

國立交通大學土木工程研究所
碩士學位論文

雷諾數對三維頂部驅動矩形槽中渦旋結構的影響
Effect of Reynolds Number on the Vortical Structures
in a Three-Dimensional, Lid-Driven Cavity Flow

研究生：陳盈良

指導教授：蔡武廷

中華民國九十一年七月

誌 謝

本文於研究期間，承蒙指導教授蔡武廷老師的悉心教誨，日夜不懈的督導與不厭其煩的指正，方始本文得以順利完成，學生在此向敬愛的老師致上我最誠摯的謝意。

而整個環境物理實驗室的成員，我也要向你們說聲：謝謝你們。沒有你們的幫助，我的論文修改也不會如此順利。嫩音、立萍學姐，以及小鈺、世明、孟剛與國輝學弟妹們，感謝你們犧牲睡眠幫我做論文的訂正，並提出建議，使得本論文可以更加趨於完善。至於我的同窗戰友-阿東，我也不會忘記你在我失意的時後鼓勵我，並且在我課業研究上與我互相切磋與提攜，甚至於當我在研究陷入瓶頸時，及時點醒我的錯誤，讓我得以突破困境，順利完成研究。還有東霖學長謝謝你不嫌惡我對你的打擾，總是詳細地回答我提出的問題。另外我的室友志偉、彬晟，多謝你們美妙的吉他琴聲，將我低落的心情暫時地撫平，讓我可以再一次好好地把思緒整理好，再度面對研究的進行。而也要多虧你們和東霖學長讓我養成了跑步的習慣，使得我擁有更健康的身心來完成學業。而威智學弟，也要謝謝你幫我們提水、打掃實驗室，讓我們可以專心於研究。

當然最後我更要感謝我的父母與家人，沒有你們的支持與關心，將沒有今天的我，你們是我最大的後盾，讓我得以安心的完成我想要做的事情。在此，謹將本文獻給我最敬愛的父母、師長以及所有關愛我與我關愛的人。

Abstract

The purpose of the present research is to investigate the effect of Reynolds number on the vortical structure in a three-dimensional cavity. This cavity flow is incompressible and it is stationary in the beginning. The primitive velocities and pressure in a set of incompressible continuity and Navier-Stokes equations are solved using the finite difference method. The velocity boundary conditions are no-slip and the pressure satisfies the Neumann boundary condition. By numerical computations, the plots of velocity vector, vorticity iso-line and vorticity iso-surface are illustrated. Then the effect of Reynolds number on the vortical structure variations and wavy disturbances in the spanwise direction are shown through these plots. The results of this study reveal that raising of the Reynolds number makes two-dimensional vortical structure will evolve into three-dimensional structure. As the Reynolds number reaches 1300, the three-dimensional vortical structure starts to exist obviously in the flow field. This flow is not a steady motion, and it will continue to become a turbulence flow with the increase of Reynolds numbers.

摘要

本研究探討一初始為靜止之三維矩形槽，受突起之頂部驅動速度而形成之不可壓縮流場，其雷諾數對此流場渦漩結構之影響。利用數值解析連續方程式與 Navier-Stokes 方程組，滿足速度無滑移邊界條件與壓力 Neumann 型邊界條件，以求得三維頂部驅動矩形槽流場之速度項與壓力項。再由所推求出之速度項與壓力項，計算流場之渦度場，而藉由上述所得之數值計算結果，繪出流場之速度向量圖、渦度等值線圖與渦度等值面圖。並進一步由所繪出之圖，探討流場運動中雷諾數對於渦漩結構變化之影響；以及觀察渦漩結構產生變化後，對於流場運動所產生之擾動現象。研究結果顯示：此流場之渦漩結構會隨著流場雷諾數的不同，而明顯的由二維渦漩結構演化成三維特有之渦漩結構。且於 $Re=1300$ 後，此三維渦漩結構始有明顯存在於流場中，並演變為持續發展之流場特徵，而非穩態之流場運動。此三維渦漩結構的產生，也同時為流場帶來不穩定的影響，而使得流場發生具有波浪形擾動之特徵，並隨著雷諾數的增大，此不穩定現象更加劇烈地出現於流場中。

目 錄

誌謝	i
中文摘要	ii
英文摘要	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	ix
符號表	x
壹、 緒論	1
1-1 研究動機與目的	1
1-2 相關研究回顧	3
1-3 本文架構	5
貳、 控制方程式與邊界條件	6
2-1 流場之控制方程式	6
2-1-1 原始變數方程式	6
2-1-2 方程式的無因次化	7
2-2 邊界條件	9

參、 數值方法	13
3-1 交錯網格系統	13
3-2 控制方程式的離散	15
3-3 邊界條件的離散	19
肆、 數值模擬結果與討論	32
4-1 數值模擬條件之簡述	32
4-2 他人研究結果之比較	33
4-3 不同雷諾數下之流場渦漩結構變化觀察與分析	41
4-3-1 雷諾數對於對稱面 ACFE 流場變化之影響	41
4-3-2 雷諾數對於 TGL-渦漩結構之影響與變化觀察	42
4-4 TGL-渦漩對於上、下游流場在展長方向擾動的觀察	56
伍、 結論與未來展望	65
參考資料	68
附錄一、壓力的 Poisson 方程式所構成之稀疏矩陣	70

圖目錄

圖 2-1：頂部驅動三維矩形槽流場之幾何示意圖	11
圖 2-2：三維矩形槽之幾何邊界示意圖	12
圖 3-1：流場變數置放於三維交錯網格之示意圖	24
圖 3-2：流場變數置放於二維交錯網格之空間示意圖($x-z$)平面	25
圖 3-3：流場變數置放於二維交錯網格之空間示意圖($x-y$)平面	26
圖 3-4：流場變數置放於二維交錯網格之空間示意圖($y-z$)平面	27
圖 3-5：壓力交錯網格系統之示意圖	28
圖 3-6：速度 u 之交錯網格系統示意圖	29
圖 3-7：速度 v 之交錯網格系統示意圖	30
圖 3-8：速度 w 之交錯網格系統示意圖	31
圖 4-1： $Re=100$ 時， $y=1.5$ 處 $x-z$ 剖面的 $u-w$ 速度分佈圖(二維)	35
圖 4-2： $Re=400$ 時， $y=1.5$ 處 $x-z$ 剖面的 $u-w$ 速度分佈圖(二維)	36
圖 4-3： $Re=1000$ 時， $y=1.5$ 處 $x-z$ 剖面的 $u-w$ 速度分佈圖(二維)	37
圖 4-4： $Re=1000$ 時， $y=1.5$ 處 $x-z$ 剖面的 $u-w$ 速度分佈圖(寬展長之比為 1:1:1)	38
圖 4-5 (a)： $Re=100$ 時， $y=1.5$ 處 $x-z$ 剖面的 $u-w$ 速度分佈圖(寬展長之比為 1:3:1)	39
圖 4-5 (b)： $Re=400$ 時， $y=1.5$ 處 $x-z$ 剖面的 $u-w$ 速度分佈圖(寬展長之比為 1:3:1)	

.....	39
圖 4-5 (c) : $Re=1000$ 時, $y=1.5$ 處 $x-z$ 剖面的 $u-w$ 速度分佈圖(寬展長之比為 1:3:1)	
.....	40
圖 4-6: 三維頂部驅動矩形槽 $x-z$ 剖面之流場示意圖	45
圖 4-7: 三維頂部驅動矩形槽 $y-z$ 剖面所產生之 TGL-渦漩流場示意圖	46
圖 4-8 : 三維頂部驅動矩形槽 $x-z$ 剖面 ω_z 之等值線圖與 $u-w$ 速度向量圖所產生之 TGL-渦漩流場示意圖($Re=100$ 、 400)	47
圖 4-9 : 三維頂部驅動矩形槽 $x-z$ 剖面 ω_z 之等值線圖與 $u-w$ 速度向量圖所產生之 TGL-渦漩流場示意圖($Re=1000$ 、 1300 、 1500)	48
圖 4-10 : 在不同雷諾數下, 主渦漩中心位置於 ACFE 面之分佈圖	49
圖 4-11 : ω_{xz} 之等值面圖(1)	50
圖 4-12 : ω_{xz} 之等值面圖(2)	51
圖 4-13 : 當 $x = 0.528$ 時, $y-z$ 剖面之速度向量圖	52
圖 4-14 : 當 $x = 0.528$ 時, $y-z$ 剖面之 ω_x 等位線圖	53
圖 4-15 : 當 $z = 0.5$ 時, $x-y$ 剖面之速度向量圖	54
圖 4-16 : 當 $z = 0.5$ 時, $x-y$ 剖面之 ω_z 等位線圖	55
圖 4-17 : 當 $Re=400$ 時, $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 $u-v$ 速度向量圖	57
圖 4-18 : 當 $Re=1000$ 時, $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 $u-v$ 速度向量圖	58
圖 4-19 : 當 $Re=1300$ 時, $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 $u-v$ 速度向量圖	59
圖 4-20 : 當 $Re=1500$ 時, $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 $u-v$ 速度向量圖	60
圖 4-21 : 當 $Re=400$ 時, $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 ω_y 等值線圖	61

圖 4-22：當 $Re=1000$ 時， $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 ω_y 等值線圖·····62

圖 4-23：當 $Re=1300$ 時， $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 ω_y 等值線圖·····63

圖 4-24：當 $Re=1500$ 時， $x-y$ 剖面於 $z = 0.0556$ 之 ω_y 等值線圖·····64

表 目 錄

表 4-1：在不同雷諾數下主渦漩之(x,z)座標·····45

符 號 表

希臘字母

Δ	格點間距
μ	流體之動力黏滯係數
ρ	流體密度
ω	流場渦度

英文字母

B	三維矩形槽之寬
D	三維矩形槽之深
L	三維矩形槽之展長
LK	z 方向之格點區間數
MI	x 方向之格點區間數
NJ	y 方向之格點區間數
P	壓力
Re	雷諾數
t	時間
U_0	特徵速度
u	x 方向之速度
v	y 方向之速度
w	z 方向之速度

壹、緒論

1-1 研究動機與目的

本文針對一三維矩型槽中之流場，進行流場運動之數值模擬，以探討流場之渦漩結構。矩形槽的四個邊牆與底部為不動之固體邊界，唯其頂部(lid)為一流體邊界，在初始時整個矩形槽的流場為靜止，而頂部之流體邊界突然存在一驅動速度，成為此流場之驅動力，而開始造成流場運動。此類問題我們稱之為頂部驅動矩形槽流(lid-driven cavity flow)，本文將以 LDC 簡稱之。

三維頂部驅動矩形槽中之流場，在 60 年代中期以後，即被廣泛的研究探討，所以截至目前為止，其研究的文獻相當豐富。LDC 流場之研究，初期時著重於二維流場問題，此乃因該類問題的幾何諸元較其他問題簡單，例如不需將座標轉換，便可以做數值模擬運算，即物理與數值計算邊界皆可以放在同一網格系統上來求解，所以可以當成一測試數值模擬的範例(prototype)，以用來驗證其數值方法的正確性，進而求解更複雜的流場。隨著後來更多有關 LDC 的研究出現，以及電腦計算硬體的快速發展，人們始有能力模擬三維的 LDC 流場，並且發現其流場特性與二維的流場並不盡相同。依目前的研究文獻中，其最大的差別乃是二維的流場有穩態(steady state)存在，而三維流場為不斷變動之不穩態流場。同時在三維的流場中，有許多屬於三維流場才存在的渦流特徵，這些是二維流場中所不存在的。因此近年來有關 LDC 流場的研究，著重於三維渦流場的特徵與其發生機制的探討。本研究主要之目的，乃是探討雷諾數對於 LDC 流場中三維渦漩結構的影響，其重點為不同雷諾數下的三維流場演化以及其差異性。

有關 LDC 流場的研究，其目的不只局限於驗證數值方法的正確性，或是探討流場不穩定的物理發生機制。LDC 流場存在於諸多實際之應用上，例如在造紙或印刷工業中，矩形槽中存放之流體為染料或須塗抹於紙上的藥水，位於矩形

槽頂部的為待染色或塗抹藥水的紙片，當頂部紙片抽動時，將產生類似 LDC 的流場。如何將槽中之染料或藥水均勻的塗抹在紙片上，必需瞭解控制 LDC 流場穩定性的基本參數(如雷諾數)，以避免紊流之產生而造成塗抹之不均勻。另外像台灣的養殖業所使用的魚塢，也算是一種 LDC 流場，若能瞭解在風場作用下的三維矩型槽流場，便可以知道在魚塢中之何處施放飼料會較容易擴展至整個養殖池，並且也可以預測排洩物的大概淤積位置，以方便清理工作。

1-2 相關研究回顧

有關 LDC 流場之相關研究文獻，大致可分為兩大類：以流場視覺化技術來觀察流場的實驗研究，以及以數值方法進行流場之數值模擬。在 80 年代中期以前，因為當時電腦的運算速度不如現今如此快速，對於三維流場的模擬仍然無法輕易的達到，所以大部份的數值計算皆局限於二維的 LDC 流場。例如 Burggraf(1966)使用渦度-流線函數方程式法(vorticity-streamfunction formulations method)，其計算之最高雷諾數僅為 400。Ghia 等(1982)之計算首次將雷諾數提高到 10000，其計算亦使用渦度-流線函數方程式法並且佐以多重網格法(multigrid method)。Ghia 等(1982)的精確計算，明確發現二維 LDC 流場的主渦漩、上游次渦漩與下游次渦漩(見圖 4-7)的強度以及幾何大小，其計算結果至今仍廣泛被採用於其他數值方法之驗證(如 Ku,1987；Kato,1990；Babu 與 Korpela,1994 等)。

在實驗方面，80 年代早期最詳盡且重要者為 Koseff 與 Street(1984a；b；c)的一系列研究。Koseff 與 Street 系統的進行三維頂部驅動矩形槽流場的實驗觀察，其雷諾數範圍為 1000 到 10000，矩形槽之長寬深比為 1：3：1。在他們的實驗中，除了觀察到與二維流場相同的渦漩外，並發現位於矩形槽底部，旋轉方向與驅動方向平行之成對渦漩結構(見圖 4-8)；此類渦漩因為在 Görtler(1954)的文章中有理論的分析，而在 Taylor(1923)的實驗中顯示有類似的渦漩存在，所以 Koseff 與 Street(1984)於他們發表的文章中，將它們命名為 Taylor-Görtler-Like(簡稱 TGL)渦漩，此 TGL-渦漩為本研究之重點，我們將會於稍後定義並探討這類的渦漩結構。

自 Koseff 與 Street(1984)的實驗發現 TGL-渦漩後，Freitas 等(1985)亦以數值模擬首次觀察到三維 LDC 流場中的 TGL-渦漩。之後 Freitas 與 Street(1988)更進一步以數值模擬探討 TGL-渦漩的特性，發現 TGL-渦漩之發生位置、幾何大小與對數皆會隨著時間改變，另外 Freitas 與 Street(1988)，亦對 TGL-渦漩的生成機制提出假設性的解釋。Ku 等(1987)、Kato 等(1990)、Babu 與 Korpela(1994)亦以數

值計算模擬長寬深之比為 1:1:1 之立方體槽 LDC 流場,其結果並未發現如 Koseff 與 Street(1984)的實驗與 Freitas 等(1985)的數值模擬中之 TGL-渦漩,之後 Chiang 等(1996)與 Chiang 等(1998),亦對長寬深比為 1:3:1 之 LDC 流場進行數值模擬,其結果也同樣發現明顯的 TGL-渦漩結構。

三維 LDC 流場的渦漩結構明顯受長寬深比影響,同樣的,流場之雷諾數亦將影響渦漩結構。本研究將以數值模擬的方法,探討三維 LDC 流場在不同雷諾數下的渦漩結構。其重點包括:(一)三維 LDC 流場 TGL-渦漩的觀察,以及雷諾數對此 TGL-渦漩之影響;(二)雷諾數對二維與三維 LDC 流場之主渦漩、上游次渦漩與下游次渦漩的影響;(三)三維 LDC 流場因 TGL-渦漩產生之擾動。

1-3 本文架構

本文共分五章，第一章為「緒論」，說明本研究的動機與目的，並對相關的研究文獻做一回顧。第二章是「控制方程式與邊界條件」，將本文所研究的流場之控制方程式與邊界條件做一介紹與說明，並且將其無因次化後加以整理，以方便我們在第三章中將其離散化。第三章為「數值模式」，闡釋我們所使用的數值方法，並對我們的控制方程式做離散化，而進行數值計算。第四章為「數值模擬結果與討論」，將本研究所做之數值模擬結果與他人研究做比較與驗證，並且說明我們所做之數值模擬所觀察到的流場結構；而最後第五章「結論與未來展望」，此章將再一次簡述本研究所得之結果，並對位來所仍須改進與進一步研究的課題提出看法。

貳、控制方程式與邊界條件

2-1 流場之控制方程式

2-1-1 原始變數方程式

考慮一三維矩形槽中的流體運動，充滿其中的流體為不可壓縮之牛頓流體，流體之密度均勻分佈且黏滯係數為一定值。假設初始時流場為靜止的狀態，並於頂部突然施於 x 方向的速度，使得此三維 LDC 流場開始運動。矩形槽之座標系統與寬、展、深各邊長的定義見圖 2-1，座標軸原點坐落於 O 點，而 B 表示為 x 方向之寬， L 為 y 方向之展長， D 代表 z 方向之深，所以其寬、展、深之比為 $B:L:D=1:3:1$ 。

為了解析此流場中的運動情形，我們所使用的控制方程式，分別為連續方程式(continuity equation)和 x 、 y 、 z 方向之 Navier-Stokes 方程組，並利用此方程組求解四個未知數 u 、 v 、 w 與 P 。此方程組如下所示：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2-2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2-2b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2-2c)$$

其中 u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 與 z 方向的速度； P 為流場壓力， ρ 為流體密度， μ 為流體之動力黏滯係數(dynamic viscosity)。

本研究是直接求解三維 LDC 流場的四個原始變數，與渦度-流線函數公式法不同。渦度-流線函數公式法是利用渦度-流線函數方程組，求出流場渦度及流場

的流線函數，而非直接求出流場的原始變數(u 、 v 、 w 與 P)。渦度-流線函數公式法針對二維的不可壓縮流場，為相當簡單理想的方法，因為渦度-流線函數公式中並不包含壓力項，可以避免求解棘手的壓力場，以及處理壓力邊界條件。可是在三維的流場下，流線函數的表示法變得較為複雜，所以渦度-流線函數公式法不適用。而使用原始變數公式法，可使得問題之控制方程式變得比較直觀，但是此法最難處理的就是求解流場中之壓力項，因為壓力項的 Poisson 方程式，其邊界條件若為 Neumann 邊界條件時，須考慮方程式是否具有唯一解。因次必須搭配適當的數值方法求解，且在程式撰寫上要特別小心。

2-1-2 方程式的無因次化

在三維之 LDC 流場中，頂端的驅動速度 U_0 與矩形槽之寬度 B ，分別為流場之特徵速度(characteristic velocity)與特徵長度(characteristic length)， Re 則為不可壓縮流體之雷諾數(Reynolds number)。其中各無因次變數項，如下定義：

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{B} \quad , \quad y^* = \frac{y}{B} \quad , \quad z^* = \frac{z}{L} \quad , \\ u^* &= \frac{u}{U_0} \quad , \quad v^* = \frac{v}{U_0} \quad , \quad w^* = \frac{w}{U_0} \quad , \\ t^* &= \frac{tU_0}{B} \quad , \quad P^* = \frac{P}{\rho U_0^2} \quad , \quad Re = \frac{\rho U_0 B}{\mu} \quad . \end{aligned}$$

將上述變數代入(2-1)、(2-2a)、(2-2b)、(2-2c)式後，即可表示成如下所示：

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad , \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial z^*} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad , \quad (2-4a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{*2}}{\partial y^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial z^*} + \frac{\partial P^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad , \quad (2-4b)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} + \frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad . \quad (2-4c)$$

為了簡化方程式，我們可以將方程式(2-4a)、(2-4b)、(2-4c)重新簡寫成如下的形式：

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + FU^* , \quad (2-5a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + FV^* , \quad (2-5b)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + FW^* . \quad (2-5c)$$

其中：

$$FU^* = -\frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} - \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u^* w^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) ,$$

$$FV^* = -\frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^{*2}}{\partial y^*} - \frac{\partial v^* w^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) ,$$

$$FW^* = -\frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) .$$

但在稍後的章節中，為了簡化方程式的表示，將不再於方程式右上角加上星號，所以之後章節的方程式，雖無星號加註於右上角，但皆已是經過無因次化後的形式。

2-2 邊界條件

在描述三維 LDC 邊界之前，首先定義矩形槽之幾何邊界。如圖 2-2 所示，矩形槽之頂部面為 PQTK 所構成之平面，底部水平面為 SMNR 平面；而矩形槽之兩邊端牆面(end-wall)，分別為 PQSR 與 KTMN 平面。另外 QTMS 與 PKNR 兩面分別為上游邊牆面(upstream side-wall)與下游邊牆面(downstream side-wall)，此處所指之上、下游是以頂部驅動速度方向來定義。與頂部驅動速度方向相反所指之面，為 QTMS 上游邊牆面，反之為 PKNR 下游面。而位於矩形槽展長中點處之垂直平面 ACFE，稱為對稱面(symmetry plane)。

在定義了各幾何邊界後，其邊界條件如下所述。速度場的邊界條件，在滿足「無滑移邊界條件」(no-slip condition)的情況下，除了矩形槽頂部($z = d \equiv D/B$)之 x 方向速度為無因次單位速度 1 外， y 與 z 方向之速度為零，位於其它壁面邊界上($x = 0$ ， $x = 1$ ， $y = 0$ ， $y = l \equiv L/B$ 與 $z = 0$)的速度皆為零。而壓力場的邊界條件，是由上述之速度邊界條件代入(2-4a)~(2-4c)式中得到。所以速度與壓力之邊界條件，如下所示：

當 $x = 0$ 與 $x = 1$ 之端牆面處，

$$u = v = w = 0 ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) . \quad (2-6)$$

當 $y = 0$ 與 $y = l$ 之下、下游邊牆面處，

$$u = v = w = 0 ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) . \quad (2-7)$$

當 $z = 0$ 之矩形槽底部水平面處，

$$u = v = w = 0 ,$$

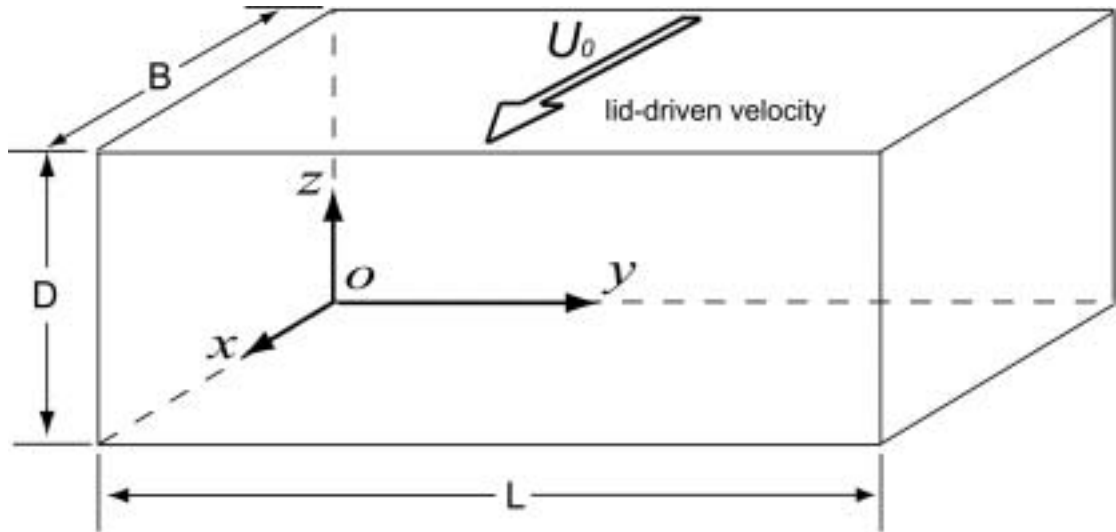
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) . \quad (2-8)$$

當 $z = d$ 之頂部面處，

$$\begin{aligned}u &= 1, \\v &= w = 0;\end{aligned}$$

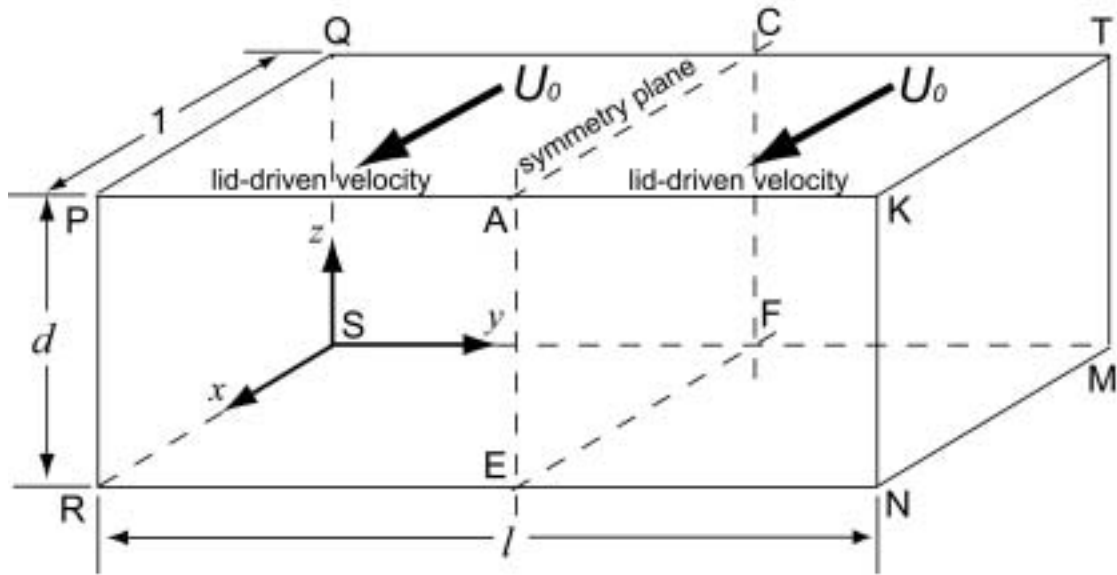
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

其中壓力的邊界條件皆為 Neumann 邊界條件，在此條件下，Poisson 方程式的解不唯一。因此為了避免上述的問題發生，我們在壓力的計算網格上選定一點為定值作為參考點，當作此壓力 Poisson 方程式的可解化條件 (solvability condition)，以求得唯一解。同時，由於壓力項在 Navier-Stokes 方程式中是以梯度的形式存在，所以只要壓力場的梯度保持一定值，參考點之設定並不會影響速度場的計算結果。



$$B:L:D=1:3:1$$

圖 2-1：頂部驅動三維矩形槽流場之幾何示意圖。



Boundary definitions

End-wall : PQSR	upstream side-wall : PKNR
: KTMN	downstream side-wall : QTMS
Lid : PQTK	lower horizontal : SMNR
Symmetry plane : ACFE	

圖 2-2：三維矩形槽之幾何邊界示意圖。

蓋頂面(lid)為 PQTK，邊長比($x:y$)為 1:3。

端牆面(end-wall)為 PQSR 與 KTMN 兩面，其邊長比($x:z$)為 1:1。

上游邊牆面(upstream side-wall)為 PKNR，邊長比($y:z$)為 3:1。

下游邊牆面(downstream side-wall)為 QTMS，邊長比($y:z$)為 3:1。

底部水平面(lower horizontal)為 SMNR，邊長比($y:z$)為 3:1。

對稱平面(symmetry plane)為 ACFE，此面為以 y 方向中線為對稱中心之平面，邊長比($x:z$)為 1:1。

其中矩形槽之寬(width)為 $1 = B/B$ ，展長(span)為 $l = L/B$ ，深(depth)為 $d = D/B$ ，寬、展、深之比為 $B:L:D=1:3:1$ 。

參、數值方法

3-1 交錯網格系統

交錯網格的觀念，最早是由 Harlow 與 Welch(1965)的論文中所提出，而本研究速度與壓力格點之配置方法，即採用此交錯網格系統，並且各方向之網格間距皆相等，如圖 3-1 所示。壓力項之網格位置位於圖 3-1 所示之圓形處，而速度項則位於與壓力網格相錯半個格點間距之三角形處。若以二維平面來表示交錯網格系統，可以更清楚地了解各方向上之交錯網格的配置方法。圖 3-2 至圖 3-4 即分別為位於 $x-z$ 平面、 $x-y$ 平面與 $y-z$ 平面之二維交錯網格示意圖；圖中兩條實線相交之處，為壓力項之網格位置，而於實線與虛線相交處，為各方向速度項之網格位置。由此得知，三個方向之速度項皆與自己同方向上的壓力網格位置，相錯半個格點間距，即速度 u 、 v 、 w 與壓力 P 皆置放於不同的網格上，所以四個變數共有四種網格系統，此四種網格配置方法，可參考圖 3-5 至圖 3-8 各變數之網格系統示意圖。圖 3-5 至圖 3-8 中實線所構成的為矩形槽之幾何邊界，虛線表示為壓力項與速度項之數值計算邊界。因此速度項在位於與各速度分量 u 、 v 與 w 同方向上之網格位置，與矩形槽之物理邊界位置相同，而與本身速度分量不同之另外二個分向之網格位置，與壓力之網格位置相同，即與物理邊界相隔半個格點間距，所以三個方向速度與壓力共有四種網格配置方式。

其中將此計算區域之寬、展、深分別分割成 MI 、 NJ 與 LK 個格點區間，故得到格點間距為 $\Delta x = l / MI$ 、 $\Delta y = l / NJ$ 與 $\Delta z = d / LK$ 。所以壓力項 $P_{i,j,k}$ 之網格位置為 $x = (i - 1/2) \cdot \Delta x$ 、 $y = (j - 1/2) \cdot \Delta y$ 與 $z = (k - 1/2) \cdot \Delta z$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, MI$ ， $j = 1, 2, \dots, NJ$ ， $k = 1, 2, \dots, LK$ 。 x 方向速度項 $u_{i,j,k}$ 之網格位置為 $x = i \cdot \Delta x$ ， $y = (j - 1/2) \cdot \Delta y$ ， $z = (k - 1/2) \cdot \Delta z$ ，其中 $i = 0, 1, \dots, MI$ ， $j = 1, 2, \dots, NJ$ ， $k = 1, 2, \dots, LK$ 。

y 方向速度項 $v_{i,j,k}$ 之網格位置為 $x = (i - 1/2) \cdot \Delta x$, $y = j \cdot \Delta y$, $z = (k - 1/2) \cdot \Delta z$,
其中 $i = 1, 2 \dots MI$, $j = 0, 1 \dots NJ$, $k = 1, 2 \dots LK$ 。 z 方向速度項 $w_{i,j,k}$ 之網格位置為
 $x = (i - 1/2) \cdot \Delta x$, $y = (j - 1/2) \cdot \Delta y$, $z = k \cdot \Delta z$, 其中 $i = 1, 2 \dots MI$, $j = 1, 2 \dots NJ$,
 $k = 0, 1 \dots LK$ 。

3-2 控制方程式的離散

在本研究中我們的數值方法求解流場的流程為：(1)先將 Navier-Stokes 方程式分別對時間與空間作離散；(2)對速度場做散度(divergence)運算，然後將步驟(1)經離散後之 Navier-Stokes，代入速度之散度方程式作運算；(3)令 $t = t^{n+1}$ 時其散度為零($\nabla \cdot \vec{V} = 0$)，如此我們便得到對壓力之 Poisson 方程式；(4)求解 Poisson 方程式，以獲得壓力場；(5)再重新代入經步驟(1)離散後的 Navier-Stokes 方程式，並對時間使用一階準度 Euler 法作時間積分，得到新的速度場(u, v, w)。重複步驟(1)到(5)，便可以逐一獲得每一無因次時間下的壓力場與速度場，直到模擬時間終了。其中整個數值模擬之無因次時間若設為 T ，則將此時間分割成 NT 個時間間隔，故時間間距為 $\Delta t = T / NT$ 。

將(2-5a)、(2-5b)、(2-5c)三式，在時間上以一階準度之 Euler 法，於 $t = n \cdot \Delta t$ 時對 t 之導數作離散，空間上以二階準度之中央差分近似法，對方程式中 x 、 y 與 z 方向之導數做離散。則於離散時間為 $t = n \cdot \Delta t$ 時，離散座標 $x = i \cdot \Delta x$ ， $y = (j - 1/2) \cdot \Delta y$ ， $z = (k - 1/2) \cdot \Delta z$ 處，將(2-5a)式對 x 之導數做離散，可以得到如下離散形式之差分方程式：

$$\frac{u_{i-1,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^n}{\Delta t} = -\frac{P_{i,j,k}^n - P_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} + FU_{i-1,j,k}^n \quad (3-1a)$$

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} = -\frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta x} + FU_{i,j,k}^n \quad (3-1b)$$

同理(2-5b)與(2-5c)兩式以相同的離散方法，也可以得到如下離散形式的差分方程式：

$$\frac{v_{i,j-1,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^n}{\Delta t} = -\frac{P_{i,j,k}^n - P_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} + FV_{i,j-1,k}^n \quad (3-2a)$$

$$\frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} = -\frac{P_{i,j+1,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta y} + FV_{i,j,k}^n \quad (3-2b)$$

$$\frac{w_{i,j,k-1}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^n}{\Delta t} = -\frac{P_{i,j,k}^n - P_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} + FW_{i,j,k-1}^n \quad (3-3a)$$

$$\frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\Delta t} = -\frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta z} + FW_{i,j,k}^n \quad (3-3b)$$

在來將(3-1b)式減去(3-1a)式，然後對 x 方向作二階精度之中央差分， y 、 z 兩方向也以相同步驟作運算，而將各方向相減後的方程式相加，經過整理後得到下式：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x} (u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^{n+1}) \right] \\ & - \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x} (u_{i,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j,k}^n - v_{i,j-1,k}^n) + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,j,k}^n - w_{i,j,k-1}^n) \right] \\ & = -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta x} - \frac{P_{i,j,k}^n - P_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta x} (FU_{i,j,k}^n - FU_{i-1,j,k}^n) \quad (3-4) \\ & - \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{P_{i,j+1,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta y} - \frac{P_{i,j,k}^n - P_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} \right) + \frac{1}{\Delta y} (FV_{i,j,k}^n - FV_{i,j-1,k}^n) \\ & - \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta z} - \frac{P_{i,j,k}^n - P_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} \right) + \frac{1}{\Delta z} (FW_{i,j,k}^n - FW_{i,j,k-1}^n) \end{aligned}$$

在(3-4)式的左項為速度散度對時間的一階導數，即 $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{V})$ ，若將其一階準度之

Euler 法，對時間作離散則得到 $\frac{(\nabla \cdot \vec{V})^{n+1} - (\nabla \cdot \vec{V})^n}{\Delta t}$ ，此時我們令速度散度於

$t = (n+1) \cdot \Delta t$ 時為零，以使得 \vec{V}^{n+1} 能滿足連續方程式，所以將(3-4)式左項雙底線

處之式子令為零，即：

$$\frac{1}{\Delta x} (u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^{n+1}) = 0$$

如此將得到對壓力之 Poisson 方程式如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{(P_{i+1,j,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i-1,j,k}^n)}{(\Delta x)^2} + \frac{(P_{i,j+1,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j-1,k}^n)}{(\Delta y)^2} + \frac{(P_{i,j,k+1}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j,k-1}^n)}{(\Delta z)^2} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x} (u_{i,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j,k}^n - v_{i,j-1,k}^n) + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,j,k}^n - w_{i,j,k-1}^n) \right] \quad (3-5) \\
&+ \frac{1}{\Delta x} (FU_{i,j,k}^n - FU_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y} (FV_{i,j,k}^n - FV_{i,j-1,k}^n) + \frac{1}{\Delta z} (FW_{i,j,k}^n - FW_{i,j,k-1}^n)
\end{aligned}$$

我們將(3-5)的等號右邊令為 σ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{i,j,k}^n &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x} (u_{i,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j,k}^n - v_{i,j-1,k}^n) + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,j,k}^n - w_{i,j,k-1}^n) \right] \\
&+ \frac{1}{\Delta x} (FU_{i,j,k}^n - FU_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y} (FV_{i,j,k}^n - FV_{i,j-1,k}^n) + \frac{1}{\Delta z} (FW_{i,j,k}^n - FW_{i,j,k-1}^n)
\end{aligned}$$

如此(3-5)式將變成如下:

$$\frac{(P_{i+1,j,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i-1,j,k}^n)}{(\Delta x)^2} + \frac{(P_{i,j+1,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j-1,k}^n)}{(\Delta y)^2} + \frac{(P_{i,j,k+1}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j,k-1}^n)}{(\Delta z)^2} = \sigma_{i,j,k}^n \quad (3-6)$$

對於此一壓力的 Poisson 方程式, 我們可以將他同時乘上 $(\Delta x)^2$ 而重新整理成如下的形式:

$$\begin{aligned}
& P_{i+1,j,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i-1,j,k}^n \\
&+ \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot (P_{i,j+1,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j-1,k}^n) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \right)^2 \cdot (P_{i,j,k+1}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j,k-1}^n) \\
&= \sigma_{i,j,k}^n \cdot (\Delta x)^2
\end{aligned}$$

並且令 $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, $\gamma = \frac{\Delta x}{\Delta z}$, 所以又可以將上式再簡化成如下的型式:

$$\begin{aligned}
& P_{i+1,j,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i-1,j,k}^n + \beta^2 \cdot (P_{i,j+1,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j-1,k}^n) + \gamma^2 \cdot (P_{i,j,k+1}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j,k-1}^n) \\
&= \sigma_{i,j,k}^n \cdot (\Delta x)^2
\end{aligned}$$

再經過整理得到下式:

$$\begin{aligned}
P_{i-1,j,k}^n + \beta^2 \cdot P_{i,j-1,k}^n + \gamma^2 \cdot P_{i,j,k-1}^n - 2 \cdot (1 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot P_{i,j,k}^n + \gamma^2 \cdot P_{i,j,k+1}^n + \beta^2 \cdot P_{i,j+1,k}^n + P_{i+1,j,k}^n \\
= \sigma_{i,j,k}^n \cdot (\Delta x)^2
\end{aligned}
\tag{3-7}$$

若將邊界條件代入我們可以得到一由 Poisson 方程式所組成的線性系統 $[A]\{x\} = \{B\}$ ，其中 $\{x\}$ 為我們所求解的壓力場向量：

$$\{x\}^T = \{P_{1,1,2}, P_{1,1,3}, \dots, P_{1,NJ,LK}, P_{2,1,1}, P_{2,1,2}, \dots, P_{2,1,LK}, P_{2,2,1}, P_{2,2,2}, \dots, P_{MI,NJ,LK-1}, P_{MI,NJ,LK}\}$$

另外我們將矩陣 $[A]$ 與向量 $\{B\}$ 的元素放在附錄一中作說明。對於此一矩陣我們可以使用直接法(direct method)，或是疊代法(iterative method)來求得 P ，在本研究中我們是使用直接法來解得 P 。

而由 Poisson 方程式求出新的壓力場後，接下來我們可以將此壓力代入 (3-1)~(3-3) 式中，並且使用一階準度之 Euler 法對時間做積分，如此我們便可以得到新的速度場 (u^{n+1} 、 v^{n+1} 、 w^{n+1})，而完成了一個時間間距的流場求解，而只要重複上述步驟，達到我們所需要的無因次模擬時間，整個數值模擬便告完成。

3-3 邊界條件的離散

對於在 2-2 節中所提到之速度邊界條件做離散, 可得下列邊界條件之差分式:

在 $i=0$ 的速度 u 為零,

$$u_{i,j,k} = 0, \quad (3-8a)$$

在 $i=0$ 處滿足連續方程式, 以二階準度之中央有限差分法作離散:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i=0} = 0 \quad ; \quad \frac{u_{1,j,k} - u_{-1,j,k}}{2 \cdot \Delta x} = 0, \\ u_{-1,j,k} = u_{1,j,k}. \end{aligned} \quad (3-8b)$$

在 $i=0$ 處的邊界上 $v=0$ 、 $w=0$, 使用平均得到邊界外的點:

$$\begin{aligned} v_{i=0,j,k} = 0.5 \cdot (v_{i=1,j,k} + v_{i=0,j,k}) = 0, \\ v_{i=0,j,k} = -v_{i=1,j,k}, \end{aligned} \quad (3-8c)$$

$$\begin{aligned} w_{i=0,j,k} = 0.5 \cdot (w_{i=1,j,k} + w_{i=0,j,k}) = 0, \\ w_{i=0,j,k} = -w_{i=1,j,k}, \end{aligned} \quad (3-8d)$$

在 $i=MI$ 的速度 u 為零:

$$u_{i,j,k} = 0, \quad (3-9a)$$

在 $i=MI$ 處滿足連續方程式, 以二階準度之中央有限差分法作離散:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i=MI} = 0 \quad ; \quad \frac{u_{MI+1,j,k} - u_{MI-1,j,k}}{2 \cdot \Delta x} = 0, \\ u_{MI+1,j,k} = u_{MI-1,j,k}, \end{aligned} \quad (3-9b)$$

在 $i=MI$ 處的邊界上 $v=0$ 、 $w=0$, 使用平均得到邊界外的點:

$$v_{i=MI,j,k} = 0.5 \cdot (v_{i=MI+1,j,k} + v_{i=MI,j,k}) = 0 ,$$

$$v_{i=MI+1,j,k} = -v_{i=MI,j,k} , \quad (3-9c)$$

$$w_{i=MI,j,k} = 0.5 \cdot (w_{i=MI+1,j,k} + w_{i=MI,j,k}) = 0 ,$$

$$w_{i=MI+1,j,k} = -w_{i=MI,j,k} , \quad (3-9d)$$

在 $k=0$ 的速度 w 為零：

$$w_{i,j,k} = 0 , \quad (3-10a)$$

在 $k=0$ 處滿足連續方程式，以二階準度之中央有限差分法作離散：

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{k=0} = 0 ; \quad \frac{w_{i,j,1} - w_{i,j,-1}}{2 \cdot \Delta z} = 0 ,$$

$$w_{i,j,-1} = w_{i,j,1} , \quad (3-10b)$$

在 $k=0$ 處的邊界上 $u=0$ 、 $v=0$ ，使用平均得到邊界外的點：

$$u_{i,j,k=0} = 0.5 \cdot (u_{i,j,k=1} + u_{i,j,k=0}) = 0 ,$$

$$u_{i,j,k=0} = -u_{i,j,k=1} , \quad (3-10c)$$

$$v_{i,j,k=0} = 0.5 \cdot (v_{i,j,k=1} + v_{i,j,k=0}) = 0 ,$$

$$v_{i,j,k=0} = -v_{i,j,k=1} , \quad (3-10d)$$

在 $k=LK$ 的速度 w 為零：

$$w_{i,j,k} = 0 , \quad (3-11a)$$

在 $k=LK$ 處滿足連續方程式，以二階準度之中央有限差分法作離散：

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{k=LK} = 0 ; \quad \frac{w_{i,j,LK+1} - w_{i,j,LK-1}}{2 \cdot \Delta z} = 0 ,$$

$$w_{i,j,LK+1} = w_{i,j,LK-1} , \quad (3-11b)$$

在 $k=LK$ 處的邊界上 $u=1$ 、 $v=0$ ，使用平均得到邊界外的點：

$$u_{i,j,k=LK} = 0.5 \cdot (u_{i,j,k=LK+1} + u_{i,j,k=LK}) = 1 ,$$

$$u_{i,j,k=LK+1} = 2 - u_{i,j,k=LK} , \quad (3-11c)$$

$$v_{i,j,k=LK} = 0.5 \cdot (v_{i,j,k=LK+1} + v_{i,j,k=LK}) = 0 ,$$

$$v_{i,j,k=LK+1} = -v_{i,j,k=LK} , \quad (3-11d)$$

在 $j=0$ 的速度 v 為零：

$$v_{i,0,k} = 0 , \quad (3-12a)$$

在 $j=0$ 處滿足連續方程式，以二階準度之中央有限差分法作離散：

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{j=0} = 0 ; \quad \frac{v_{i,1,k} - v_{i,-1,k}}{2 \cdot \Delta y} = 0 ,$$

$$v_{i,-1,k} = v_{i,1,k} , \quad (3-12b)$$

在 $j=0$ 處的邊界上 $u=0$ 、 $w=0$ ，使用平均得到邊界外的點：

$$u_{i,j=0,k} = 0.5 \cdot (u_{i,j=1,k} + u_{i,j=0,k}) = 0 ,$$

$$u_{i,j=0,k} = -u_{i,j=1,k} , \quad (3-12c)$$

$$w_{i,j=0,k} = 0.5 \cdot (w_{i,j=1,k} + w_{i,j=0,k}) = 0 ,$$

$$w_{i,j=0,k} = -w_{i,j=1,k} , \quad (3-12d)$$

在 $j=NJ$ 的速度 v 為零：

$$v_{i,NJ,k} = 0 , \quad (3-13a)$$

在 $j=NJ$ 處滿足方程式，以二階準度之中央有限差分法作離散：

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{j=NJ} = 0 ; \frac{v_{i,NJ+1,k} - v_{i,NJ-1,k}}{2 \cdot \Delta y} = 0 ,$$

$$v_{i,NJ+1,k} = v_{i,NJ-1,k} , \quad (3-13b)$$

在 $j=NJ$ 處的邊界上 $u=0$ 、 $w=0$ ，使用平均得到邊界外的點：

$$u_{i,j=NJ,k} = 0.5 \cdot (u_{i,j=NJ+1,k} + u_{i,j=NJ,k}) = 0 ,$$

$$u_{i,j=NJ+1,k} = -u_{i,j=NJ,k} , \quad (3-13c)$$

$$w_{i,j=NJ,k} = 0.5 \cdot (w_{i,j=NJ+1,k} + w_{i,j=NJ,k}) = 0 ,$$

$$w_{i,j=NJ+1,k} = -w_{i,j=NJ,k} , \quad (3-13d)$$

將速度的邊界條件離散完後，再來我們將壓力的邊界條件也一併離散，根據 2-2 節所顯示的壓力邊界條件(2-6)~(2-8)式，我們可以將其離散化如下：

當 $i=0$ 時：

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) ,$$

$$\frac{P_{i=1,j,k} - P_{i=0,j,k}}{2 \cdot (\Delta x / 2)} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{u_{i=1,j,k} - 2u_{i=0,j,k} + u_{i=-1,j,k}}{\Delta x^2} , \quad (3-14a)$$

當 $i=MI$ 時：

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) ,$$

$$\frac{P_{i=MI+1,j,k} - P_{i=MI,j,k}}{2 \cdot (\Delta x / 2)} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{u_{i=MI+1,j,k} - 2u_{i=MI,j,k} + u_{i=MI-1,j,k}}{\Delta x^2} , \quad (3-14b)$$

當 $k=0$ 時：

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) ,$$

$$\frac{P_{i,j,k=1} - P_{i,j,k=0}}{2 \cdot (\Delta z / 2)} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{w_{i,j,k=1} - 2w_{i,j,k=0} + w_{i,j,k=-1}}{\Delta z^2}, \quad (3-15a)$$

當 $k=LK$:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{P_{i,j,k=LK+1} - P_{i,j,k=LK}}{2 \cdot (\Delta z / 2)} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{w_{i,j,k=LK+1} - 2w_{i,j,k=LK} + w_{i,j,k=LK-1}}{\Delta z^2}, \quad (3-15b)$$

當 $j=0$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{P_{i,j=1,k} - P_{i,j=0,k}}{2 \cdot (\Delta y / 2)} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{v_{i,j=1,k} - 2v_{i,j=0,k} + v_{i,j=-1,k}}{\Delta y^2}, \quad (3-16a)$$

當 $j=NJ$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{P_{i,j=NJ+1,k} - P_{i,j=NJ,k}}{2 \cdot (\Delta y / 2)} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{v_{i,j=NJ+1,k} - 2v_{i,j=NJ,k} + v_{i,j=NJ-1,k}}{\Delta y^2}, \quad (3-16b)$$

上述即為本研究中之所有邊界條件經離散後的差分方程式，將適當的邊界條件條件代入控制方程式中，即可求得我們所求解的流場變數。

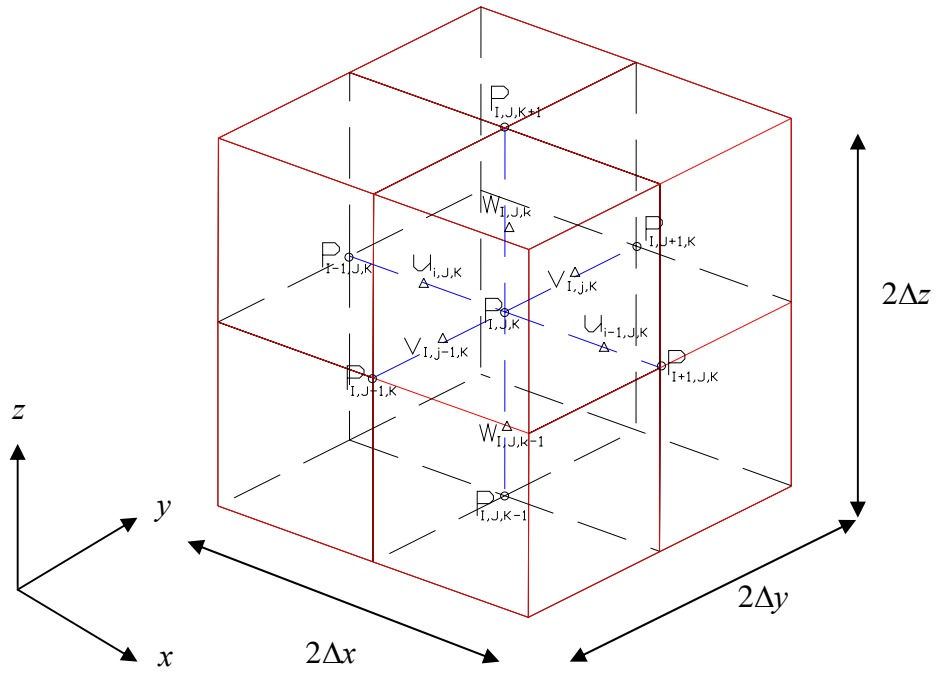


圖 3-1：流場變數置放於三維交錯網格之空間示意圖。

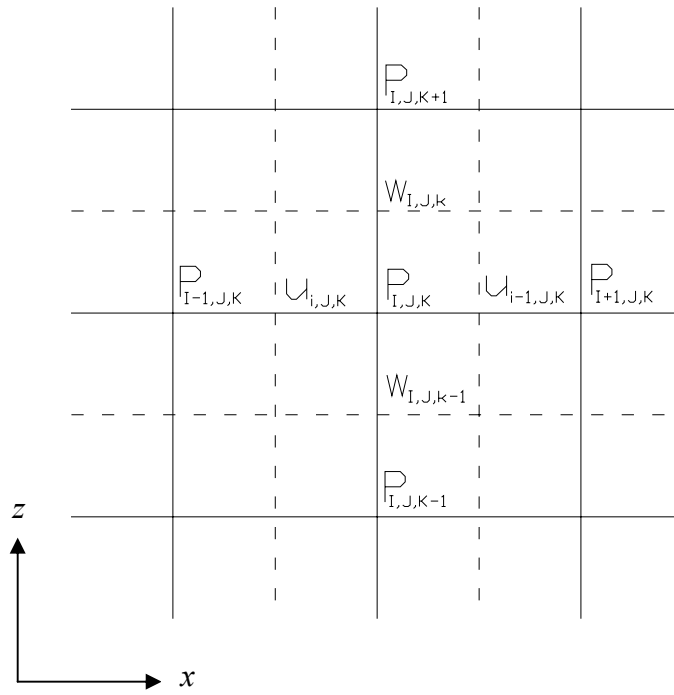


圖 3-2：流場變數置放於二維交錯網格之空間示意圖， $x-z$ 平面。

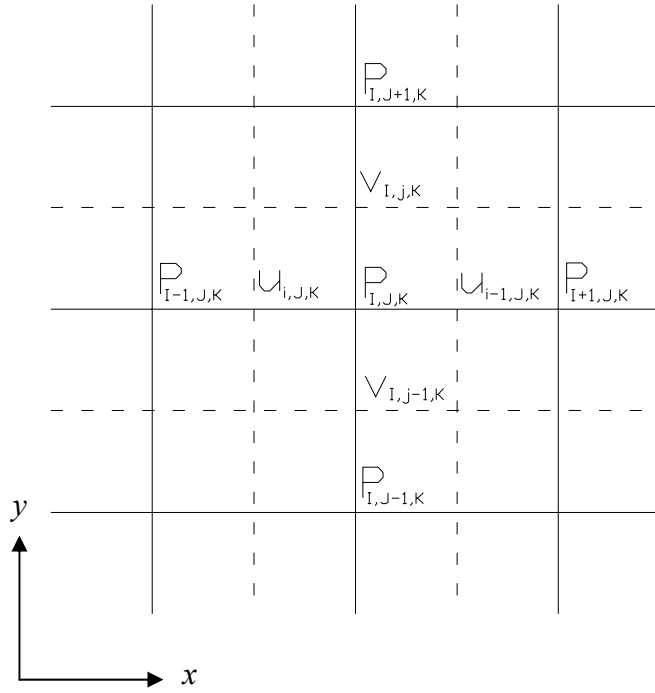


圖 3-3：流場變數置放於二維交錯網格之空間示意圖， x - y 平面。

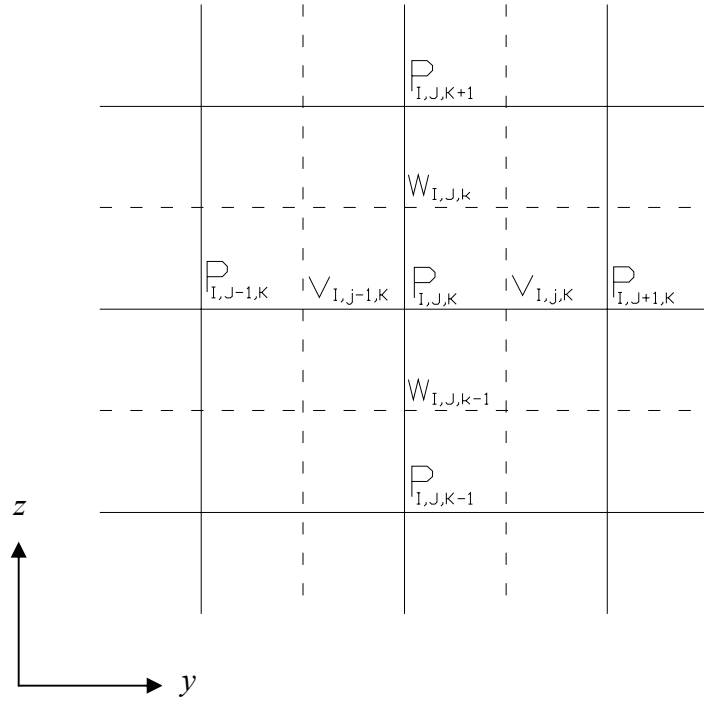


圖 3-4：流場變數置放於二維交錯網格之空間示意圖， $y-z$ 平面。

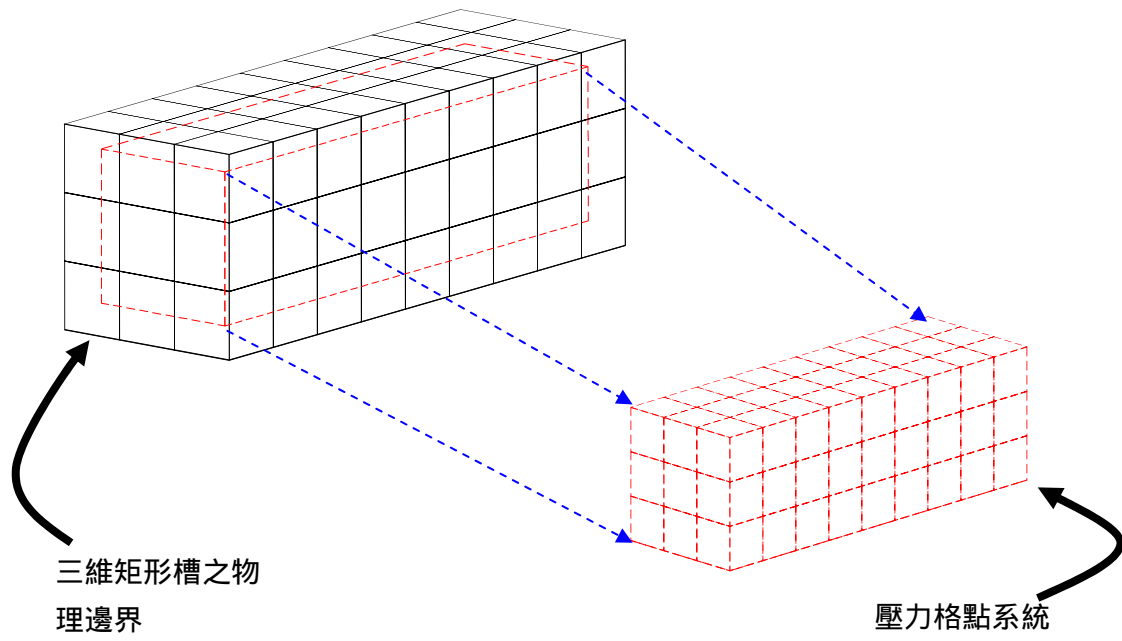


圖 3-5：壓力交錯網格系統之示意圖。

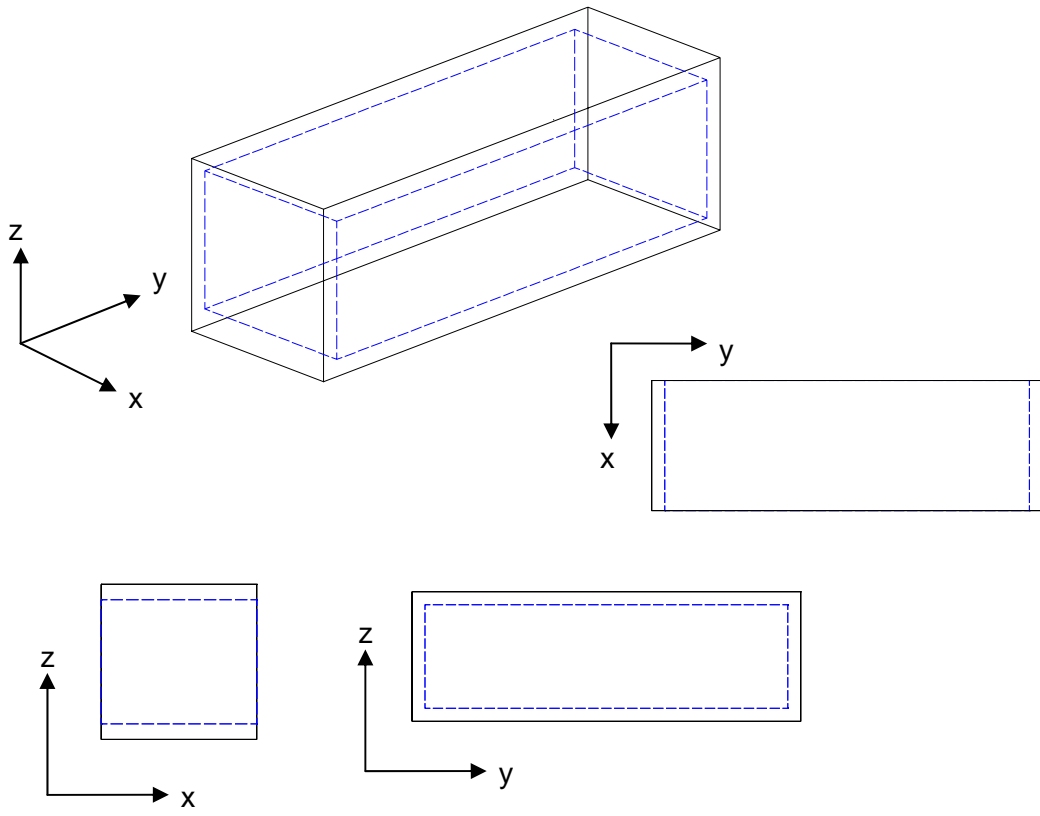


圖 3-6：速度 u 之交錯網格系統示意圖。

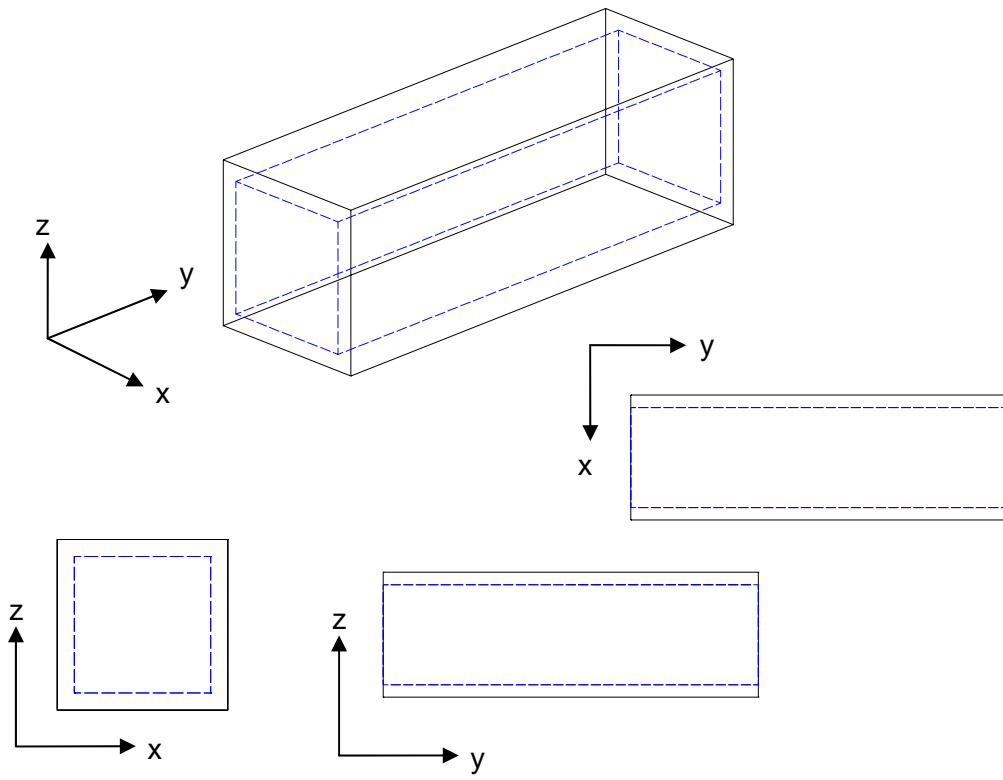


圖 3-7：速度 v 之交錯網格系統示意圖。

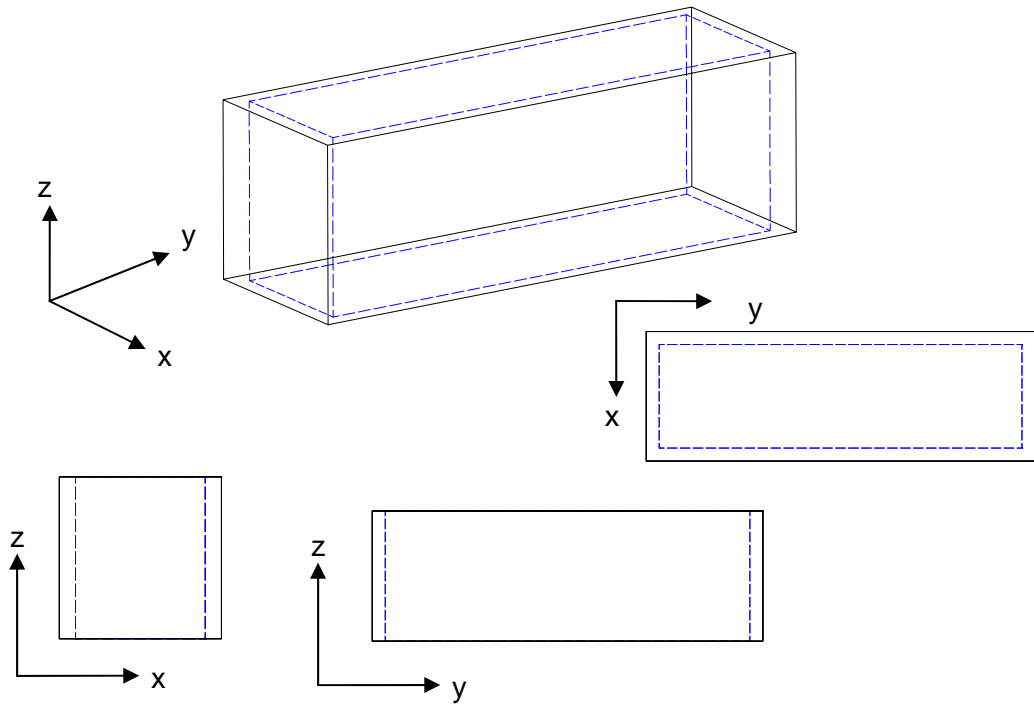


圖 3-8：速度 w 之交錯網格系統示意圖。

肆、數值模擬結果與討論

4-1 數值模擬條件之簡述

本研究模擬寬、展、深比為 1:3:1 之三維 LDC 流場，但為驗證本數值解析結果之正確性，亦對二維方形 LDC 流場及寬、展、深比為 1:1:1 之三維 LDC 流場做模擬，並與前人之研究結果做比較。二維的算例中，網格數目共有 $MI \times NJ = 33 \times 33$ 及 $MI \times NJ = 128 \times 128$ 兩種；而整個數值模擬之無因次時間 $t=100$ ；且當網格數目為 33×33 時，時間間距為 $\Delta t = 0.0005$ ，網格數目為 128×128 時，時間間距為 $\Delta t = 0.001$ 。而三維的算例，當寬、展、深比為 1:1:1 時，網格數目為 $MI \times NJ \times LK = 33 \times 33 \times 33$ ，寬、展、深比為 1:3:1 時，網格數目為 $MI \times NJ \times LK = 36 \times 108 \times 36$ ，三維的算例中，時間間距皆為 $\Delta t = 0.005$ 。

另外本研究為探討雷諾數對三維 LDC 流場中渦漩結構的影響，所以我們於四組不同雷諾數下，進行三維 LDC 流場之計算，此四組雷諾數分別為 $Re=400$ 、1000、1300 與 1500。所有計算皆於中央處理器為 Intel PIII-800(Mhz)的 PC 上進行運算，其中二維之算例在網格數目為 33×33 下，計算 200000 個時間間隔，大約花費 5 分鐘之 CPU 時間，而網格數目為 128×128 下，計算 100000 個時間間隔，大約花費 45 分鐘之 CPU 時間。三維的算例在網格數目為 $33 \times 33 \times 33$ 時，計算 40000 個時間間隔，大約花費 2.9 個小時之 CPU 時間，而網格數目為 $36 \times 108 \times 36$ 時，同樣計算 40000 個時間間隔，大約花費了 35 個小時。

4-2 他人研究結果之比較

在 LDC 流場的眾多研究文獻中，最常被拿來做驗比較之數值模擬結果，為 x 、 z 方向速度 u 、 w 位於對稱面 ACFE 之分佈圖，即 x 軸對速度 w 位於 $y = l/2$ 、 $z = d/2$ 之分佈圖，以及 z 軸對速度 u 位於 $x = 0.5$ 、 $y = l/2$ 之分佈圖。

於二維的模擬中，以 Ghia 等(1982)、Schreiber 等(1983)、Ku 等(1987)、Babu 與 Korpela(1994)等人之數值計算結果做比較，分別對不同雷諾數($Re=100$ 、 400 與 1000)繪出其 u 、 w 速度位於對稱面 ACFE 之分佈圖，其結果如圖 4-1、圖 4-2 與圖 4-3 所示。由圖 4-1、圖 4-2 與圖 4-3 可以發現，本研究之數值模擬結果於低雷諾數時($Re=100$)，與他人的研究數據比較，結果極為相符。但隨著雷諾數增高時($Re=400$ 與 $Re=1000$)，見圖 4-2 與圖 4-3，網格數目為 33×33 ($\Delta x = 0.030$) 之模擬結果，在位於 x - z 方向邊界處之 u 、 w 速度分佈圖，與他人研究結果相較，會有誤差產生，但於網格數目為 128×128 ($\Delta x = 0.0078$) 時，其 u 、 w 速度分佈與他人研究結果極為相符。因此表示網格數目為 33×33 時，其格點間距較大無法於雷諾數增大時，精確地解析出於邊界上的速度場，但若網格數目為 128×128 時，其格點間距較小，所以可以將邊界上流場之微小變動解析出來，並且與他人使用非等間距格點所計算得到之結果，極為相符。故縮小格點間距，或使用非等間距格點，於邊界上施於較小之格點間距做計算，皆可提高數值計算之精確度。

於三維之算例中，當寬、展、深之比為 $1:1:1$ 時，我們使用網格數目為 $33 \times 33 \times 33$ 之等間距網格，進行數值計算，與 Ku 等(1987)、Kato 等(1990)與 Chiang 等(1997)之研究結果做比較，見圖 4-4。其中我們之計算結果與 Chiang 等(1997)較為相符；因使用相同之等間距網格做離散。而和 Ku 與 Kato 於邊界處仍存在誤差，其原因如前所述，為於邊界之網格解析度不足所致。當寬、展、深之比為 $1:3:1$ 時，使用網格數目為 $36 \times 108 \times 36$ 之等間距網格進行數值計算，與 Chiang 等(1998)之研究結果做比較，見圖 4-5。當低雷諾數時($Re=100$ 、 400)，其結果尚屬相符，惟於雷諾數增高至 1000 時，仍然對於邊界之模擬結果較差，但本研究

所模擬之物理量尺度較大，所以若忽略邊界微小的誤差不計，我們之數值計算結果尚屬合理。

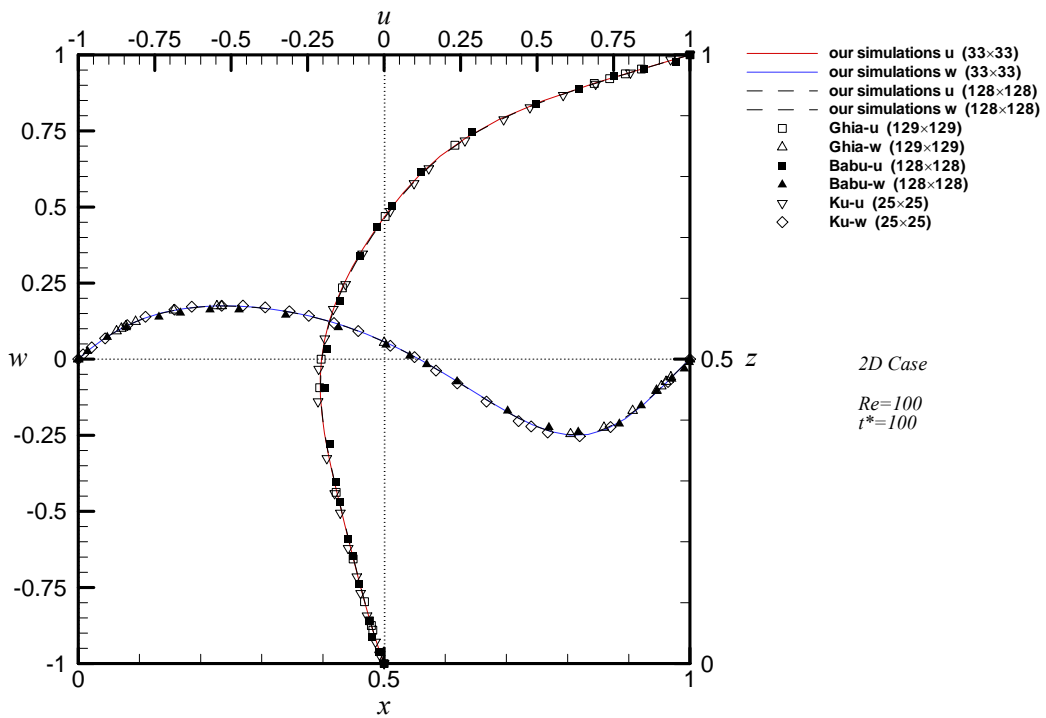


圖 4-1： $Re=100$ 時，位於 $y=1.5$ 處之 $x-z$ 剖面的二維速度分佈圖與他人的模擬結果比較，我們的網格數目為： 33×33 與 128×128 ，Ghia 等(1982)為： 129×129 ，Ku 等(1987)為： 25×25 ，Babu 等(1994)為： 128×128 。

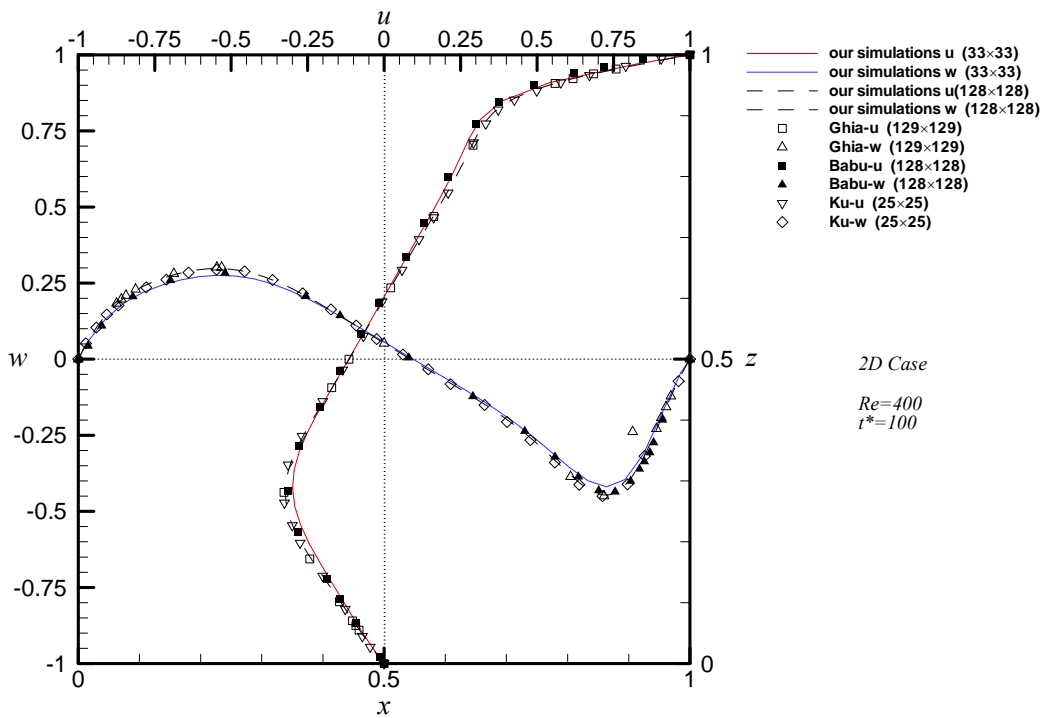


圖 4-2 : $Re=400$ 時，位於 $y=1.5$ 處之 $x-z$ 剖面的二維速度分佈圖與他人的模擬結果比較，我們的網格數目為： 33×33 與 128×128 ，Ghia 等(1982)為： 129×129 ，Ku 等(1987)為： 25×25 ，Babu 等(1994)為： 128×128 。

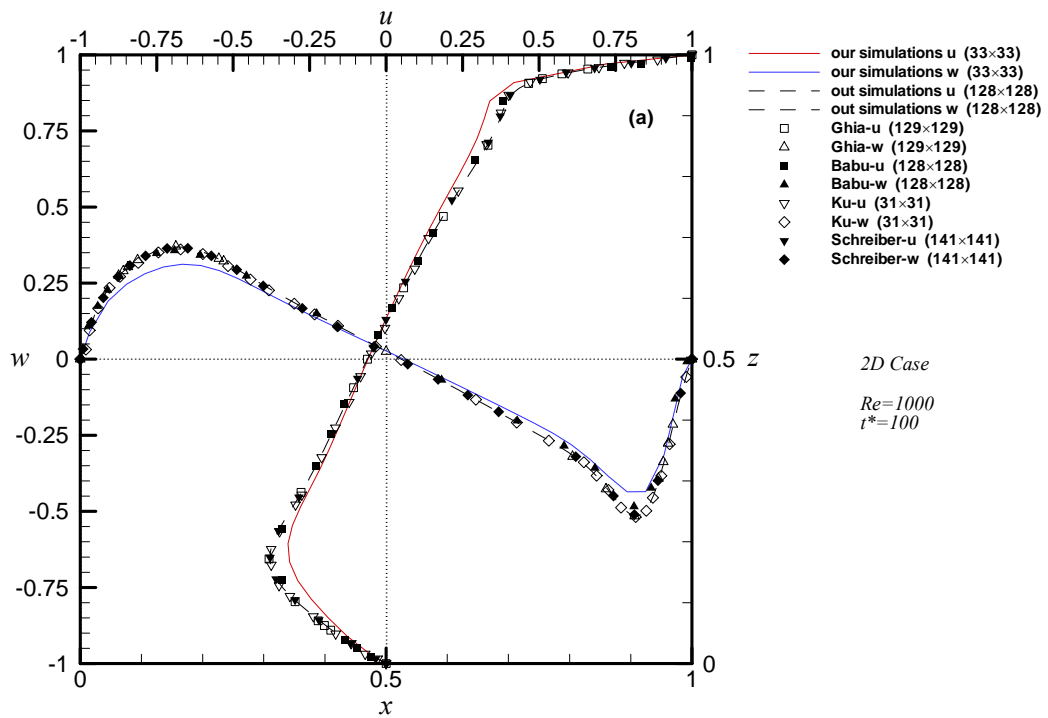


圖 4-3 : $Re=1000$ 時, 位於 $y=1.5$ 處之 $x-z$ 剖面的二維速度分佈圖與他人模擬結果之比較, 我們的網格數目為: 33×33 與 128×128 , Ghia 等(1982) 為: 129×129 , Ku 等(1987)為: 25×25 , Babu 等(1994)為: 128×128 。

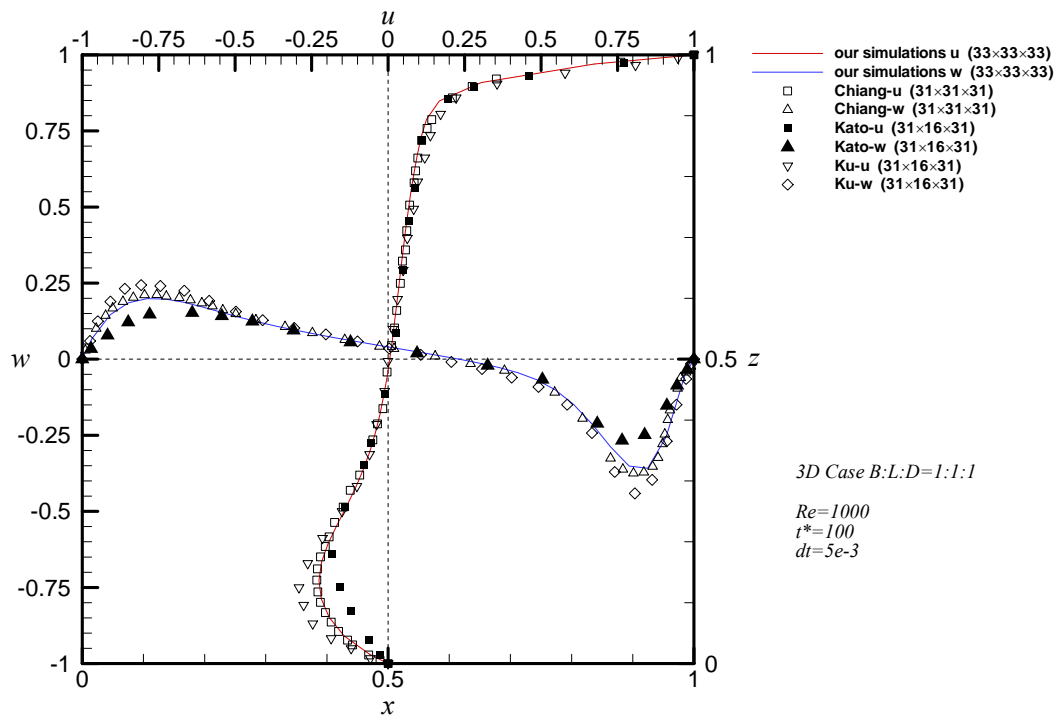
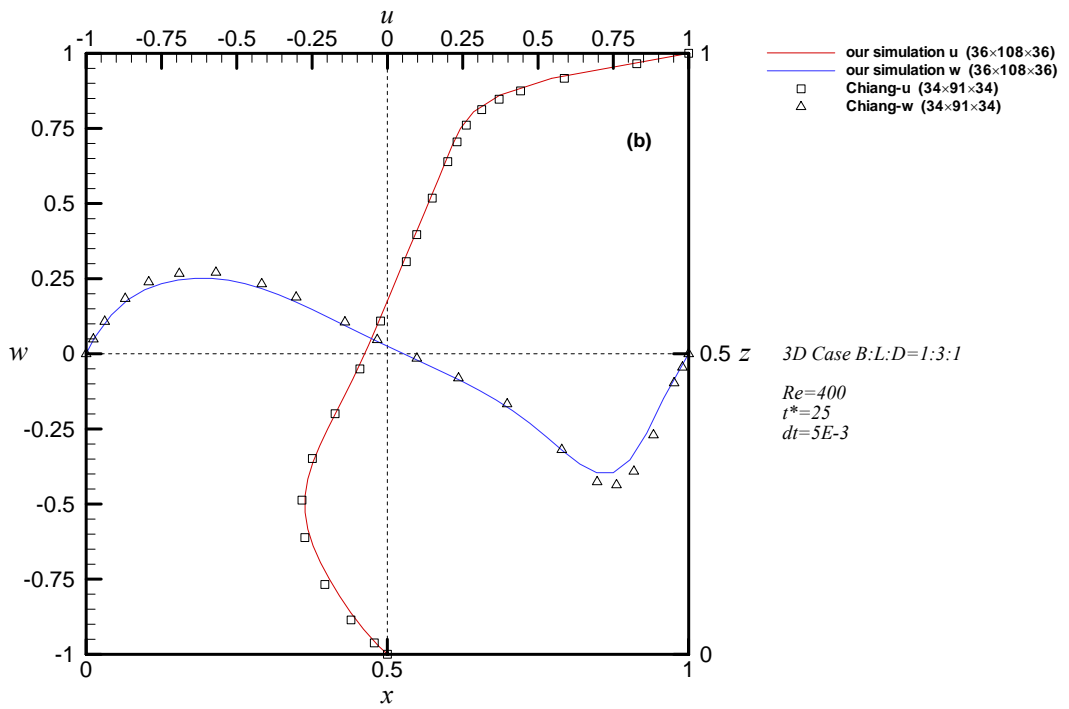
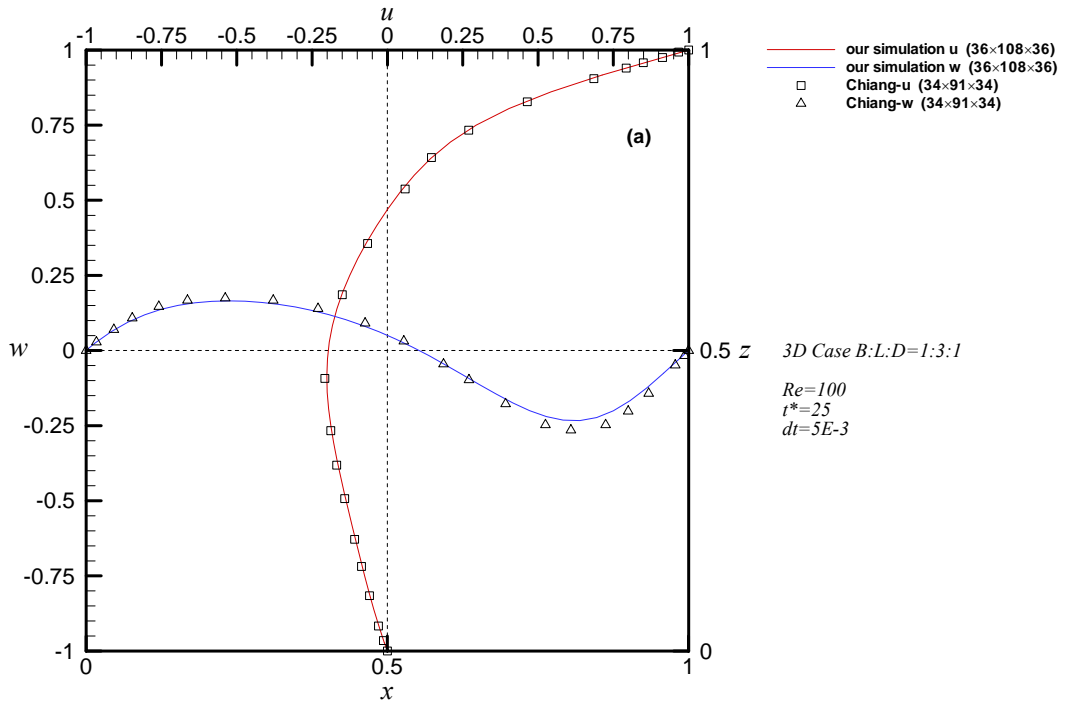


圖 4-4 : $Re=1000$ 時，並且寬、展、深之比為 1:1:1，位於 $y=1.5$ 處之 $x-z$ 剖面的三維頂部驅動矩形槽速度分佈圖與他人模擬結果之比較，我們的網格數目為： $33 \times 33 \times 33$ ，Ku 等 (1987) 為： $33 \times 16 \times 33$ ，Kato 等 (1990) 為： $33 \times 16 \times 33$ ，Chiang 等 (1997) 為： $31 \times 31 \times 31$ 。



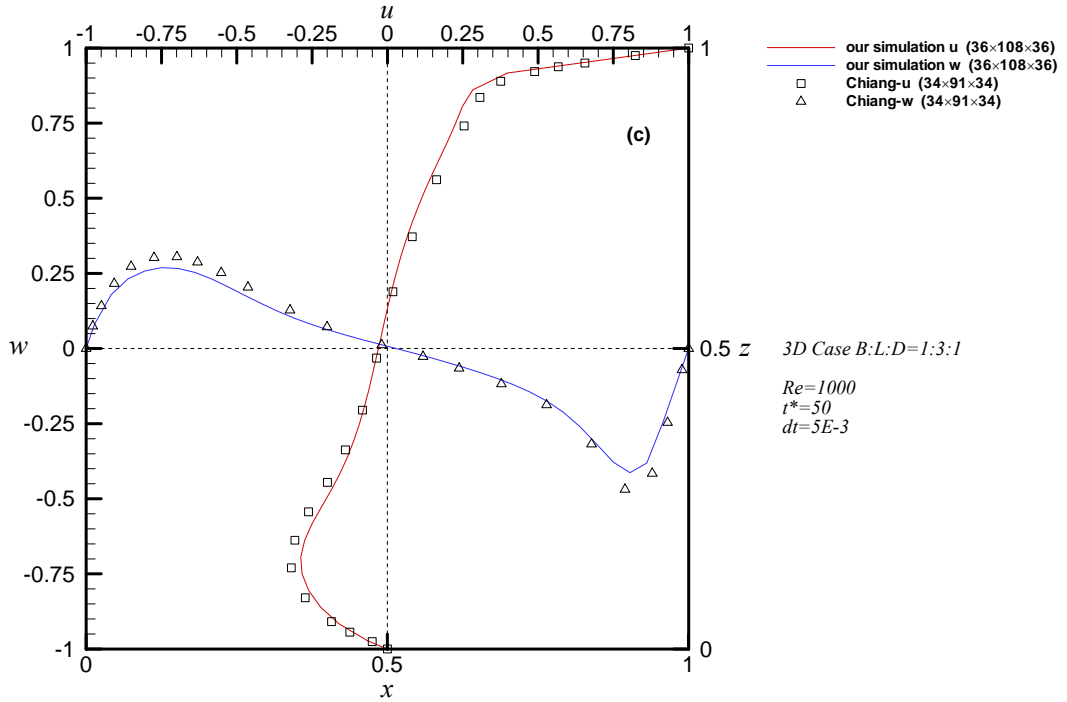


圖 4-5：在不同雷諾數下，且寬、展、深之比為 1:3:1，位於 $y=1.5$ 處之 $x-z$ 剖面的三維頂部驅動矩形槽速度分佈圖與他人模擬結果之比較，我們所採用的網格數目為： $36 \times 108 \times 36$ ，Chiang(1998)為： $34 \times 91 \times 34$ ，其中(a) $Re=100$ ，(b) $Re=400$ ，(c) $Re=1000$ 。

4-3 不同雷諾數下之流場渦旋結構變化觀察與分析

本研究主要之目的為觀察並分析，雷諾數對三維 LDC 流場之渦旋結構的影響，而主要的觀察重點為雷諾數對 ACFE 對稱面渦旋結構之影響，雷諾數對 TGL-渦旋的影響，以及 TGL-渦旋對矩形槽展長方向運動之影響。

4-3-1 雷諾數對於對稱面 ACFE 渦旋結構之影響

於 Koseff 與 Street(1984)、Aidun 等(1991)在三維 LDC 流場之實驗研究，以及 Freitas 與 Street(1988)之數值模擬三維 LDC 流場之研究中，可以發現三維 LDC 流場，主要有底下特徵：(1)位於對稱面 ACFE 之流場，存在三個較明顯之渦旋結構，如圖 4-6 所示，分別為主渦旋(primary eddy)、上游次渦旋(upstream secondary eddy)與下游次渦旋(downstream secondary eddy)。(2)另一個三維 LDC 流場特徵，為位於矩形槽底部，旋轉方向與驅動方向平行之成對 TGL-渦旋，如圖 4-8 所示。

為了觀察雷諾數對上述對稱面 ACFE 渦旋結構之影響，我們藉由不同雷諾數下，渦度 ω_y 於對稱面 ACFE 之等值線圖，以及 u 、 w 之速度向量圖來觀察。其中 ω_y 之值從 $\omega_y = 1$ 到 $\omega_y = -1$ ，虛線代表小於零之 ω_y 等值線，實線則代表大於等於零之 ω_y 等值線，見圖 4-8 與圖 4-9 所示。如此可以發現主渦旋的幾何大小，會隨著雷諾數之增大而變大，直到雷諾數大於 1000 以後，主渦旋之幾何大小已無明顯改變。另外當 $Re=100$ 時，除了主渦旋結構較小外，其上、下游次渦旋也未發展成形，因此不管是於 ω_y 之等值線圖或於 u 、 w 之速度向量圖觀察，皆未有明顯的渦旋結構產生，直到當雷諾數大於 1000 後，主渦旋、上游次渦旋與下游次渦旋，才開始產生較明顯之渦旋結構。而由 u 、 w 之速度向量圖可以明顯地發現主渦旋的中心位置，會隨著雷諾數的增大，而往對稱面 ACFE 之幾何中心靠近。若

進一步量測主渦漩的中心位置，將會更確定此流場特徵，如圖 4-10 所示。此與 Chiang 等(1998)之研究結果有相同的趨勢，表 4-1 為與 Chiang 等(1998)之主渦漩中心位置之座標比較。

雷諾數	我們的模擬結果(3D) 之坐標位置(x,z)	Chiang(1998)的模擬結果 之坐標位置(x,z)
100	(0.6157,0.7932)	(0.6127,0.7333)
400	(0.5404,0.5929)	(0.5722,0.5760)
1000	(0.5293,0.5730)	(0.5319,0.5443)
1300	(0.5338,0.5730)	N/A
1500	(0.5005,0.5442)	N/A

表 4-1:主渦漩在不同雷諾數下我們的數值模擬結果與 Chiang(1998)之研究數據，(x,z)座標的比較。

4-3-2 雷諾數對於 TGL-渦漩結構之影響與變化觀察

上述之第二個流場特徵，為由 Koseff 與 Street(1984)所命名之 TGL-渦漩，為一沿著展長方向於靠近下游處之 y-z 剖面上，其旋轉方向與驅動方向平行之成對渦漩結構，圖 4-8 為此流場特徵之簡單示意圖。

為了觀察 TGL-渦漩，我們分別以 x 軸與 z 軸方向為旋轉軸的渦度 ω_x 與 ω_z ，將其值平方後相加並開根號得 ω_{xz} ，即 $\omega_{xz} = \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_z)^2}$ ，並觀察在不同雷諾數下 ω_{xz} 之等值面(iso-surface)之變化。不同雷諾數下所選取的等值面之值不同，主要是因為於低雷諾數下所產生的渦漩強度較弱，若於高雷諾數時，取相同的等值面來觀察渦漩結構的話，可能無法以肉眼觀察相同的渦漩結構。例如當 $Re=1500$ 時取 $\omega_{xz} = 0.75$ 之等值面，可以清楚地發現位於矩形槽底部平行於 SMNR 面之成對條狀渦度等值面，但是若當 $Re=1300$ 時，同樣選取 $\omega_{xz} = 0.75$ 之

等值面來觀察的話，我們會發現渦度等值面只產生在與上游壁面 PKNR 平行的位置，但當取 $\omega_{xz} = 0.3$ 之等值面來觀察 $Re=1300$ 下之渦度等值面時，便可發現位於 SMNR 平面底部有相同的渦度等值面存在，由圖 4-11 與圖 4-12 可以發現這個流場特徵。

由此也可以發現當雷諾數達到 1500 時，其渦流的強度比雷諾數 1300 時還要強，所以在 $Re=1500$ 時取等值面 $\omega_{xz} = 0.75$ 便可清楚的觀察到渦度等值面，但 $Re=1300$ 時卻必需要選較小的渦度等值面 $\omega_{xz} = 0.3$ ，才可以觀察到類似的渦度等值面。並且 $Re=1300$ 有兩對條狀渦度等值面，而 $Re=1500$ 時存在有四對渦度等值面，因此當雷諾數較高時，會有比較多對之渦度等值面產生。其中於 $Re=1300$ 時，需模擬到 $t=105$ ，而當 $Re=1500$ 時，只需模擬至 $t=80$ 便可以清楚地看見渦度等值面，而當 $Re=400$ 與 $Re=1000$ 時，模擬至無因次時間 $t=200$ 時，仍無法觀察到這樣的渦度等值面。所以由此可以發現當雷諾數越大時，展長方向之渦流結構會提早出現，並且在數量上增多；但若要產生這類的渦流結構，使得條狀渦流等值面之強度大到足夠以肉眼觀察，於我們的數值計算結果顯示，則必需於雷諾數在大於等於 1300 之後，才會開始明顯地存在。

藉由觀察圖 4-11 與圖 4-12 之 ω_{xz} 等值面圖，我們進一步推測，若觀測矩形槽 $y-z$ 剖面之速度向量圖與 ω_x 之等值線圖，應可得到 ω_{xz} 渦度等值面於 $y-z$ 橫切面上之渦流結構，見圖 4-13 與圖 4-14 所示。圖 4-13 為三維矩形槽之 $y-z$ 剖面 ($x=0.528$) v 、 w 速度向量圖，由此圖可以發現於 $Re=1500$ 與 $Re=1300$ 時，位於 $y-z$ 剖面底部皆出現成對之渦流結構，與 Koseff 與 Street(1984)在實驗中所觀察到之 TGL-渦流，有相似的結果。另外若以渦度 ω_x 的值從 1 到 -1 之等值線來觀察 TGL-渦流(圖 4-15)，也會發現於 $y-z$ 平面底部有成對的渦流，其產生的對數與位置就如 v 、 w 速度向量圖所示一般。

雖然由 $y-z$ 平面 v 、 w 速度向量圖與 ω_x 之等值線圖所觀察到之渦流結構，與 TGL-渦流之結構相似。但若由 $x-y$ 平面之 u - v 速度向量與 ω_z 之等值線圖上所觀察到之渦流結構(如圖 4-15 與 4-16)，也會發現與圖 4-13 以及圖 4-14 中，成對之

渦漩結構有相似的外觀。再觀察圖 4-12，發現有成對條狀之渦度等值面平行上游壁面 PKNR，一直延伸到跨過 $x=0.5$ 之下游處，而與三維矩形槽底面 SMNR 成平行，因此於圖 4-15 與 4-16 中，所發現的渦漩結構應該是位於上游條狀渦度等值面之橫切面圖。根據 Görtler(1954)的理論，這類渦漩結構是流體順著曲面邊界流動所產生的，而數值計算結果所觀察到之條狀渦度等值面，也是延著如前所述之主渦漩所構成之曲面邊界而產生，因此此渦漩結構與 Koseff 與 Street(1984)以及圖 4-13 與 4-14 中，所發現之渦漩結構同屬 TGL-渦漩。

由此可以發現以 ω_{xz} 強度，在流場中所觀察到的成對條狀之等值面，與 x - y 剖面($z=0.5$ 處)以及 y - z 剖面($x=0.528$)所觀察到的速度向量以及 ω_x 與 ω_z 所構成的等值線圖，其產生的渦漩結構位置與對數一致，所以此一 ω_{xz} 強度的等值面為是觀察 TGL-渦漩強度與位置之有效參考量。另外當雷諾數等於或小於 1000 以下時，無因次時間 $t=200$ 時，無法觀察到 TGL-渦漩的產生，於雷諾數大於 1300 之後，便可以較輕易地觀察到成對的渦漩結構，並且發現雷諾數較大時($Re=1500$)，TGL-渦漩較快出現於矩形槽底部，例如雷諾數等於 1300 時，須模擬至無因次時間 $t=105$ 時，才能觀察到 TGL-渦漩的存在，而當雷諾數等於 1500 時，只需模擬至無因次時間 $t=75$ 時，便可以觀察到 TGL-渦漩結構的產生。

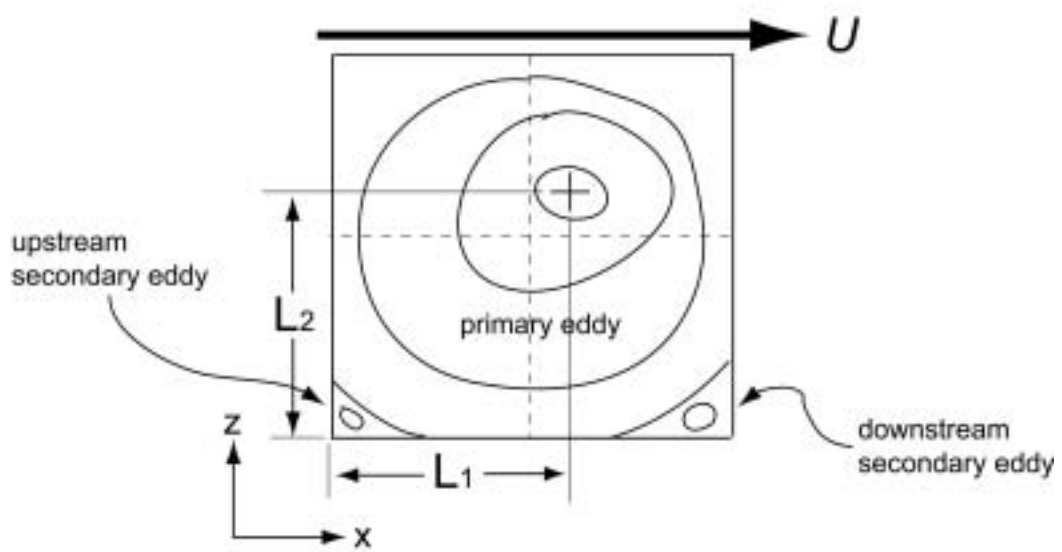
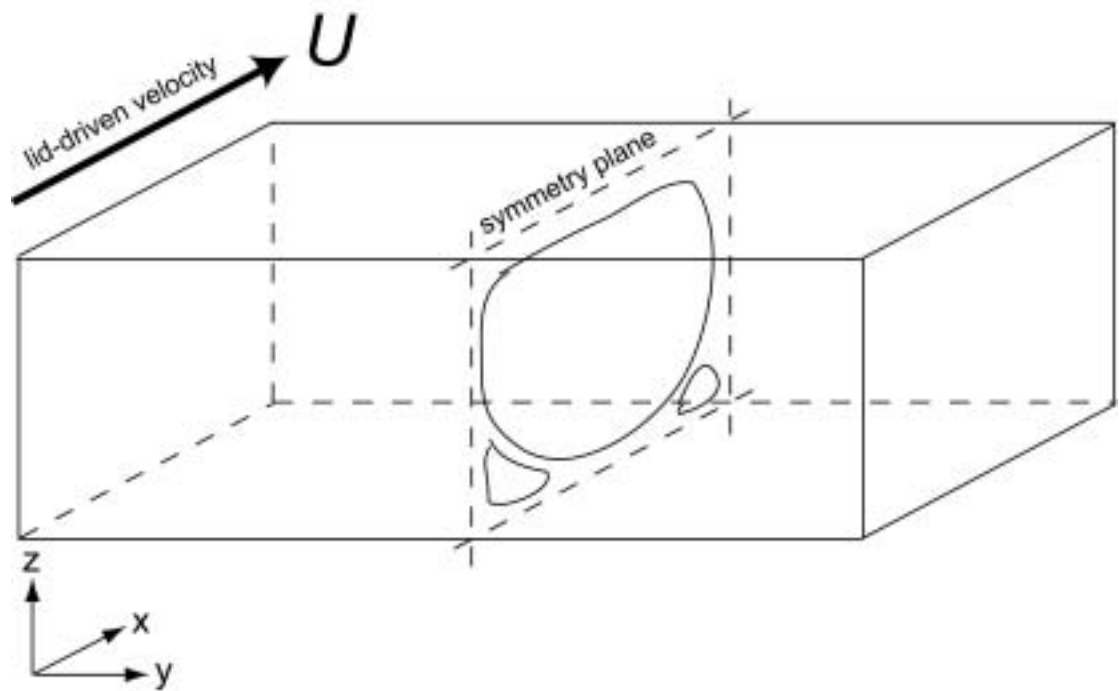


圖 4-6:三維頂部驅動矩形槽 x - z 剖面之流場示意圖

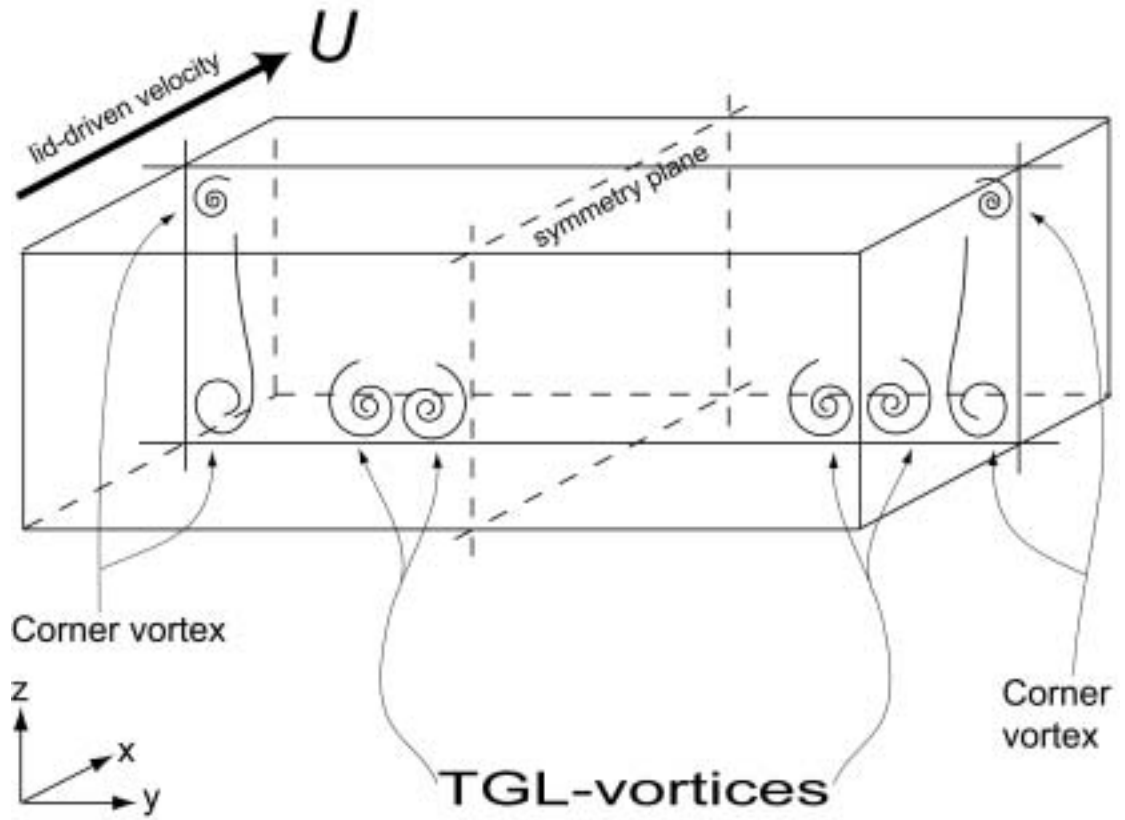


圖 4-7:三維頂部驅動矩形槽 y - z 剖面所產生之 TGL-渦旋流場示意圖

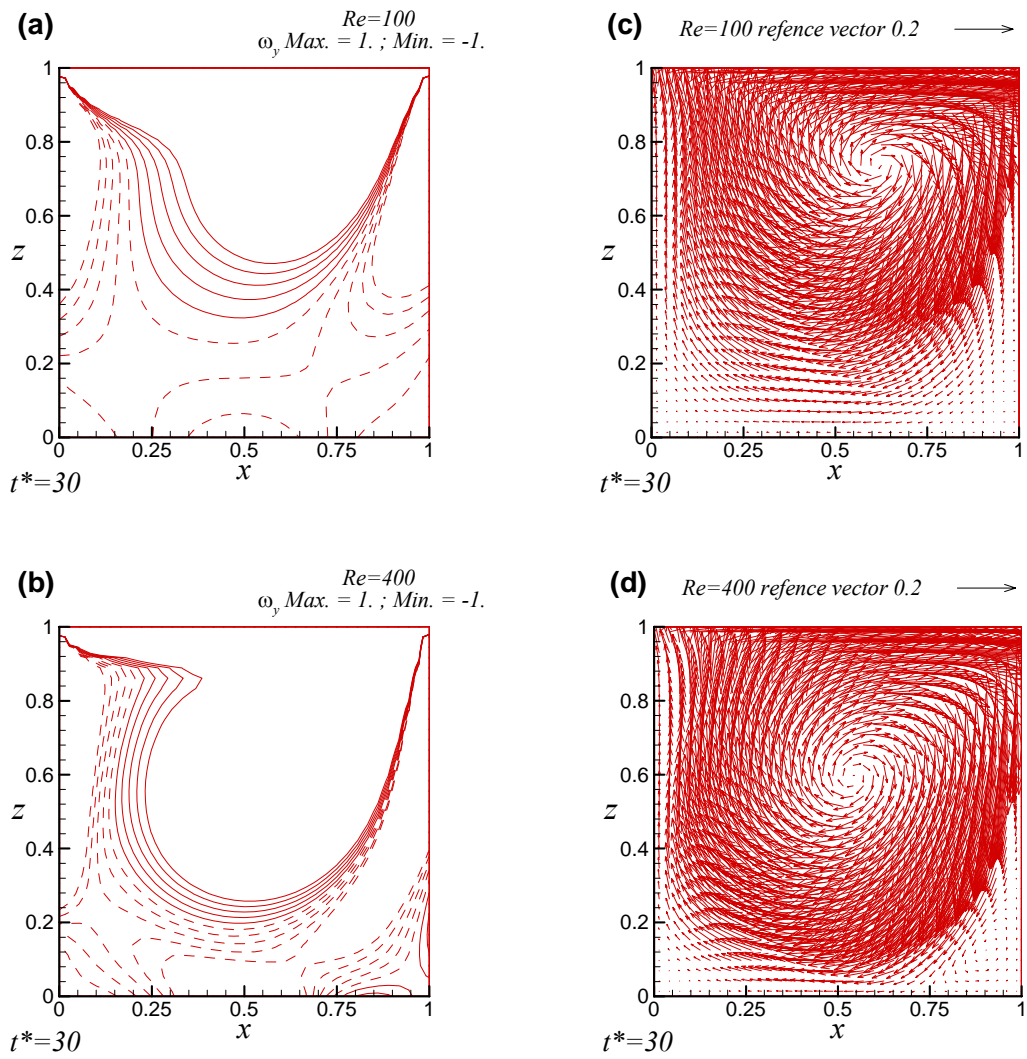


圖 4-8:三維頂部趨動矩形槽 $x-z$ 剖面 ω_y 之等值線與 $u-w$ 速度向量圖

ω_y :(a) $Re=100$;(b) $Re=400$

$u-w$: (c) $Re=100$;(d) $Re=400$

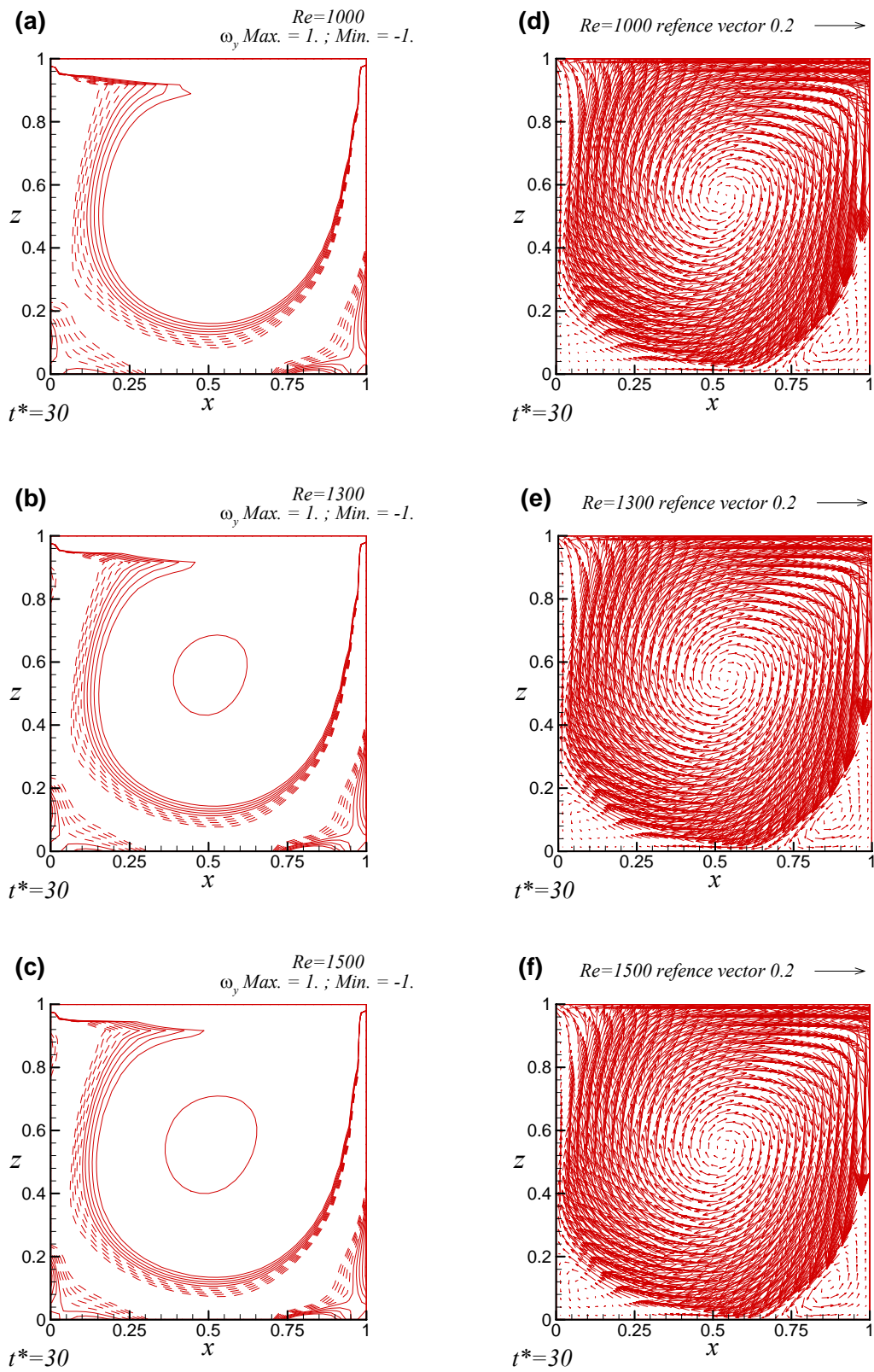


圖 4-9:三維頂部趨動矩形槽 $x-z$ 剖面 ω_y 之等值線與 $u-w$ 速度向量圖

ω_y :(a) $Re=1000$;(b) $Re=1300$;(c) $Re=1500$

$u-w$: (d) $Re=1000$;(e) $Re=1300$;(c) $Re=1500$

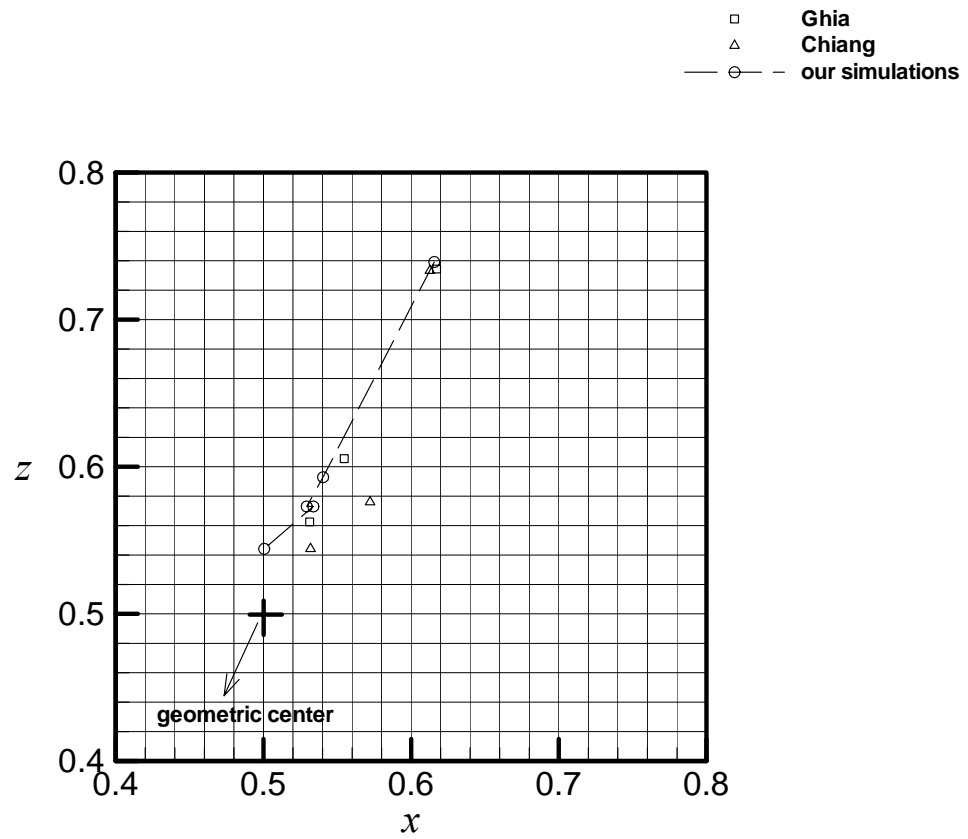


圖 4-10:主渦漩中心位置在不同雷諾數下，於對稱面 ACFE 的分佈圖，與 Chiang 等(1998)的數據做比較。

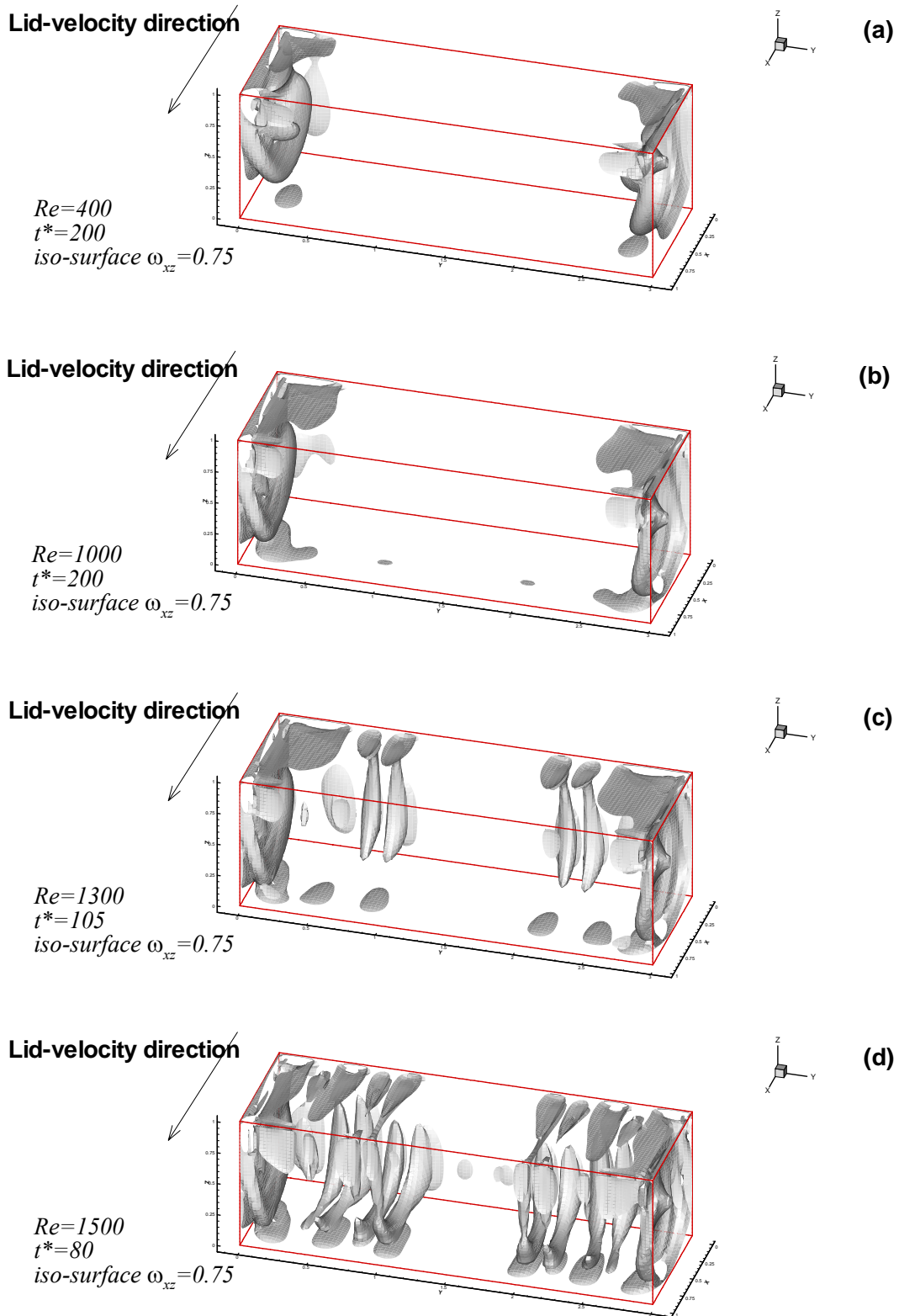


图 4-11: iso-surface:(a) $Re=400; \omega_{xz}=0.75$;(b) $Re=1000; \omega_{xz}=0.75$;
 (c) $Re=1300; \omega_{xz}=0.75$;(d) $Re=1500; \omega_{xz}=0.75$ 。

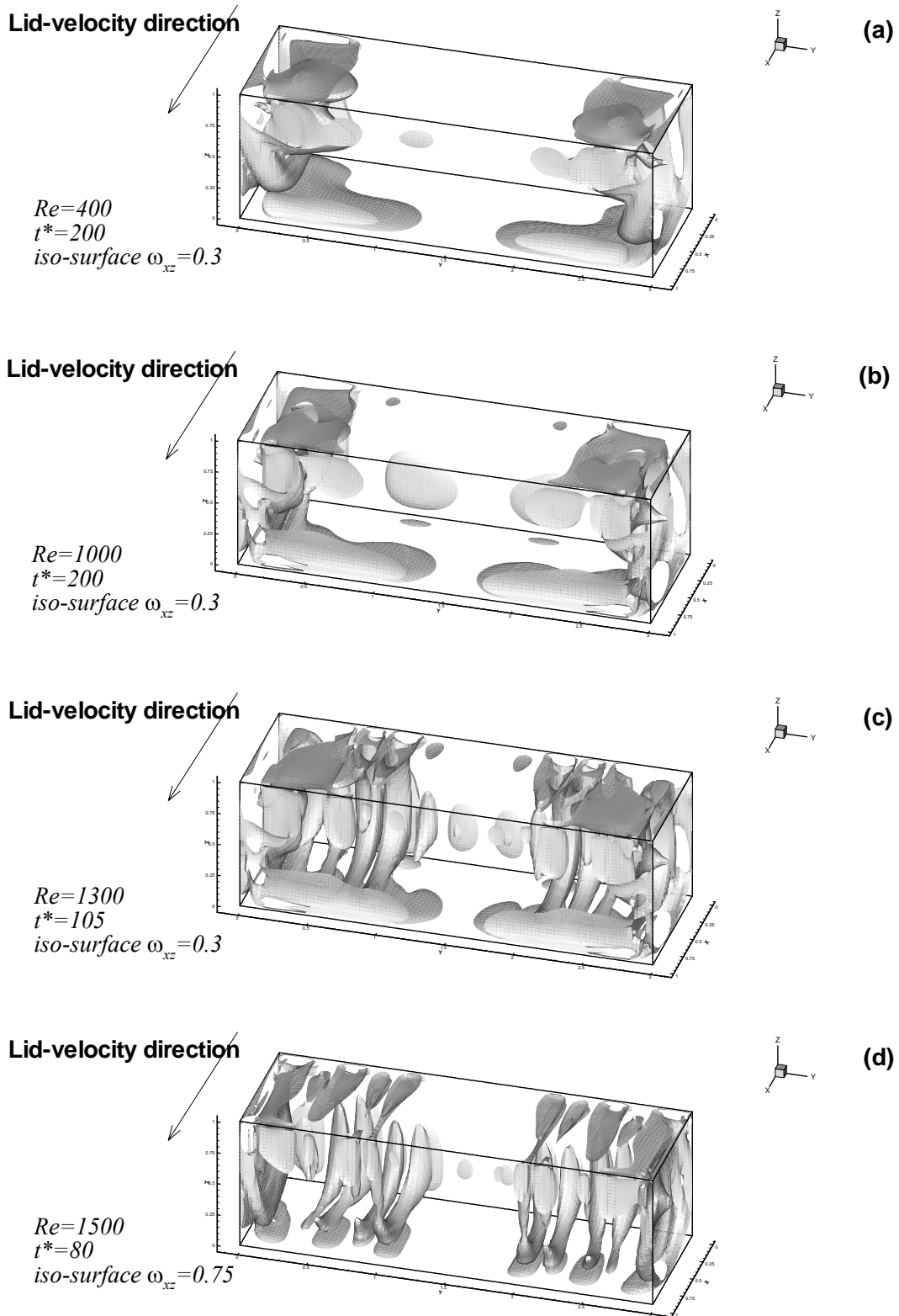


图 4-12: iso-surface:(a) $Re=400; \omega_{xz}=0.3$;(b) $Re=1000; \omega_{xz}=0.3$;
 (c) $Re=1300; \omega_{xz}=0.3$;(d) $Re=1500; \omega_{xz}=0.75$ 。

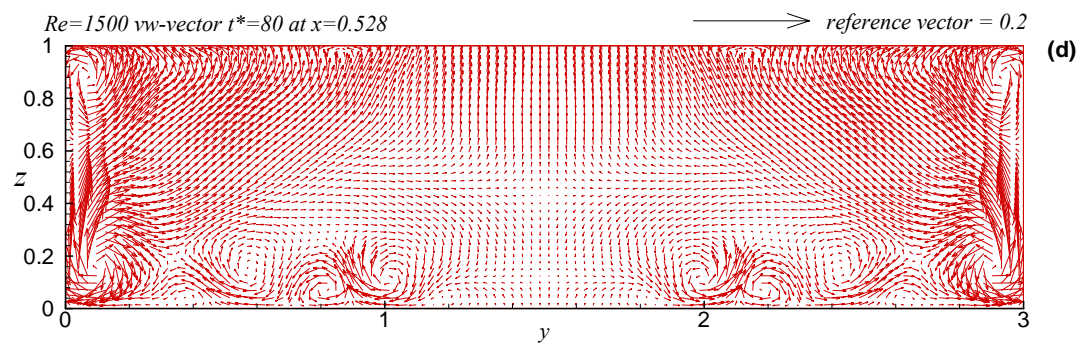
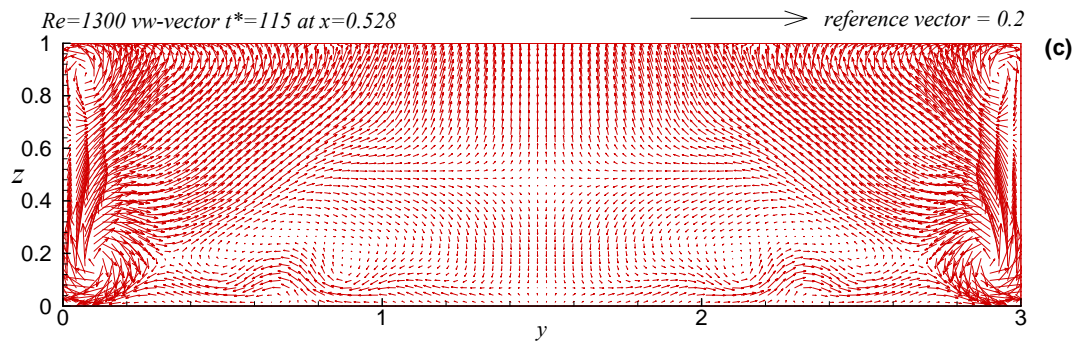
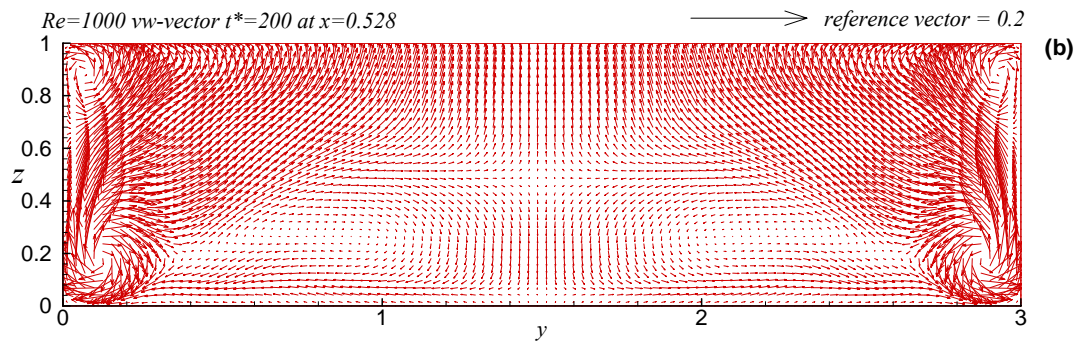
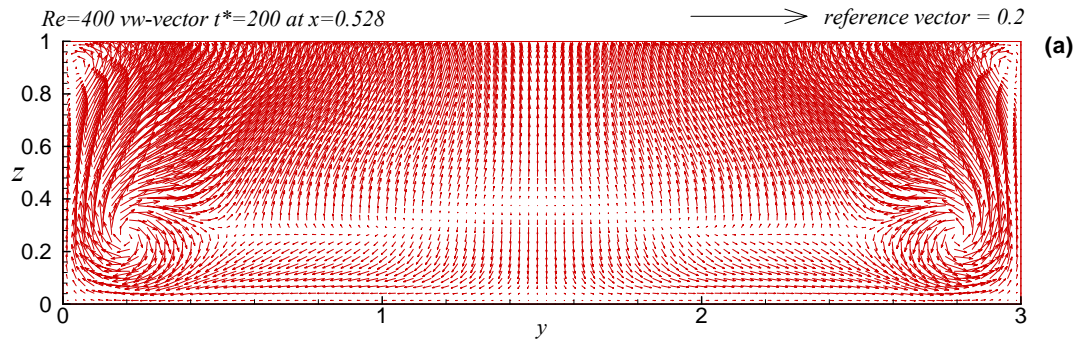


圖 4-13:當 $x=0.528$ 時, y - z 剖面速度向量圖。

(a) $Re=400$;(b) $Re=1000$;(c) $Re=1300$;(d) $Re=1500$ 。

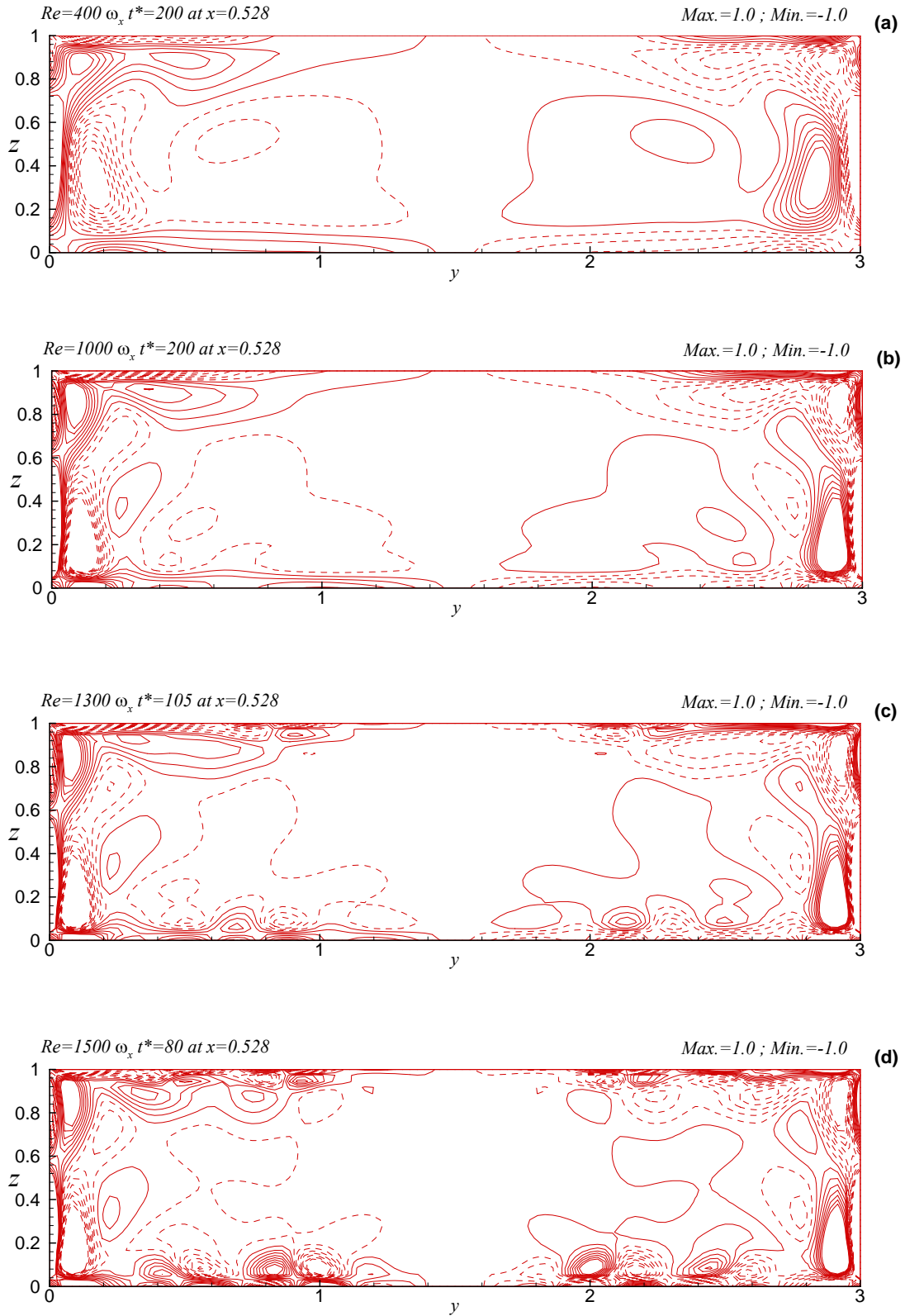


圖 4-14: y - z 剖面 ω_x 等位線圖。(a) $Re=400$; (b) $Re=1000$; (c) $Re=1300$; (d) $Re=1500$ 。

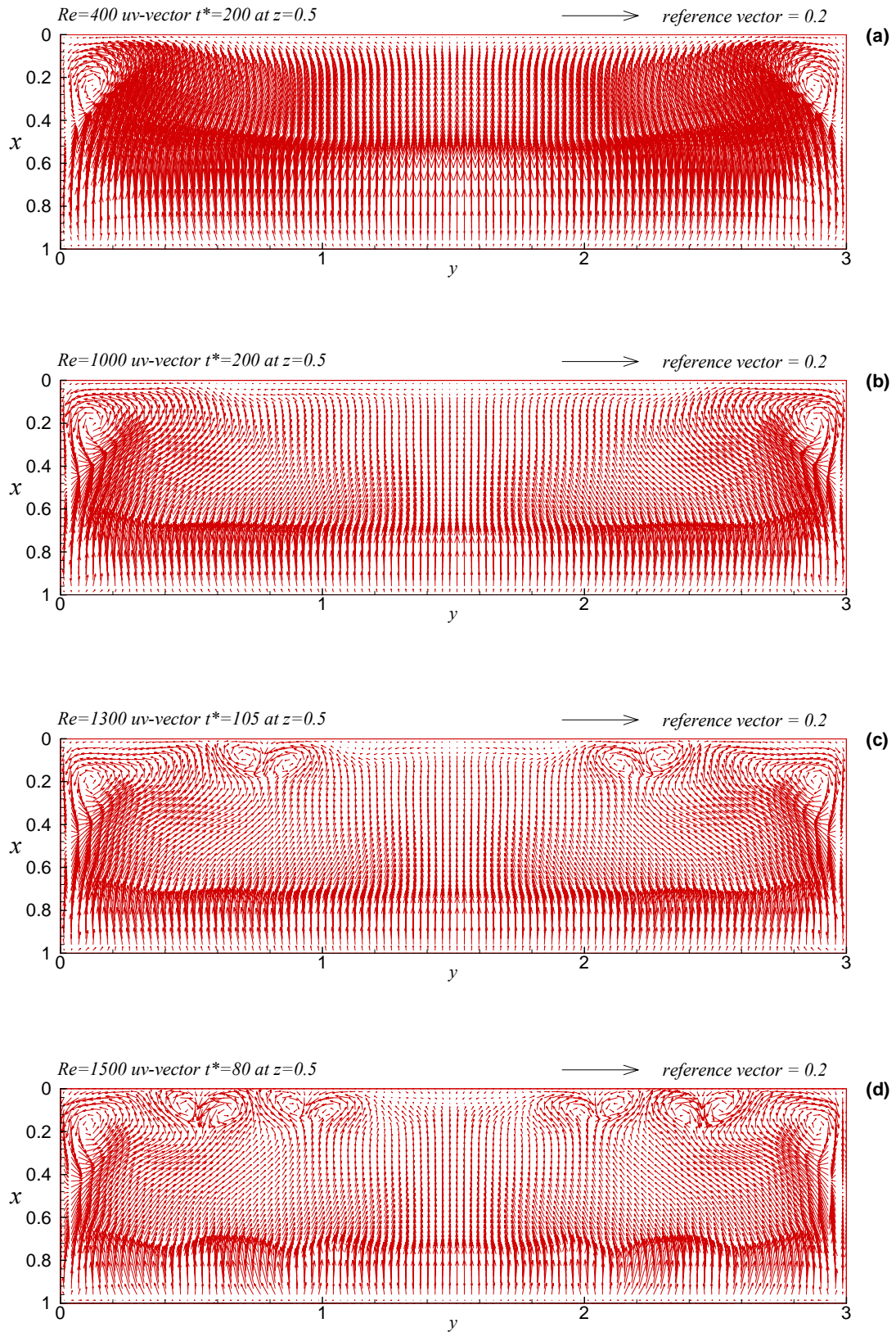


圖 4-15: x - y 剖面速度向量圖。(a) $Re=400$;(b) $Re=1000$;(c) $Re=1300$;(d) $Re=1500$ 。

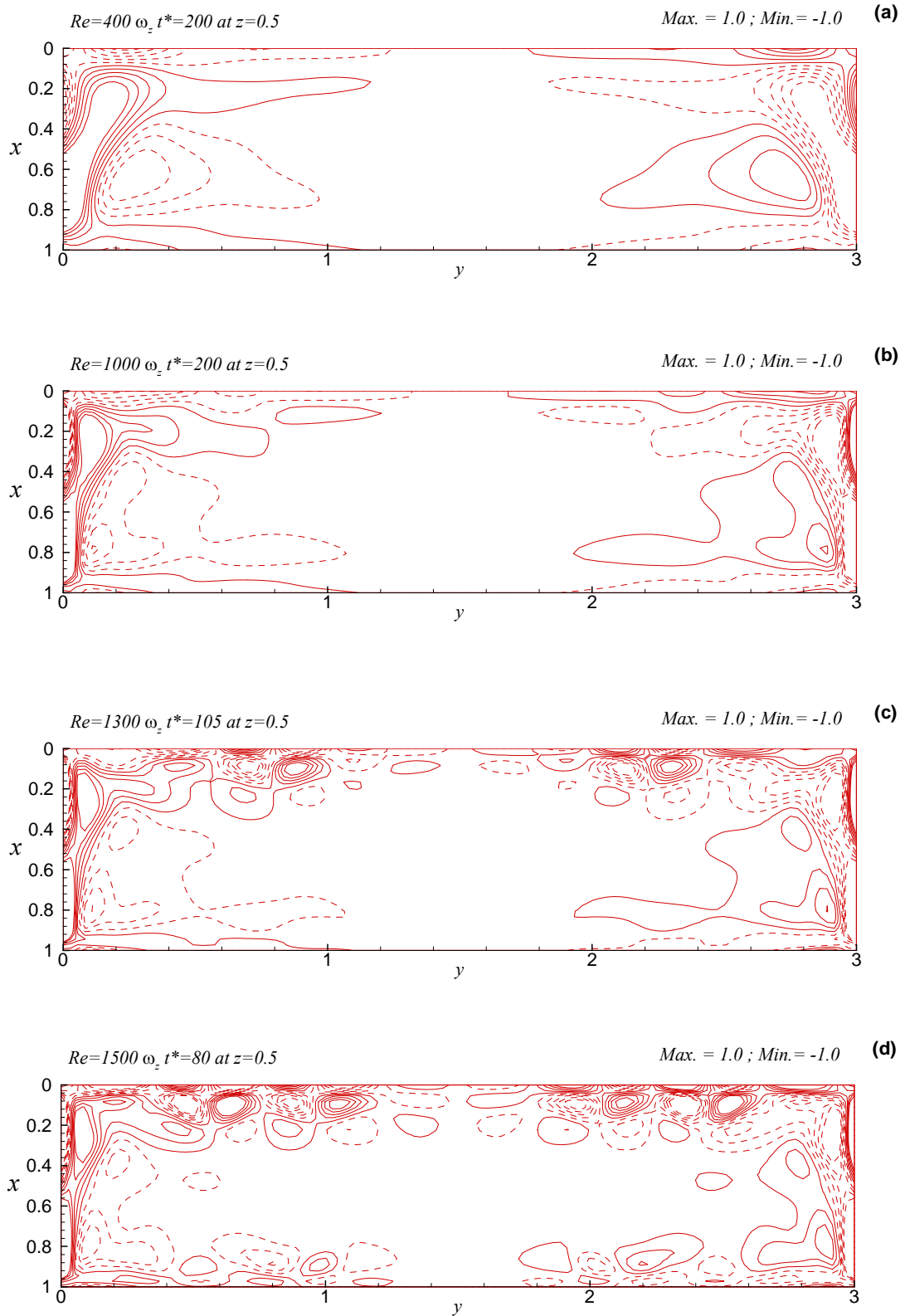


圖 4-16: x - y 剖面 ω_z 等位線圖。(a) $Re=400$; (b) $Re=1000$; (c) $Re=1300$; (d) $Re=1500$ 。

4-4 TGL-渦漩對於上、下游流場在展長方向擾動的觀察

由圖 4-11 與圖 4-12 發現了條狀之渦漩結構，於沿著主渦漩所產生的環狀曲面上形成；相較於 y 方向之流場運動，此條狀的渦漩結構，其運動方向與 y 方向之流場運動方向成近似垂直，而此垂直於展長方向的條狀渦漩結構，造成展長方向流場之擾動，圖 4-17~圖 4-20 為 x - y 平面位於 $z=0.0556$ ，於不同無因次時間下之 u - v 速度向量圖。可以發現當雷諾數未超過 1000 時，流場於展長方向並沒有明顯的產生擾動現象，若我們觀察圖 4-19 與 4-20 時，會發現於雷諾數達到 1300 時，而模擬時間 $t=105$ 之後，流場在位於靠近上游大約 $x=0.2$ 之展長方向，流場會開始產生明顯之波動(wavy)擾動現象。而相較於上游處的展長方向的擾動，位於下游處大約 $x=0.79$ 處之展長方向的擾動，沒有如上游之擾動明顯，而當 $Re=1500$ 時，我們模擬至 $t=80$ 時，更發現於上游處之擾動現象更加地明顯，並且擾動的幅度也更大，而位於下游處之流場雖然沒有上游處的擾動來的明顯，但是與 $Re=1300$ 時比較起來，流場顯得更加紊亂，其擾動的幅度也比 $Re=1300$ 時大，並且更早出現。

若從 x - y 平面位於 $z=0.0556$ 觀察 ω_y 在展長方向的擾動，也可以發現會和之前 x - y 平面之 u - v 速度向量圖有相同之擾動現象(圖 4-21~圖 4-24)，並且一樣是位於上游所產生的波動擾動現象會比下游明顯，並且隨著雷諾數的增加其擾動將提早發生且變得更明顯。

所以此一擾動現象應是受條狀渦漩結構產生之影響，因為若觀察 ω_{xz} 在不同雷諾數下且於不同的模擬時間下之等值面圖，我們會發現在未產生這些條狀渦旋時，由 x - y 平面之速度向量圖與 ω_y 之等值線圖，並無法觀察出在展長方向有呈現出明顯波浪形之擾動產生，但如果當我們所觀察到的 ω_{xz} 等值面圖已經出現了條狀的渦漩結構，則便可以於同時間下之 x - y 平面的 u - v 速度向量圖與 ω_y 之等值線圖，觀察出較明顯波浪形之擾動產生。因此我們發現 TGL-渦漩之產生，會對位於矩形槽靠近底部之展長方向的流場運動造成擾動。

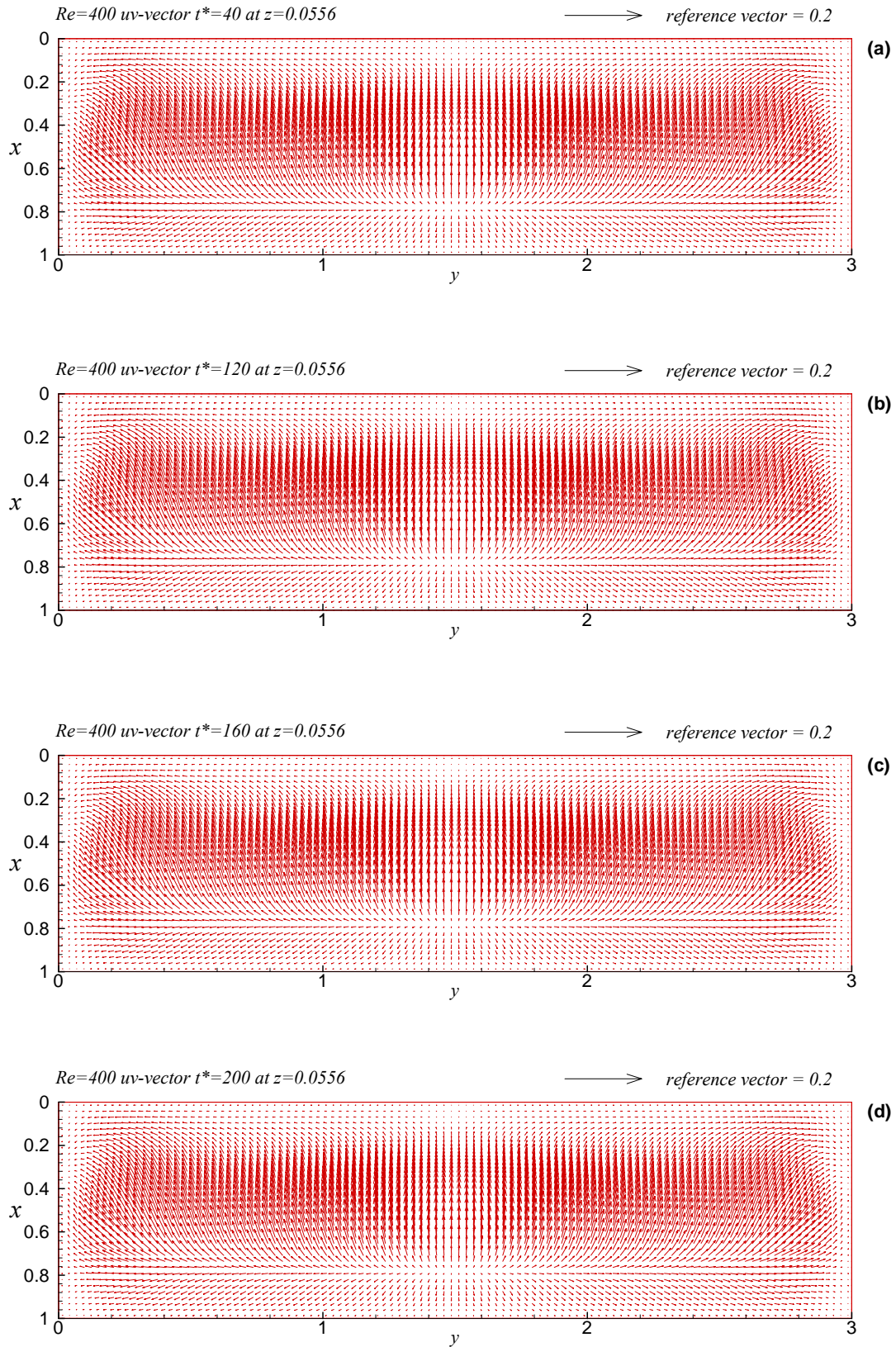


圖 4-17：當 $Re=400$ 時 x - y 剖面之 u - v 速度向量圖。
 (a) $t^*=40$; (b) $t^*=120$; (c) $t^*=160$; (d) $t^*=200$ 。

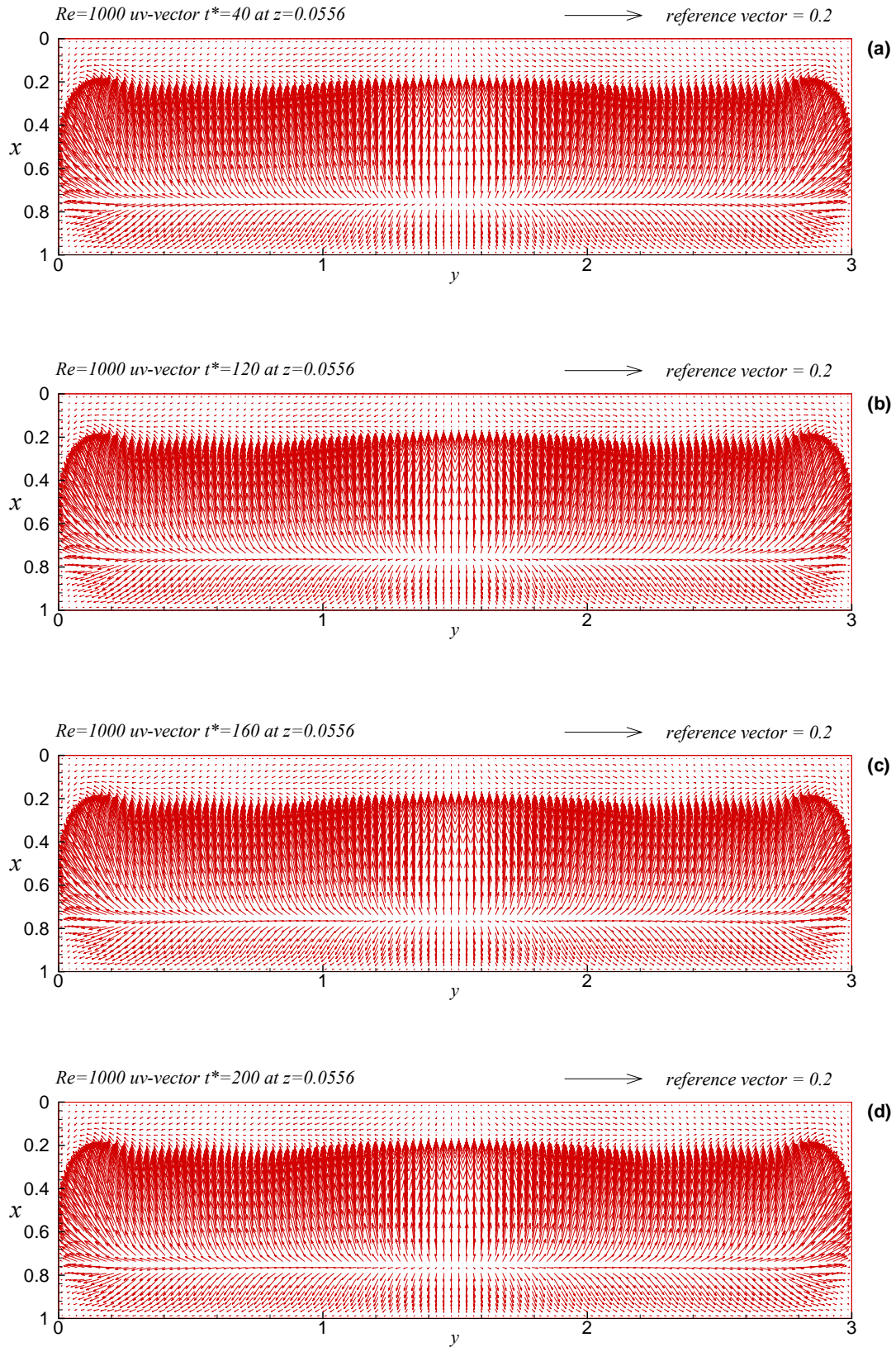


圖 4-18：當 $Re=1000$ 時 $x-y$ 剖面之 $u-v$ 速度向量圖。
 (a) $t^*=40$; (b) $t^*=120$; (c) $t^*=160$; (d) $t^*=200$ 。

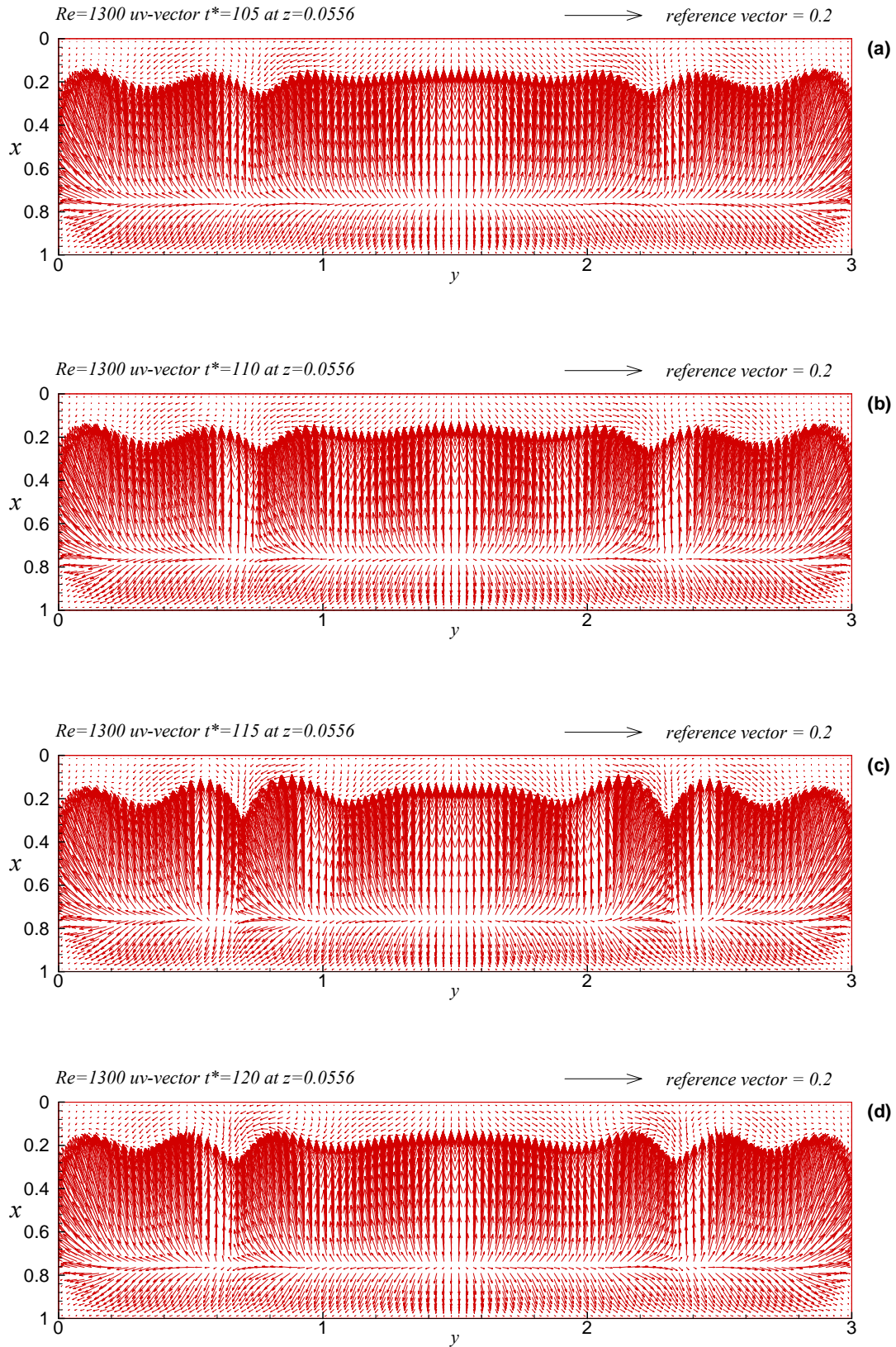


圖 4-19：當 $Re=1300$ 時 x - y 剖面之 u - v 速度向量圖。
 (a) $t^*=105$; (b) $t^*=110$; (c) $t^*=115$; (d) $t^*=120$ 。

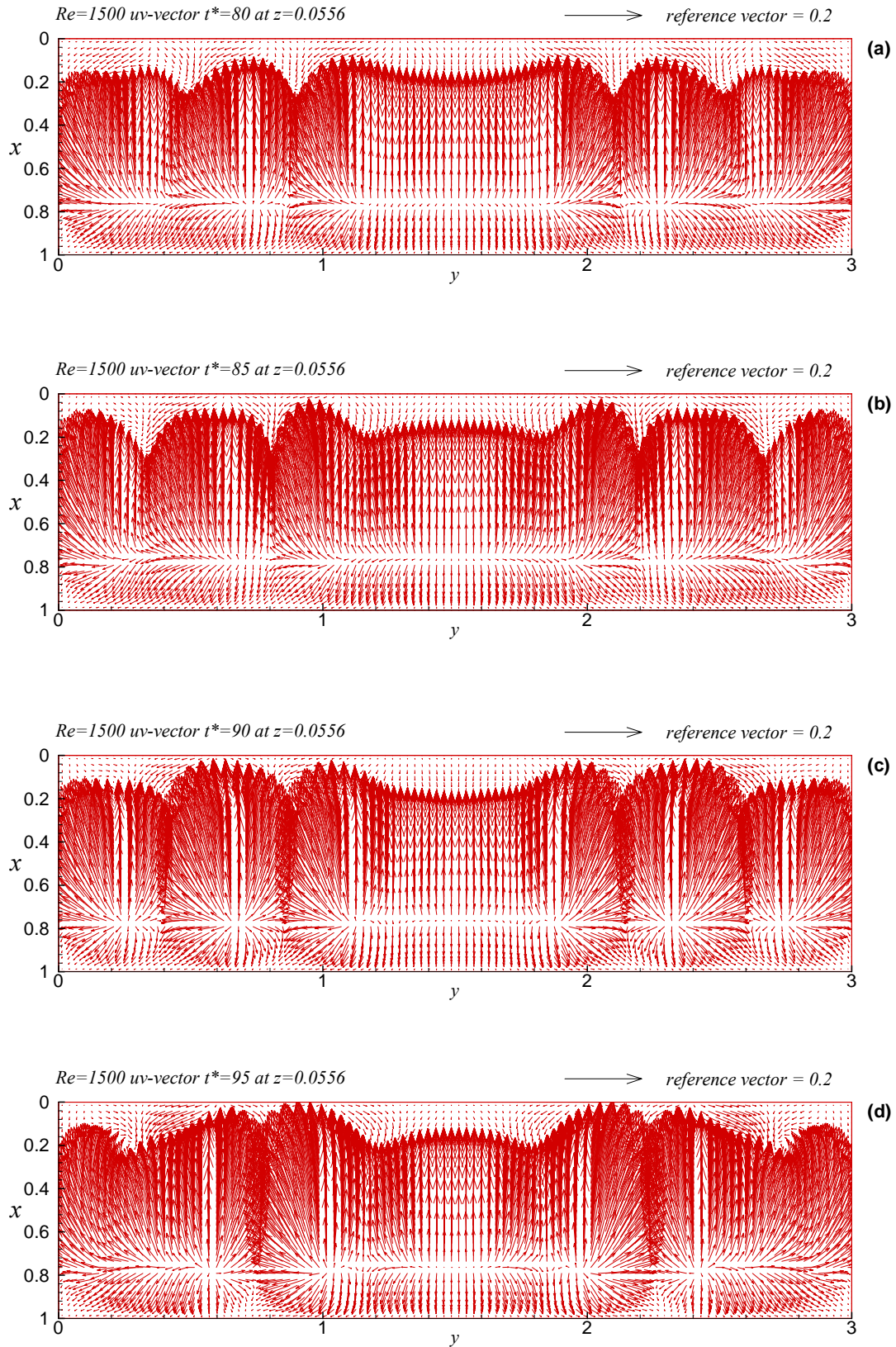


圖 4-20：當 $Re=1500$ 時 x - y 剖面之 u - v 速度向量圖。
 (a) $t^*=80$; (b) $t^*=85$; (c) $t^*=90$; (d) $t^*=95$ 。

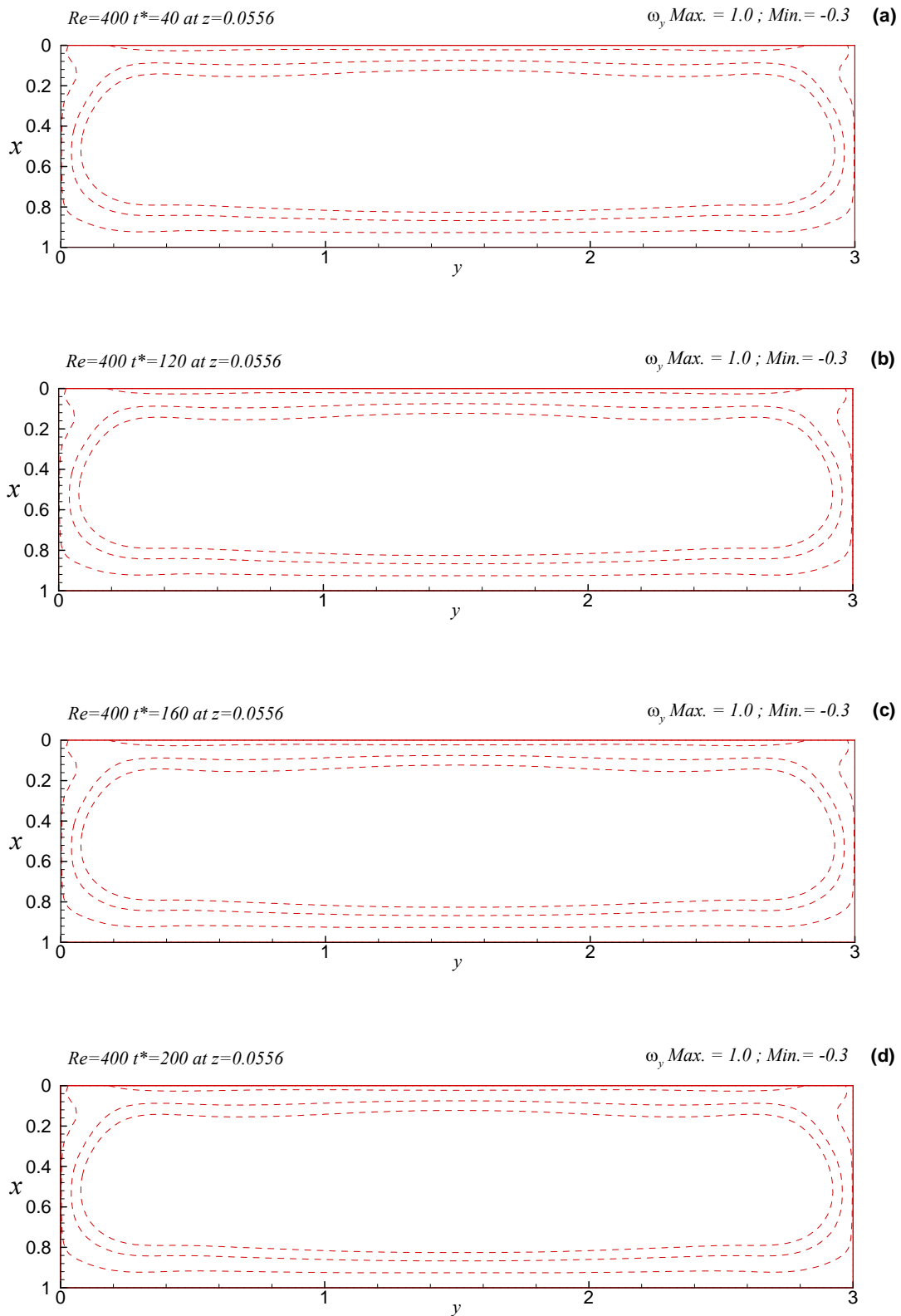


圖 4-21：當 $Re=400$ 時 x - y 剖面之 ω_y 等值線圖，等值線圖最大值為 $\omega_y=1$ ，最小值為 $\omega_y=-0.3$ 。(a) $t^*=40$;(b) $t^*=120$;(c) $t^*=160$;(d) $t^*=200$ 。

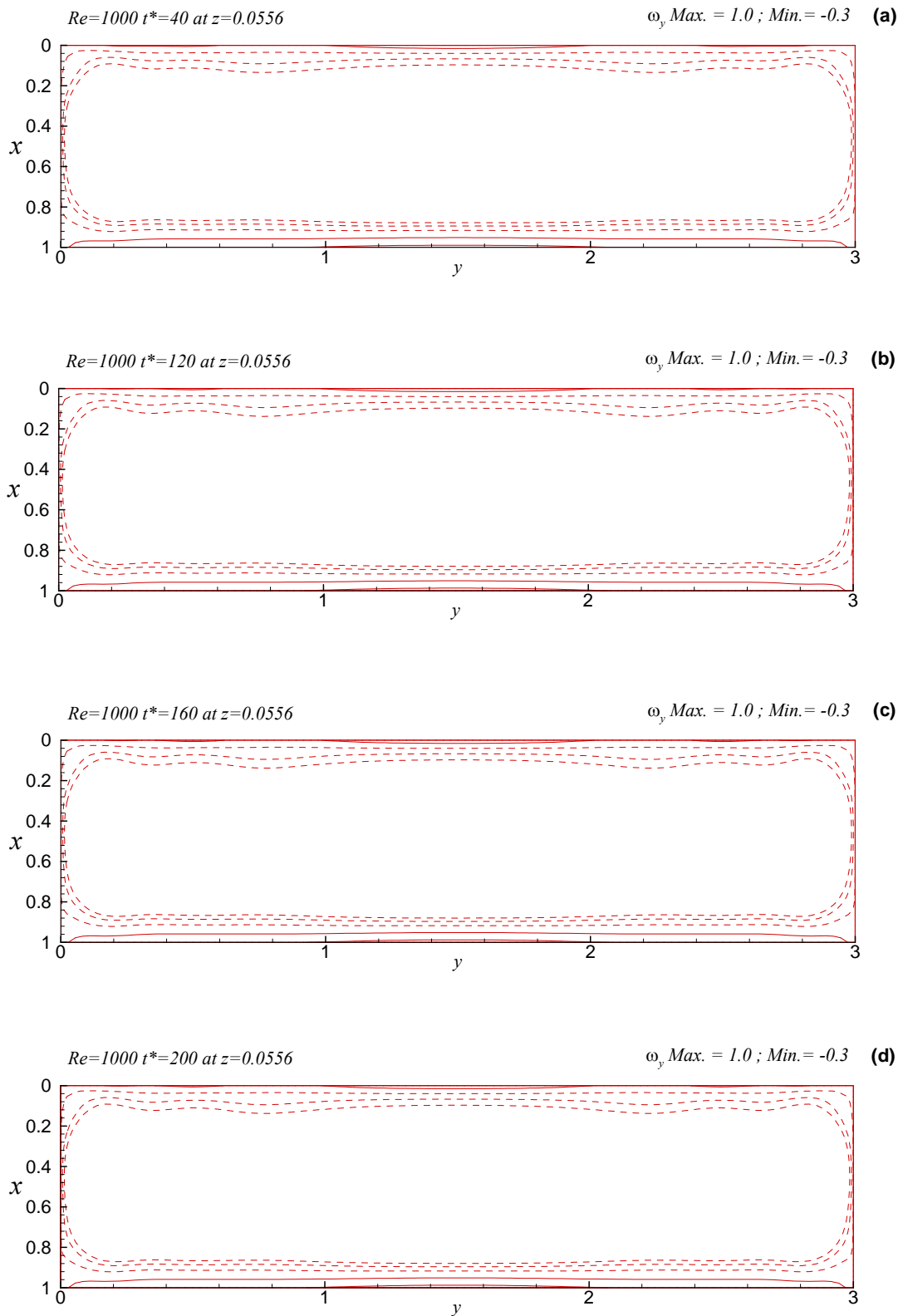


圖 4-22:當 $Re=1000$ 時 x - y 剖面之 ω_y 等值線圖，等值線圖最大值為 $\omega_y=1$ ，最小值為 $\omega_y=-0.3$ 。(a) $t^*=40$;(b) $t^*=120$;(c) $t^*=160$;(d) $t^*=200$ 。

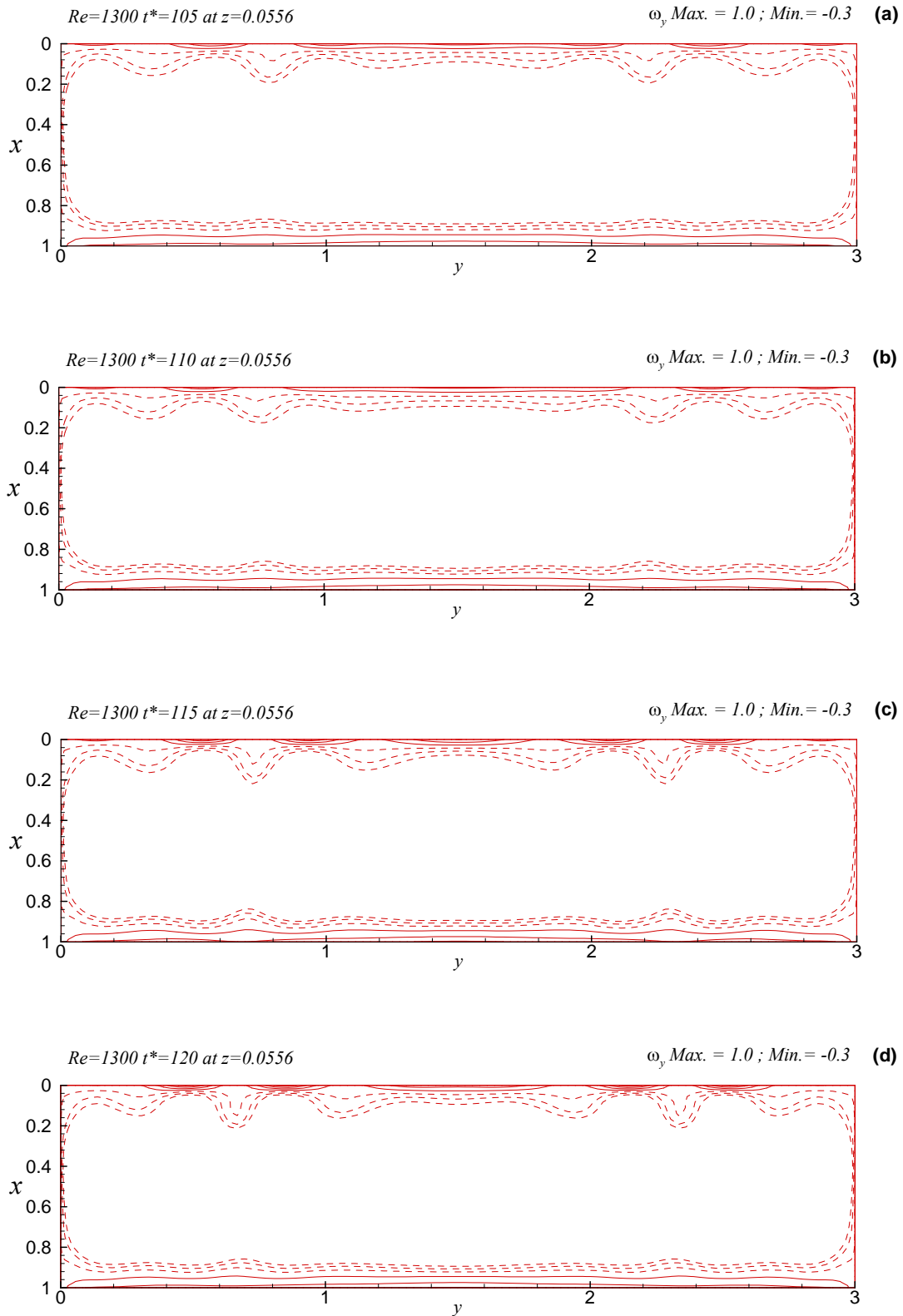


圖 4-23:當 $Re=1300$ 時 x - y 剖面之 ω_y 等值線圖，等值線圖最大值為 $\omega_y=1$ ，最小值為 $\omega_y=-0.3$ 。(a) $t^*=105$;(b) $t^*=110$;(c) $t^*=115$;(d) $t^*=120$ 。

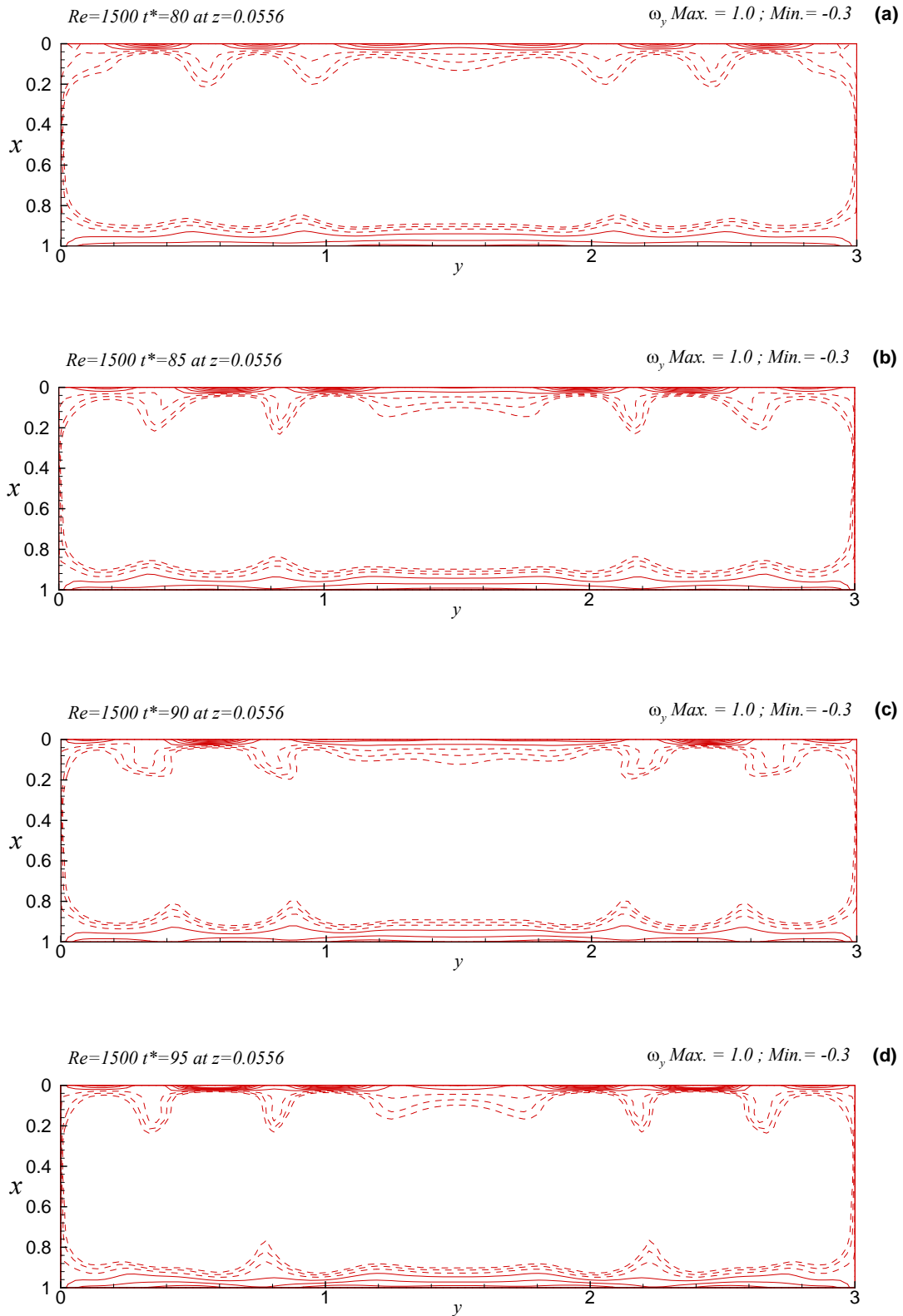


圖 4-24:當 $Re=1500$ 時 x - y 剖面之 ω_y 等值線圖，等值線圖最大值為 $\omega_y=1$ ，最小值為 $\omega_y=-0.3$ 。(a) $t^*=80$;(b) $t^*=85$;(c) $t^*=90$;(d) $t^*=95$ 。

伍、結論與未來展望

我們以二階準度之有限差分近似一 Navier-Stokes 方程組與不可壓縮流場的連續方程式，求解四個流場變數 u 、 v 、 w 、 P ，我們由所獲得之速度場，進而推求出流場的各方向之渦度值(ω_x 、 ω_y 、 ω_z)與渦度強度(ω_{xz})，並且使用這些速度場的向量圖以及渦度場的等值線與等值面圖，來觀察 LDC 流場的渦旋結構。

而根據我們數值模擬的數據所觀察到的渦旋，主要在 x - z 剖面有三個較明顯的渦旋結構，為主渦旋、上游此渦旋、下游次渦旋等三個渦旋結構，在 Ghia 等(1982)二維的 LDC 與 Chiang 等(1998)三維的 LDC 研究中，他們發現了位於 $y=1.5$ 處之 x - z 剖面的主渦旋，其渦旋中心會隨著雷諾數的增加而移向 x - z 剖面的幾何中心($x=0.5, y=1.5, z=0.5$)。而在我們的數值模擬下顯示，於 $Re=400$ 、 $Re=1000$ 、 $Re=1300$ 以及 $Re=1500$ 時，主渦旋之中心位置也有相同往幾何中心移動的趨勢，可見此特徵為三維與二維 LDC 所共同擁有的。另外由速度向量圖與 ω_y 的等值線圖中，我們也可以發現位於下游的速度向量所形成的渦旋區域，比位於上游渦旋區域大；並且當雷諾數越大時，主渦旋與上、下游次渦旋之渦旋結構可以更清楚地分辨出來，此也與 Koseff 與 Street(1984)實驗中所觀察到的結果，以及 Chiang 等(1998)在數值模擬中，也都呈現出相同的流場特徵。

另外由渦旋強度 ω_{xz} 的等值面，我們也可以觀察出有成對條狀的渦旋結構，而搭配 y - z 剖面之速度向量圖與 ω_x 的等值線圖，我們也觀察出如 Koseff 與 Street(1984)的實驗中所觀察到在位於展長方向所產生的成對渦旋，此即為 TGL-渦旋。而藉由我們觀察 ω_{xz} 強度的等值面，我們可以發現此 y - z 剖面所呈現出來的成對渦旋，應該是 ω_{xz} 條狀渦旋結構在 y - z 剖面上的切面，所以 ω_{xz} 的強度所形成的條狀等值面，應該皆是屬於 TGL-渦旋。因為根據 Görtler(1954)的理論中，此類的渦旋，是流體順著曲面邊界流動所產生的，而在我們的模擬下所觀察到的條狀渦旋結構，也是順著主渦旋所產生的曲面而產生。所以若我們於 x - y 剖面觀

察速度向量圖與渦度 ω_z 之等值線圖，我們也可以發現在位於上游處的牆面也有成對的 TGL-渦漩產生；並且在我們的模擬下發現當 $Re=1300$ 而 $t=115$ 時，開始會有較明顯的 TGL-渦漩產生，而當 $Re=1500$ 時，此 TGL-渦漩的產生會更早出現($t=80$)，並且也會較明顯。

而這些與展長方向運動呈垂直的 TGL-渦漩運動，在開始產生後，也對展長方向的運動造成了擾動，我們由位於 $z=0.056$ 三維矩形槽底部的 $x-y$ 剖面便可以觀察到，當 TGL-渦漩產生時，位於此處的展長方向之運動也開始有波動的現象產生；此一波動的現象是 TGL-渦漩產生後對於展長方向的運動造成擾動而產生，而 TGL-渦漩的產生因為並非於同一時間以及同一地點出現，而是會有周期的回復性，所以在位於展長方向之擾動也會受此影響，而有周期的波動來產生，Maull & East(1963)的實驗研究中也有觀察出這樣的波動擾動現象存在，而於 Freitas & Street(1988)以及 Chiang 等(1998)的研究中也都有模擬出這樣的擾動產生，並且他們皆認為此為 TGL-渦漩所產生之擾動現象；因為此類的擾動為 TGL-渦漩所造成，所以當 TGL-渦漩還未產生時，我們還無法明顯的觀察出這樣的擾動現象產生，並且當雷諾數小於 1000 以下時，當我們一直模擬至 $t=200$ 時，仍無法觀察這樣的現象，因為根據我們的模擬，當雷諾數未到達 1300 時，並無法明顯的觀察 TGL-渦漩產生，所以對展長方向的運動還無法造成影響，如此與前人研究的結果相符合。

本研究使用相同大小之格點間距對空間離散，此對於邊界需要較細網格點解析的地方，其流場所模擬出來的結果會有於前人研究較不符合的現象，所以未來我們對於此一頂部驅動之三維矩形槽流場，應該使用如前人研究中所使用的非等間距格點來模擬流場，如此我們對於靠近邊界處小尺度之渦漩結構可以較容易解析。另一方面若提高時間積分之精確度，也可以幫助我們獲得更好的數值模擬結果，而避免因為一階準度 Euler 法所造成於時間積分上之誤差。除此之外為了讓模擬更加的符合於實際應用上，頂部驅動速度也可以選擇非平行於蓋頂面的方向，而是更接近實例的任意方向，而在位於矩形槽的底部也可以將他改變成不規

則幾何邊界，以求更接近實際的例子，讓數值模擬的結果更加具有實用性。另一方面對於此一三維頂部驅動矩形槽流場的所有渦漩結構，其了解仍不可謂完全，所以若能進一步地使用數值方法於流體中施放追蹤標記(tracer or marker)，以達到追蹤流體質點的流場可視覺化，便可以更加了解三維 LDC 的運動機制。

參考資料

1. Aidun, C. K., Triantafillopoulos, N. G., & Benson J. D. 1991 Global stability of a lid-driven cavity with throughflow : flow visualization studies, *Phys. Fluids A*, **3**, 2081-2091
2. Babu, V., Korpela, S. A. 1994 Numerical solution of the incompressible, three-dimensional Navier-Stokes equations, *Comput. Fluids*, **23**, 675-691
3. Burggraf, O. R. 1966 Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *J. Fluid Mech.*, **24**, 113-151.
4. Chiang, T. P., Hwang, R. R., & Sheu, W. H. 1996 Finite volume analysis of spiral motion in a rectangular lid-driven cavity, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **23**, 325-346.
5. Chiang, T. P., Hwang, R. R., & Sheu, W. H. 1997 On end-wall corner vortices in a lid-driven cavity, *ASME J. Fluids Engng.*, **119**, 201-204
6. Chiang, T. P., Sheu, W. H., Hwang, & R. R. 1998 Effect of Reynolds number on the eddy structure in a lid-driven cavity, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **26**, 557-579.
7. Freitas, C. J., Street, R. L., Findikakis, A. N., & Koseff, J. R. 1985 Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **5**, 561-575
8. Freitas, C. J., Street, R. L. 1988 Non-linear transient phenomena in a complex recirculating flow: a numerical investigation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **8**, 769-802.
9. Ghia, U., Ghia, K. N., & Shin, C. T. 1982 High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, **48**, 387-411.
10. Gortler, H., 1954 On the three-dimensional instability of laminar boundary layers on concave walls, NACA Technical Mem, 1375.
11. Harlow, F. H., Welch, J. E. 1965 Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, **8**, 2182-2189
12. Kato, Y., Kawai, H. & Tanahashi, T. 1990 Numerical flow analysis in a cubic cavity by the GSMAC finite-element method, *JSME Int. J. Ser. II*, **33**, 649-658(1990)
13. Koseff, J. R., Street, R. L. 1984a On end wall effects in a lid-driven cavity flow, *ASME J. Fluids Engng.*, **106**, 385-389.
14. Koseff, J. R., Street, R. L. 1984b The lid-driven cavity flow: a synthesis of qualitative and quantitative observations, *ASME J. Fluids Engng.*, **106**, 390-398.
15. Koseff, J. R., Street, R. L. 1984c Visualization studies of a shear driven three-dimensional recirculating flow, *ASME J. Fluids Engng.*, **106**, 21-29.
16. Ku, H. C., Hirsh, R. S., & Taylor, T. D. 1987 A pseudospectral method for solution

- of the three-dimensional, *J. Comput. Phys.*, **70**, 439-462.
17. Maull, D. J., East, L. F. 1963 Three-dimensional flow in cavities, *J. Fluid Mech.*, **16**, 620-632.
 18. Schreiber, R., Keller, H. B. 1983 Driven cavity flows by efficient numerical techniques, *J. Comput. Phys.*, **49**, 310-333.
 19. Taylor, G. I. 1923 Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, **223**, 289-343

其中在矩陣[A]中，各元素矩陣如下所示：

$$[a_1] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma^2 & \alpha_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_1 & \gamma^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma^2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad [a_2] = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \gamma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma^2 & \alpha_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_1 & \gamma^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma^2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$[a_3] = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \gamma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma^2 & \alpha_4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_4 & \gamma^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma^2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad [a_4] = \begin{bmatrix} \alpha_5 & \gamma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma^2 & \alpha_6 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_6 & \gamma^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma^2 & \alpha_5 \end{bmatrix}$$

$$[a_5] = \begin{bmatrix} \alpha_7 & \gamma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma^2 & \alpha_8 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_8 & \gamma^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma^2 & \alpha_7 \end{bmatrix} \quad [b] = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta^2 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中： $\beta = \frac{dx}{dy}$ ， $\gamma = \frac{dx}{dz}$

$$\alpha_1 = -(1 + \beta^2 + 2\gamma^2), \alpha_2 = -(1 + \beta^2 + \gamma^2), \alpha_3 = -(1 + 2\beta^2 + \gamma^2),$$

$$\alpha_4 = -(1 + 2\beta^2 + 2\gamma^2), \alpha_5 = -(2 + \beta^2 + \gamma^2), \alpha_6 = -(2 + \beta^2 + 2\gamma^2),$$

$$\alpha_7 = -(2 + 2\beta^2 + \gamma^2), \alpha_8 = -2(1 + \beta^2 + \gamma^2)$$

而在{B}向量中，其元素向量的下標表示 x、y、z 各方向的格點所在的位置：

而當 $i = 2, 3 \dots MI - 1$ 、 $j = 2, 3 \dots NJ - 1$ 、 $k = 2, 3 \dots LK - 1$ 時，其各原素向量如(3-7)

式之右手項所示，為 $\sigma_{i,j,k}^n \cdot (\Delta x)^2$ ，即：

$$b_{i,j,k} = \sigma_{i,j,k}^n \cdot (\Delta x)^2$$

但若遇到邊界時，我們將以(3-15)~(3-17)式，來將位於壓力格點邊界外的點，以差分式來代換，以符合 Neumann 邊界條件；除此之外我們為了簡化(3-15)~(3-17)式中的右手項，我們將(3-15)~(3-17)式中的右手項分別令其為：

當 $i = 0$ 時：

$$\frac{1}{Re} \frac{u_{i=1,j,k} - 2u_{i=0,j,k} + u_{i=-1,j,k}}{(\Delta x)^2} = f_{1(j,k)}$$

當 $i = MI$ 時：

$$\frac{1}{Re} \frac{u_{i=MI+1,j,k} - 2u_{i=MI,j,k} + u_{i=MI-1,j,k}}{(\Delta x)^2} = f_{2(j,k)}$$

當 $k = 0$ 時：

$$\frac{1}{Re} \frac{w_{i,j,k=1} - 2w_{i,j,k=0} + w_{i,j,k=-1}}{(\Delta z)^2} = g_{1(i,j)}$$

當 $k = LK$ 時：

$$\frac{1}{Re} \frac{w_{i,j,k=LK+1} - 2w_{i,j,k=LK} + w_{i,j,k=LK-1}}{(\Delta z)^2} = g_{2(i,j)}$$

當 $j = 0$ 時：

$$\frac{1}{Re} \frac{v_{i,j=1,k} - 2v_{i,j=0,k} + u_{i,j=-1,k}}{(\Delta y)^2} = h_{1(i,k)}$$

當 $j = NJ$ 時：

$$\frac{1}{Re} \frac{v_{i,j=NJ+1,k} - 2v_{i,j=NJ,k} + u_{i,j=NJ-1,k}}{(\Delta y)^2} = h_{2(i,k)}$$

所以在遇到壓力邊界時，將上列六種邊界情況代入，即可得到應有的各元素向量

$b_{i,j,k}$ ，例如當在 $i = 1, j = 1, k = 2$ 時，則(3-7)式將如下：

$$\begin{aligned} P_{0,1,2}^n + \beta^2 \cdot P_{1,0,2}^n + \gamma^2 \cdot P_{1,1,1}^n - 2 \cdot (1 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot P_{1,1,2}^n + \gamma^2 \cdot P_{1,1,3}^n + \beta^2 \cdot P_{1,2,2}^n + P_{2,1,2}^n \\ = \sigma_{1,1,2}^n \cdot (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

但是因為 $P_{0,1,2}^n$ 以及 $P_{1,0,2}^n$ 在我們所計算的壓力格點上並不存在，為一虛擬點，所以

我們必須使用邊界條件將這些點代入上式，即：

當遇到 $i = 0$ 時：

$$\frac{P_{1,1,2} - P_{0,1,2}}{2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = f_{1(j,k)}$$

所以我們可以得到： $P_{0,1,2} = P_{1,1,2} - \Delta x \cdot f_{1(j,k)}$

同理當遇到 $j = 0$ 時：

$$\frac{P_{1,1,2} - P_{1,0,2}}{2 \cdot \left(\frac{\Delta y}{2}\right)} = h_{1(i,k)}$$

我們也可以得到： $P_{1,0,2} = P_{1,1,2} - \Delta y \cdot h_{1(i,k)}$

如此將 $P_{0,1,2}^n$ 與 $P_{1,0,2}^n$ 這兩點虛擬點代入，我們得到(3-7)式如下：

$$\begin{aligned} & -(1 + \beta^2 + 2\gamma^2) \cdot P_{1,1,2}^n + \gamma^2 \cdot P_{1,1,3}^n + \beta^2 \cdot P_{1,2,2}^n + P_{2,1,2}^n \\ & = \sigma_{1,1,2}^n \cdot (\Delta x)^2 + \Delta x \cdot f_{1(j,k)} + \beta^2 \cdot \Delta y \cdot h_{1(i,k)} - \gamma^2 \cdot P_{1,1,1}^n \end{aligned}$$

所以即 $b_{1,1,2} = \sigma_{1,1,2}^n \cdot (\Delta x)^2 + \Delta x \cdot f_{1(1,2)} + \beta^2 \cdot \Delta y \cdot h_{1(1,2)} - \gamma^2 \cdot P_{1,1,1}$

其它邊界之右手項之元素向量如上所述之方法即可得到。