD-4 於相同偵測水深之圖 2-152 相同。

而水深以 $\zeta = 0.9029$ 作為偵測截面，其結果如圖 2-155，條件取樣點數分別為 1348、530、283、179、207、196 個點，等值曲面分別為 $\omega'_x = \pm 0.01, \pm 0.01, \pm 0.02, \pm 0.03, \pm 0.03, \pm 0.03$ 及 $\omega'_y = 0.01, 0.005, 0.004, 0.006, 0.008, 0.008$ ，其結果亦與以 QD-4 於相同偵測水深之圖 2-155 相同。

比較上述之結果發現，無論是 QD-4 或是本研究之方法，皆指出水面下存在成對沿流向之紊流結構，且隨時間發展逐漸朝沿流相延伸，而在流場發展較早之時間點存在如逆髮夾型渦旋狀之結構，然而無法確認其特性與逆髮夾型渦旋一致；對於不同波長之結果亦一致。

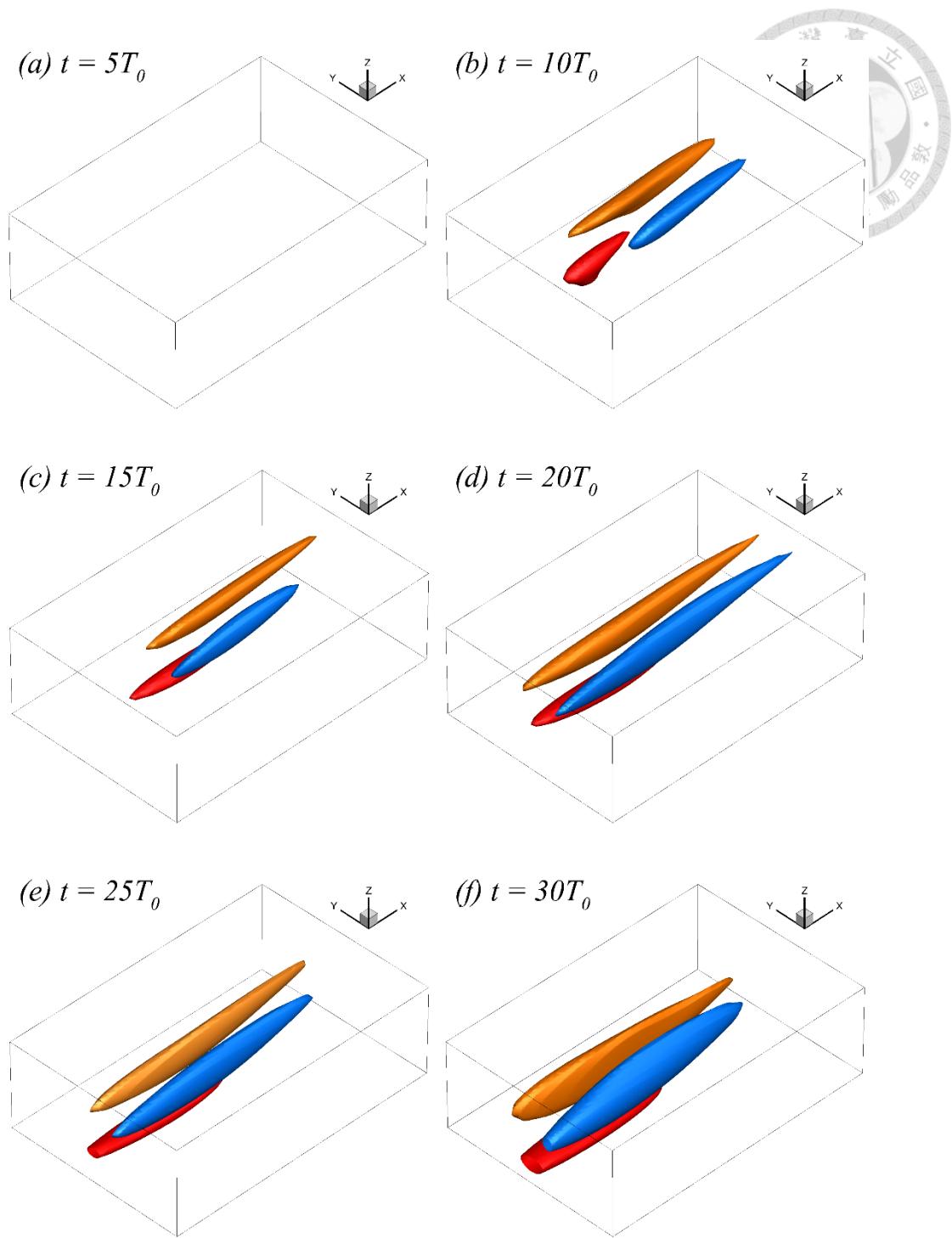


圖 2-148：波長 7.5cm 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法（QD-4）所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8552$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

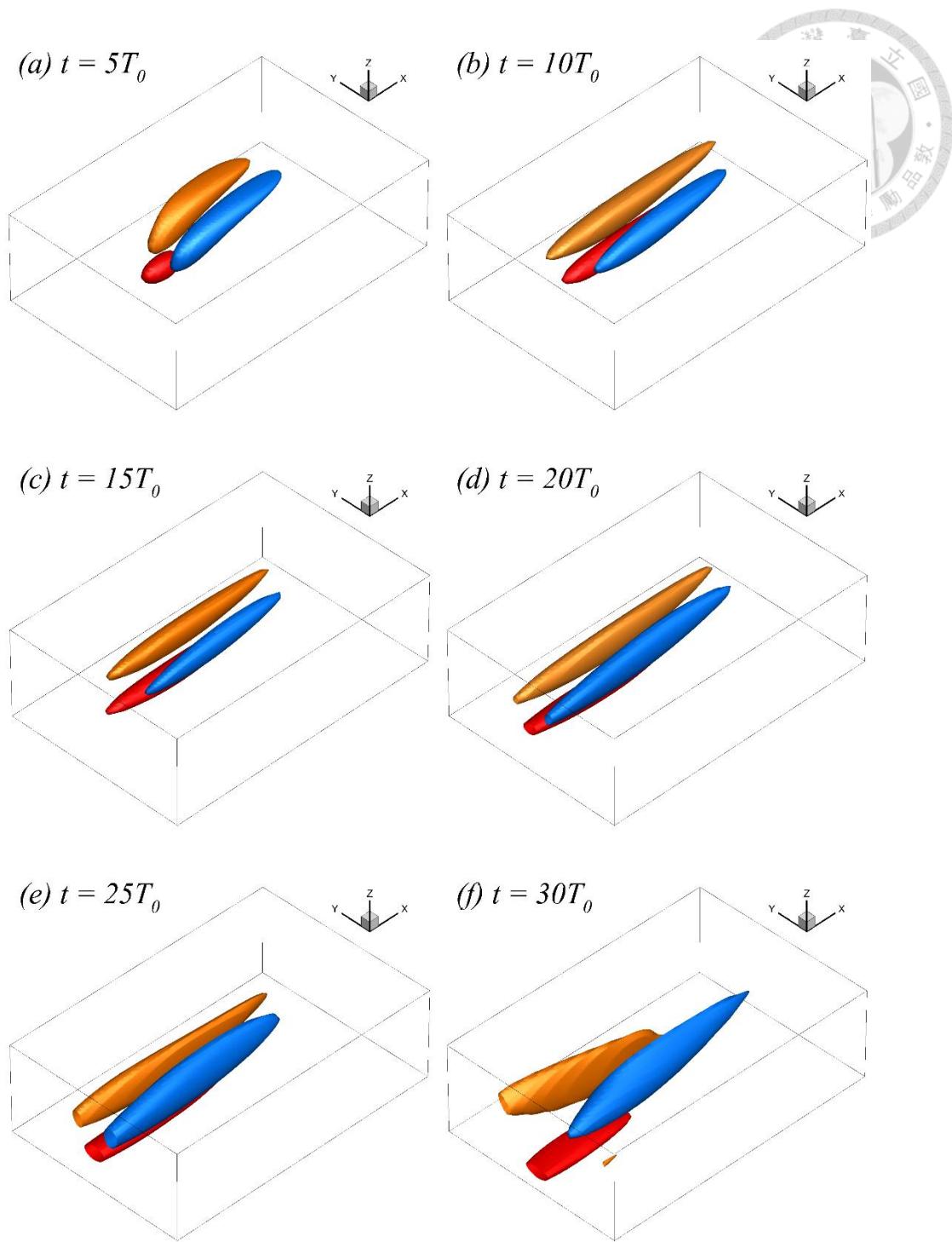


圖 2-149：波長 7.5cm 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法（QD-4）所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9008$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

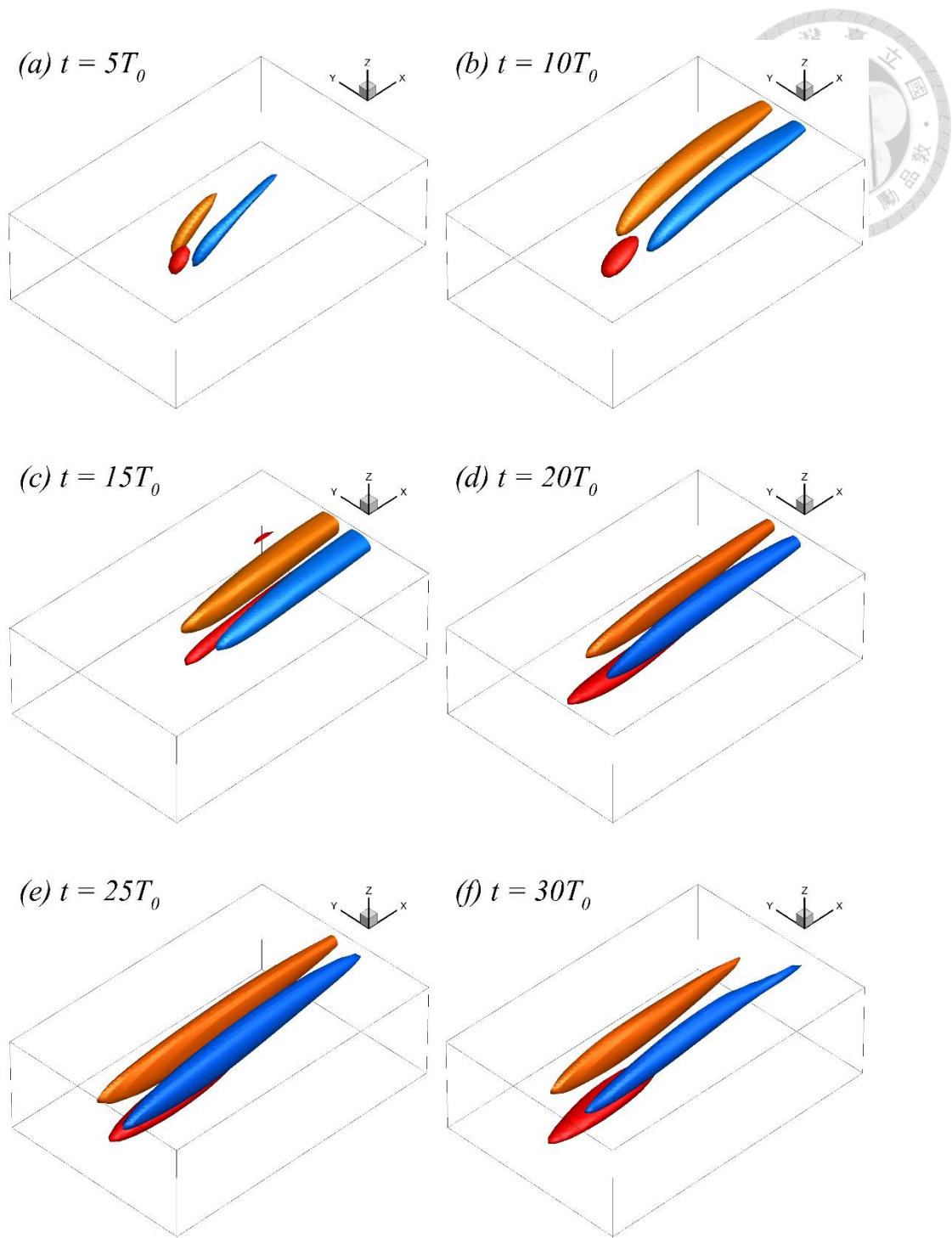


圖 2-150：波長 7.5cm 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8552$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

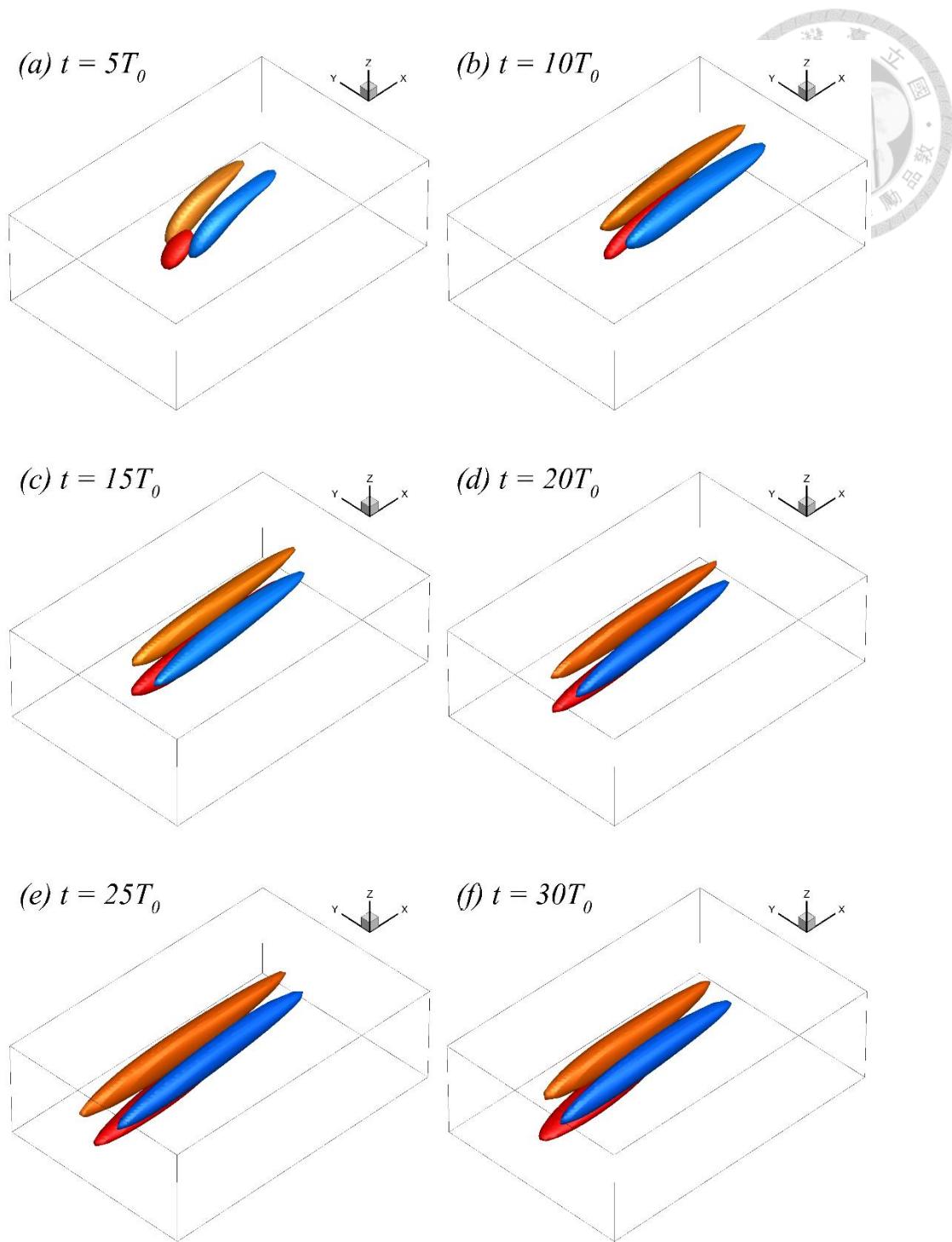


圖 2-151：波長 7.5cm 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9008$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

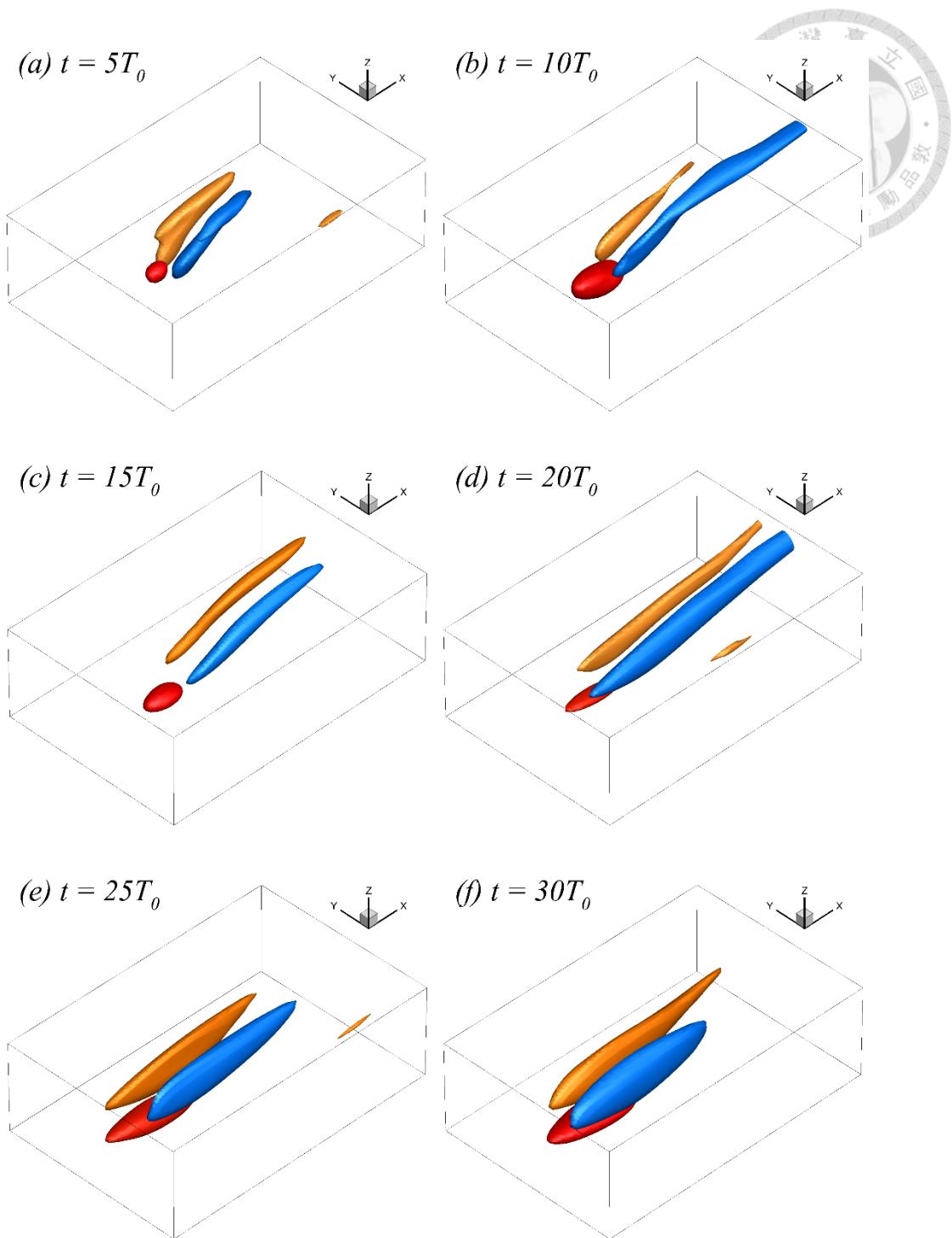


圖 2-152：波長 15cm 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法（QD-4）所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8540$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

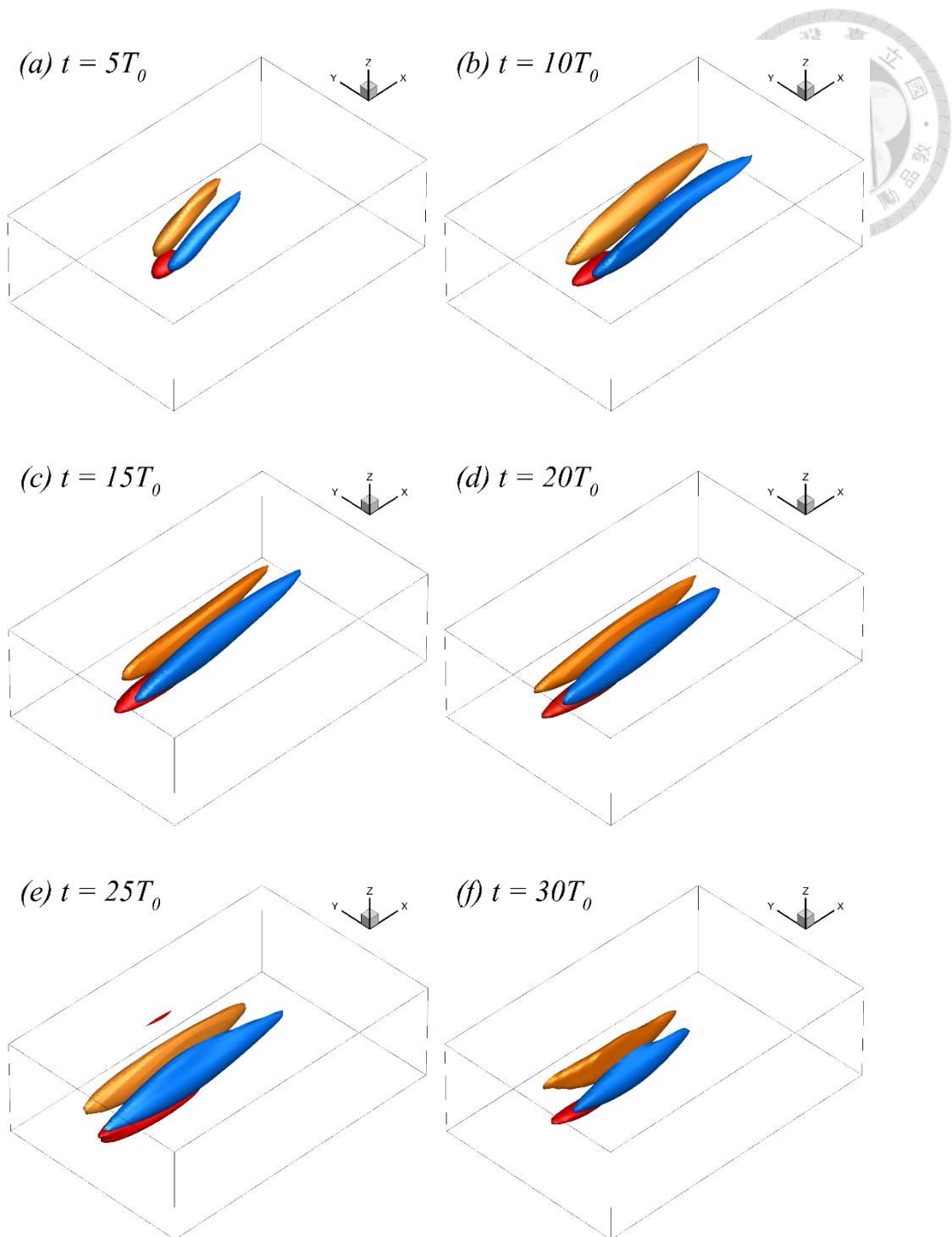


圖 2-153：波長 15cm 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法（QD-4）所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9029$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

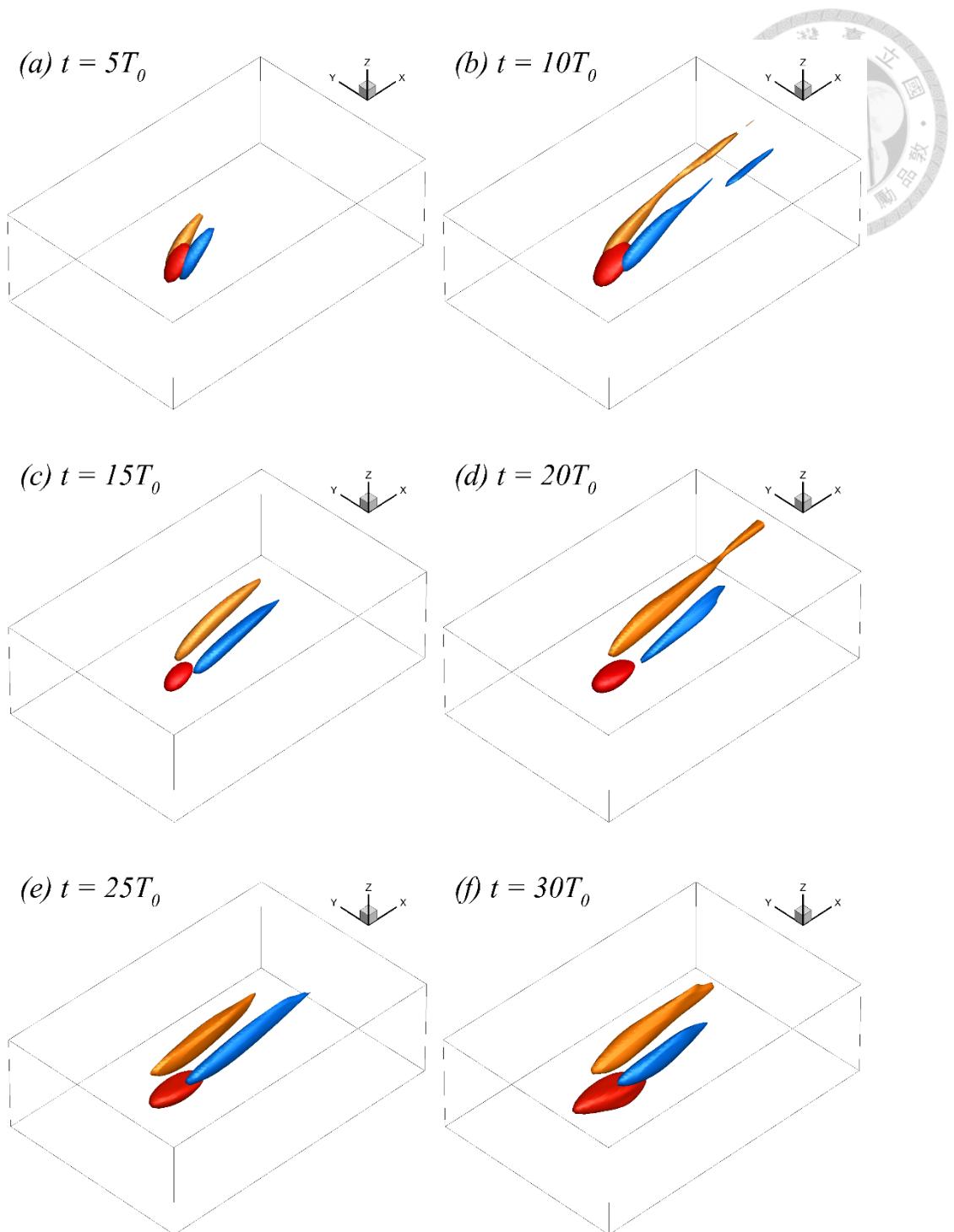


圖 2-154：波長 15cm 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8540$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

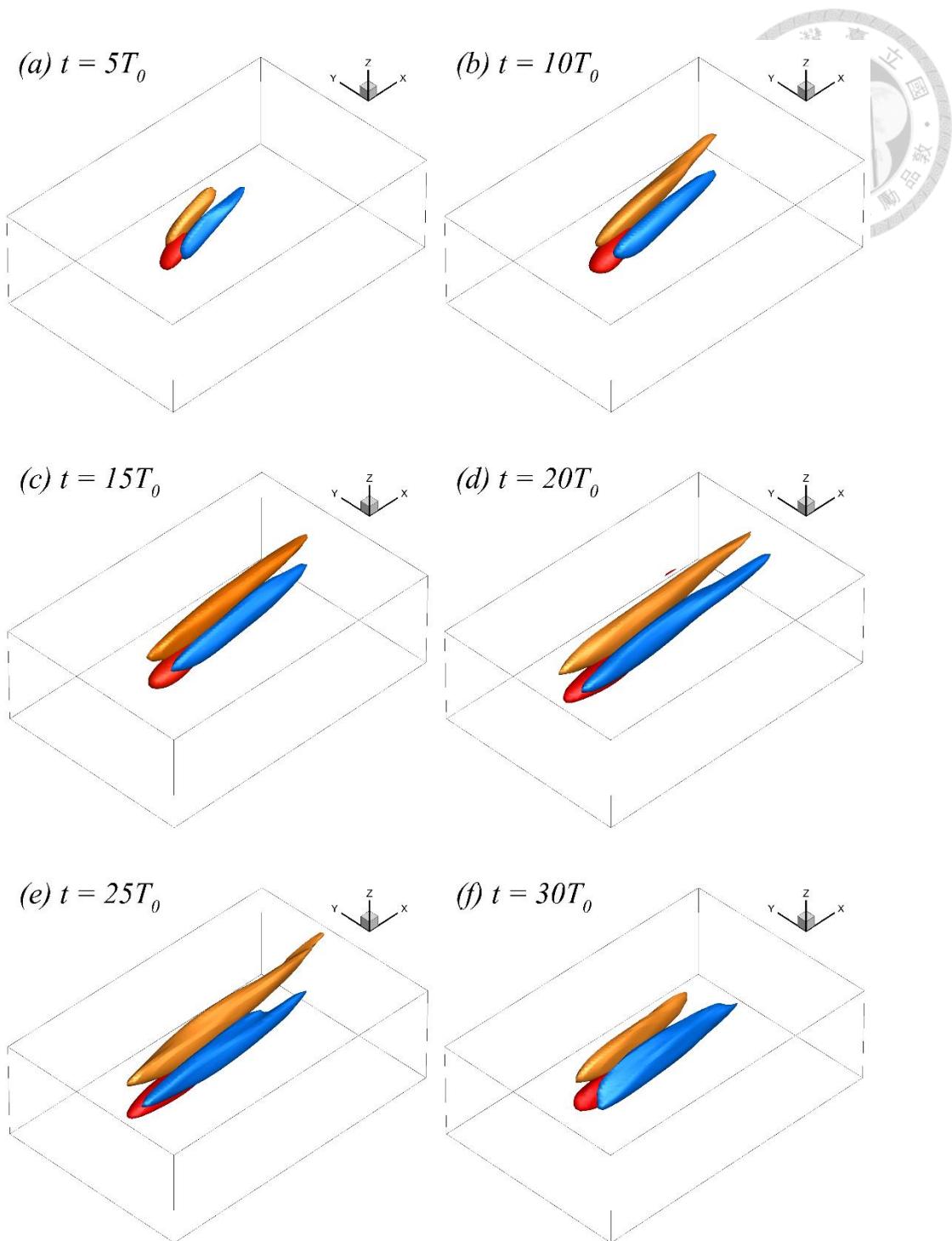


圖 2-155：波長 15cm 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9029$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

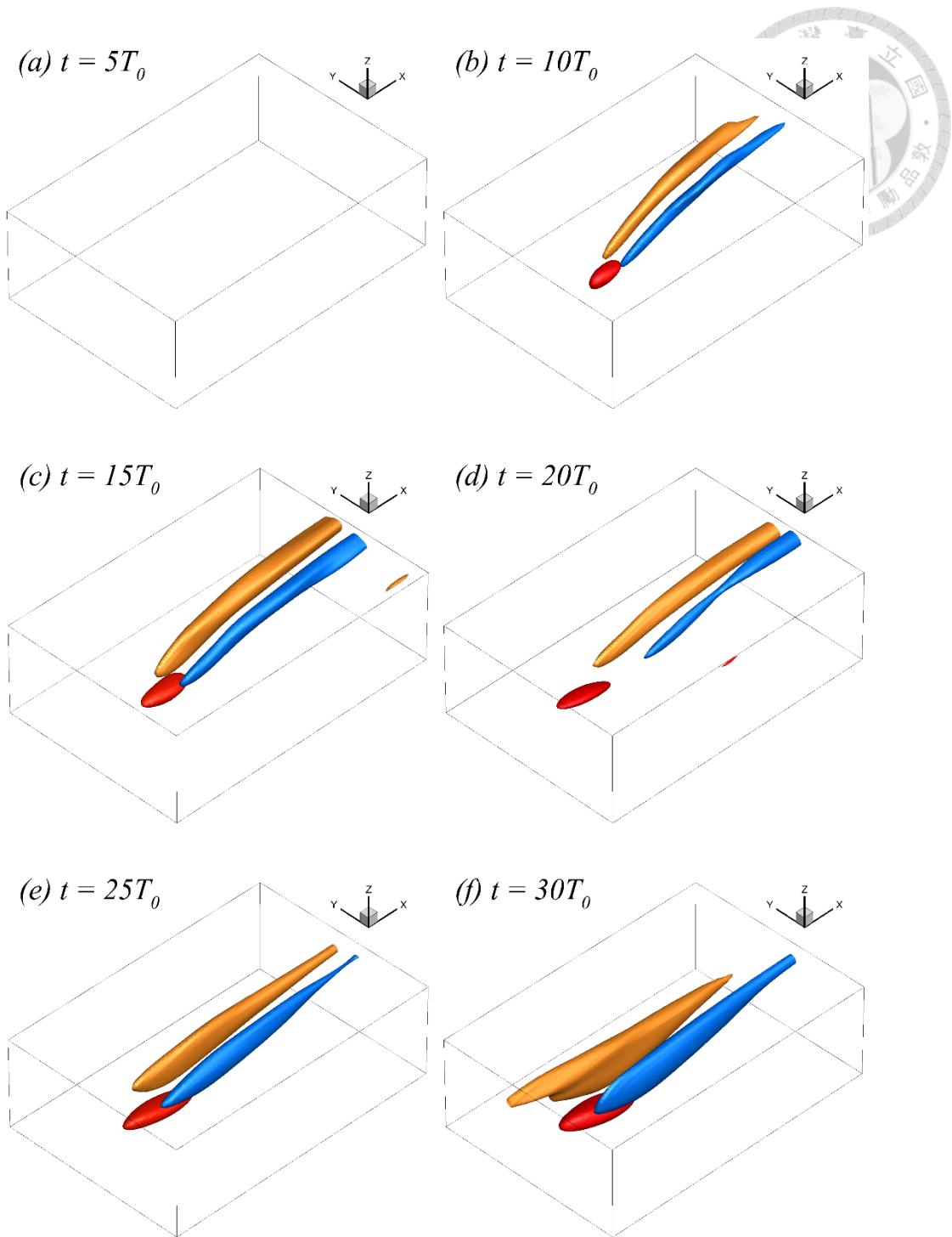


圖 2-156：波長 20cm 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法（QD-4）所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8556$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

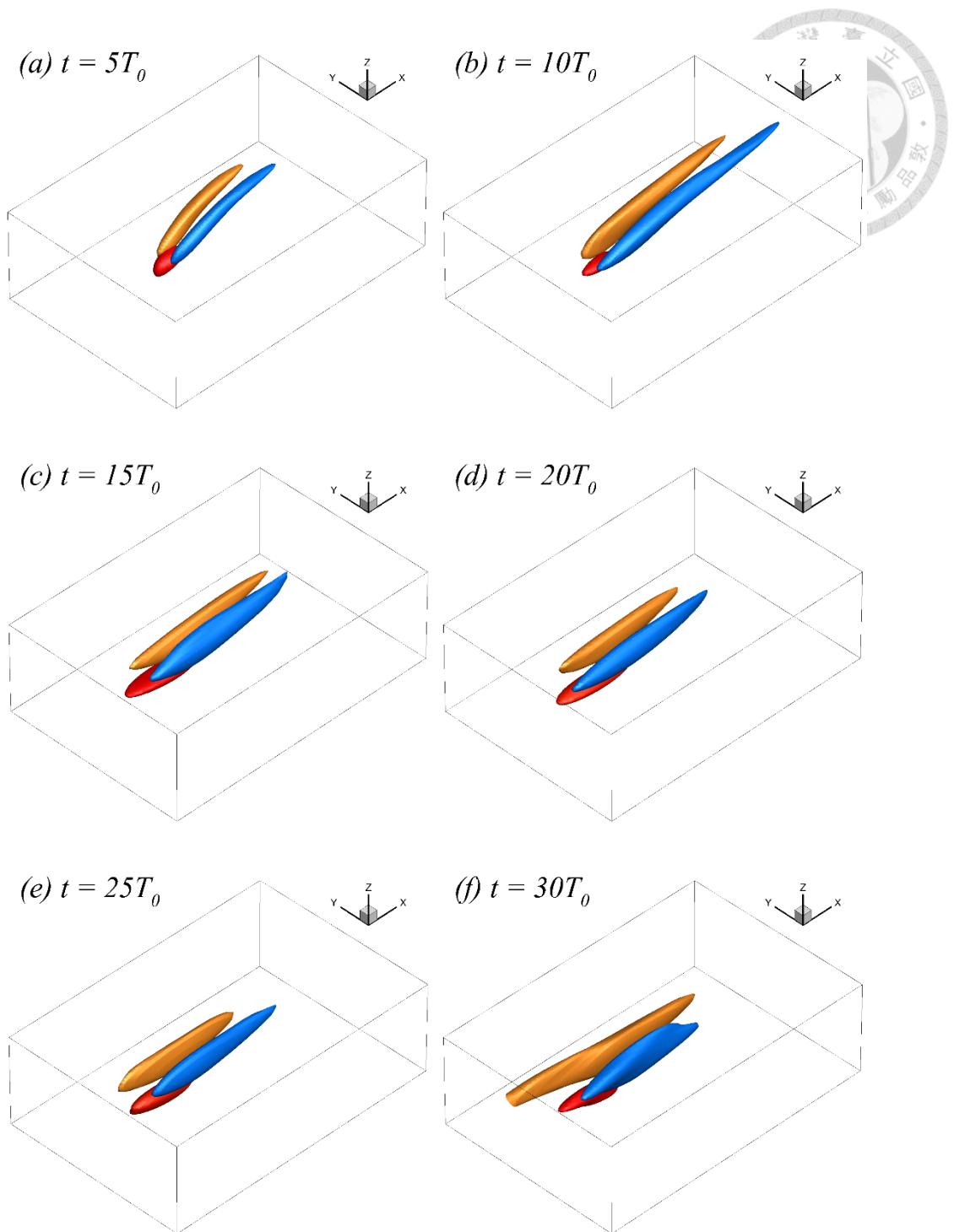


圖 2-157：波長 20cm 於各時間點將渦度擾動進行條件平均法（QD-4）所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9013$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

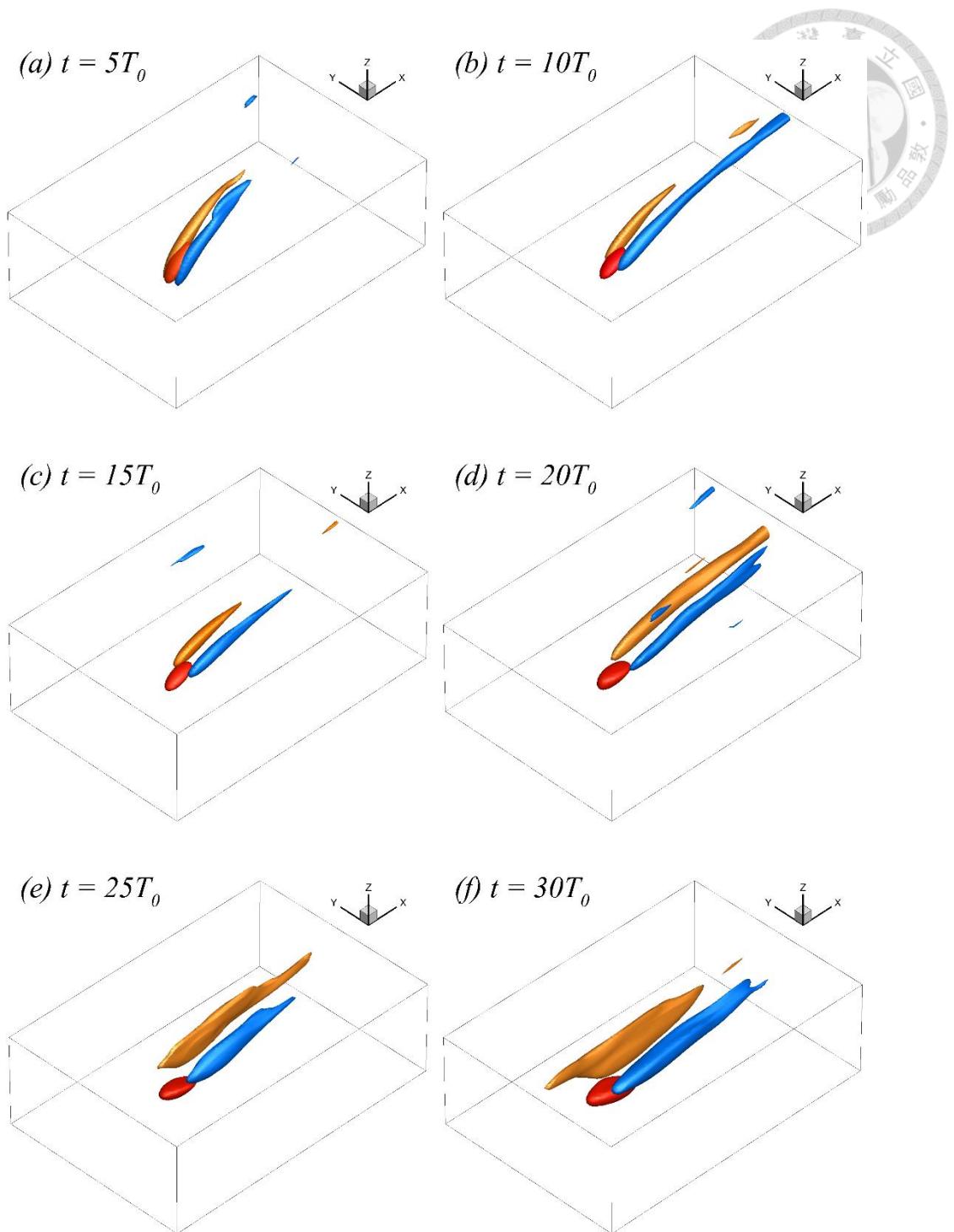


圖 2-158：波長 20cm 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.8556$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

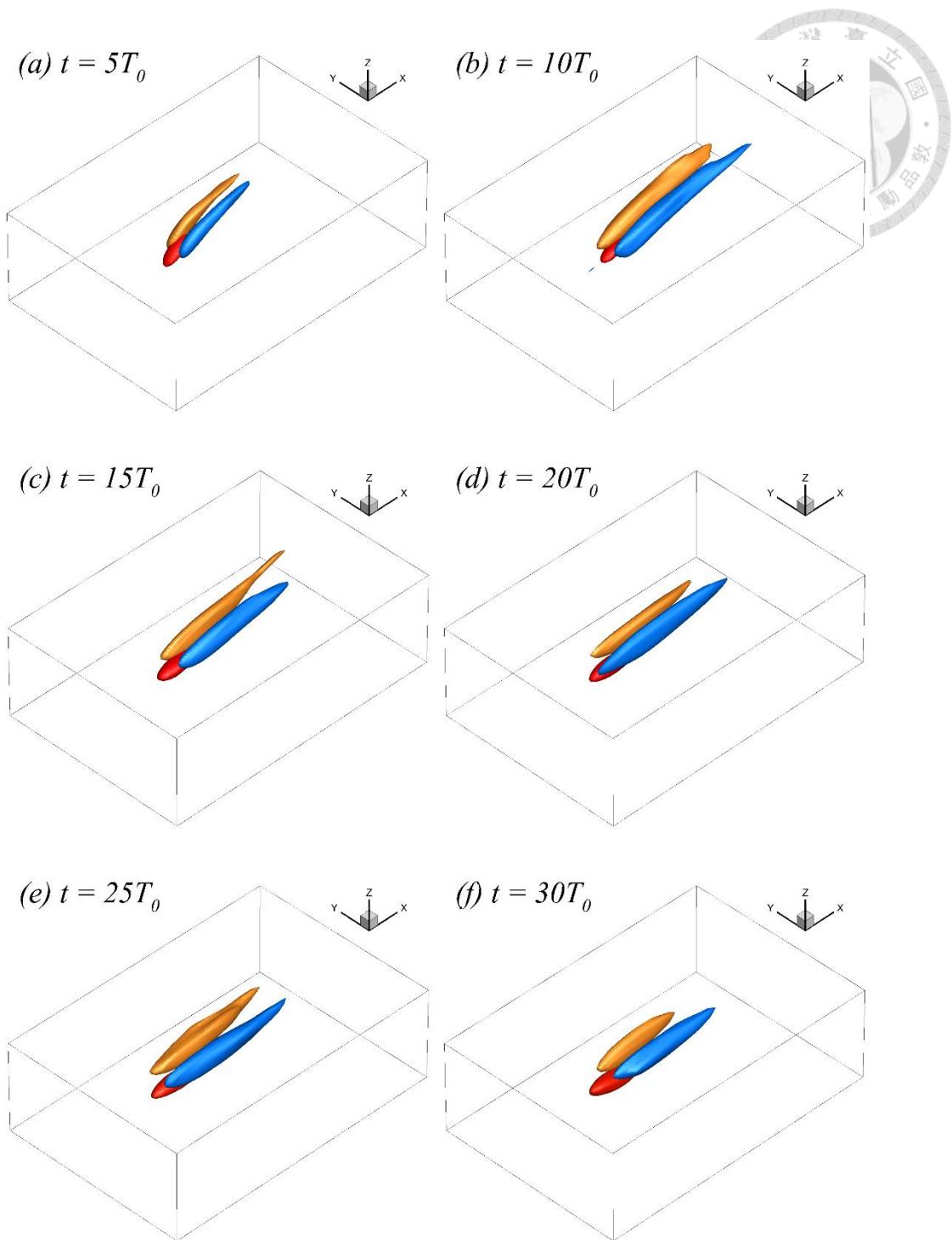


圖 2-159：波長 20cm 於各時間點將渦度擾動進行本研究之條件平均法所得之結果，其中水深以 $\zeta = 0.9013$ 作為偵測截面，橘色為沿流向渦度擾動之正值，藍色為沿流向渦度擾動之負值，紅色為跨流向渦度擾動之正值。長寬高約為 $(0.6\lambda \times 0.4\lambda \times 0.2\lambda)$ 。

2.7 涡度傳輸方程式 (Vorticity transport equations)



在 2.5.5 小節中，透過結構辨識之方法發現成對之沿流向結構多發生於波背，而在波前則較弱，但隨著時間發展其結構有朝沿流向沿伸之趨勢，並於 2.6 小節以條件平均法得到相同結果。欲探究渦旋結構之變化，可用渦度傳輸方程式來描述，如下式

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j u_{i,j} + v\omega_{i,jj}, \quad (2-40)$$

其中 $D\omega_i/Dt$ 為對渦度之物質導數，表示隨質點之渦度變化率，若為正值則表示渦度之正值增加，亦或是渦度之負值減少，反之亦然。 $D\omega_i/Dt$ 受到等式右方兩項影響， $\omega_j u_{i,j}$ 為受速度梯速影響之渦度傳輸， $v\omega_{i,jj}$ 則為黏滯效應對渦度之影響。

本研究以渦度傳輸方程式來分析流場結構，專注於渦度受速度梯度張量之改變，不計算黏滯效應之項，且為了使 $D\omega_i/Dt$ 之值對渦度絕對值之增減具有一致性，則改寫式 2-40 為：

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \text{sgn}(\omega_j) \omega_j u_{i,j}, \quad (2-41)$$

其中 $\text{sgn}(\omega_j)$ 為符號函數，即 $\text{sgn}(\omega_j) = \omega_j / |\omega_j|$ 。

在數值模擬資料中，計算每個網格點之 $D\omega_i/Dt$ 值並作相位平均或層平均，其中相位平均亦為跨流向平均，即 $\langle D\omega_i/Dt(\xi, \psi, \zeta) \rangle_\psi(\xi, \zeta)$ ；層平均為在計算區間之垂直坐標系統 (ξ, ψ, ζ) 中，對 ξ - ψ 面作平均，即 $\langle D\omega_i/Dt \rangle_{\xi\psi}(\zeta)$ 。

波長 7.5cm 之流場，對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均後之分布圖如圖 2-160 至圖 2-165，其時間分別為 $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30T_0$ 。由圖可知沿流向渦度之變化率於波背為正，於波谷為負，而圖 2-160(c) 之垂直向渦度之變化率於波谷為負，於波峰為正，因此印證沿流向結構於波背處多為沿流向渦度，而於波峰多為垂直向結構。於接近水面處，跨流向渦度之變化率（如圖 2-160(b)）有一層薄薄而隨波浪分布之負值，而以該層為分界，其上下為正值，而隨時間變大。

由於變化率之分布會隨不同相位而改變，欲想了解整體變化率，因此對 $D\omega_i/Dt$ 作層平均而其結果如圖 2-166，由圖可知沿流向渦度之變化率為正值，故隨著時間結構會逐漸增強，且逐漸往水深較深處發展。跨流向渦度之變化率於

$z = -0.1$ 具有一峰值。垂直向渦度之變化率於 $t = 5T_0$ 時為負值，隨時間發展，水面逐漸轉為正值，而水下亦有一峰值，逐漸往 $z = -0.5$ 移動。

波長 15cm 之結果為圖 2-167 至圖 2-173，而波長 20cm 之結果為圖 2-174 至圖 2-180，對於不同波長之分布趨勢亦與波長 7.5cm 相同。



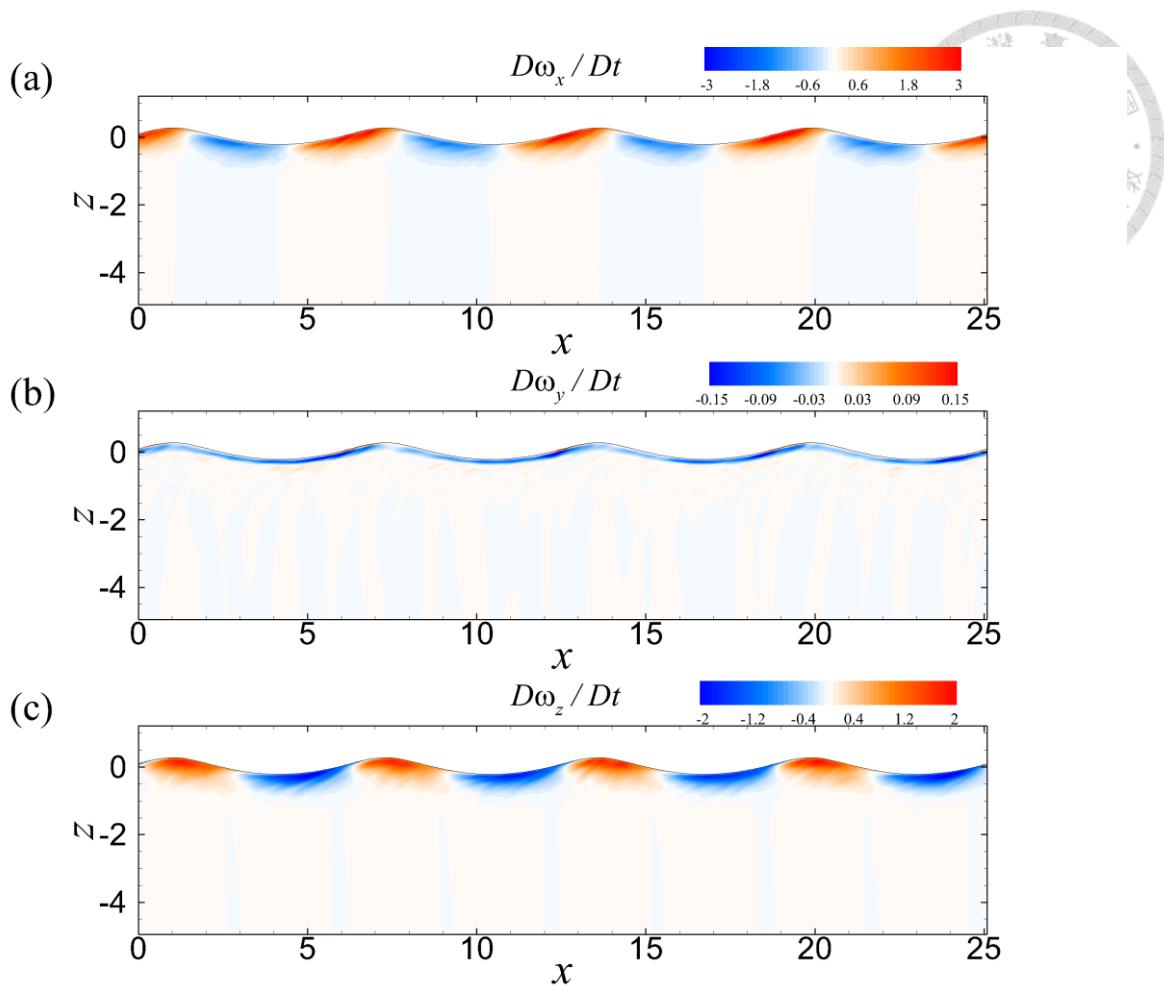


圖 2-160：波長 7.5cm 於 $t = 5T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

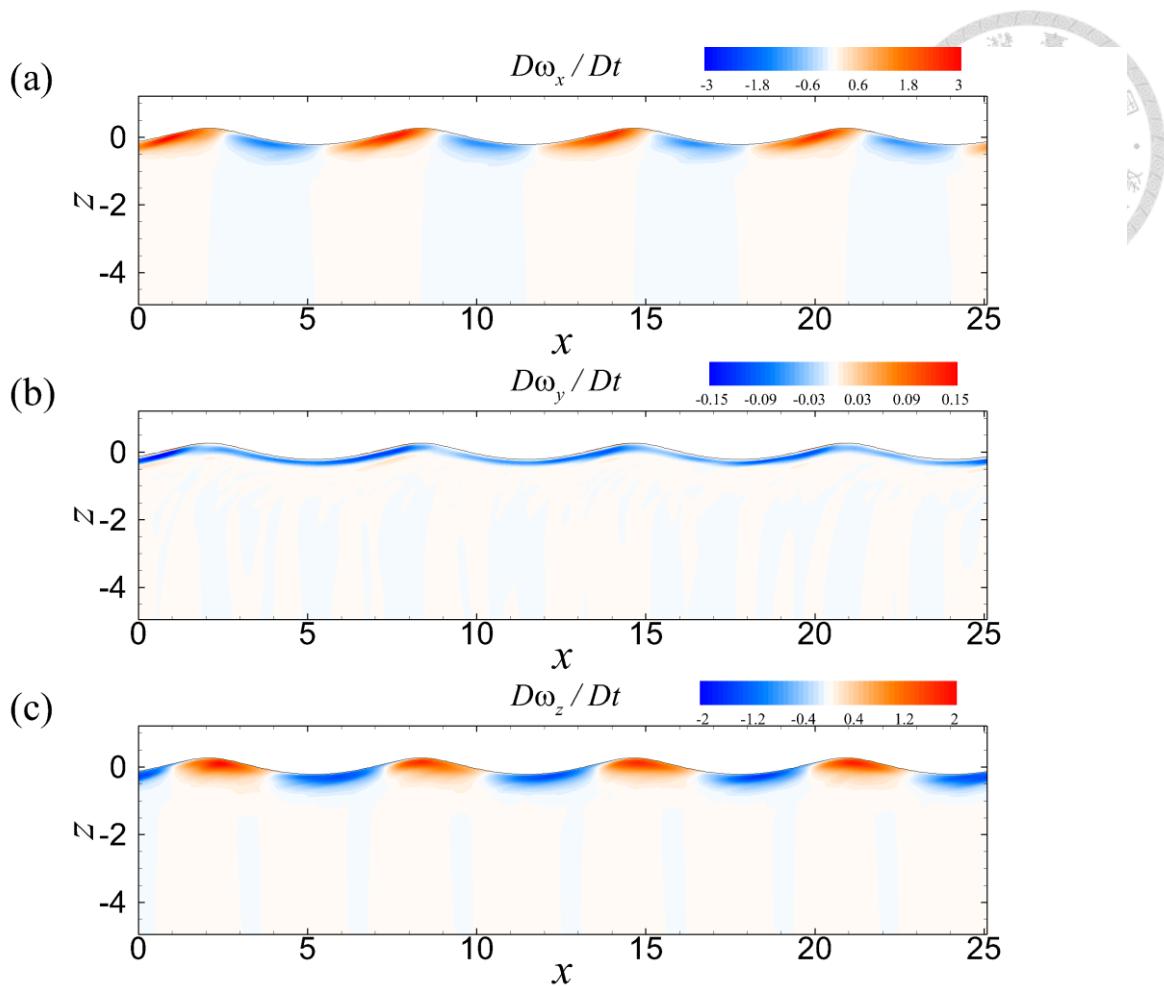


圖 2-161：波長 7.5cm 於 $t = 10T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

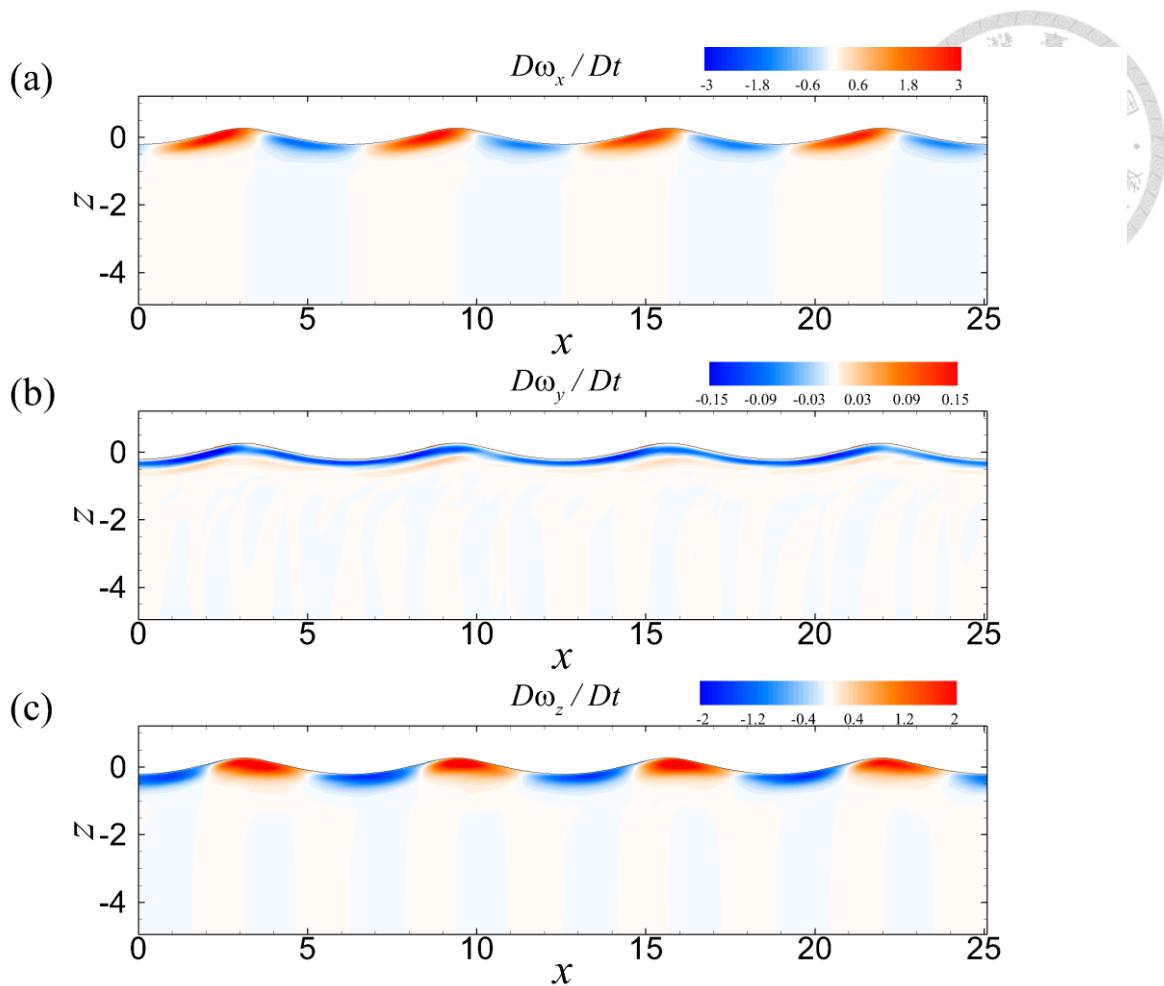


圖 2-162：波長 7.5cm 於 $t = 15T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

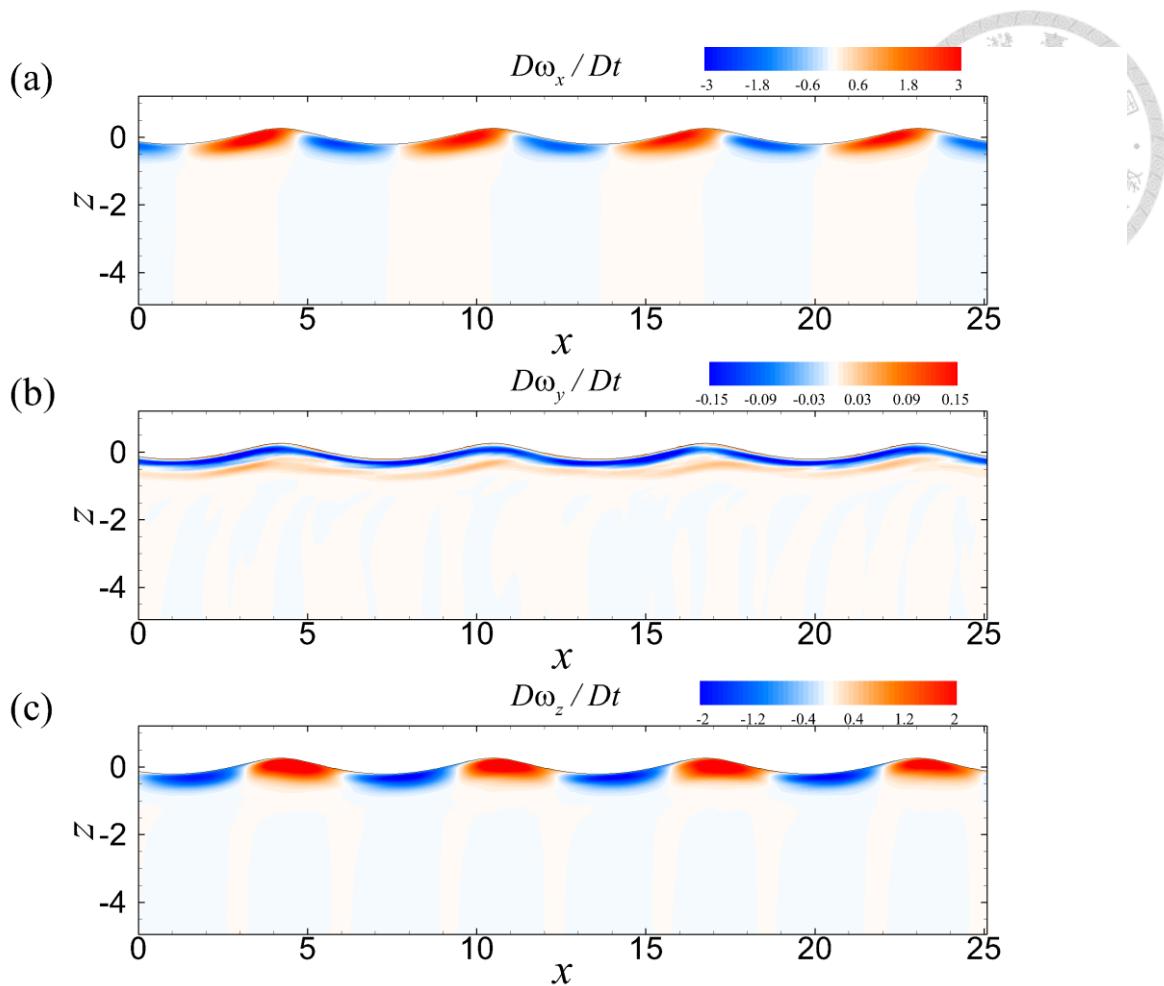


圖 2-163：波長 7.5cm 於 $t = 20T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

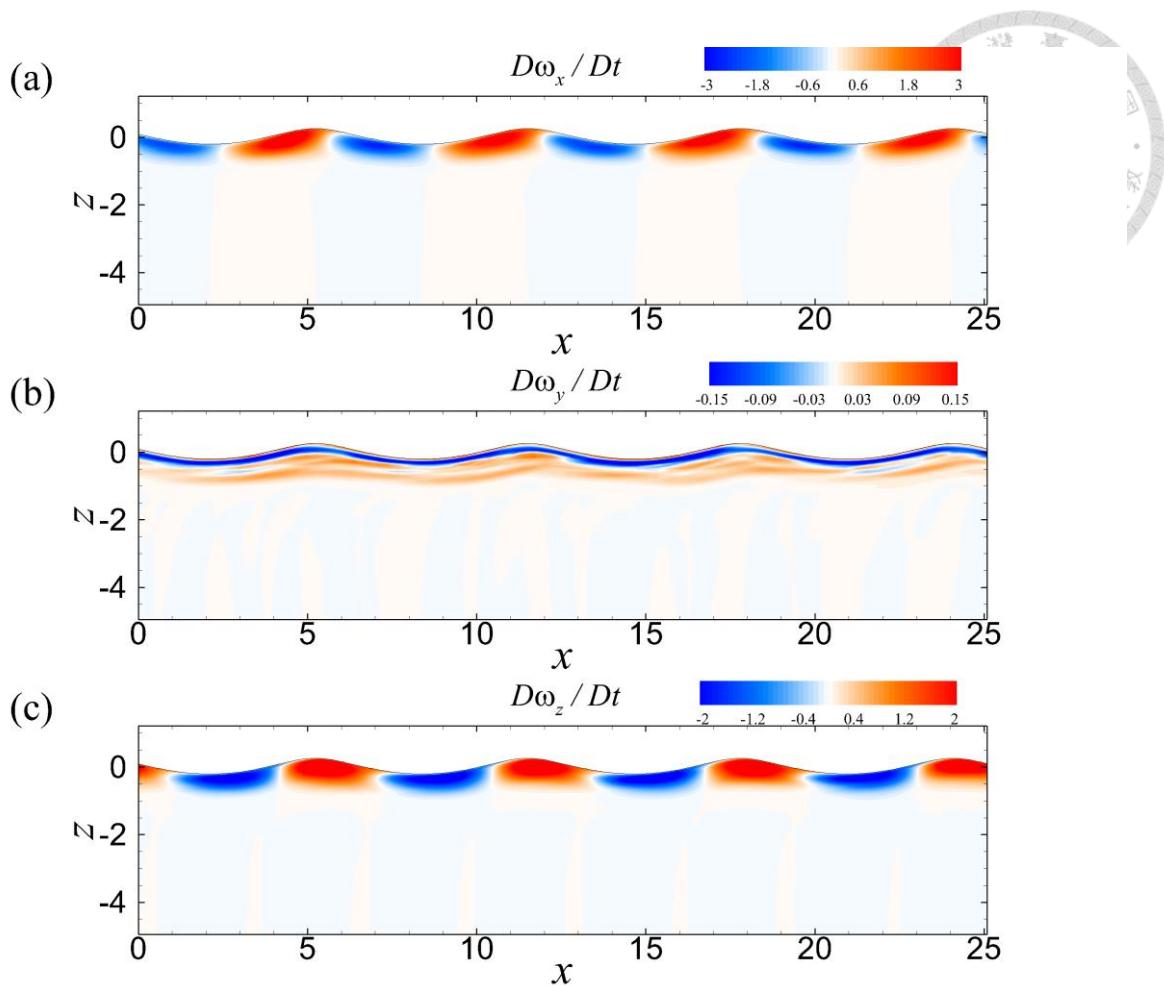


圖 2-164：波長 7.5cm 於 $t = 25T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

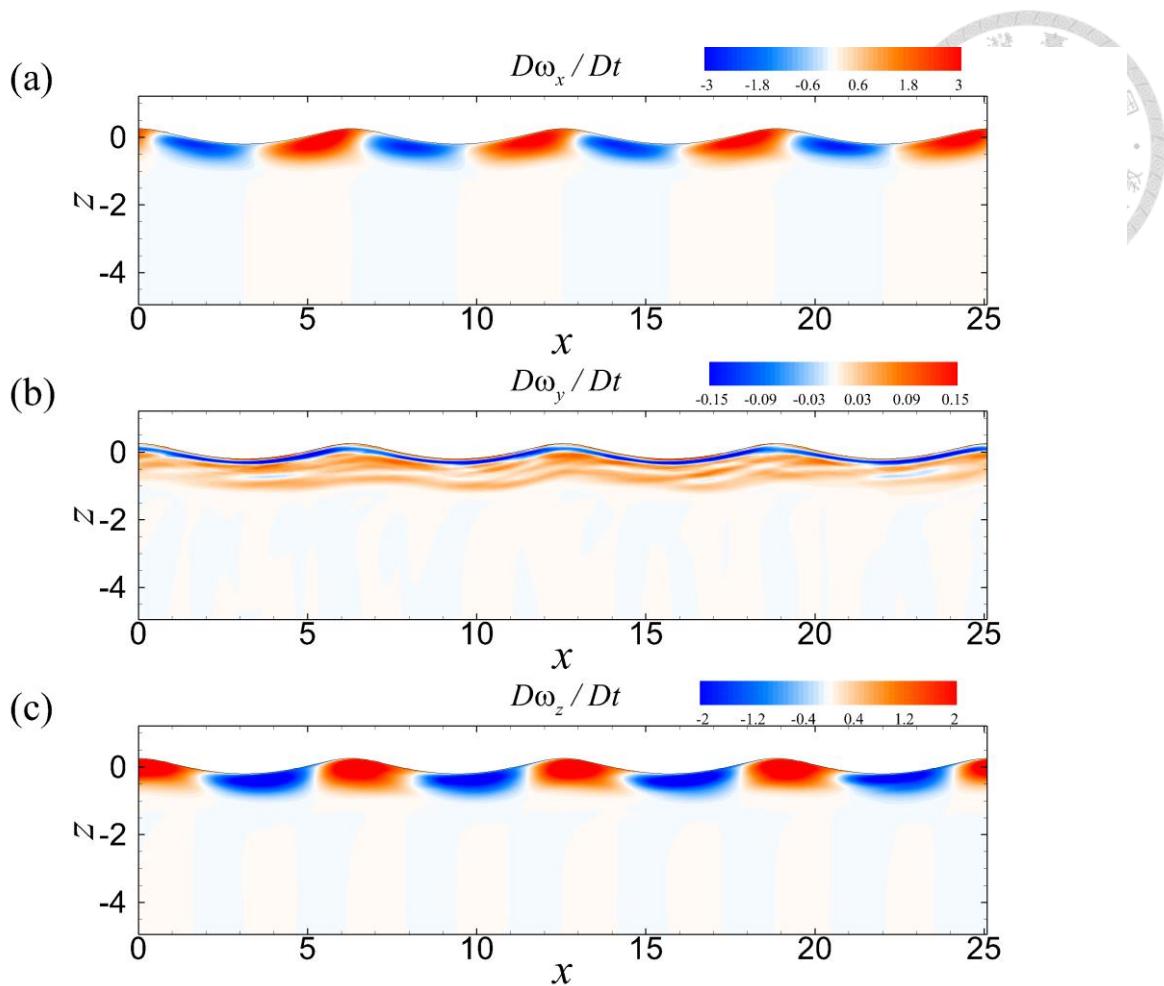


圖 2-165：波長 7.5cm 於 $t = 30T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

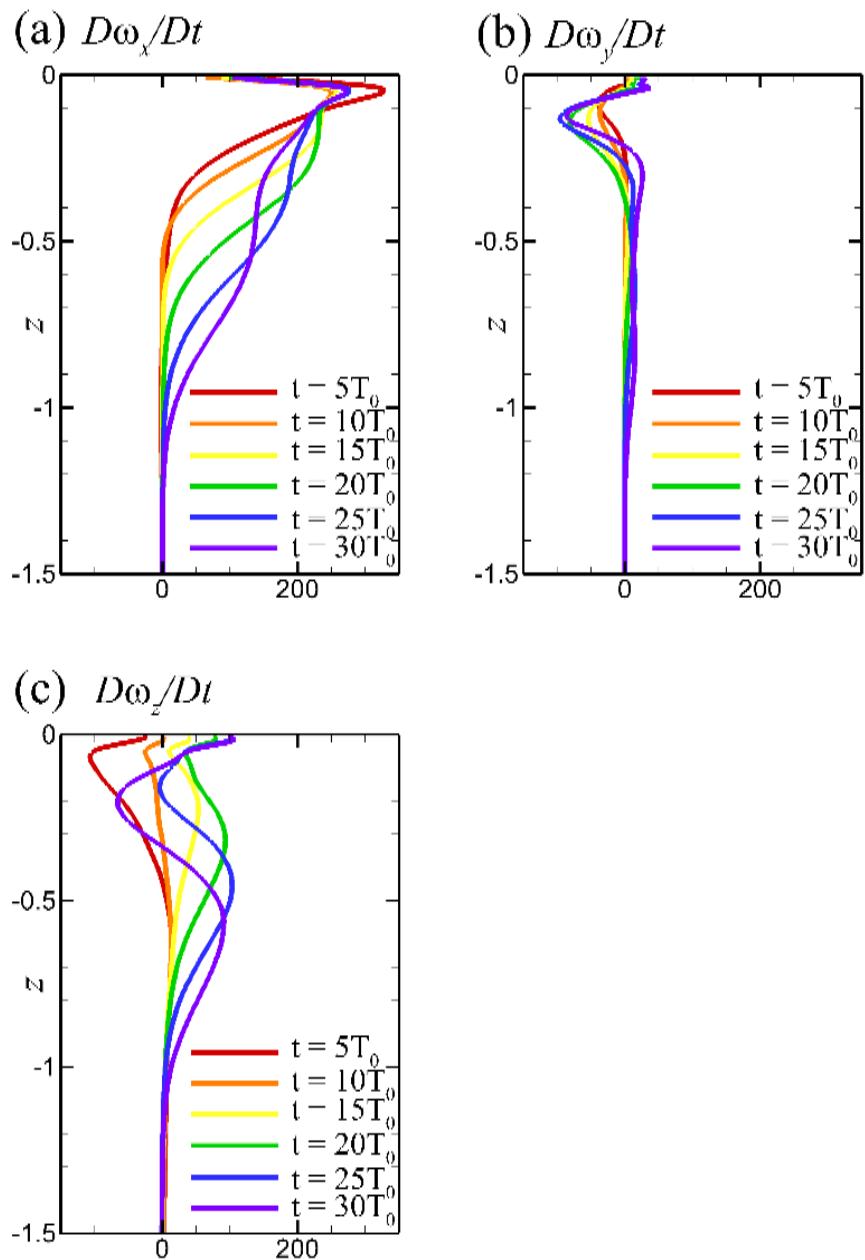


圖 2-166：波長 7.5cm 於各時間對 $D\omega_i/Dt$ 作層平均之結果，橫軸為 $D\omega_i/Dt$ 之值，縱軸為垂直向之水深。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 隨時間之分布圖，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 隨時間之分布圖，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 隨時間之分布圖。

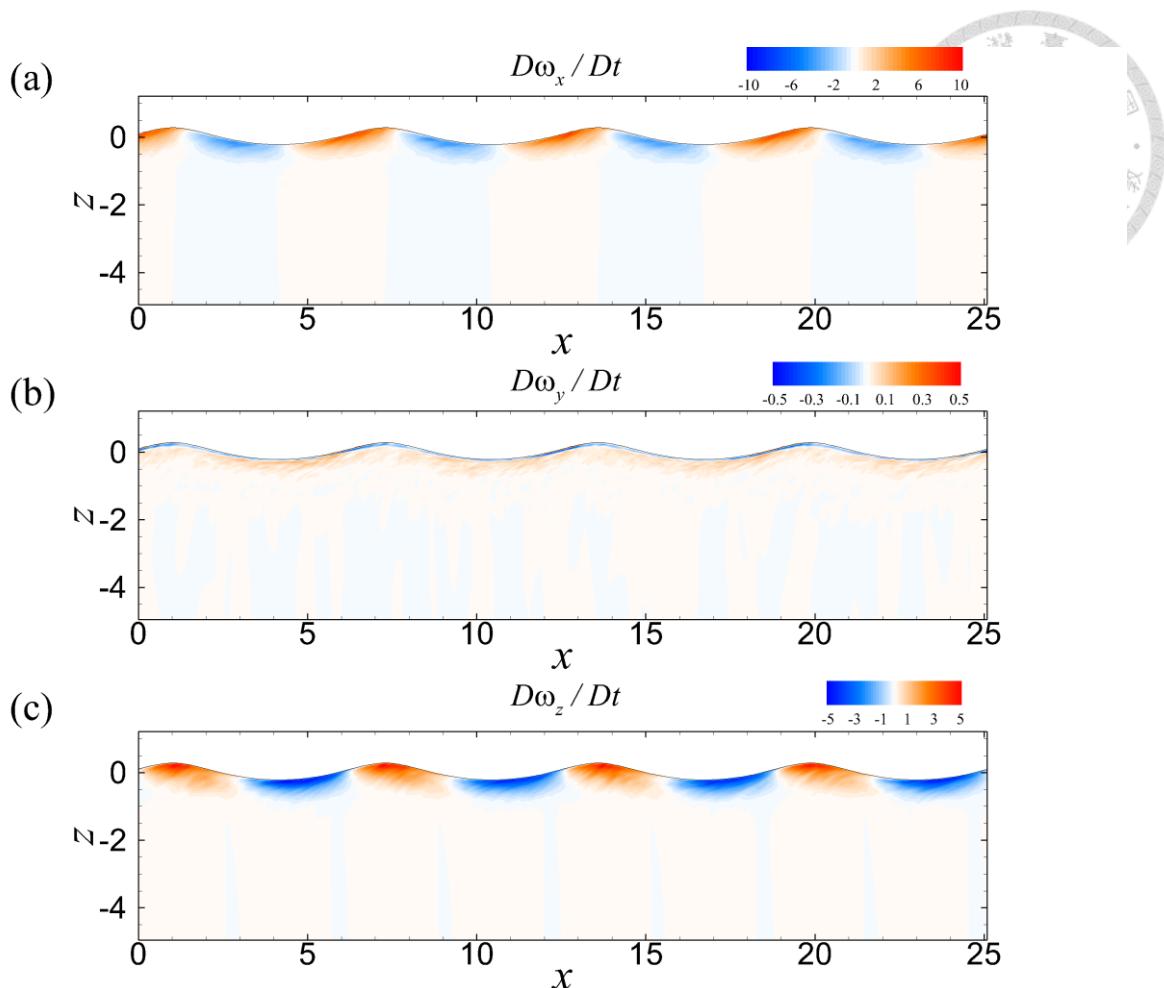


圖 2-167：波長 15cm 於 $t = 5T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

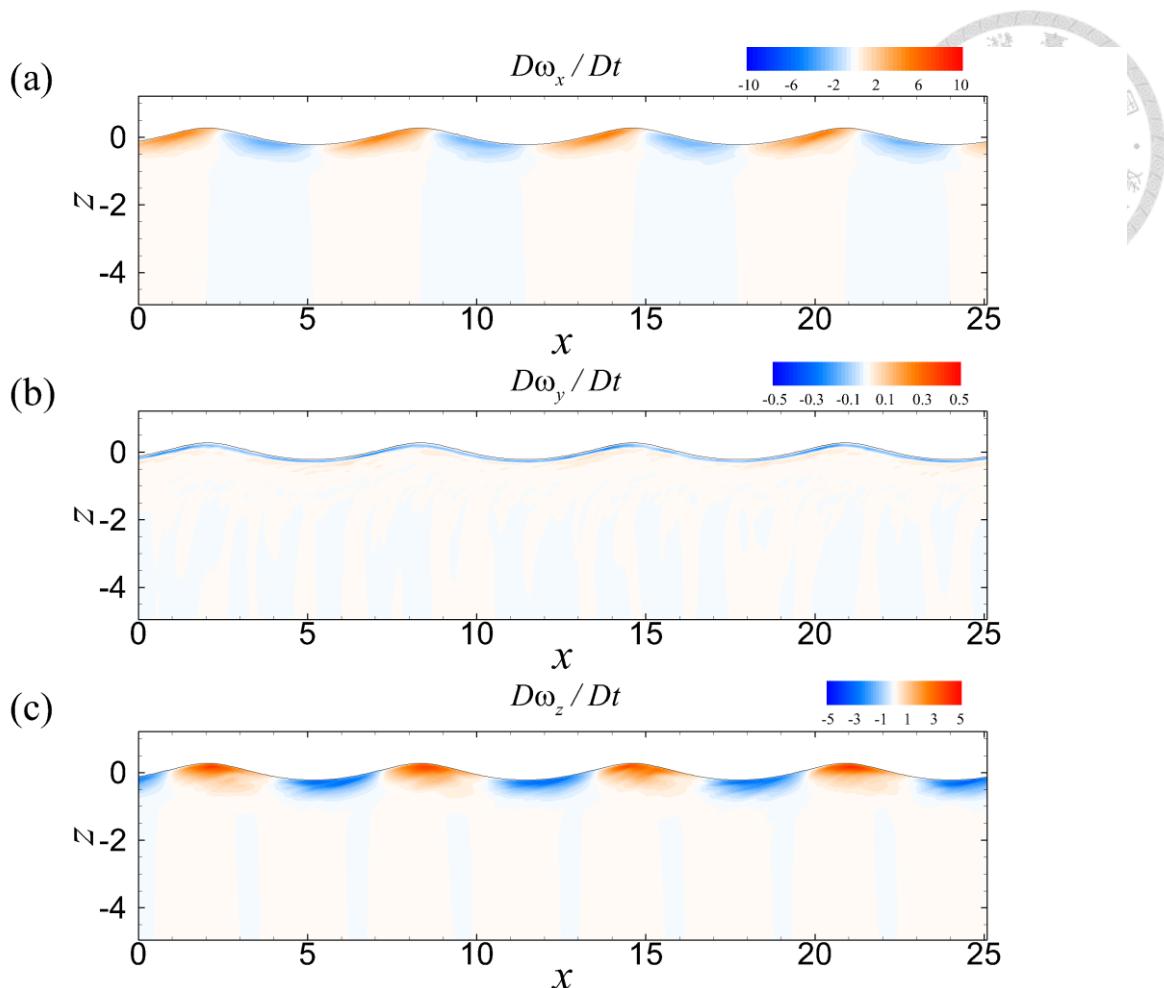


圖 2-168：波長 15cm 於 $t = 10T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

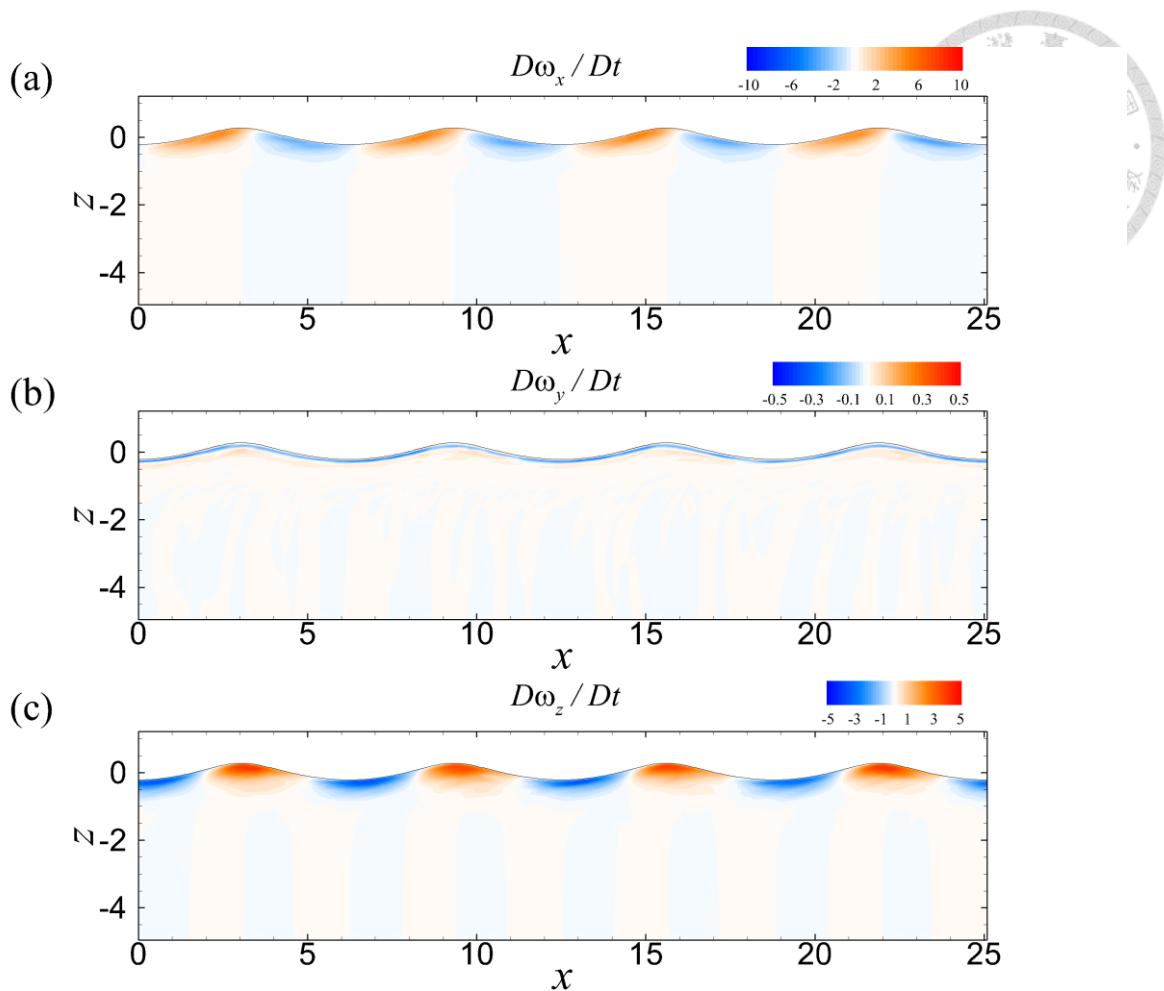


圖 2-169：波長 15cm 於 $t = 15T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

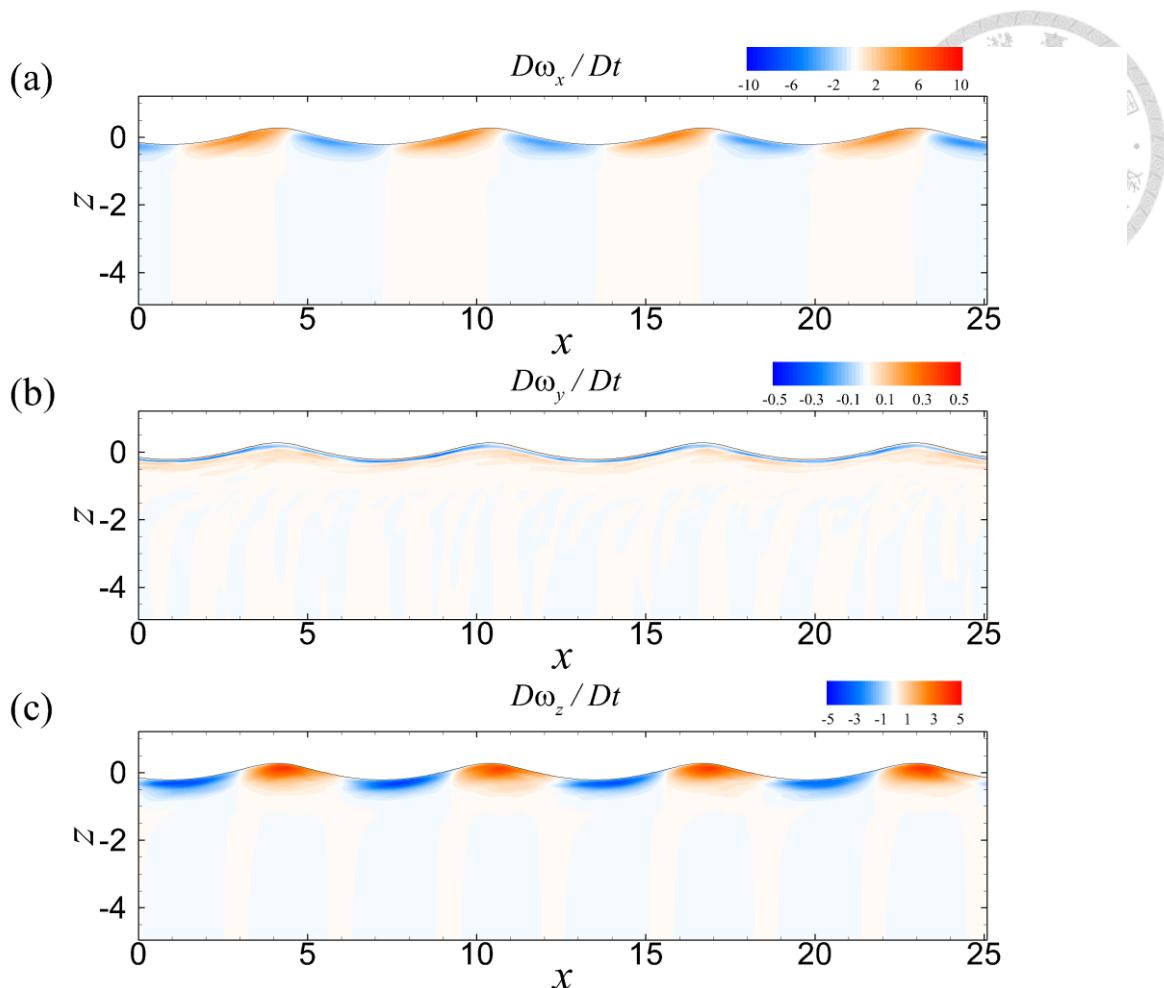


圖 2-170：波長 15cm 於 $t = 20T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

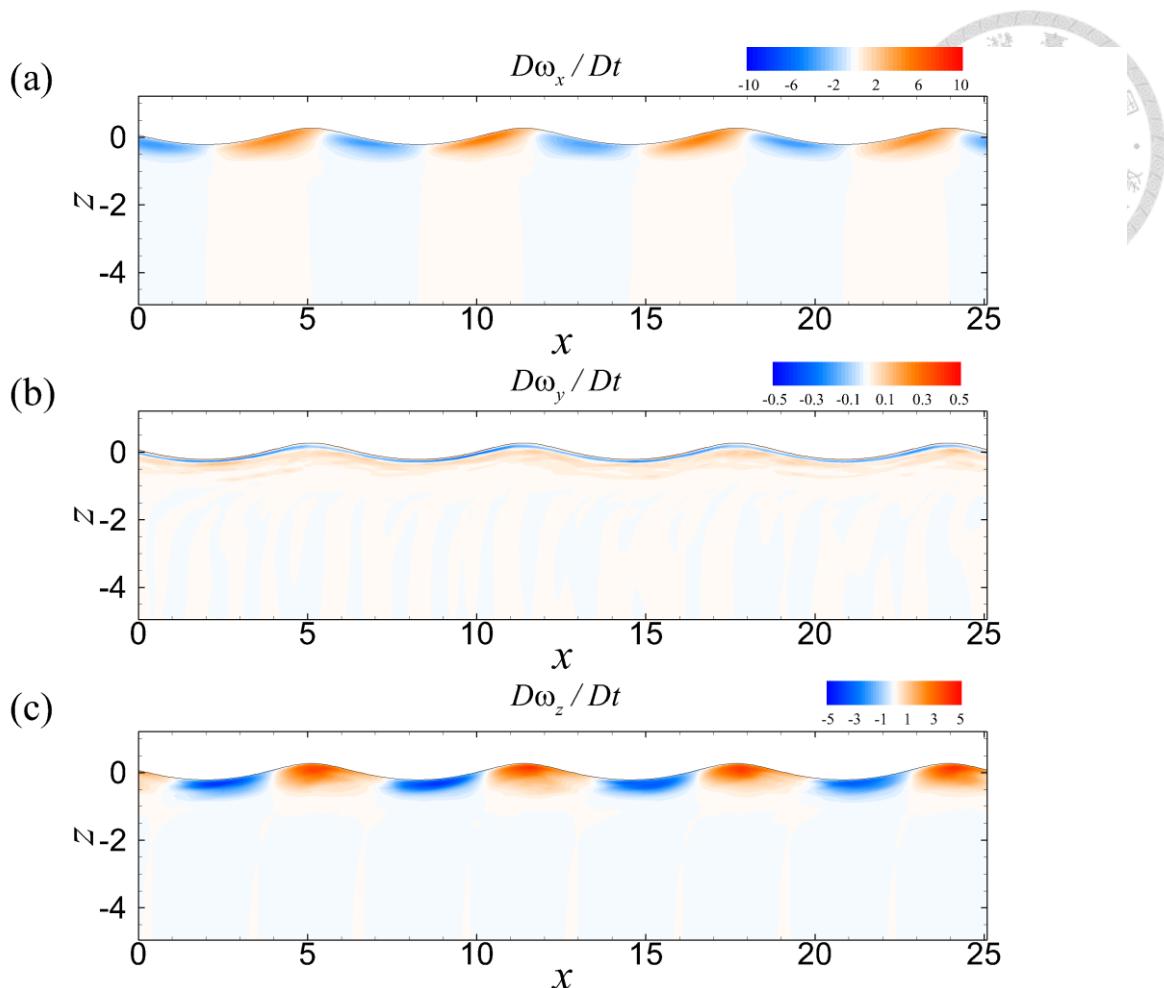


圖 2-171：波長 15cm 於 $t = 25T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

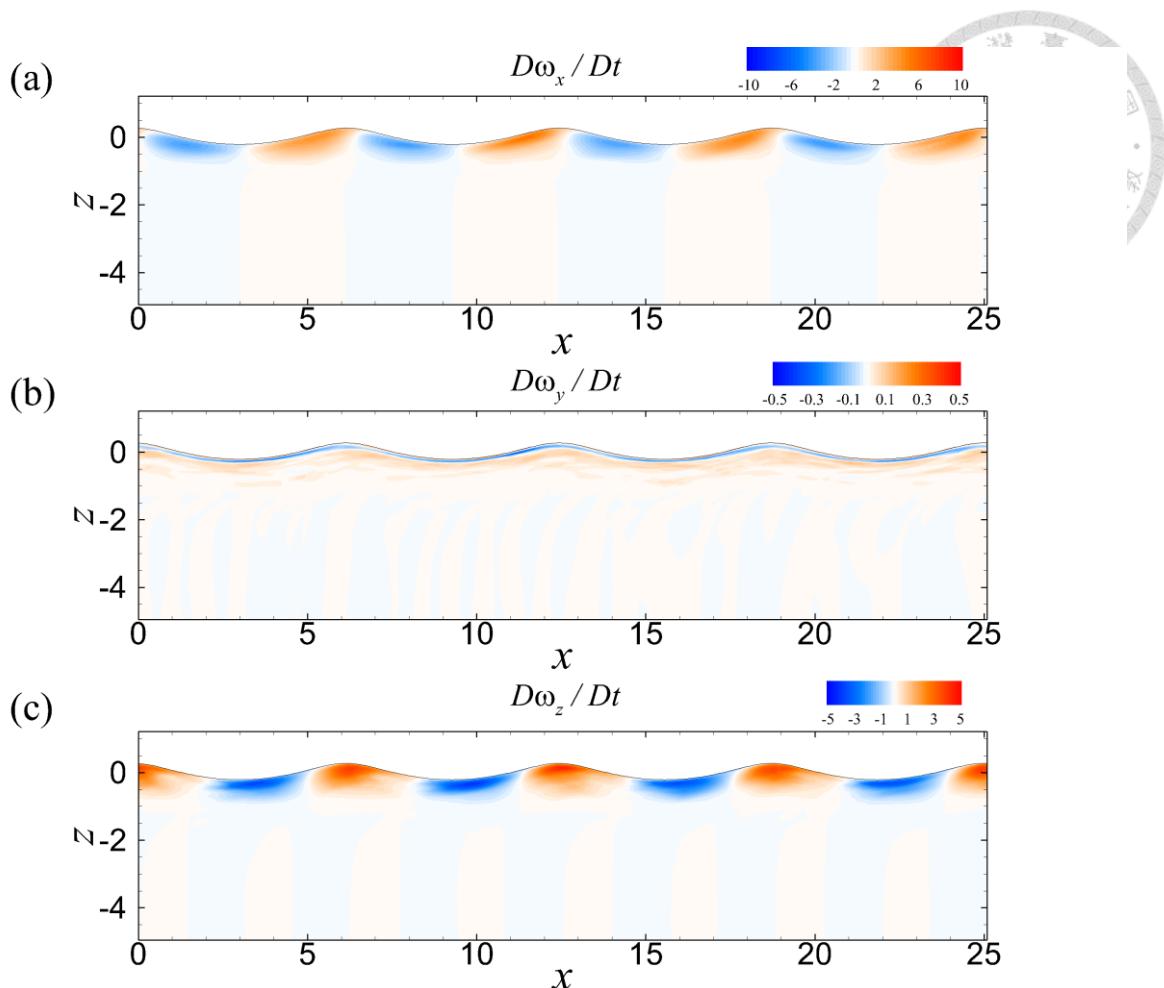


圖 2-172：波長 15cm 於 $t = 30T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

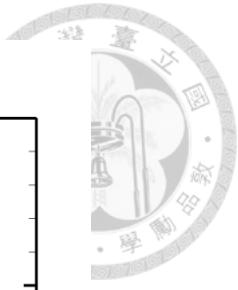
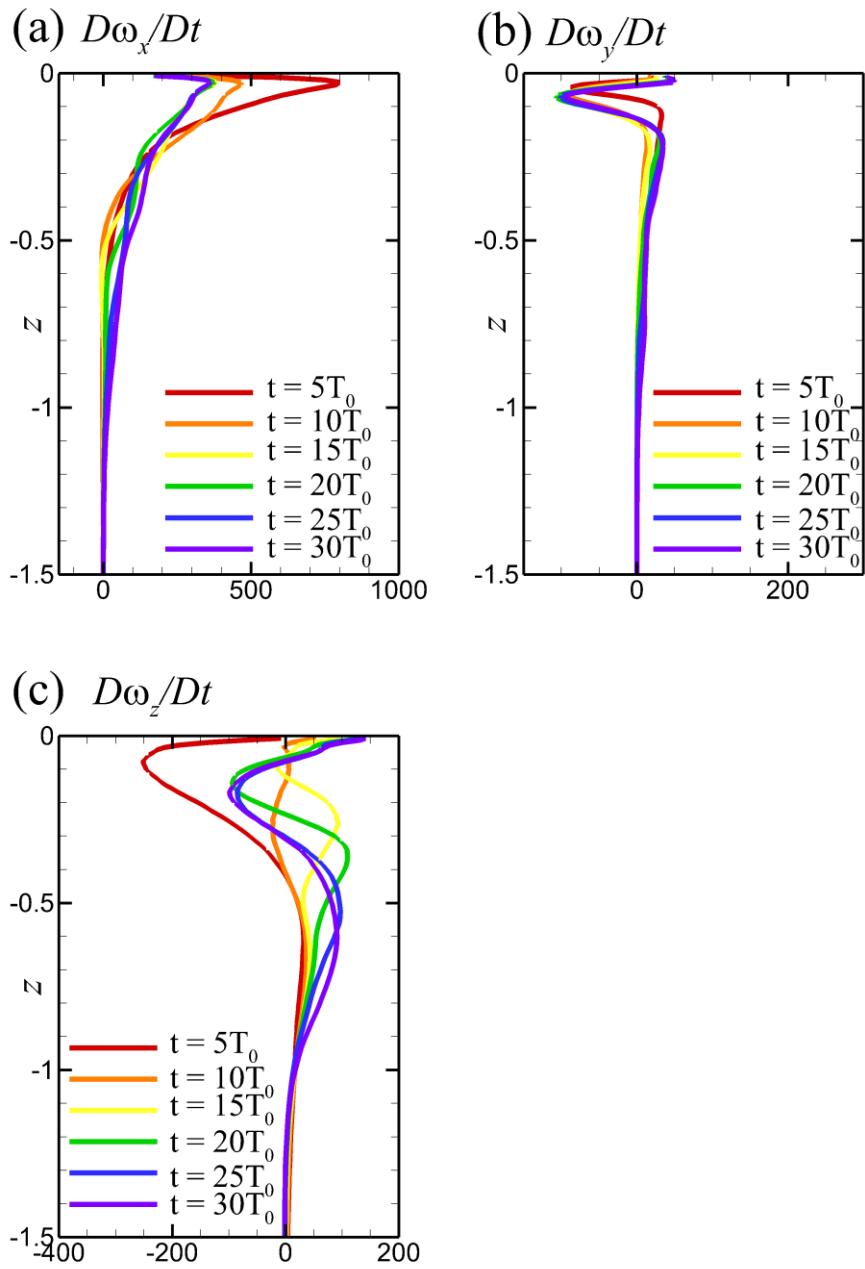


圖 2-173：波長 15cm 於各時間對 $D\omega_i/Dt$ 作層平均之結果，橫軸為 $D\omega_i/Dt$ 之值，縱軸為垂直向之水深。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 隨時間之分布圖，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 隨時間之分布圖，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 隨時間之分布圖。

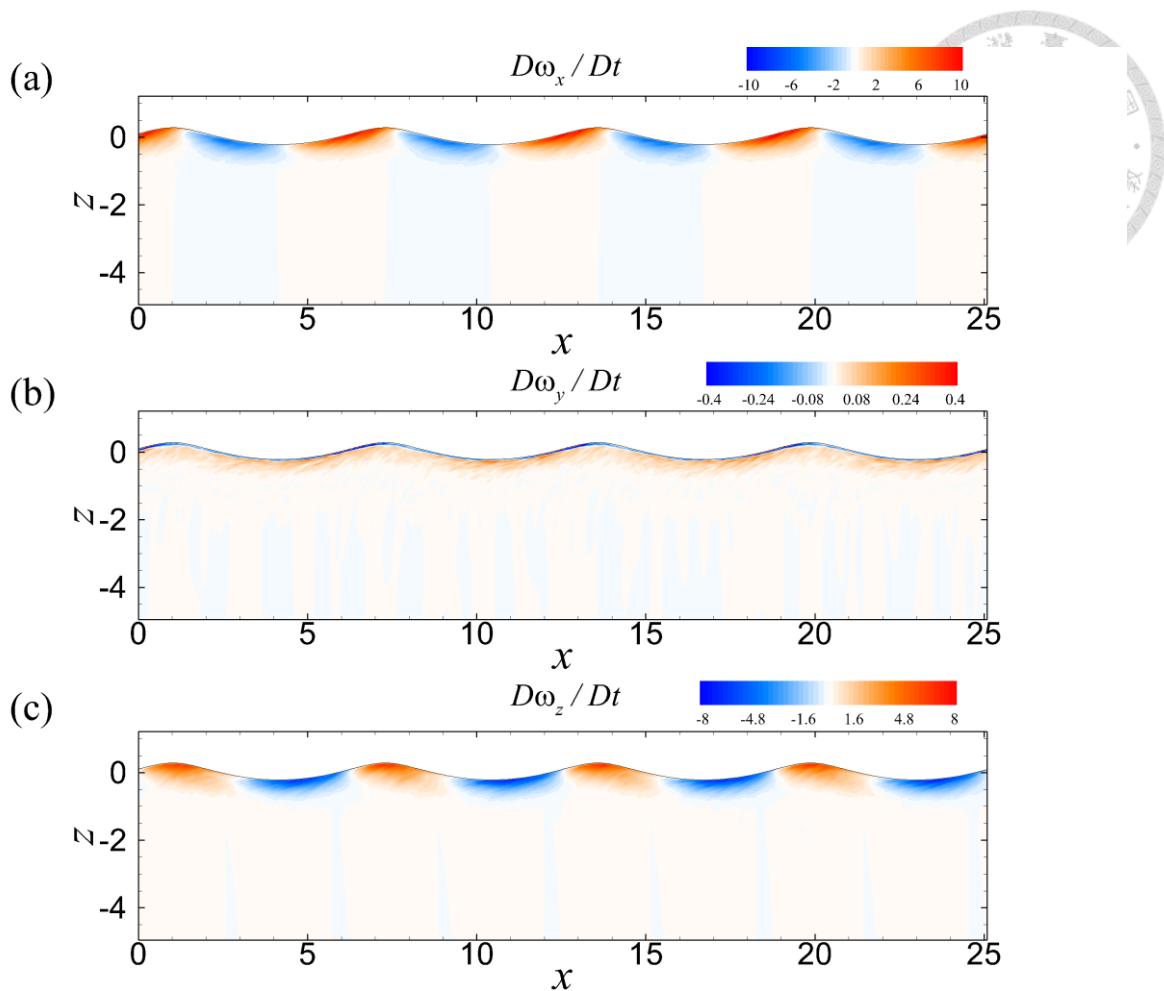


圖 2-174：波長 20cm 於 $t = 5T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

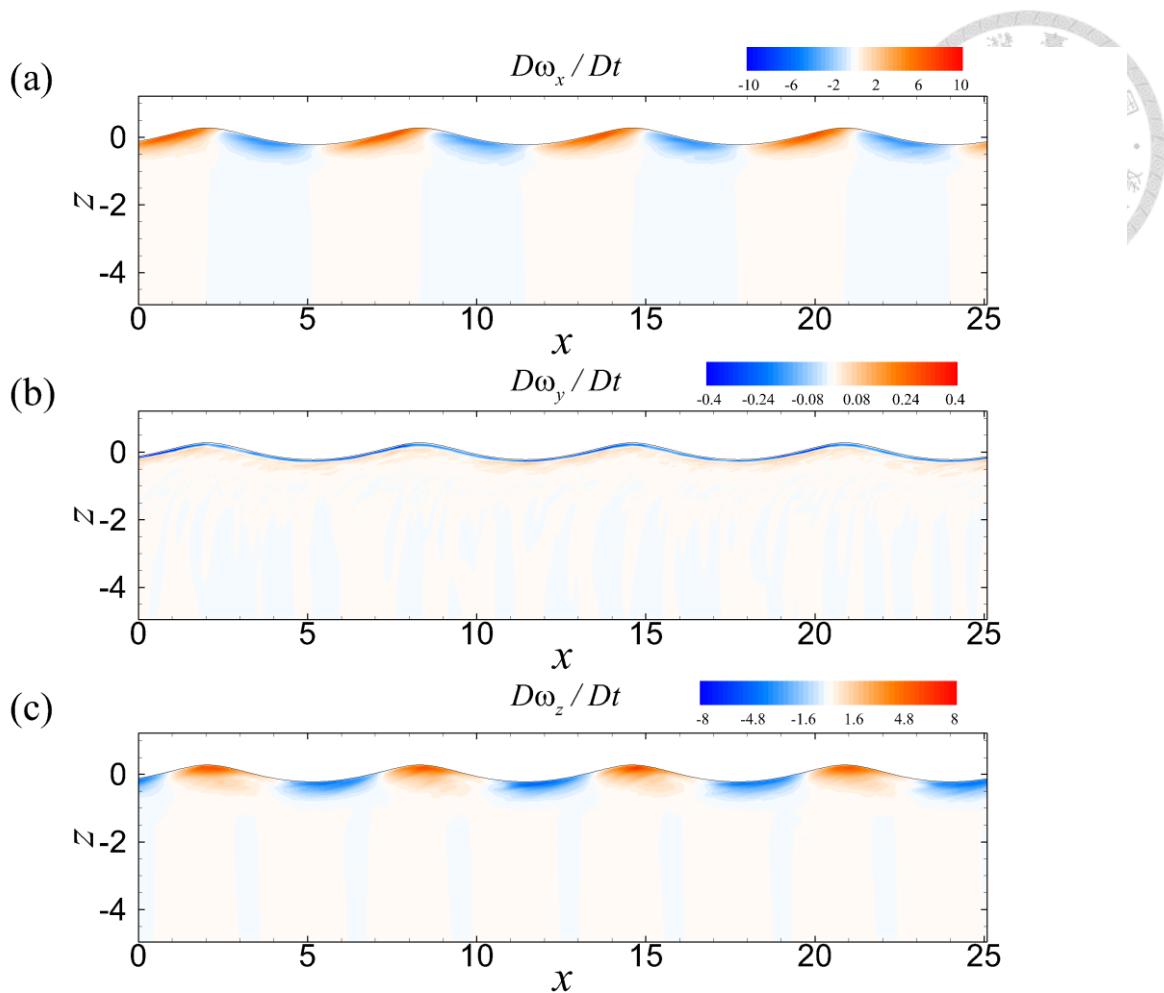


圖 2-175：波長 20cm 於 $t = 10T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

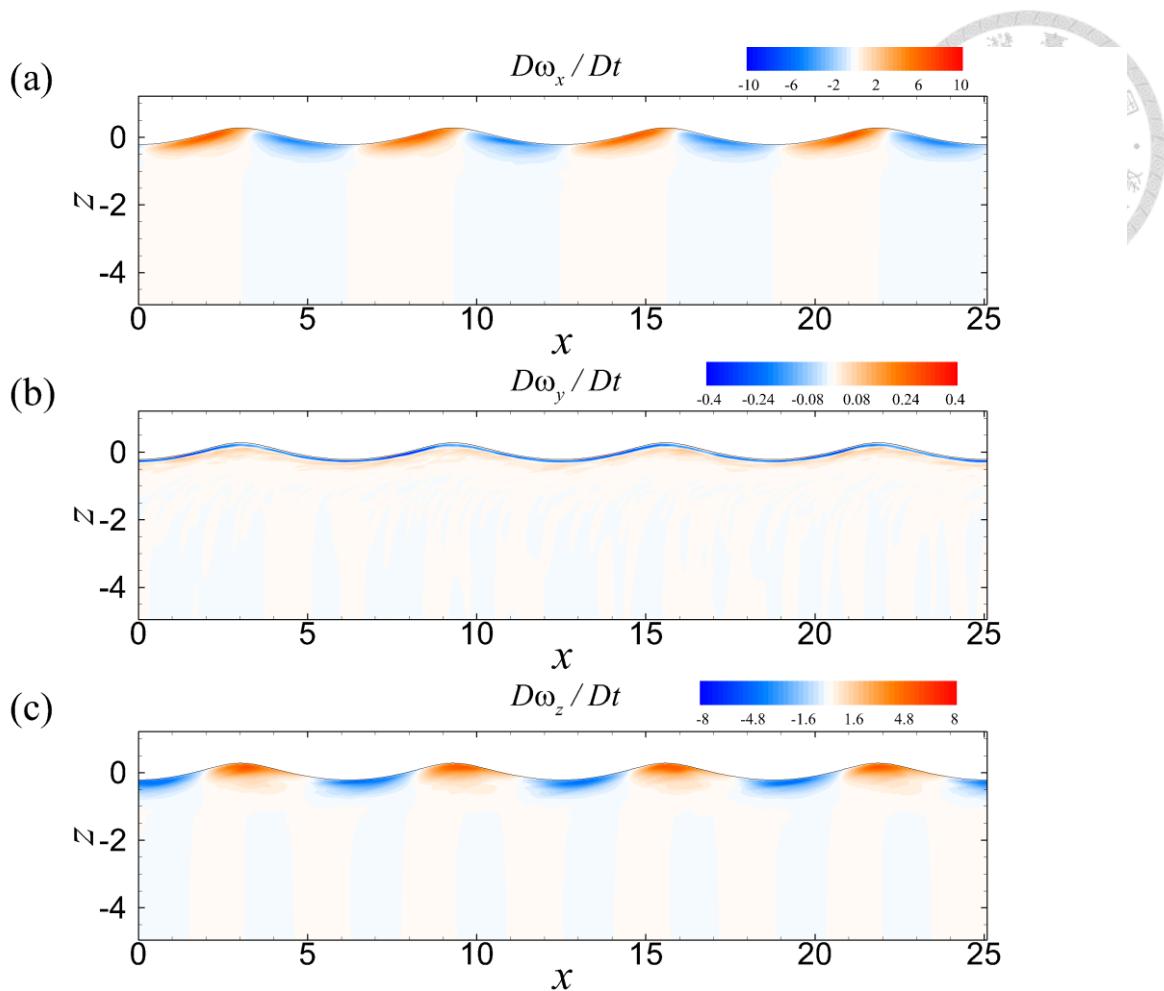


圖 2-176：波長 20cm 於 $t = 15T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

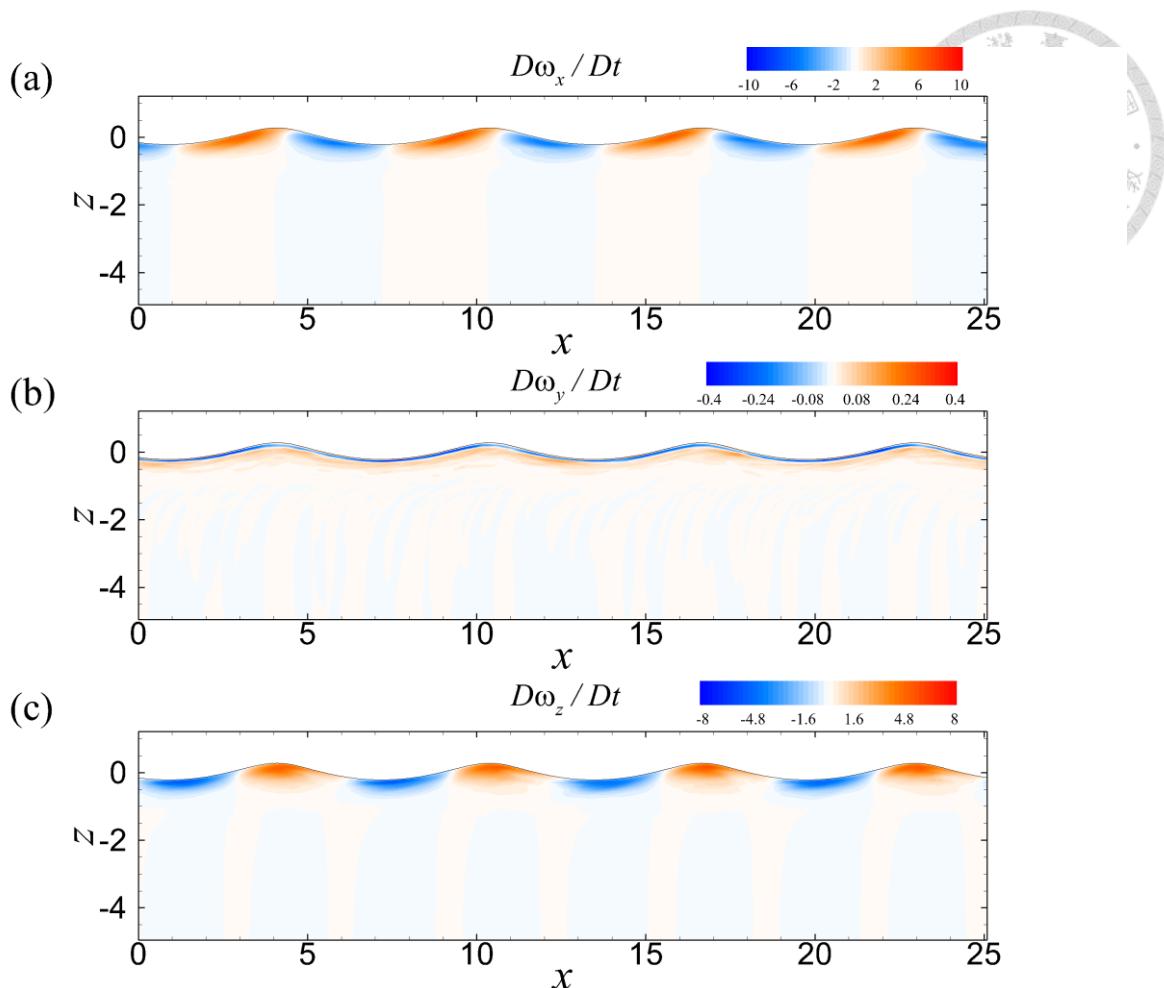


圖 2-177：波長 20cm 於 $t = 20T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

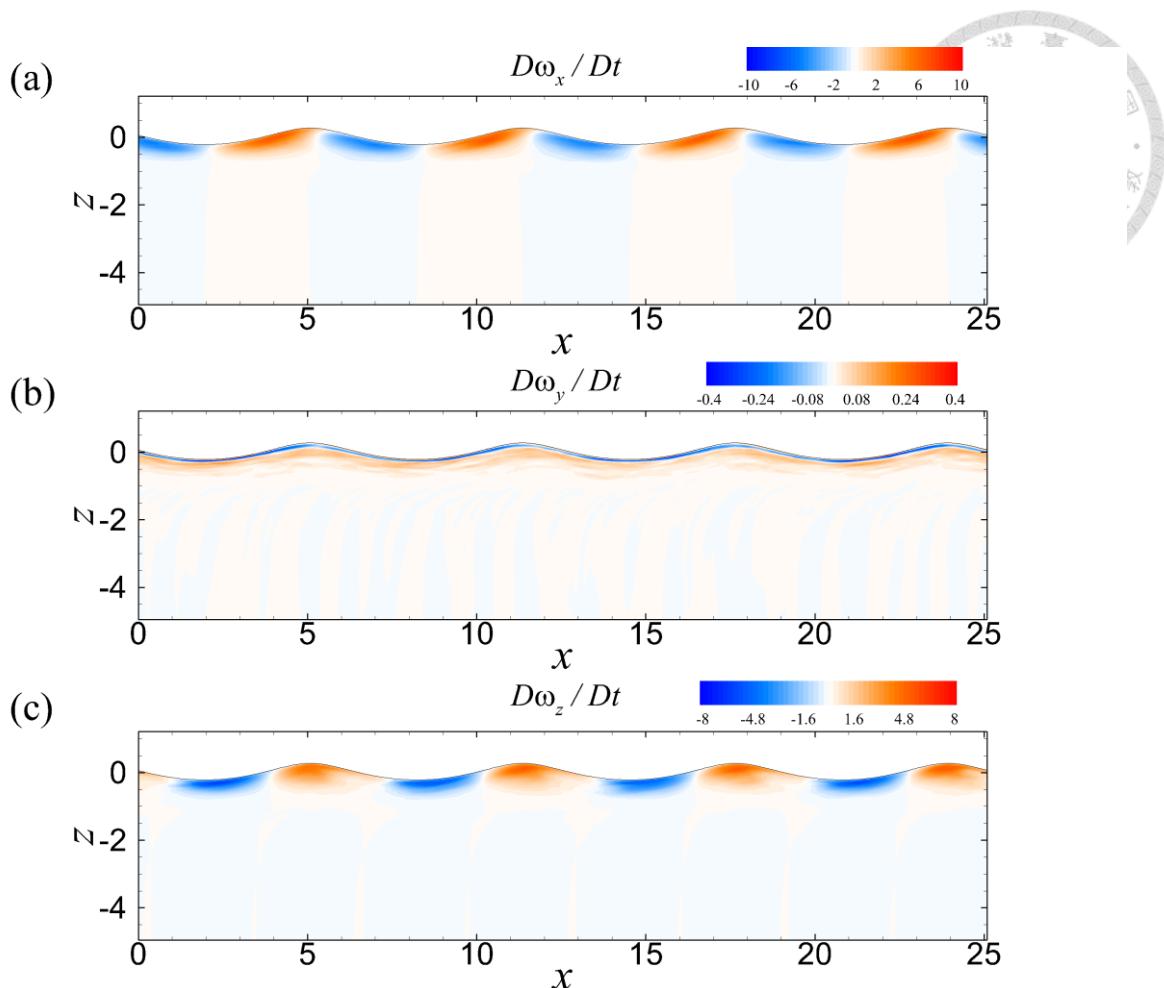


圖 2-178：波長 20cm 於 $t = 25T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

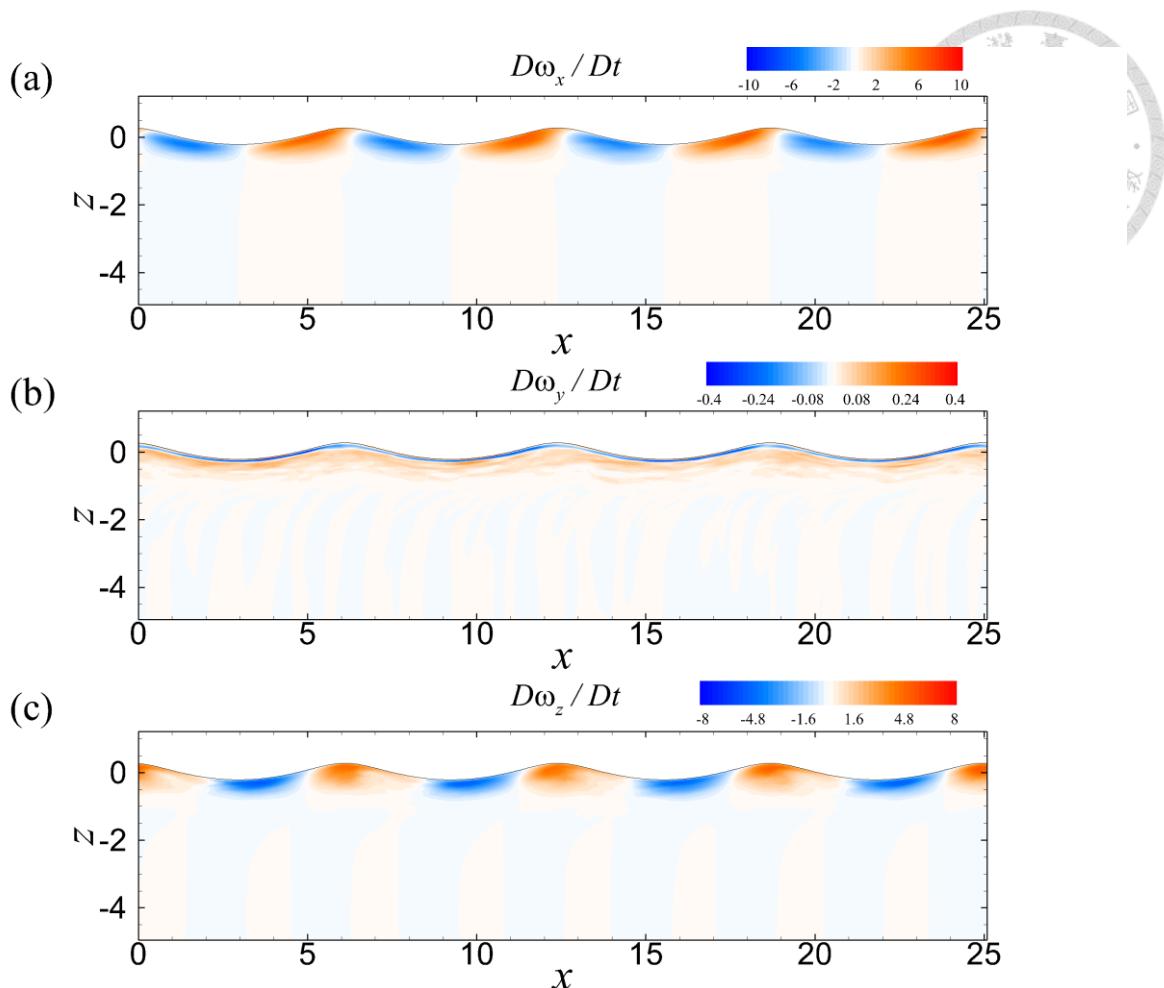


圖 2-179：波長 20cm 於 $t = 30T_0$ 時之對 $D\omega_i/Dt$ 作相位平均結果，橫軸為沿流向，縱軸為垂直向。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 之相位平均，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 之相位平均，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 之相位平均。其中藍色為負值，紅色為正值。

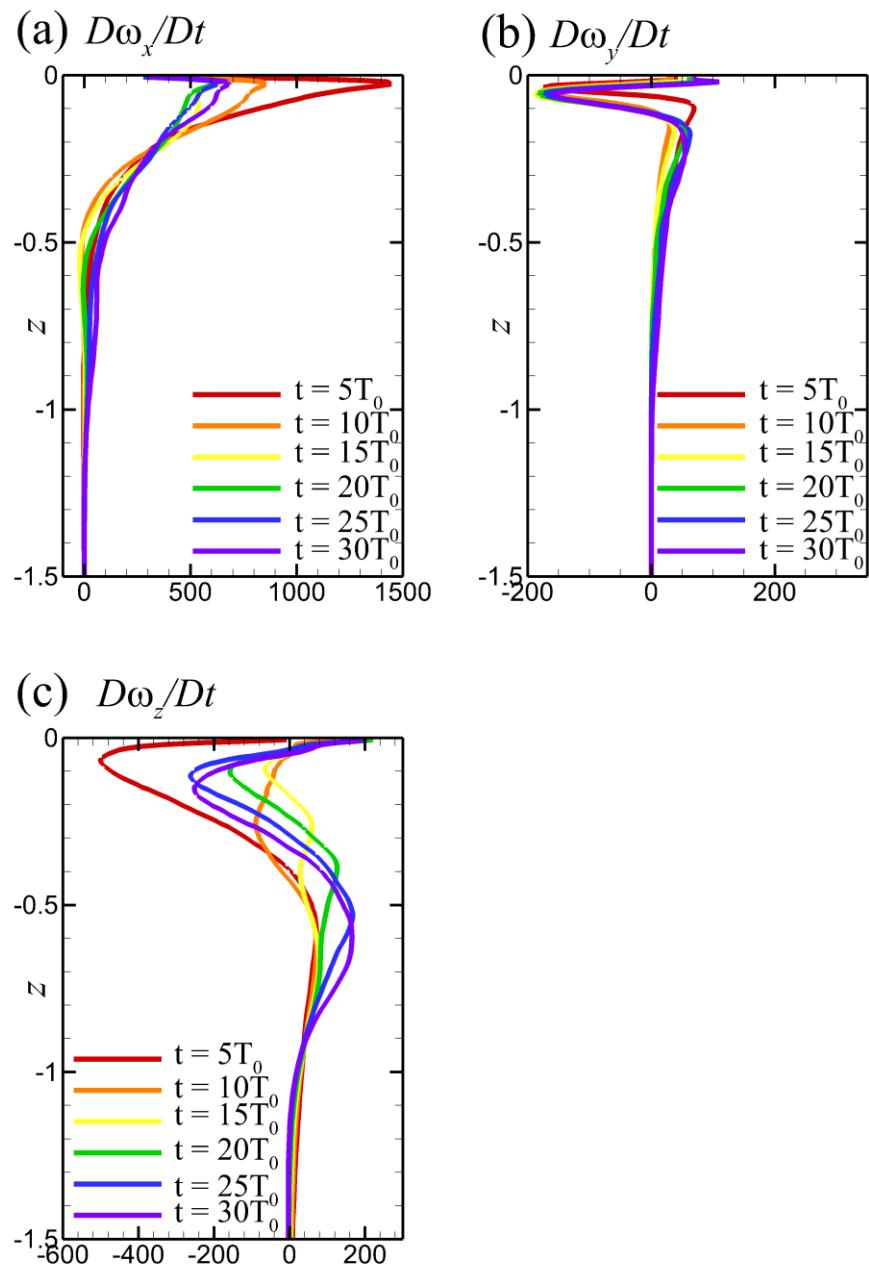
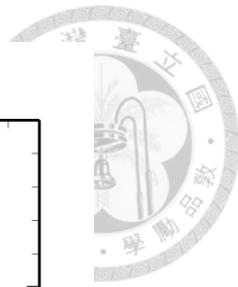


圖 2-180：波長 20cm 於各時間對 $D\omega_i/Dt$ 作層平均之結果，橫軸為 $D\omega_i/Dt$ 之值，縱軸為垂直向之水深。圖 a 為 $D\omega_x/Dt$ 隨時間之分布圖，圖 b 為 $D\omega_y/Dt$ 隨時間之分布圖，圖 c 為 $D\omega_z/Dt$ 隨時間之分布圖。

第三章、 流場穩定性分析



本研究於第二章針對流場結構以數種方法進行辨識與分析，而本章將以不同觀點探討流場，藉由流場中水面條痕間距特性與穩定性分析之結果作比較，進而說明造成條痕之原因。不管是在實際海面、實驗量測或是數值模擬中，皆能觀察於自由液面上具有條痕結構，Craik 與 Leibovich [14-16] 針對此類問題透過理論推導方式，提出 CL2 (Craik-Leibovich type 2) 機制及流場穩定性分析，說明條痕結構是因為水面下之朗繆爾環流所造成，而 Phillips [20] 探討針對不同理查森數 (Richardson number) 與普朗特數 (Prandtl number) 對穩定性分析結果之影響。穩定性分析之概念在於，將流場視為基流 (base flow) 與擾動部分所組成，若擾動將隨著時間而逐漸變大，則流場為不穩定狀態，反之擾動若隨著時間而逐漸衰減，流場則為穩定狀態。

3.1 理論介紹

考慮一流場受風剪力及波浪作用，風剪力作用以摩擦速度 u_* 表示，波浪效應於 CL2 機制中透過波浪平均法以史托克斯漂送 (Stokes drift, $\alpha\sigma a^2 D_1$) 表示，其中 D_1 為無因次之史托克斯漂送。同時將物理尺度無因次化，空間與時間尺度上為：

$$\left[(x, y, z)\alpha^{-1}, \frac{t}{a\alpha u_*} \left(\frac{\nu_T}{\sigma} \right) \right]. \quad (3-1)$$

此處 (x, y, z, t) 皆為無因次變數，上述出現的特徵尺度， α 為波數 (wave number)、 a 為振幅 (amplitude)、 σ 為波頻率 (wave frequency) 以及 ν_T 為渦流黏滯係數 (eddy viscosity)。利用上述特徵尺度可以找出特徵速度 \mathfrak{D}_1 、 U 與 V 以及特徵壓力 P 為：

$$\mathfrak{D}_1 = \alpha\sigma a^2, \quad (3-2a)$$

$$U = \frac{u_*^2}{\alpha\nu_T}, \quad (3-2b)$$

(3-2c)

(3-2d)

對應到的無因次速度 U, u, v, w 可以表示為：

$$[(U(z, t) + u(y, z, t))\mathcal{U}, v(y, z, t)\mathcal{V}, w(y, z, t)\mathcal{V}]。 \quad (3-3)$$

此處 U 為風剪吹動造成之平均流速，只在水深方向有變化， (u, v, w) 為擾動且在沿流向上不考慮變化，同時因為主要作用力在沿流向上，因此無因次參數選取於沿流向與另外兩方向不同；模式中考慮平均溫度 $T(z)$ 呈線性變化，斜率為 $T'(z)$ 。

考慮此模型的無因次控制方程式為：

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = D_1 \nabla u - w D U \vec{i} + R i \theta \vec{k} - \nabla p + La \nabla^2 \vec{u}， \quad (3-4a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \theta = -w + La Pr^{-1} \nabla^2 \theta。 \quad (3-4b)$$

此處將速度的擾動表示成 $\vec{u} = (u, v, w)$ ，而 θ 為溫度的擾動，無因次方程式中理查森數（Richardson number, Ri ）、朗繆爾數（Langmuir number, La ）和普朗特數（Prandtl number, Pr ）分別為：

$$Ri = \frac{N^2}{(au_* \alpha)^2 \left(\frac{\sigma}{\nu_T}\right)}， \quad (3-5)$$

$$La = \frac{\alpha \nu_T}{au_*} \left(\frac{\nu_T}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}， \quad (3-6)$$

$$Pr = \frac{\nu_T}{\kappa_T}。 \quad (3-7)$$

此處 $N = \beta g T'(z)$ ， β 為熱膨脹係數， g 為重力， T' 為垂直溫度梯度， κ_T 為渦流擴散係數， ∇^2 為拉普拉斯運算子（Laplace operator）。

邊界條件在水面 $z = 0$ 時滿足：

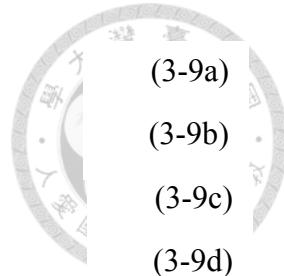
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0， \quad (3-8a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0， \quad (3-8b)$$

$$w = 0， \quad (3-8c)$$

$$\theta = 0； \quad (3-8d)$$

以及無窮水深處 $z \rightarrow -\infty$ 時滿足：



$$u = 0 , \quad (3-9a)$$

$$v = 0 , \quad (3-9b)$$

$$w = 0 , \quad (3-9c)$$

$$\theta = 0 . \quad (3-9d)$$

將方程式展開並作線性化近似可得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -wDU + La \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) , \quad (3-10a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_1 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + La \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) , \quad (3-10b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_1 \frac{\partial u}{\partial z} + Ri\theta - \frac{\partial p}{\partial z} + La \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) , \quad (3-10c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -w + LaPr^{-1} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) . \quad (3-10d)$$

其中 $D \equiv d/dz$ 。將 (\vec{u}, p, θ) 變數分離，對 y 方向以傅立葉級數展開，並令 z 方向為一未知函數，而時間方面令為指數函數：

$$u(y, z, t) = \hat{u}(z)e^{ily+\sigma t} , \quad (3-11a)$$

$$v(y, z, t) = \hat{v}(z)e^{ily+\sigma t} , \quad (3-11b)$$

$$w(y, z, t) = \hat{w}(z)e^{ily+\sigma t} , \quad (3-11c)$$

$$p(y, z, t) = \hat{p}(z)e^{ily+\sigma t} , \quad (3-11d)$$

$$\theta(y, z, t) = \hat{\theta}(z)e^{ily+\sigma t} . \quad (3-11e)$$

其中 l 為於 y 方向之波數，即單位波長內具有朗繆爾環流之個數，並代入方程式可使偏微分方程式轉為常微分方程式，其中將 $\partial v / \partial t$ 、 $\partial w / \partial t$ 兩式合併消除壓力項，並透過連續方程式將 \hat{v} 用 \hat{w} 取代可得：

$$\sigma \hat{u} = -\hat{w}DU + La(D^2 - l^2)\hat{u} , \quad (3-12a)$$

$$\sigma(D^2 - l^2)\hat{w} = l^2 \hat{u}DD_1 - l^2 Ri\hat{\theta} + La(D^2 - l^2)^2\hat{w} , \quad (3-12b)$$

$$\sigma \hat{\theta} = -\hat{w} + LaPr^{-1}(D^2 - l^2)\hat{\theta} . \quad (3-12c)$$

此時欲解未知函數 $(\hat{u}, \hat{w}, \hat{\theta})$ 以基底函數 (base-function) 展開，基底函數為契比雪夫多項式第一型式 (first kind of Chebyshev polynomials) 之線性組合，由於契比雪夫多項式之特性，其計算區間在 ± 1 之間，故須以座標轉換令 $\zeta = e^z$ ；再令 $x = 2\zeta - 1$ ，其中 $z = [-\infty, 0]$ 、 $\zeta = [0, 1]$ 和 $x = [-1, 1]$ ，在契比雪夫多項



式計算上須將 ζ 轉換成 x ，關於契比雪夫多項式於附錄二中詳述。而方程式則是以 ζ 為變數，因此水面為 $\zeta = 1$ 而無窮水深為 $\zeta = 0$ ，又 $(\hat{u}, \hat{w}, \hat{\theta})$ 可表示成：

$$\hat{u}(\zeta) = \sum_{n=1}^N A_n u_n(\zeta) , \quad (3-13a)$$

$$\hat{w}(\zeta) = \sum_{n=1}^N B_n w_n(\zeta) , \quad (3-13b)$$

$$\hat{\theta}(\zeta) = \sum_{n=1}^N C_n \theta_n(\zeta) . \quad (3-13c)$$

其中 N 為展開基底函數的個數， (u_n, w_n, θ_n) 為已知函數，由原本未知函數

$(\hat{u}, \hat{w}, \hat{\theta})$ 轉為求解未知係數 A_n 、 B_n 和 C_n 。而基底函數之組合型態為：

$$u_n(\zeta) = a_u T_{n-1}(\zeta) + b_u T_n(\zeta) + c_u T_{n+1}(\zeta) , \quad (3-14a)$$

$$w_n(\zeta) = a_w T_{n-1}(\zeta) + b_w T_n(\zeta) + c_w T_{n+1}(\zeta) + d_w T_{n+3}(\zeta) , \quad (3-14b)$$

$$\theta_n(\zeta) = a_\theta T_{n-1}(\zeta) + b_\theta T_n(\zeta) + c_\theta T_{n+1}(\zeta) . \quad (3-14c)$$

上式之契比雪夫多項式組合，其係數須滿足邊界條件，將前述之邊界條件座標轉換後，並利用連續方程式將 \hat{v} 用 \hat{w} 取代可得在水面 $\zeta = 1$ 時：

$$\left. \frac{\partial \hat{u}(\zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0 , \quad (3-15a)$$

$$\hat{w}(\zeta = 1) = 0 , \quad \left[\zeta^2 \frac{\partial^2 \hat{w}(\zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \hat{w}(\zeta)}{\partial \zeta} \right] \Big|_{\zeta=1} = 0 , \quad (3-15b)$$

$$\hat{\theta}(\zeta = 1) = 0 ; \quad (3-15c)$$

以及在無窮水深 $\zeta = 0$ 時：

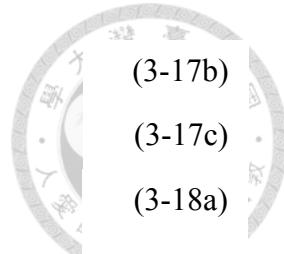
$$\hat{u}(\zeta = 0) = 0 , \quad (3-16a)$$

$$\hat{w}(\zeta = 0) = 0 , \quad (3-16b)$$

$$\hat{\theta}(\zeta = 0) = 0 . \quad (3-16c)$$

選取基底函數之契比雪夫多項式組合個數取決於邊界條件之數量加一，其目的為避免滿足邊界條件時之組合為無義解 (trivial solution)，即為係數皆為零，因此 w_n 為四個契比雪夫多項式之組合。透過上述之邊界條件聯立求解線性組合之係數為：

$$a_u(n) = 2n^2 + 2n + 1 , \quad (3-17a)$$



$$b_u(n) = 4n , \quad (3-17b)$$

$$c_u(n) = -2n^2 + 2n - 1 ; \quad (3-17c)$$

$$a_w = -1 , \quad (3-18a)$$

$$b_w = 0 , \quad (3-18b)$$

$$c_w(n) = \frac{8n^3 + 24n^2 + 58n + 42}{4n^3 + 24n^2 + 53n + 42} , \quad (3-18c)$$

$$d_w(n) = 1 - c_w(n) ; \quad (3-18d)$$

$$a_\theta = -1 , \quad (3-19a)$$

$$b_\theta = 0 , \quad (3-19b)$$

$$c_\theta = 1 . \quad (3-19c)$$

欲求解的方程式改寫為：

$$\sigma \sum_{n=1}^N A_n u_n(\zeta) = - \sum_{n=1}^N B_n w_n(\zeta) DU + La(M - l^2) \sum_{n=1}^N A_n u_n(\zeta) , \quad (3-20a)$$

$$\sigma(M - l^2) \sum_{n=1}^N B_n w_n(\zeta) = l^2 DD_1 \sum_{n=1}^N A_n u_n(\zeta) - l^2 Ri \hat{\theta} + La(M - l^2)^2 \sum_{n=1}^N B_n w_n(\zeta) , \quad (3-20b)$$

$$\sigma \sum_{n=1}^N C_n \theta_n(\zeta) = - \sum_{n=1}^N B_n w_n(\zeta) + LaPr^{-1}(M - l^2) \sum_{n=1}^N C_n \theta_n(\zeta) . \quad (3-20c)$$

其中運算子 M 為運算子 D^2 之座標轉換，定義為：

$$M \equiv \zeta \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{d}{d\zeta} \right) = \zeta^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d}{d\zeta} . \quad (3-21)$$

利用蓋勒肯方法 (Galerkin method) 將問題視為廣義特徵值問題 $\sigma[L]\{X\} = [R]\{X\}$ ，其中特徵值為 σ 而特徵向量為待解係數 A_n 、 B_n 和 C_n 構成。蓋勒肯方法是以函數內積的方式，如：

$$\langle \phi_n(z), \phi_m(z) \rangle = \int_{-1}^1 \phi_n(z) \phi_m(z) dz , \quad (3-22)$$

ϕ_n 代表 u_n 、 v_n 或 w_n ，將每條方程式拆解成 N 條，共 $3N$ 條方程式構成廣義特徵值問題， $[L]$ 與 $[R]$ 皆為 $3n \times 3n$ 之方陣， $\{X\}$ 為 $3n \times 1$ 特徵向量，如下表示：

$$\sigma[L]\{X\} = [R]\{X\} , \quad (3-23a)$$

$$[L] =$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_N \rangle & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_N, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_N, u_N \rangle & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle w_1, Mw_1 \rangle & \cdots & \langle w_1, Mw_N \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & -\langle w_1, l^2 w_1 \rangle & \cdots & -\langle w_1, l^2 w_N \rangle & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \langle w_N, Mw_1 \rangle & \cdots & \langle w_N, Mw_N \rangle & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\langle w_N, l^2 w_1 \rangle & \cdots & -\langle w_N, l^2 w_N \rangle & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \langle \theta_1, \theta_1 \rangle \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle \theta_N, \theta_1 \rangle \\ & & & & & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 & \langle \theta_1, \theta_N \rangle \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \langle \theta_N, \theta_N \rangle \end{array} \right] \quad (3-23b)$$

$$[R] =$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} La[\langle u_1, Mu_1 \rangle - \langle u_1, l^2 u_1 \rangle] & \cdots & La[\langle u_1, Mu_N \rangle - \langle u_1, l^2 u_N \rangle] & -DU\langle u_1, w_1 \rangle & \cdots & -DU\langle u_1, w_{N1} \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ La[\langle u_N, Mu_1 \rangle - \langle u_N, l^2 u_1 \rangle] & \cdots & La[\langle u_N, Mu_N \rangle - \langle u_N, l^2 u_N \rangle] & -DU\langle u_N, w_1 \rangle & \cdots & -DU\langle u_N, w_N \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ l^2 DD_1\langle w_1, u_1 \rangle & \cdots & l^2 DD_1\langle w_1, u_N \rangle & La[\langle w_1, Mw_1 \rangle - \langle w_1, l^2 w_1 \rangle]^2 & \cdots & La[\langle w_1, Mw_N \rangle - \langle w_1, l^2 w_N \rangle]^2 & -l^2 Ri\langle w_1, \theta_1 \rangle & \cdots & -l^2 Ri\langle w_1, \theta_N \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l^2 DD_1\langle w_N, u_1 \rangle & \cdots & l^2 DD_1\langle w_N, u_N \rangle & La[\langle w_N, Mw_1 \rangle - \langle w_N, l^2 w_1 \rangle]^2 & \cdots & La[\langle w_N, Mw_N \rangle - \langle w_N, l^2 w_N \rangle]^2 & -l^2 Ri\langle w_N, \theta_1 \rangle & \cdots & -l^2 Ri\langle w_N, \theta_N \rangle \\ 0 & \cdots & 0 & -\langle \theta_1, w_1 \rangle & \cdots & -\langle \theta_1, w_N \rangle & LaPr^{-1}[\langle \theta_1, M\theta_1 \rangle - \langle \theta_1, l^2 \theta_1 \rangle] & \cdots & LaPr^{-1}[\langle \theta_1, M\theta_N \rangle - \langle \theta_1, l^2 \theta_N \rangle] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\langle \theta_N, w_1 \rangle & \cdots & -\langle \theta_N, w_N \rangle & LaPr^{-1}[\langle \theta_N, M\theta_1 \rangle - \langle \theta_N, l^2 \theta_1 \rangle] & \cdots & LaPr^{-1}[\langle \theta_N, M\theta_N \rangle - \langle \theta_N, l^2 \theta_N \rangle] \end{array} \right] \quad (3-23c)$$

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{array} \right\}_{3N \times 1} \circ \quad (3-23d)$$

可計算出數個特徵值，將最大之特徵值 σ_{max} 表示成 $\sigma_{max} = \sigma_R + i\sigma_I$ ，對於虛數部分可視為隨時間震盪項 $e^{i\sigma_I t}$ ，而實數部分若大於零則 $e^{\sigma_R t}$ 項將隨時間遞增，整個系統屬不安定，反之則為安定。



3.2 結果與討論

進行穩定性分析時需先設定參數。由於本研究之溫度為被動追蹤參數，故使 $Pr \rightarrow \infty$ 及 $Ri \rightarrow 0$ 。根據二階 $O(a^2\alpha^2)$ 之波浪勢流理論中，不存在尤拉平均流 (mean Eulerian current)，但存在拉格朗日平均漂送 (mean Lagrangian drift)，即前述之史托克斯漂送，為一水深之函數，其無因次化為：

$$D_1(z) = e^{2z}。 \quad (3-24)$$

然而 Longuet-Higgins [21] 提出於波浪自由液面下存在一層薄邊界層，而於邊界層之邊緣具有二階平均剪力：

$$\tau = 2\mu a^2 k^2 \sigma。 \quad (3-25)$$

近似剪力作用於水面上，故隨著時間發展，無因次化垂直向平均速度梯度可表示為：

$$\frac{dU}{dz} = 1。 \quad (3-26)$$

模態個數 N 之設定會影響計算結果，故針對不同模態數進行收斂性測試。

表 3-1 為於 $l = 0.1$ ，對應 $La^{-1} = 100, 1000, 10000$ 時之計算結果，可以發現隨著模態個數增加，最大特徵值之實部仍未趨近於一定值，故不收斂。表 3-2 為於 $l = 0.5$ ，對應 $La^{-1} = 100, 1000, 10000$ 時之計算結果，隨著模態個數增加，最大特徵值之實部雖未趨近於一定值，但收斂性較表 3-1 好。表 3-3 為於 $l = 5$ ，對應 $La^{-1} = 100, 1000, 10000$ 時之計算結果，可以發現於 $N = 15$ 時已達到收斂。表 3-4 為於 $l = 10$ ，對應 $La^{-1} = 100, 1000, 10000$ 時之計算結果，約於 $N = 10$ 時已達到收斂。由此可知當 l 或 La^{-1} 越小時收斂性較差，而 l 之影響較 La^{-1} 大，尤當 $l < 1$ 時皆無法達到收斂，然而本研究著重之區域不在此，故不受影響，並選定 $N = 25$ 作為計算時之模態個數。

由決定上述之參數後，針對不同 La^{-1} 與 l 計算最大特徵值之實部，即增長率 σ_R 之分布圖，其中 La^{-1} 範圍從 1 至 5×10^4 ，而 l 則從 0.1 至 70。其結果如圖 3-1(a) 為增長率之等高線圖，以細黑虛線表示並標示其值，粗黑虛線為 $\sigma_R = 0$ 之連線，即由此線劃分兩區域，左側為 $\sigma_R < 0$ 則流場屬於穩定狀態，右側為 $\sigma_R > 0$ 則流場屬於不穩定狀態。粗黑實線為固定 La^{-1} 時，增長率最大值之連線，所對應之 l 即為最不穩定之模態，換言之，代表流場中主要朗繆



爾環流之個數。細黑虛線為增長率之等值線，可知固定 l 時，增長率隨 La^{-1} 變大而隨之上升，而固定 La^{-1} 時，增長率隨著 l 變大而將先遞增而後遞減。

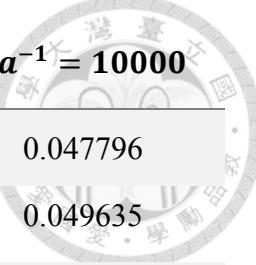
圖 3-1(b) 為穩定性分析與數值模擬之比較，粗黑實線與粗黑虛線與上述相同，細黑虛線為固定 La^{-1} 下，增長率最大值之百分比連線，黑實點為本研究之數值模擬的對應點，由左至右分別為波長為 7.5、15 與 20cm。由式 3-25 可知磨擦速度為

$$u_* = \sqrt{\frac{1}{\rho} 2\mu a^2 \alpha^2 \sigma}, \quad (3-27)$$

因此改寫式 3-6 為

$$La = \frac{\nu}{(aa)^2 \sqrt{2g}} \alpha^{\frac{3}{2}}, \quad (3-28)$$

故可找到與相對應波長之 La^{-1} 。另透過 2.3 節溫度沿流向平均之結果，可以計算出本研究之數值模擬資料所對應之 l 值，其條痕數會隨時間雖稍有不同，其個數於波長 7.5、15 與 20cm 分別約為 13、14 與 16 條，而跨流向之區間為 2λ ，故 l 約為 6.5、7 與 8。由圖可知，數值模擬資料之分布與穩定性分析之結果相似，而此差異約落在增長率最大值之 97%。由於波長越長所激發之不穩定模態越多，使數值模擬之條痕數目與穩定性分析之結果而有所差異，然而此二者之結果仍大致符合。因此由上述可推論數值模擬資料中，成對沿流向結構為透過 CL2 機制所形成之朗繆爾環流。

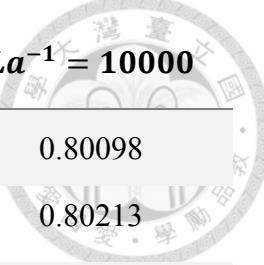


$l = 0.1$	$La^{-1} = 100$	$La^{-1} = 1000$	$La^{-1} = 10000$
$N = 5$	0.037577	0.046272	0.047796
$N = 10$	0.040467	0.048162	0.049635
$N = 15$	0.044305	0.049712	0.050824
$N = 25$	0.046059	0.050792	0.051806
$N = 50$	0.046840	0.051674	0.052738

表 3-1：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 0.1$ 時，對應 $La^{-1} = 100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σ_R 之收斂性測試。

$l = 0.5$	$La^{-1} = 100$	$La^{-1} = 1000$	$La^{-1} = 10000$
$N = 5$	0.20201	0.21708	0.21935
$N = 10$	0.20563	0.22009	0.22234
$N = 15$	0.20859	0.22165	0.22367
$N = 25$	0.20956	0.22236	0.22433
$N = 50$	0.20979	0.22267	0.22467

表 3-2：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 0.5$ 時，對應 $La^{-1} = 100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σ_R 之收斂性測試。



$l = 5$	$La^{-1} = 100$	$La^{-1} = 1000$	$La^{-1} = 10000$
$N = 5$	0.47052	0.76734	0.80098
$N = 10$	0.47050	0.76761	0.80213
$N = 15$	0.47053	0.76758	0.80207
$N = 25$	0.47053	0.76758	0.80207
$N = 50$	0.47053	0.76758	0.80207

表 3-3：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 5$ 時，對應 $La^{-1} =$

$100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σ_R 之收斂性測試。

$l = 10$	$La^{-1} = 100$	$La^{-1} = 1000$	$La^{-1} = 10000$
$N = 5$	Stable	0.846290	0.95468
$N = 10$	Stable	0.849800	0.96363
$N = 15$	Stable	0.849800	0.96364
$N = 25$	Stable	0.849800	0.96364
$N = 50$	Stable	0.849800	0.96364

表 3-4：針對模態數 $N = 5, 10, 15, 25, 50$ 於 $l = 10$ 時，對應 $La^{-1} =$

$100, 1000, 10000$ 時，最大特徵值之實部 σ_R 之收斂性測試。

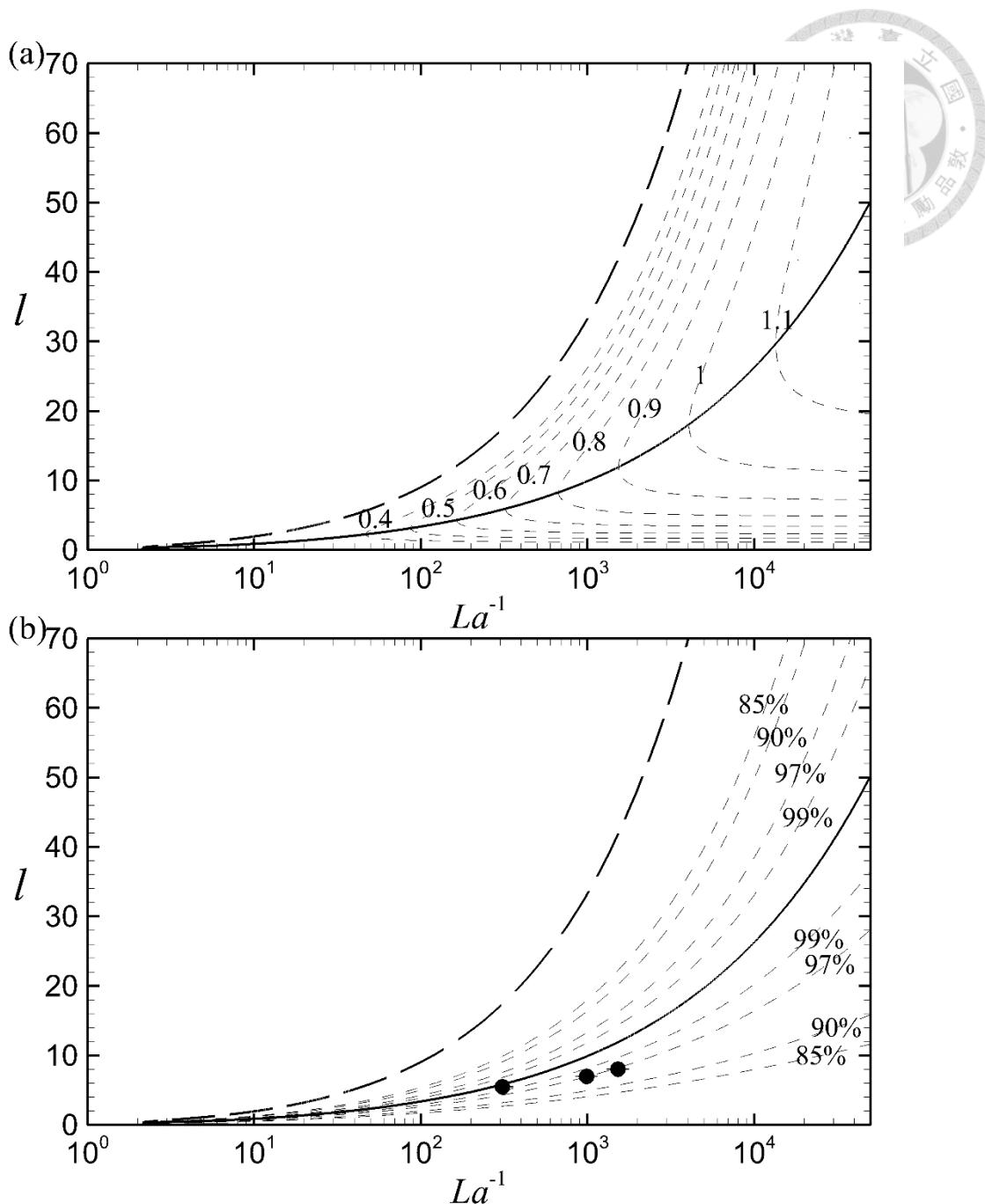


圖 3-1：穩定性分析之增長率 σ_R 分布圖，橫軸為 La^{-1} ，縱軸為 l 。圖 a 為增長率之等高線圖，以細黑虛線表示並標示其值，粗黑實線為固定 La^{-1} 下，增長率最大值之連線，粗黑虛線為增長率為零之連線。圖 b 為穩定性分析與數值模擬之比較，實點為數值模擬之對應點，細虛線為固定 La^{-1} 下，增長率最大值之百分比連線。

第四章、結論



本研究以前人對於牆面紊流邊界層之研究方法，應用於未破碎波浪之自由液面紊流邊界層，分析水下流場之相關紊流結構（coherent turbulent structure）特性。不論是渦度之沿流向平均或是渦旋結構辨識之結果，皆一致指出水下存在成對之沿流向渦旋，其渦旋旋轉方向相反，使水面之流體匯聚，水下之流體發散，進而形成低溫快速條痕。

藉由渦度方向角度分析，可知主要渦度之水平方向趨近於 $\pm x$ 軸，但與水平面有一夾角，約 30° 至 40° 及 -150° 至 -140° ，且隨水深逐漸變小。使用渦旋結構辨識時，以速度擾動進行辨識，能清楚呈現水面下之結構，且四種準則間之結果一致，其結果指出水面下存在沿流向成對之渦旋結構，但以速度進行辨識則無法完整呈現。比較不同時間點之差異，於 $t = 5T_0$ 時，紊流結構多發生於波背處，其結構多為成對出現，且方向朝沿流向而與水平面有一夾角，符合渦度方向角度分析之結果。隨著時間發展，紊流結構朝沿流向延伸而不間斷，且隨波浪而彎曲。與渦度擾動分布進行比較，可以發現結構辨識之結果為沿流向與垂直向擾動渦度所構成，其中主要為沿流向渦度擾動之結構。

透過渦度傳輸方程式可說明前述之現象，沿流向渦度於波背處會隨時間而變大，而於波前處渦度會變小，然而依整體趨勢來說，波背之增強效應大過於波前之減弱效應，故紊流結構會隨著時間變大，而使結構逐漸朝沿流向延伸。

透過條件平均法於流場中擷取出紊流結構，亦能映證結構辨識結果，其具有成對之沿流向結構，且 QD-4 與本研究之取樣條件之結果皆一致。而於流場發展較早時間點之結果顯示，該結構與逆髮夾型渦旋（inverse hairpin vortex）相似，然而由於流場尚未穩定，無法判斷該結構為流場發展而成，或是模擬剛開始所置入之均勻雜訊擾動所影響。

對於不同波長之流場結構分析，結果顯示其相關紊流結構特性大致相同，不受波長改變而影響，而較長之波長在單位波長內之條痕數較多，流場也顯得較為紊亂，結構較不清晰明顯。

藉由 Craik 與 Leibovich 等人針對風剪驅動波浪表面提出之理論進行穩定性分析，由於本研究之數值模擬為未破碎波浪之自由液面邊界層，而無風剪之作用



利，然而 Longuet-Higgins [21] 提出於波浪之自由液面邊界層中仍具有剪力，可將其視為模擬中之剪力作用，故可應用 Craik 與 Leibovich 等人之理論進行穩定性分析，本研究之數值模擬資料符合穩定性分析之預測結果，故可說明流場中存在之成對沿流向紊流結構即為不穩定模態所產生之朗繆爾環流（langmuir circulation），並因此影響水面上溫度與沿流向速度分布，形成低溫高速條痕結構。

參考文獻



- [1] M. Head and P. Bandyopadhyay, "New aspects of turbulent boundary-layer structure," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 107, pp. 297-338, 1981.
- [2] S. K. Robinson, "Coherent motions in the turbulent boundary layer," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 23, pp. 601-639, 1991.
- [3] S. Kline, W. Reynolds, F. Schraub, and P. Runstadler, "The structure of turbulent boundary layers," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 30, pp. 741-773, 1967.
- [4] T. Theodorsen, "Mechanism of turbulence," in *Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics*, 1952.
- [5] C. Smith, "A synthesized model of the near-wall behavior in turbulent boundary layers," DTIC Document 1984.
- [6] P. Moin and J. Kim, "The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part 1. Analysis of instantaneous fields and statistical correlations," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 155, pp. 441-464, 1985.
- [7] R. Blackwelder and R. Kaplan, "On the wall structure of the turbulent boundary layer," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 76, pp. 89-112, 1976.
- [8] J. Kim and P. Moin, "The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part 2. Study of ensemble-averaged fields," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 162, pp. 339-363, 1986.
- [9] J. C. Hunt, A. Wray, and P. Moin, "Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows," 1988.
- [10] M. Chong, A. E. Perry, and B. Cantwell, "A general classification of three-dimensional flow fields," *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, vol. 2, pp. 765-777, 1990.
- [11] J. Jeong and F. Hussain, "On the identification of a vortex," *Journal of fluid mechanics*, vol. 285, pp. 69-94, 1995.
- [12] J. Zhou, R. J. Adrian, S. Balachandar, and T. Kendall, "Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 387, pp. 353-396, 1999.
- [13] W.-t. Tsai, S.-m. Chen, and G.-h. Lu, "Numerical evidence of turbulence generated by nonbreaking surface waves," *Journal of Physical Oceanography*, vol. 45, pp. 174-180, 2015.
- [14] S. Leibovich, "The form and dynamics of Langmuir circulations," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 15, pp. 391-427, 1983.
- [15] S. Leibovich and S. Paolucci, "The instability of the ocean to Langmuir circulations," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 102, pp. 141-167, 1981.
- [16] A. Craik, "The generation of Langmuir circulations by an instability mechanism," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 81, pp. 209-223, 1977.
- [17] S. Thorpe, "Langmuir circulation," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 36, pp. 55-79, 2004.
- [18] H. J. Ligt, "Vortex flow in nature and technology," *New York, Wiley-Interscience, 1983, 305 p. Translation.*, vol. 1, 1983.
- [19] J. Kim, "On the structure of wall-bounded turbulent flows," 1983.
- [20] W. Phillips, "On an instability to Langmuir circulations and the role of Prandtl and Richardson numbers," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 442, pp. 335-358, 2001.

- [21] M. S. Longuet-Higgins, "Mass transport in water waves," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 245, pp. 535-581, 1953.
- [22] E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*: John Wiley & Sons, 2010.



附錄一 相平面法



考慮二維常微分線性系統

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}] \mathbf{x}(t), \quad (\text{A1-1})$$

其中 $\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$, $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 。對此線性系統之通解可表示為

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{V}_1 e^{\sigma_1 t} + c_2 \mathbf{V}_2 e^{\sigma_2 t}, \quad (\text{A1-2})$$

其中 c_1 與 c_2 為常數, \mathbf{V}_1 與 \mathbf{V}_2 為 $[\mathbf{A}]$ 之特徵向量, σ_1 與 σ_2 為 $[\mathbf{A}]$ 之特徵值。當 $P(x, y) = (0, 0)$ 時, 式 A1-3 趨近於 $0/0$, 則 P 即為臨界點 (critical point), 而臨界點具有五種類型, 並可對應不同之相平面 (phase plane)。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \quad (\text{A1-3})$$

1. 當 $\sigma_1 = \sigma_2$ 且 $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{V}_2$ 時為真節點 (proper node), 其相平面如圖 A1-1, 其軌跡為自臨界點輻射出去, 或是匯聚於臨界點, 且每條軌跡具固定之方相。
2. 當 $\sigma_1 = \sigma_2$ 且 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$ 時為偽節點 (improper node), 其相平面如圖 A1-2, 其軌跡亦自臨界點輻射出去, 或是匯聚於臨界點, 然而除了四條軌跡之外, 其他條軌跡僅在臨界點之方向為特徵向量之方向。
3. 當 $\sigma_1 = -\sigma_2$ 時為鞍點 (saddle node), 其相平面如圖 A1-3, 僅有兩條軌跡射入臨界點, 兩條自臨界點射出。,
4. 當 σ_1 與 σ_2 為複數且實部不為零時為螺旋點 (spiral point), 其相平面如圖 A1-4, 軌跡皆為螺旋形且匯聚或發散於臨界點。
5. 當 σ_1 與 σ_2 為複數且實部為零時為中心點 (center), 其相平面如圖 A1-5, 軌跡皆為圓或橢圓形且不通過臨界點。

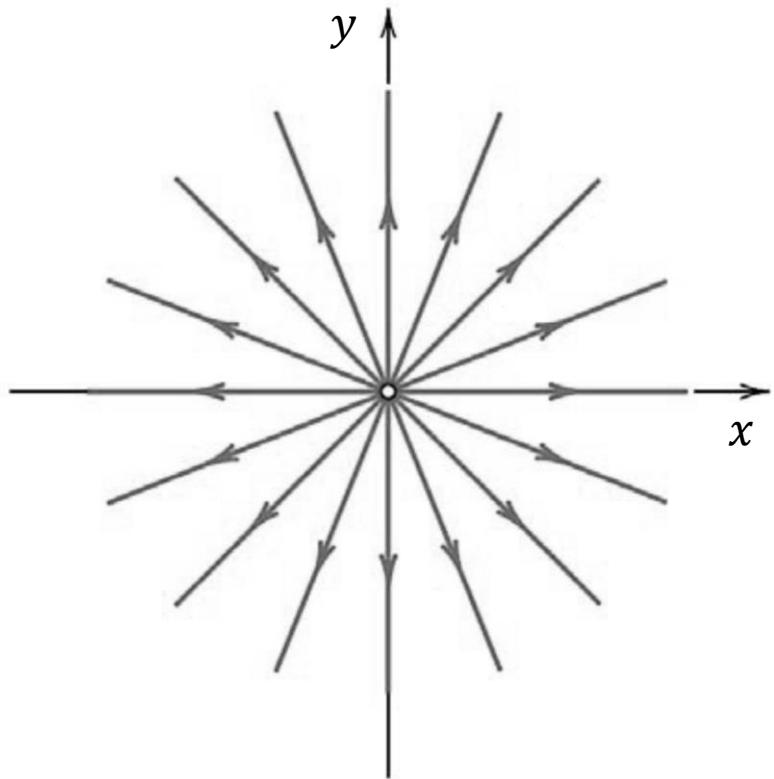


圖 A1-1：為真節點之相平面示意圖。[22]

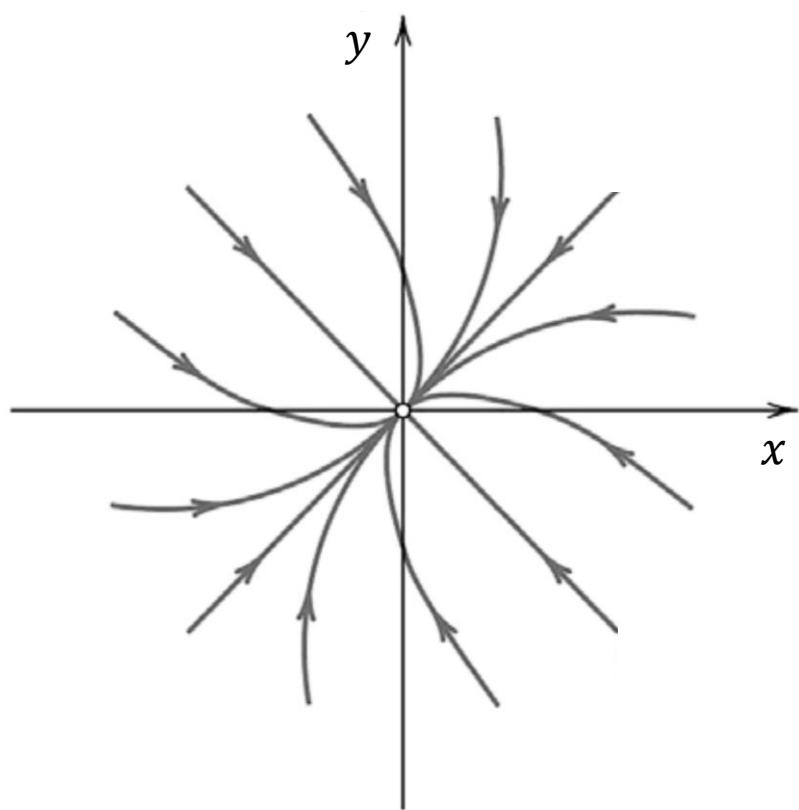


圖 A1-2：為偽節點之相平面示意圖。[22]

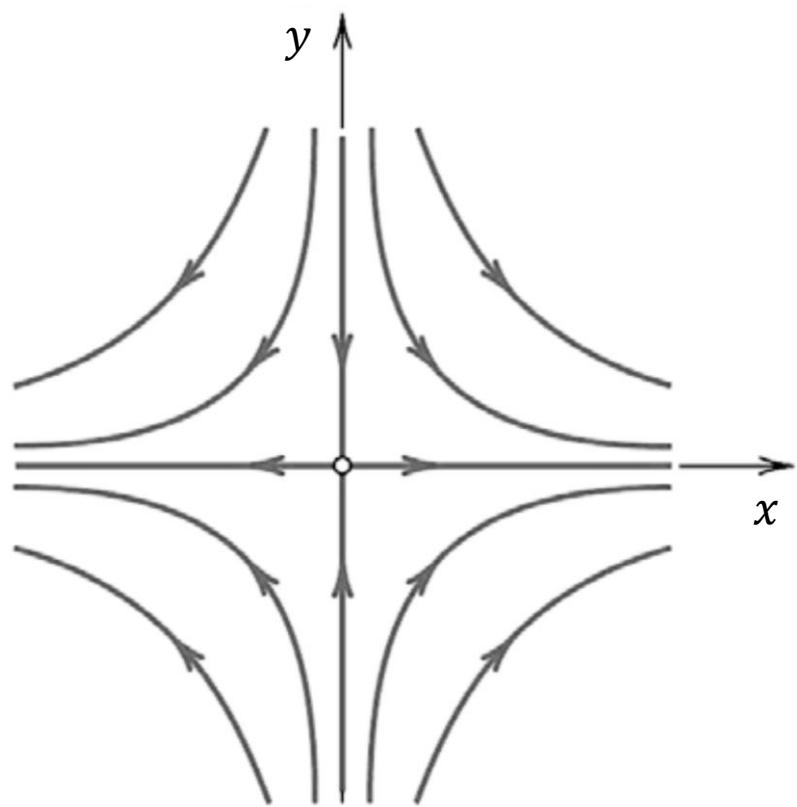


圖 A1-3：為鞍點之相平面示意圖。[22]

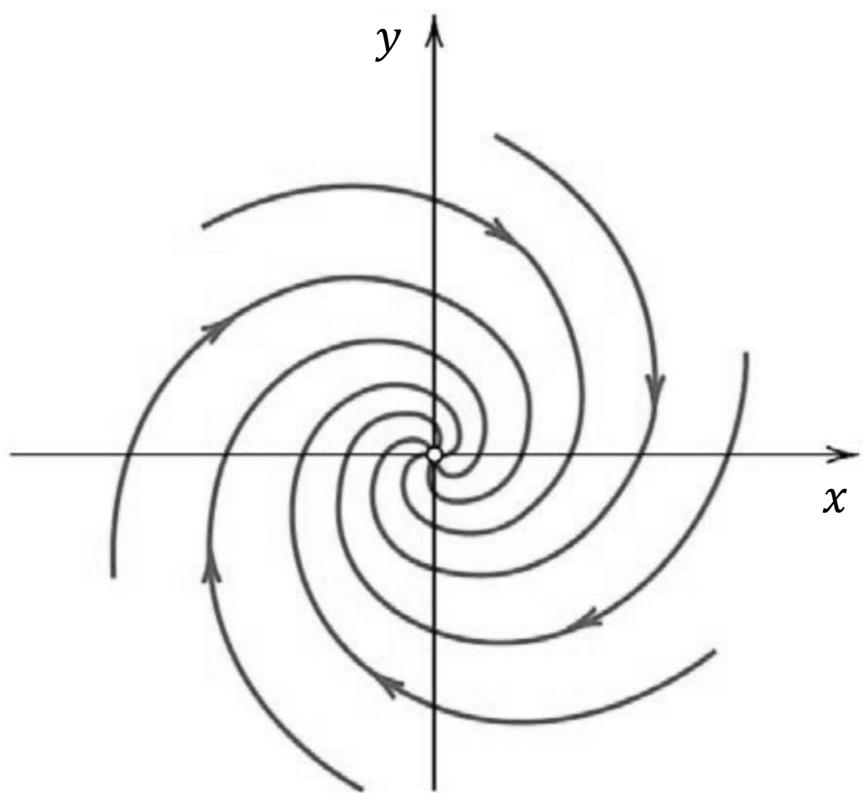


圖 A1-4：為螺旋點之相平面示意圖。[22]

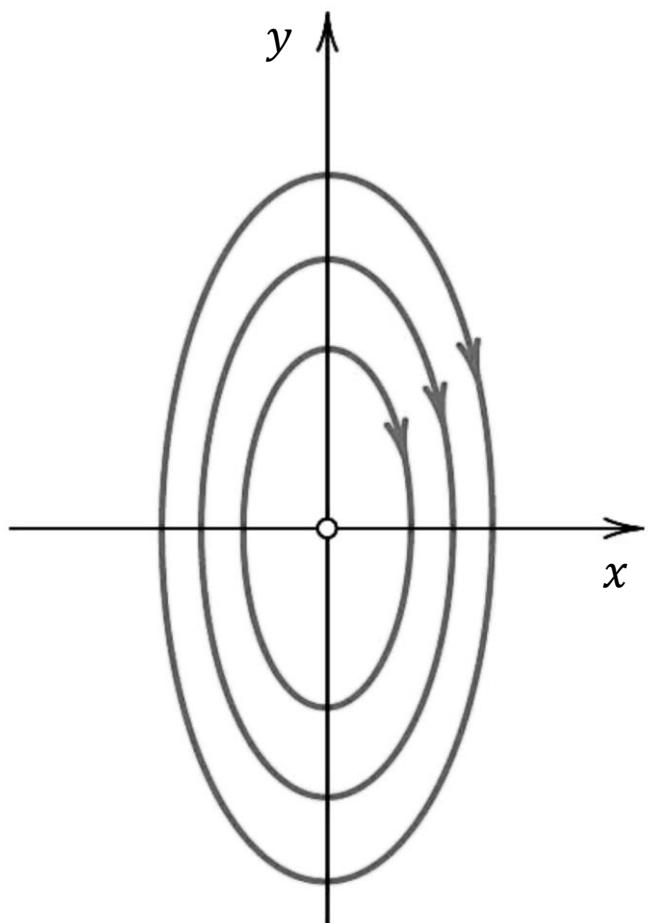


圖 A1-5：為中心點之相平面示意圖。[22]

附錄二 契比雪夫多項式



考慮 Sturm-Liouville 問題中契比雪夫微分方程：

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 , \quad (\text{A2-1})$$

其中 $y = y(x)$ ， n 為任意不為負之整數，因為方程式是二階常微分方程式故有二解，其為契比雪夫多項式第一型式與第二型式（Chebyshev polynomials first kind and second kind）。

使用變數轉換解此問題，首先令 $x = \cos\theta$ ，並對此式微分得：

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta} , \quad (\text{A2-2})$$

進而將一階與二階導數以鏈鎖法則（chain rule）作變數轉換而得：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{dy}{d\theta} , \quad (\text{A2-3a})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{dy}{d\theta} \right) . \quad (\text{A2-3b})$$

將式 A2-3 代入式 A2-1，並以變數 θ 表示而得：

$$(1-\cos^2\theta) \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{dy}{d\theta} \right) - \cos\theta \left(-\frac{1}{\sin\theta} \frac{dy}{d\theta} \right) + n^2 y = 0 , \quad (\text{A2-4})$$

或化簡為

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2 y = 0 , \quad (\text{A2-5})$$

其中 $y = y(\theta)$ 。因此式 A2-5 之解為

$$y(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta , \quad (\text{A2-6a})$$

或

$$y(x) = c_1 \cos(n \cos^{-1} x) + c_2 \sqrt{1-x^2} \frac{\sin(n \cos^{-1} x)}{\sin(\cos^{-1}(x))} , \quad (\text{A2-6b})$$

其中 c_1 與 c_2 為任意之常數。令契比雪夫多項式第一型式為

$$T_n(x) = \cos[n \cos^{-1}(x)] , \quad (\text{A2-7})$$

而契比雪夫多項式第二型式為



$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin[n \cos^{-1}(x)]}{\sin[\cos^{-1}(x)]} , \quad (\text{A2-8})$$

其中 $x \in [-1, 1]$ 。

契比雪夫多項式具有正交性，函數內積範圍從 -1 到 1 之間，

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)W_T dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{if } n = m = 0 \end{cases} , \quad (\text{A2-9})$$

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)W_U dx = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } n = m \end{cases} . \quad (\text{A2-10})$$

其函數內積之權重分別為

$$W_T = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad (\text{A2-11})$$

$$W_U = \sqrt{1-x^2} . \quad (\text{A2-12})$$

第一型式之正交性可由 cosine 函數之正交性以變數轉換 $x = \cos \theta$ 而得

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{if } n = m = 0 \end{cases} , \quad (\text{A2-13})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \int_1^{-1} \cos(n \cos^{-1} x) \cos(m \cos^{-1} x) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} , \end{aligned} \quad (\text{A2-14})$$

而第二型式之正交性則透過 sine 函數之正交性而得

$$\int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } n = m \end{cases} . \quad (\text{A2-15})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta &= \int_0^\pi U_{n-1}(\theta)U_{m-1}(\theta)(-\sin \theta)(-\sin \theta d\theta) \\ &= \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2} dx . \end{aligned} \quad (\text{A2-16})$$