

國立交通大學土木工程學研究所
碩士學位論文

三維頂部驅動矩形槽中流場之初始發展與演化

The Initial Development and Evolution of Flows in
a Three-Dimensional Lid-Driven Cavity

研究生：劉懷東

指導教授：蔡武廷

中華民國九十一年七月

誌 謝

光陰似箭，歲月如梭。兩年研究生涯終將結束，首先要感謝的還是指導教授蔡武廷老師的諄諄教誨，讓我重新省思自己做事的方法與態度，並體驗到唯有養成良好的習慣在遇到各種困難時才能從容不迫地面對並且解決。「做事方法紮實不投機取巧」，「態度認真不因事小而枉為」，這兩年之間，我在做事方法與態度上若有任何一丁點的進步，全都要歸功於老師的千叮萬囑。另外，亦感謝陳慶生、詹森等口試委員對本文的建議及斧正。除此之外，陳世明學弟提供了實驗室中之電腦的良好作業環境，本研究中所需的軟硬體設備皆由學弟一手包辦，在此要特別感謝他為實驗室的付出。

在研究所兩年中，感謝林嫩瑛、洪立萍學姊們在課業上總是對我助益良多；亦感謝同學陳盈良胼手胝足地修課並一同討論解決問題，互相砥礪監督彼此；學弟葉孟剛、陳世明、溫國暉，學妹劉俐鈺等人皆為我單調的研究生涯增添許多色彩，使我能專心於研究之外不至於過度苦悶，最後更要感謝我的家人在經濟上及精神上的支持，僅以本文獻給全心為我付出的母親、家人與來不及見到我研究所畢業的已故父親。

ABSTRACT

Lid-driven flow in a rectangular cavity of span to width aspect ratio of 3 : 1 and depth to width aspect ratio of 1 : 1 is simulated numerically at Reynolds number 1500 to gain physical insight into the initial development of the three-dimensional perturbation and its subsequent evolution. The emphases are on the end-wall effect which causes the initial almost-two-dimensional flow to develop into a three-dimensional flow structure, and the evolution of such a flow structure into Taylor-Gortler-like (TGL) vortices distributing along the cavity span in planes perpendicular to the lid. It is found that spanwise jet flows and corner vortices form near the end walls immediately after the start of the motion of the lid. As time proceeds, the disturbed spanwise motions in the upstream area become more complex than those in the downstream area, and the circulating motions of fluid particles in the region near the symmetric plane are more active than those near the end walls. The axes of the TGL vortices are found to stretch along the streamlines of the primary recirculating flow.

摘要

本研究探討三維矩形槽中初始為靜止，受突然平移之頂部水平驅動而發展之黏性流場。利用數值解析三維之無因次化，守恆型式 Navier-Stokes 方程式，並且滿足槽壁之邊界條件，以求得三維矩形槽中流場之速度與壓力。進一步探討此流場初始近似二維，受槽壁之影響進而發展為複雜之三維運動過程。而在兩側末端牆面出現之漩渦，以及規則出現於展延方向之 TGL(Taylor-Gortler-Like)漩渦，此二類漩渦之生成與演化亦在我們討論的範圍之內。研究結果顯示：三維矩形槽中流場初期，有一展向噴流形成使得流場由近似二維發展為三維運動，而展向噴流之生成與末端牆面漩渦的出現有密切關係；隨著無因次時間之增加，上游區域之展向運動複雜度較下游為高，而近對稱面區域之螺旋往復運動較靠近末端牆面區域為多，在展延規則出現的 TGL 漩渦，隨著主漩渦流線延伸之現象亦被證實出現在我們的計算結果中。

目 錄

誌謝	i
Abstract	ii
摘要	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
壹、 前言	1
1 . 1 問題簡述	1
1 . 2 文獻回顧	2
1 . 3 研究動機	4
貳、 控制方程式與邊界條件	7
2 . 1 控制方程式	7
2 . 2 邊界條件	8
參、 數值方法	9
3 . 1 控制方程式的離散	9
3 . 2 邊界條件的離散	13
3 . 3 壓力 Poisson 方程式的求解	15
3 . 4 數值計算之流程	17
肆、 數值計算之參數與比較	19
4 . 1 數值計算之參數設定	19
4 . 2 與他人之數值比較	20
伍、 三維流場之初始發展與演化	24
5 . 1 流場的初始發展	24
5 . 2 展延方向運動之複雜度	34

5 . 3 末端牆面漩渦(End-wall vortices)之觀察	44
5 . 4 Taylor-Gortler like 漩渦之生成與演化	47
陸、結論與未來展望	62
參考資料	64

圖 目 錄

圖 1-1：二維 LDC 流場之漩渦運動簡視圖	5
圖 1-2：三維 LDC 流場之漩渦運動簡視圖	6
圖 3-1：速度與壓力交錯之網格配置圖	18
圖 4-1：雷諾數為 1000，寬展比為 1：1 之二維 LDC 流場速度中心線與他人之比較分布圖	21
圖 4-2：雷諾數為 1000，寬展深比為 1：1：1 之三維 LDC 流場速度中心線與他人之比較分布圖	22
圖 4-3：雷諾數為 1000，寬展深比為 1：3：1 之三維 LDC 流場速度中心線與他人之比較分布圖	23
圖 5-1：於無因次時間 $t=2$ 於不同 y 值之 $x-z$ 面上速度 v 等值圖	26
圖 5-2：不同無因次時間 ($t=2 \sim 30$) $y=0.2$ 之 $x-z$ 面上 v 等值圖	27
圖 5-3：不同無因次時間 ($t=2 \sim 12$) 之 v 沿 y 方向速度分布圖	28
圖 5-4：不同無因次時間 ($t=5 \sim 40$) 之 $x=0.6$ 之 $y-z$ 面速度向量分布圖	29
圖 5-5：不同無因次時間 ($t=5 \sim 12$) 之壓力 p 於 $y-z$ 面上等值線分布圖	30
圖 5-6：不同無因次時間 ($t=20 \sim 40$) 之壓力 p 於 $y-z$ 面上等值線分布圖	31
圖 5-7：不同無因次時間 ($t=4 \sim 40$) v 值與 $\partial p / \partial y$ 值沿 y 方向分布之比較圖	32
圖 5-8 (a)：三維 LDC 流場中單一質點之流線分布圖	33
圖 5-8 (b)：三維 LDC 流場中多個質點之流線分布圖	33
圖 5-9：不同無因次時間 ($t=5 \sim 20$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	36
圖 5-10：不同無因次時間 ($t=30 \sim 50$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	37
圖 5-11：不同無因次時間 ($t=60 \sim 80$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	38
圖 5-12：不同無因次時間 ($t=90 \sim 100$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	39
圖 5-13：不同無因次時間 ($t=12 \sim 20$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	40
圖 5-14：不同無因次時間 ($t=30 \sim 40$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	41
圖 5-15：不同無因次時間 ($t=50 \sim 60$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	42
圖 5-16：不同無因次時間 ($t=70 \sim 80$) 之上、下游區域 $v=0$ 等值面之分布圖	43
圖 5-17：不同無因次時間於 $x=0.6$ 之 $y-z$ 面速度向量與 $v=0$ 、 $w=0$ 等值線圖	45

圖 5-18：不同無因次時間 ($t = 1 \sim 40$) 渦度擬能等值面圖	46
圖 5-19 (a)：於無因次時間 $t = 12$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面速度向量分布圖	49
圖 5-19 (b)：於無因次時間 $t = 12$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面旋度分布圖	49
圖 5-20 (a)：於無因次時間 $t = 20$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面速度向量分布圖	50
圖 5-20 (b)：於無因次時間 $t = 20$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面旋度分布圖	50
圖 5-21 (a)：於無因次時間 $t = 30$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面速度向量分布圖	51
圖 5-21 (b)：於無因次時間 $t = 30$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面旋度分布圖	51
圖 5-22 (a)：於無因次時間 $t = 40$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面速度向量分布圖	52
圖 5-22 (b)：於無因次時間 $t = 40$ 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面旋度分布圖	52
圖 5-23：不同無因次時間 ($t = 41 \sim 53$) 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面之彩色旋度分布圖	53
圖 5-24：不同無因次時間 ($t = 59 \sim 76$) 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面之彩色旋度分布圖	54
圖 5-25：不同無因次時間 ($t = 83 \sim 100$) 於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面之彩色旋度分布圖	55
圖 5-26：不同無因次時間 ($t = 40 \sim 49$) 之渦度擬能等值圖	56
圖 5-27：不同無因次時間 ($t = 50 \sim 59$) 之渦度擬能等值圖	57
圖 5-28：不同無因次時間 ($t = 60 \sim 69$) 之渦度擬能等值圖	58
圖 5-29：不同無因次時間 ($t = 70 \sim 79$) 之渦度擬能等值圖	59
圖 5-30：不同無因次時間 ($t = 80 \sim 89$) 之渦度擬能等值圖	60
圖 5-31：不同無因次時間 ($t = 90 \sim 99$) 之渦度擬能等值圖	61

壹、前言

1.1 問題簡述

本研究以數值模擬之方法探討三維矩形槽中初始為靜止，受突然平移之頂部水平驅動而發展之黏性流流場（lid-driven cavity，簡稱LDC流場）。此流場之初始運動為與頂部平移方向平行之近似二維流場。此二維流場因受槽壁之影響，將進而發展為複雜之三維運動。

LDC流場是一個基本但卻有實際應用需求的研究課題，下列為研究此題目之諸原因：首先是三維矩形槽流場其幾何邊界形式簡單，但卻包含複雜的流場結構，所以我們在數值計算中僅需處理最簡單的矩形邊界，其結果卻可展現眾多不同之漩渦運動。而流場中各漩渦結構乃由不同的機制產生，因此有許多值得我們去研究與探討的問題。在計算流體力學界中，甚至將此題目視為模範問題（model problem），以此數值計算當作標準檢查程式（benchmark），用來驗證新發展之數值模式之正確性。在工程應用方面，LDC流場為許多製造業設備所產生的流場之簡化，例如：在短滯留時間堆置塗佈機（short-dwell coater）、軟性刮刀塗佈機（flexible blade coater）、噴粉薄帶機（melt spinning）中的流場就極類似LDC流場，而上述三種機器之功能為製造高品質之紙張與攝影用之膠捲，以及微晶材質之金屬帶。以上的實驗已由 Aidun 等（1991）所完成，結果發現流場結構對上述機器製造出之產品品質有重大影響。所以LDC流場問題在科學及工業應用上皆為值得研究的題目。

1.2 文獻回顧

最早二維LDC流場之實驗為 Pan & Acrivos (1967) 對 Prandtl (1904) 與 Batchelor (1956) 理論之適用性的驗證。先驅二維LDC流場數值計算為 Kawaguti (1961), 之後乃有不同的數值方法, 例如: Burggraf (1966); Benjamin & Denny (1979); Agarwal (1981); Ghia, Ghia & Shin (1982) 等解析流函數與旋度方程式 (vorticity and stream function equations), 在低速流中 Schreiber & Keller (1983) 與Barrgy & Carey (1997), 使用雙諧和函數之公式 (biharmonic formulation) 進行解析, Botella & Peyret (1998) 以及其他許多研究者則直接解析原始變數 (primitive variables) 之方程式以模擬LDC流場。上述之計算結果皆發現, 當雷諾數高於一特定值時, 二維流場的主要組成為下列結構 (圖1-1): 位於幾何中心的「主漩渦」 (primary eddy, 簡稱PE) 與三個位於角落的「次漩渦」 (secondary eddy)。次漩渦又分別為: 位於頂部平板移動方向下游且靠近底部角落的「下游次漩渦」 (downstream secondary eddy, 簡稱DSE) 位於頂部平板移動方向上游且靠近底部角落的「上游次漩渦」 (upstream secondary eddy, 簡稱USE) 與位於頂部平板移動方向上游且近頂部角落的「上層上游漩渦」 (upper upstream eddy, 簡稱UUE)。

有關三維LDC流場之實驗首推在1980年代初期由 Koseff 等 (1984) 開始之一系列研究, 在他們的實驗中首先觀察到旋轉軸與頂部移動方向平行而位於底部且成對的漩渦, 此漩渦類似於Taylor (1923) 與Gortler (1954) 所發表之漩渦型態, 他們稱之為Taylor-Gortler-like (簡稱TGL) 漩渦 (圖1-2), 之後 Freitas 等 (1985) 則首次以數值計算驗證此三維漩渦的存在。在 Koseff 等 (1984) 進一步的實驗中, 雷諾數之範圍為1000至10000, 並考慮三個不同的矩形槽之寬展比 (spanwise aspect ratio, 簡稱SAR= $B:L=1:1$ 、 $1:2$ 與 $1:3$)。在雷諾數為3000的實驗中觀察到八對的TGL漩渦, 隨著雷諾數增加至6000, TGL漩渦增加至十一對, 當雷諾數介於6000至8000時, 流場首次展現出紊流之結構。在 Prasad 等 (1988) 的實驗中, 寬展比為 $1:2$ 、 $2:3$ 、 $5:6$ 與 $1:1$, 而雷諾數之範圍為3200至10000, 此實驗主要在探討寬展比與源至於兩旁末端牆面 (end wall) 所產生的黏滯阻力 (viscous drag) 之關係, 實驗結果發現, 當寬展比降低時將增加黏滯阻力。

1990年代的實驗由 Aidun 等 (1991) 所主導，他們將寬展比設定為1:3，雷諾數之範圍由100至2000，流場觀察的方法是利用白光照射置於流場內之鋁片，而後進行照相，根據實驗之觀察他們的結論於下列：(1) 雷諾數低於500以下時三維的LDC流場可視為二維流場。(2) 當雷諾數為825~925時，流場結構產生週期性的微小震盪，此為流場由二維轉變成三維流場之過渡期，稍後由Benson 等 (1992) 利用頻譜分析估計出上述微小震盪的無因次頻率為0.1112。(3) 雷諾數介於1000與1300之間時，所謂的行進波 (traveling wave) 出現，整個動力系統變的更為複雜，不再出現單一頻率的震盪波。(4) 雷諾數大於1900時，出現震盪的蕈狀結構。

三維LDC流場之數值計算Freitas 等 (1985) 和 Freitas 等 (1988)，以探討研究展延方向 (spanwise) 之流體運動在高雷諾數以及不同的寬展比下的變化，其計算結果發現以下兩類漩渦：(1) 位於靠近兩側末端牆面的「局部漩渦」(local eddies)，此物理現象與展延方向的流體運動有密切關係，又稱為「末端牆面漩渦」(end wall vortices，簡稱EWV)(2)規則地出現於展向，並且在主漩渦流線方向延伸的「總體漩渦」(global eddies)，亦即「TGL漩渦」。

1.3 研究動機

如前所述，三維LDC流場，其流場邊界之幾何形狀十分簡單，然而最終發展之三維流場結構卻極複雜。先前諸多之數值計算結果雖都發現此三維流場結構（如TGL漩渦），然各計算結果之流場定量性質（如TGL漩渦之數目）卻都不盡相同。

1991年德國GAMM（Gesellschaft für Angewandte Mathematik and Mechanik）委員會發起一專題討論會，主題為三維LDC流場之數值計算（Dewille 等, 1992），其目標在於確定TGL漩渦對在展向的數目，GAMM委員會設定LDC流場之雷諾數為3200，寬展比SAR為1：3，各參加者以不同的數值方法進行流場之計算模擬，雖然各計算之雷諾數與寬展比皆相同，與會者的計算結果卻都不一致，流場對稱性（symmetry）的存在與否及TGL漩渦對之數目皆有差異。

最近Guermond 等（2002）原擬進行雷諾數為3200，寬展比為1：3 之LDC流場的實驗，但其結果顯示：不同次實驗所得到的定量性質（如：在對稱面上的速度剖面、TGL漩渦的數目與其在展向的位置）皆不相同，亦即此流場無法重複相同的流場結構。因此他們降低雷諾數為1000並改變寬展比為1：2 之LDC流場實驗，並且將焦點置於觀察流場初期的變化。實驗的結果顯示：當他們在邊界加入微小之擾動，初期流場即產生不同的三維流場結構，而且流場最終結果受此初期發展之流場影響甚鉅，造成相同參數之不同次實驗皆無法重複其最終之流場結構。

根據前人之研究結果，三維LDC流場初期的變化影響其後發展之結果甚大，而數值模擬LDC流場之最終結果亦不盡相同，本研究乃針對三維LDC流場初期之速度、壓力與旋度場結構進行探討，以了解其更進一步演化為複雜三維流場之過程。

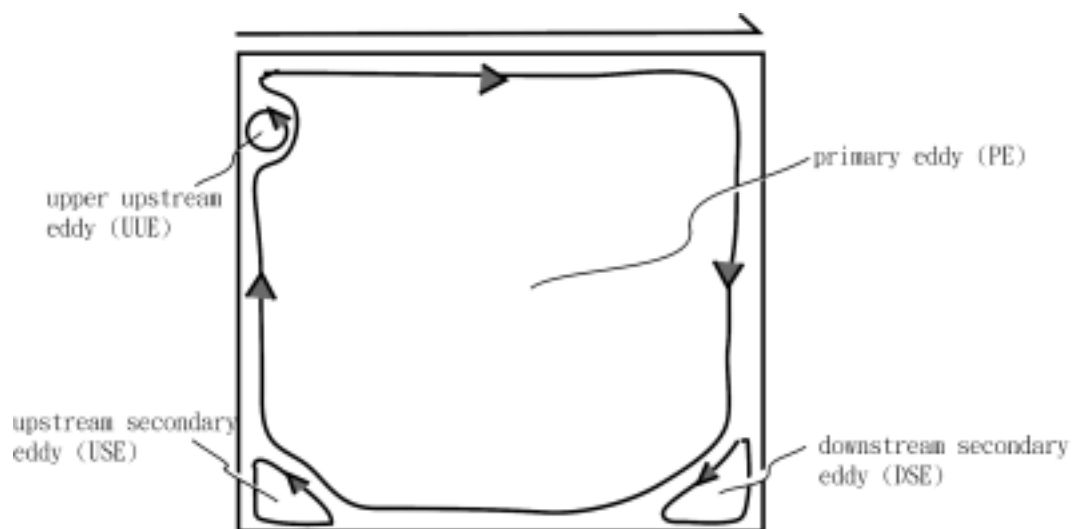


圖 1-1：二維 LDC 流場之主要漩渦運動，包含有：主漩渦（primary eddy），下游次漩渦（downstream secondary eddy），上游次漩渦（upstream secondary eddy）以及上層上游漩渦（upper upstream eddy）。

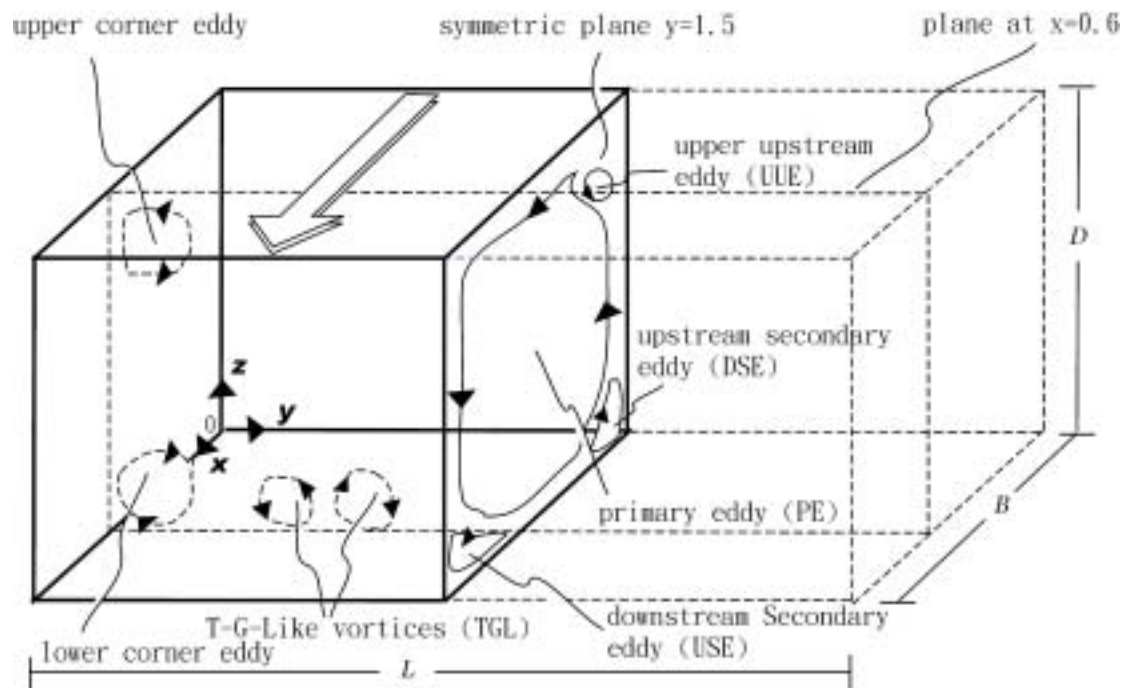


圖 1-2：流場漩渦運動簡視圖。整個流場包括以下之漩渦結構：主漩渦（primary eddy），上游次漩渦（upstream secondary eddy），上層上游漩渦（upper upstream eddy），下游次漩渦（downstream secondary eddy），頂部角落漩渦（upper corner eddy），底部角落漩渦（lower corner eddy）與 TGL（Taylor-Gortler-like）漩渦。矩形槽之寬、展與深分別為 B 、 L 與 D 。

貳、控制方程式及邊界條件

2.1 控制方程式

考慮一頂部邊界突然啟動且持續以水平之定速度 U_0 移動之矩形槽之三維黏性流場，矩形槽的寬、展與深分別為 B 、 L 與 D （如圖 1-2 所示）。建立之直角座標系統中，原點置於矩形槽上游垂直牆面之右下角， x 座標軸方向與頂部驅動之方向平行， y 座標軸方向為水平且與頂部驅動方向垂直， z 座標軸向上為正。所考慮之流體為不可壓縮之牛頓黏性流體，流體之密度 ρ 與黏滯係數 μ 皆為定值，並且忽略重力的影響。

選取矩形槽之寬 B 為特徵長度，驅動速度 U_0 為特徵速度，則流場之無因次速度 u 、 v 與 w 需滿足以下質量與動量守恆之控制方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

與

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial y}(vw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2.4)$$

式中， p 為流場之無因次壓力，雷諾數 $\text{Re} = \rho U_0 B / \mu$ 。

2.2 邊界條件

在三維 LDC 流場之各邊界中，頂部平板（ $z = d \equiv D/B$ ）之 x 方向速度為無因次單位速度 1， y 與 z 之方向之速度為零，其餘壁面（ $x = 0$ ， $x = 1$ ， $y = 0$ ， $y = l \equiv L/B$ 與 $z = 0$ ）皆為「無滑移」(no-slip)之邊界。根據 Guermond 等 (2002) 的研究顯示，三維 LDC 之初期流場為左右對稱，所以本研究假設流場對稱於 $y = l/2$ 之 $x - z$ 平面，而僅考慮一半（ $y \leq l/2$ ）之流場。對稱面 $y = l/2$ 因此為一「自由滑移」(free-slip) 之邊界條件。因此各邊界之速度條件為：

$$u = 1 ; v = w = 0 \text{ 於頂部平板 } (z = d), \quad (2.5)$$

$$u = v = w = 0 \text{ 於底部邊界 } (z = 0), \quad (2.6)$$

$$u = v = w = 0 \text{ 於矩形槽左側牆面 } (y = 0), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; v = 0 \text{ 於對稱面 } (y = l/2), \quad (2.8)$$

$$u = v = w = 0 \text{ 於矩形槽前、後牆面 } (x = 1 \text{ 與 } x = 0), \quad (2.9)$$

將以上之各速度邊界條件代入 (2.2) (2.3) 與 (2.4) 之動量方程式，可得以下之壓力邊界條件：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ 於矩形槽頂部平板與底部 } (z = d \text{ 與 } z = 0), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ 於矩形槽左側末端牆面與對稱面 } (y = 0 \text{ 與 } y = l/2), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \text{ 於矩形槽前、後壁面 } (x = 1 \text{ 與 } x = 0), \quad (2.12)$$

上列各式之壓力邊界條件皆為 Neumann 條件，所以在求解壓力之 Poisson 方程式時會有非唯一解問題存在，解決之方法將於稍後章節討論。

參、數值方法

3.1 控制方程式的離散

本研究之數值方法使用有限差分 (finite difference) 對空間離散，速度與壓力網格點的配置方法為交錯網格 (staggered grid)，如圖 3-1 所示。時間上則用前置尤拉 (forward Euler) 法對時間積分。如前述，由於三維 LDC 初期流場的對稱性質，所以我們僅需考慮對稱面至左側末端牆面之半矩形槽區域，並將此計算區域之寬、展與深分別分割為 NX 、 NY 與 NZ 個格點區間，故離散之格點間距為 $\Delta x = 1 / NX$ 、 $\Delta y = (l / 2) / NY$ 與 $\Delta z = d / NZ$ 。整個計算之無因次時間為 τ ，我們將計算時間分割為 NT 個時間區間，故時間間距為 $\Delta t = \tau / NT$ 。如圖 3-1 所示，在交錯網格系統中，壓力項 $p_{i,j,k}$ 的網格位置為 $x = (i - 1/2)\Delta x$ ， $y = (j - 1/2)\Delta y$ ， $z = (k - 1/2)\Delta z$ ， $i = 1, 2 \dots NX$ ， $j = 1, 2 \dots NY$ ， $k = 1, 2 \dots NZ$ 。x 方向之速度項 $u_{i,j,k}$ 的網格位置為 $x = i\Delta x$ ， $y = (j - 1/2)\Delta y$ ， $z = (k - 1/2)\Delta z$ ， $i = 0, 1 \dots NX$ ， $j = 1, 2 \dots NY$ ， $k = 1, 2 \dots NZ$ 。y 方向之速度項 $v_{i,j,k}$ 的網格位置為 $x = (i - 1/2)\Delta x$ ， $y = j\Delta y$ ， $z = (k - 1/2)\Delta z$ ， $i = 1, 2 \dots NX$ ， $j = 0, 1 \dots NY$ ， $k = 1, 2 \dots NZ$ 。z 方向之速度項 $w_{i,j,k}$ 的網格位置為 $x = (i - 1/2)\Delta x$ ， $y = (j - 1/2)\Delta y$ ， $z = k\Delta z$ ， $i = 1, 2 \dots NX$ ， $j = 1, 2 \dots NY$ ， $k = 0, 1 \dots NZ$ 。

不可壓縮流流場之控制方程式 (2.1.4) 的數目雖與流場變數 u 、 v 、 w 以及 p 相同，然連續方程式 (2.1) 僅為一速度場之束縛條件，而壓力 p 並無隨時間演化之控制方程式。因此數值解析 (2.1.4) 控制方程式需分離速度場與壓力場之求解過程，並需重整原控制方程式以得求解壓力場之新方程式。以下我們將以離散 (2.1.4) 方程式之步驟，敘述以下求解過程。

將動量方程式 (2.2) (2.3) 與 (2.4) 中，除了速度對時間的導數項之外，其他各項移置等式右邊，並簡化為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + FU, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + FV, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + FW. \quad (3.3)$$

上式中擴散項與平流項之和 FU 、 FV 與 FW 各表示為：

$$FU = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \frac{\partial(uw)}{\partial z}, \quad (3.4)$$

$$FV = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(vu)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial(vw)}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$FW = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(wu)}{\partial x} - \frac{\partial(wv)}{\partial y} - \frac{\partial w^2}{\partial z}. \quad (3.6)$$

將式 (3.1) (3.2) 與 (3.3) 中之時間導數以一階準度的前置尤拉法近似，並以二階準度之中央差分近似方程式中 x 、 y 與 z 之導數。則 x 分量動量方程式 (3.1) 於離散座標 $x = i\Delta x$ ， $y = (j - 1/2)\Delta y$ ， $z = (k - 1/2)\Delta z$ 以及離散時間 $t = n\Delta t$ 之離散差分式為：

$$\frac{1}{\Delta t} (u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n) = -\frac{1}{\Delta x} (p_{i+1,j,k}^n - p_{i,j,k}^n) + (FU)_{i,j,k}^n, \quad (3.7)$$

y 分量動量方程式 (3.2) 於離散座標 $x = (i - 1/2)\Delta x$ ， $y = j\Delta y$ ， $z = (k - 1/2)\Delta z$ 以及離散時間 $t = n\Delta t$ 之離散差分式為：

$$\frac{1}{\Delta t} (v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n) = -\frac{1}{\Delta y} (p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j,k}^n) + (FV)_{i,j,k}^n, \quad (3.8)$$

將式 (3.3) 於離散座標 $x = (i - 1/2)\Delta x$ ， $y = (j - 1/2)\Delta y$ ， $z = k\Delta z$ 以及離散時間 $t = n\Delta t$ 之離散差分式為：

$$\frac{1}{\Delta t} (w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n) = -\frac{1}{\Delta z} (p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k}^n) + (FW)_{i,j,k}^n. \quad (3.9)$$

若在時間 $t = n\Delta t$ 的速度場 u^n 、 v^n 、 w^n 以及壓力場 p^n 皆已知，則新時距 $t = (n+1)\Delta t$ 之速度場 u^{n+1} 、 v^{n+1} 與 w^{n+1} 可以 (3.7) (3.8) 與 (3.9) 求得。

連續方程式 (2.1) 於離散座標 $x = (i-1/2)\Delta x$ ， $y = (j-1/2)\Delta y$ ， $z = (k-1/2)\Delta z$ ，以及離散時間 $t = (n+1)\Delta t$ 之離散差分式：

$$\frac{1}{\Delta x}(u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y}(v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta z}(w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^{n+1}) = 0, \quad (3.10)$$

若強迫流場在 $t = (n+1)\Delta t$ 時滿足式 (3.10) 之連續條件，並將式 (3.7) (3.8) 與 (3.9) 代入 (3.10) 式可得：

$$\frac{p_{i+1,j,k}^n - 2p_{i,j,k}^n + p_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1,k}^n - 2p_{i,j,k}^n + p_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{p_{i,j,k+1}^n - 2p_{i,j,k}^n + p_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} = \sigma_{i,j,k}^n, \quad (3.11)$$

上式即為離散座標 $x = (i-1/2)\Delta x$ ， $y = (j-1/2)\Delta y$ ， $z = (k-1/2)\Delta z$ ，離散時間 $t = n\Delta t$ 之離散型式的壓力 Poisson 方程式，其中非齊次項 $\sigma_{i,j,k}^n$ ：

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j,k}^n = & \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x}(u_{i,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y}(v_{i,j,k}^n - v_{i,j-1,k}^n) + \frac{1}{\Delta z}(w_{i,j,k}^n - w_{i,j,k-1}^n) \right] \\ & + \frac{1}{\Delta x} \left[(FU)_{i,j,k}^n - (FU)_{i-1,j,k}^n \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[(FV)_{i,j,k}^n - (FV)_{i,j-1,k}^n \right] + \frac{1}{\Delta z} \left[(FW)_{i,j,k}^n - (FW)_{i,j,k-1}^n \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

擴散與平流項之和 $(FU)_{i,j,k}^n$ 、 $(FV)_{i,j,k}^n$ 、 $(FW)_{i,j,k}^n$ 的離散型式為：

$$\begin{aligned} (FU)_{i,j,k}^n = & \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{(\Delta y)^2}(u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n) \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\Delta z)^2}(u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n) \right] \\ & - \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{4}(u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n)^2 - \frac{1}{4}(u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n)^2 \right] \\ & - \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{1}{4}(u_{i,j+1,k}^n + u_{i,j,k}^n) \cdot (v_{i,j,k}^n + v_{i+1,j,k}^n) - \frac{1}{4}(u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n) \cdot (v_{i,j-1,k}^n + v_{i+1,j-1,k}^n) \right] \\ & - \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{4}(u_{i,j,k+1}^n + u_{i,j,k}^n) \cdot (w_{i,j,k}^n + w_{i+1,j,k}^n) - \frac{1}{4}(u_{i,j,k+1}^n + u_{i,j,k-1}^n) \cdot (w_{i,j,k-1}^n + w_{i+1,j,k-1}^n) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
(FV)_{i,j,k}^n = \frac{1}{\text{Re}} & \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{(\Delta y)^2} (v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n) \right. \\
& \left. + \frac{1}{(\Delta z)^2} (v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n) \right] \\
& - \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{4} (u_{i,j+1,k}^n + u_{i,j,k}^n) \cdot (v_{i+1,j,k}^n + v_{i,j,k}^n) - \frac{1}{4} (u_{i-1,j+1,k}^n + u_{i-1,j,k}^n) \cdot (v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n) \right] \quad (3.14) \\
& - \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{1}{4} (v_{i,j+1,k}^n + v_{i,j,k}^n)^2 - \frac{1}{4} (v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n)^2 \right] \\
& - \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{4} (v_{i,j,k+1}^n + v_{i,j,k}^n) \cdot (w_{i,j,k}^n + w_{i,j+1,k}^n) - \frac{1}{4} (v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n) \cdot (w_{i,j,k-1}^n + w_{i,j+1,k-1}^n) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(FW)_{i,j,k}^n = \frac{1}{\text{Re}} & \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n) + \frac{1}{(\Delta y)^2} (w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n) \right. \\
& \left. + \frac{1}{(\Delta z)^2} (w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n) \right] \\
& - \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{4} (u_{i,j,k+1}^n + u_{i,j,k}^n) \cdot (w_{i+1,j,k}^n + w_{i,j,k}^n) - \frac{1}{4} (u_{i-1,j,k+1}^n + u_{i-1,j,k}^n) \cdot (w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n) \right] \quad \circ \\
& - \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{1}{4} (v_{i,j,k+1}^n + v_{i,j,k}^n) \cdot (w_{i,j,k}^n + w_{i,j+1,k}^n) - \frac{1}{4} (v_{i,j-1,k+1}^n + v_{i,j-1,k}^n) \cdot (w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n) \right] \\
& - \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{4} (w_{i,j,k+1}^n + w_{i,j,k}^n)^2 - \frac{1}{4} (w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n)^2 \right]
\end{aligned}$$

(3.15)

由此上控制方程式對空間與時間離散過程可知，數值求解控制方程式的程序將包括兩步驟：若已知時距 $t = n\Delta t$ 的速度場 u^n 、 v^n 與 w^n ，壓力 Poisson 方程式 (3.11) 之非齊次項 σ^n 將可求得，求解 (3.11) 可得 $t = n\Delta t$ 的壓力場 p^n 。則時間 $t = (n+1)\Delta t$ 之速度場 u^{n+1} 、 v^{n+1} 與 w^{n+1} 可由 (3.7)、(3.8) 與 (3.9) 更新。重複上述之兩步驟，將可得速度與壓力場隨時間的演化。

3.2 邊界條件的離散

速度邊界條件之離散，需視速度之網格點於邊界的配置而定，當速度之網格點位置與物理邊界距半個網格點間距，則用平均值來近似邊界條件。若速度之網格點位置於物理邊界上，則用不可壓縮流之連續方程式求得物理邊界外的虛擬網格點（virtual points）。引用以上的原則，頂部平板邊界條件（2.5）式的離散型式為：

$$u_{i,j,NZ+1} = 2 - u_{i,j,NZ} , \quad v_{i,j,NZ+1} = -v_{i,j,NZ} , \quad w_{i,j,NZ+1} = w_{i,j,NZ-1} , \quad (3.16)$$

底部邊界條件（2.6）式的離散型式為：

$$u_{i,j,0} = -u_{i,j,1} , \quad v_{i,j,0} = -v_{i,j,1} , \quad w_{i,j,-1} = w_{i,j,1} , \quad (3.17)$$

左側牆面邊界條件（2.7）式的離散型式為：

$$u_{i,0,k} = -u_{i,1,k} , \quad v_{i,-1,k} = v_{i,1,k} , \quad w_{i,0,k} = -w_{i,1,k} , \quad (3.18)$$

對稱面邊界條件（2.8）式的離散型式為：

$$u_{i,NY+1,k} = u_{i,NY,k} , \quad v_{i,NY+1,k} = -v_{i,NY-1,k} , \quad w_{i,NY+1,k} = w_{i,NY,k} , \quad (3.19)$$

矩形槽前、後面邊界條件（2.9）式的離散型式為：

$$u_{NX+1,j,k} = u_{NX-1,j,k} , \quad v_{NX+1,j,k} = -v_{NX,j,k} , \quad w_{NX+1,j,k} = -w_{NX,j,k} , \quad (3.20)$$

與

$$u_{-1,j,k} = u_{1,j,k} , \quad v_{0,j,k} = -v_{1,j,k} , \quad w_{0,j,k} = -w_{1,j,k} . \quad (3.21)$$

以上之離散速度邊界條件將用於計算邊界上及靠近邊界之離散方程式（3.7）（3.8）（3.9）與（3.12）之各導數項。

壓力的邊界條件則用二階準度之中央差分來近似（2.10）（2.11）與（2.12）式中 x 、 y 與 z 之導數，則頂部平板（ $z = d$ ）之壓力邊界條件（2.10）式的離散型式為：

$$p_{i,j,NZ+1} = p_{i,j,NZ} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \Delta z} (w_{i,j,NZ+1} - 2w_{i,j,NZ} + w_{i,j,NZ-1}) , \quad (3.22)$$

底部 ($z=0$) 壓力邊界條件 (2 . 10) 式的離散型式為：

$$p_{i,j,0} = p_{i,j,1} - \frac{1}{\text{Re} \cdot \Delta z} (w_{i,j,1} - 2w_{i,j,0} + w_{0,j,-1}) , \quad (3.23)$$

矩形槽左側牆面 ($y=0$) 壓力邊界條件 (2 . 11) 式的離散型式為：

$$p_{i,0,k} = p_{i,1,k} - \frac{1}{\text{Re} \cdot \Delta y} (v_{i,1,k} - 2v_{i,0,k} + v_{i,-1,k}) , \quad (3.24)$$

對稱面 ($y=l$) 壓力邊界條件 (2 . 11) 式的離散型式為：

$$p_{i,NY+1,k} = p_{i,NY,k} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \Delta y} (v_{i,NY+1,k} - 2v_{i,NY,k} + v_{i,NY-1,k}) , \quad (3.25)$$

矩形槽前壁面 ($x=1$) 壓力邊界條件 (2 . 12) 的離散型式為：

$$p_{0,j,k} = p_{1,j,k} - \frac{1}{\text{Re} \cdot \Delta x} (u_{1,j,k} - 2u_{0,j,k} + u_{-1,j,k}) , \quad (3.26)$$

矩形槽後壁面 ($x=0$) 壓力邊界條件 (2 . 12) 的離散型式之差分式：

$$p_{NX+1,j,k} = p_{NX,j,k} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \Delta x} (u_{NX+1,j,k} - 2u_{NX,j,k} + u_{NX-1,j,k}) , \quad (3.27)$$

以上各離散壓力邊界條件，將用於求解壓力 Poisson 方程式 (3 . 11)。

3.3 壓力 Poisson 方程式的求解

將 3.1 節之離散型式的壓力 Poisson 方程式 (3.11) 各項展開，並代入離散後的邊界條件 (3.22) (3.27)，可得到一對稱的稀疏矩陣方程組 $[A]\{X\}=\{B\}$ ， $[A]$ 為壓力之係數矩陣， $\{X\}$ 為待解之壓力， $\{B\}$ 為 (3.11) 式中等式右邊諸項之和，稀疏矩陣 $[A]$ 之形式如下：

[illegible]

(3 . 28)

[A]矩陣中空白處元素皆為零,其他元素定義如下： $\alpha = \Delta x / \Delta y$ 、 $\beta = \Delta x / \Delta z$ 、

$$\gamma_1 = -(2 + \alpha^2 + \beta^2) \quad 、 \quad \gamma_2 = -(1 + \alpha^2 + \beta^2) \quad 、 \quad \gamma_3 = -(1 + 2\alpha^2 + \beta^2) \quad 、$$

$$\gamma_4 = -(2 + 2\alpha^2 + \beta^2) \quad 、 \quad \gamma_5 = -(1 + \alpha^2 + 2\beta^2) \quad 、 \quad \gamma_6 = -(2 + \alpha + 2\beta^2) \quad 、$$

$$\gamma_7 = -(1 + 2\alpha + 2\beta)、 \gamma_8 = -2(1 + \alpha^2 + \beta^2)。$$
我們使用直接法求解以上之對稱稀疏矩陣方程組。

如前所述，壓力 Poisson 方程式之各邊界皆為 Neumann 邊界條件，因此存在非唯一解，為使其解為唯一，我們令待解之某網格點壓力為一定值。因在速度之積分之過程中，僅需計算壓力場之梯度，因此此定值之選擇不會影響速度場之求解。

3.4 數值計算之流程

本論文之數值計算分主要為三部分，初始計算、求解壓力之稀疏矩陣方程組與速度之時間積分；其中我們使用 HSL Archive 中之 MA27 程式套件組，包括 MA27ID、MA27BD 與 MA27CD，來求解壓力之稀疏矩陣方程組。以下為程式計算簡略說明：首先為程式中的初始計算，將各初始參數輸入，如：雷諾數 Re ，程式終止時間 τ ，時間之區間 Δt ，網格點數目 $NX \times NY \times NZ$ 等，並儲存壓力之係數稀疏矩陣中非零元素，利用 MA27ID，初始化 MA27 中諸套件。求解壓力之稀疏矩陣方程組的部分，使用 MA27BD 分解壓力之係數稀疏矩陣方程組並儲存其值，再讀取分解過後的壓力之係數稀疏矩陣，於離散時間 $t = n\Delta t$ 以 MA27CD 程式直接求解壓力。於離散時間 $t = (n + 1)\Delta t$ 以一階準度之前置尤拉法求解速度，並儲存壓力與速度值，此為速度之時間積分部分。於程式中迴圈不斷循環求解壓力與速度之二部分，最終求解得無因次時間 τ 之速度與壓力場。

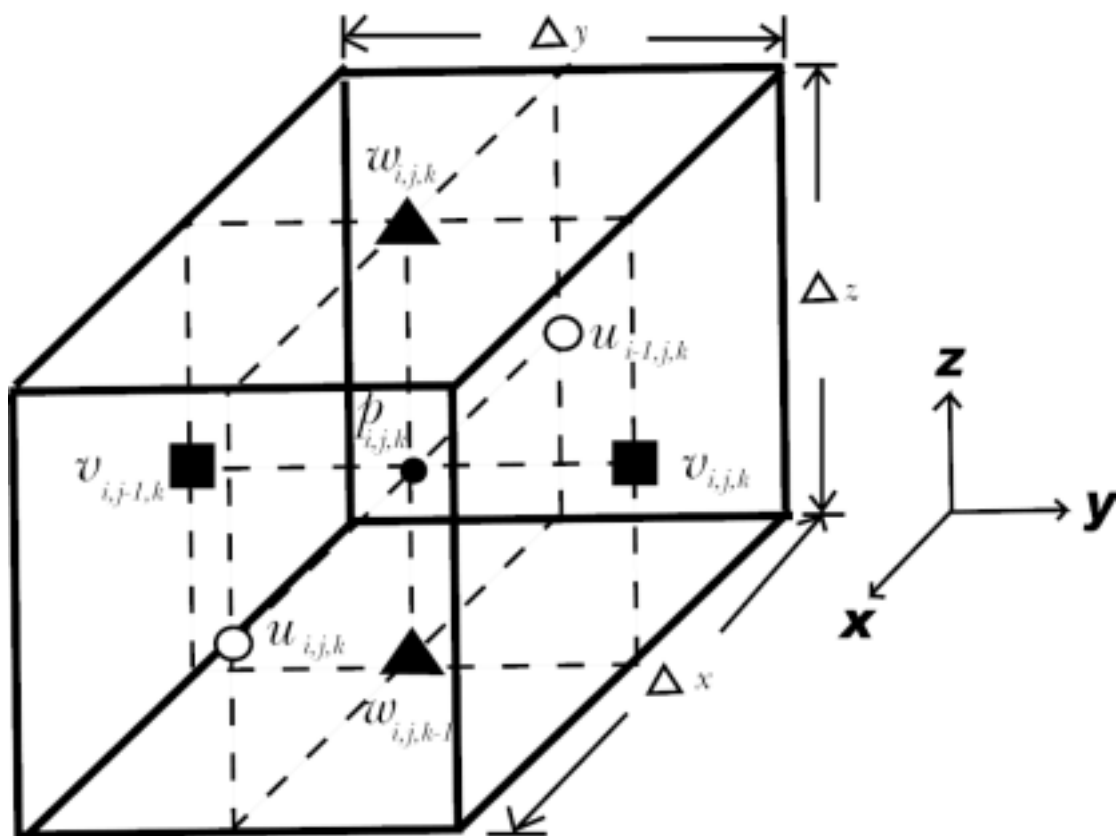


圖 3-1：速度與壓力交錯之網格點配置圖，其中 u 為 x 方向速度， v 為 y 方向速度， w 為 z 方向速度以及 p 為壓力。

肆、數值計算之參數與比較

4.1 數值計算之參數設定

先前諸多實驗與數值研究發現，三維 LDC 流場在寬展 ($B:L$) 比小於 1:3 時，初期之流場較易由近似二維之流場發展為三維流場，因此我們乃選定寬展深 ($B:L:D$) 比為 1:3:1，之 LDC 流場，進行數值模擬與流場探討。由於觀察三維 TGL 漩渦之生成發展為本研究重點之一。根據 Chiang 等 (1996) 的數值計算中，雷諾數為 250 時三維 LDC 流場近似於二維流場。而雷諾數範圍介於 500 至 1000 時，雖然流場之速度漸發展為微小震盪的三維流場，但流場的對稱性質依然存在。當雷諾數增至 1250 時，三維流場產生行進波 (traveling wave) 並出現了 TGL 漩渦。當雷諾數為 1375 時，五對蕈狀之 TGL 漩渦出現在整個展延上，當雷諾數增至 2000 時，TGL 漩渦於展延上增至七對。而在 Aidun 等 (1991) 實驗之結論為 TGL 漩渦出現於雷諾數為 1300 以上。經由前人之研究貢獻，我們選定雷諾數為 1500 以觀察到 TGL 漩渦之生成與發展。

整個數值模擬之無因次時間 $\tau = 100$ ，時間間距 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ 。格點數目為 $NX \times NY \times NZ = 42 \times 63 \times 42$ 。所有計算皆於微處理器為 AMD Thunderbird 1200MHZ，作業系統為於 Linux 7.1 之微電腦進行運算。

4.2 與他人之數值比較

在各參考文獻中，各 LDC 之流場的數值計算皆由速度中心線為比較基準，所謂速度中心線，在二維 LDC 流場為 x 方向速度 $u(x=0.5, z)$ 沿 z 方向之分布，以及 z 方向速度 $w(x, z=0.5)$ 沿 x 方向之分布。而在三維 LDC 流場之速度中心線則取 x 方向速度 $u(x=0.5, y=1.5, z)$ 沿 z 方向之分布，以及 z 方向速度 $w(x, y=1.5, z=0.5)$ 沿 x 方向之分布。

研究二維 LDC 流場數值計算結果與 Ghia 等 (1982) 及 Babu 等 (1994) 比較，如圖 4-1 所示，在相同的計算參數（雷諾數為 1000，寬展比為 1:1，網格區間為 129×129）下，速度中心線之比較結果極為符合。

圖 4-2 為雷諾數 1000，寬展深比為 1:1:1 之三維 LDC 流場之速度中心線比較圖，我們與 Babu 等 (1994)、Ku 等 (1987)、Kato 等 (1990) 與 Chiang 等 (1998) 的計算結果來做一對照，於圖中 Babu 等 (1994)、Ku 等 (1987) 與我們的計算結果有些微差距，探究其原因為不同打網格方式造成，他們的計算中網格之處理採用非等間距網格 (non-uniform grids)，我們則以等間距網格 (uniform-grid) 進行模擬，所以同樣用等間距網格法的 Chiang 等 (1998) 的速度中心線比較相當符合。比較差距最大的為 Kato 等 (1990)，而 Kato 等 (1990) 的數值方法為有限元素法，與我們所使用的有限差分法為不同，說明了速度中心線差距大之原因。

設定雷諾數為 1000，寬展深比為 1:3:1 之三維 LDC 流場速度中心線比較，在圖 4-3 中，與 Chiang (1998) 的結果比較，我們發現在速度極值處亦有些許差距，此差異同上段所述，乃為不同處理網格之方式造成。

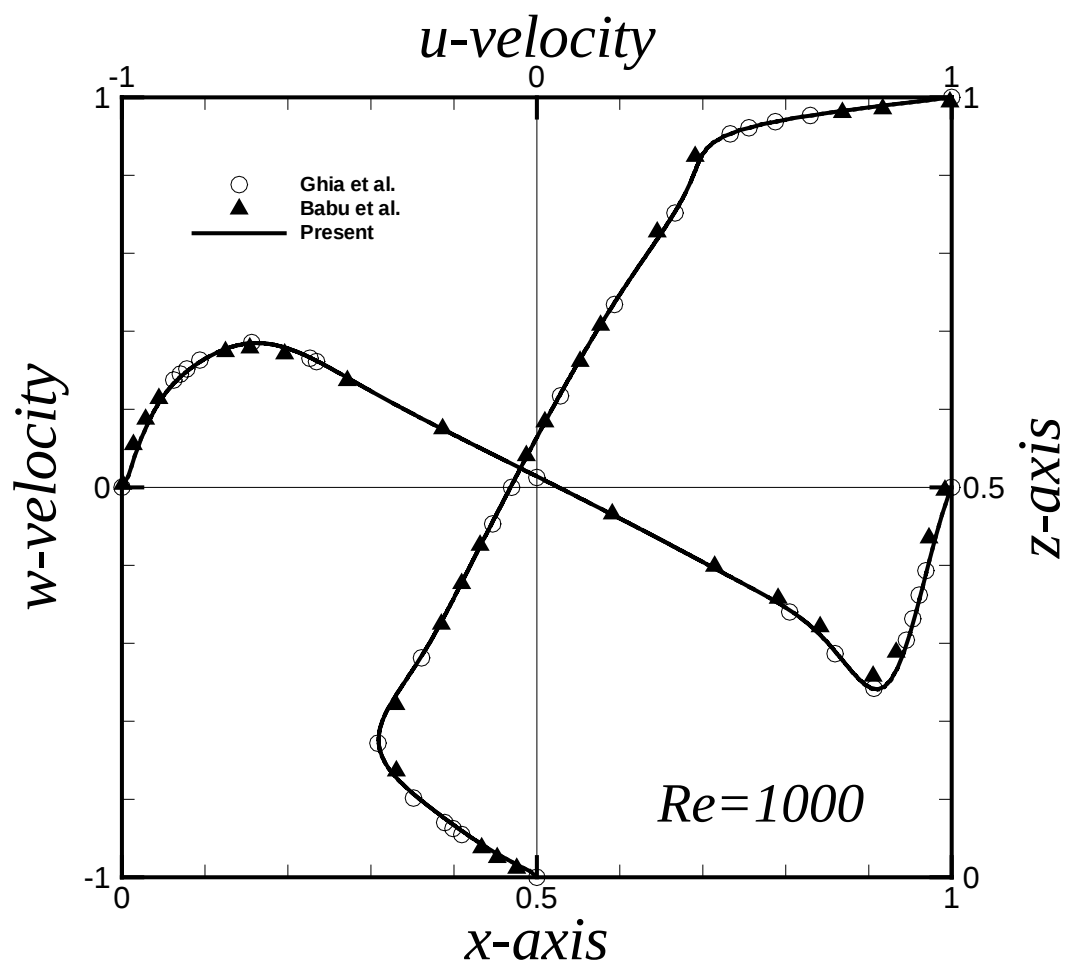


圖 4-1：雷諾數為 1000，寬展比為 1：1 之二維 LDC 流場之 $u(x=0.5, z)$ 以及 $w(x, z=0.5)$ 速度中心線分布圖。在圖中，符號 $\circ$ 為 Ghia 等的結果，符號 $\blacktriangle$ 為 Babu 等的結果，實線 - 為我們的結果。

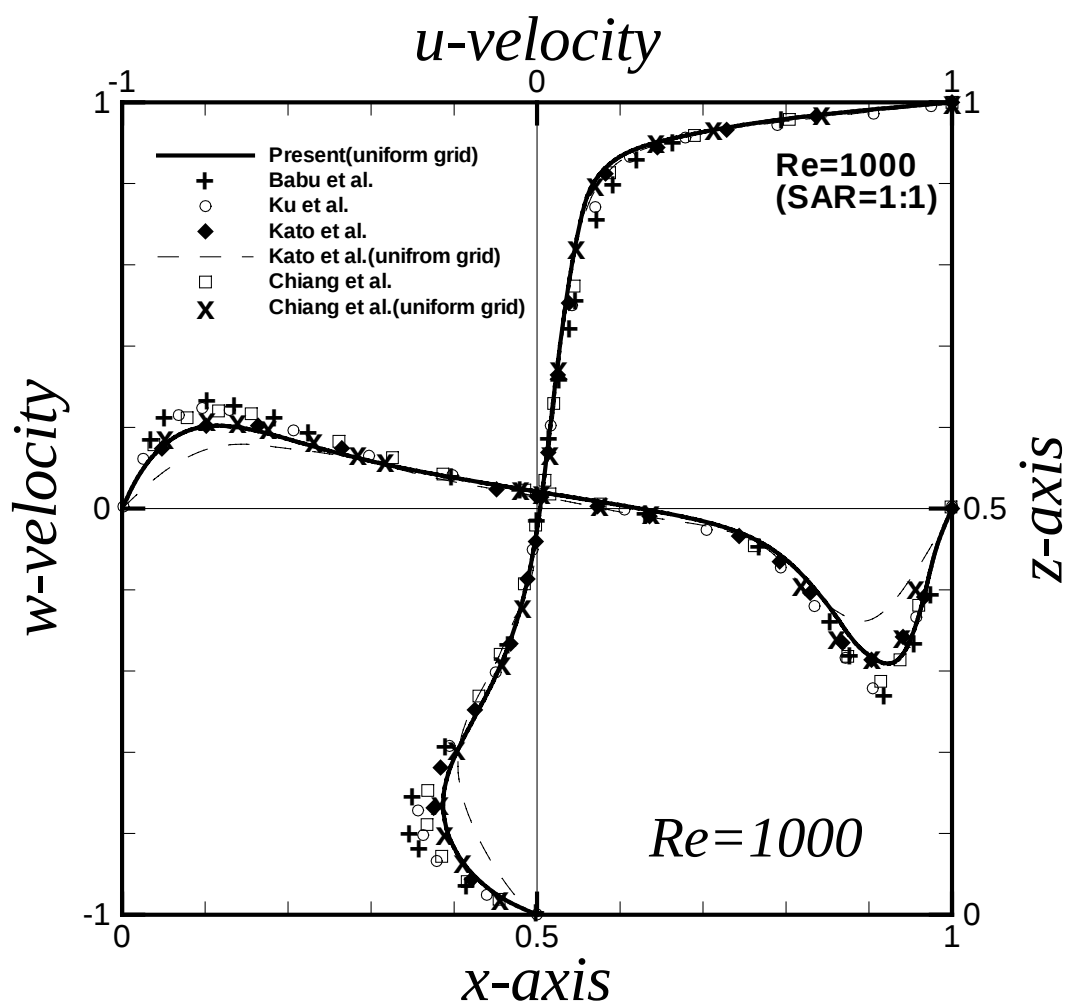


圖 4-2: 雷諾數為 1000, 寬展深比為 1:1:1 之三維 LDC 流場之 $u(x=0.5, y=1.5, z)$ 以及 $w(x, y=1.5, z=0.5)$ 速度中心線分布圖。在圖中, 實線 — 為我們的結果, 符號 + 為 Babu 等的結果, 符號 o 為 Ku 等的結果, 符號 為 Kato 等的結果(非等間距網格), 虛線 - - - 為 Kato 等的結果(等間距網格), 符號 □ 為 Chiang 等的結果(非等間距網格), 符號 × 為 Chiang 等的結果(等間距網格)

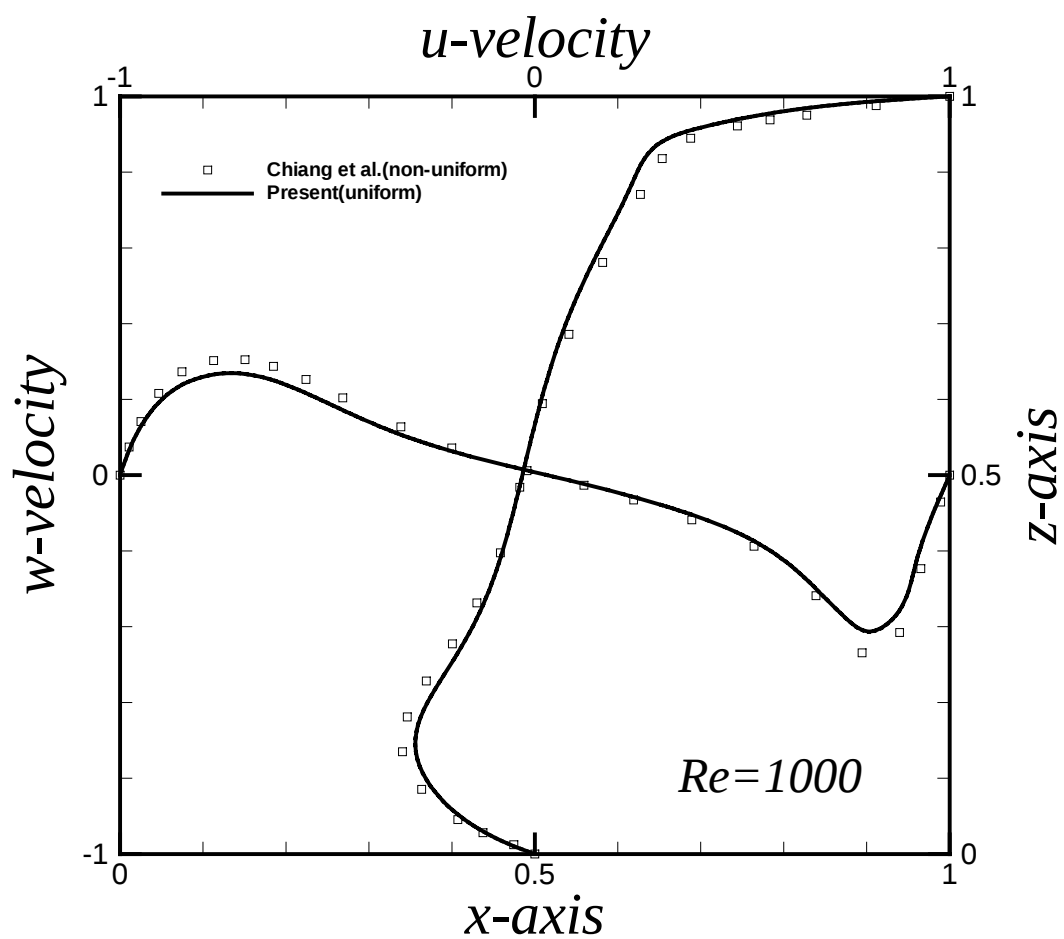


圖 4-3: 雷諾數為 1000, 寬展深比為 1:3:1 之三維 LDC 流場之 $u(x=0.5, y=1.5, z)$ 以及 $w(x, y=1.5, z=0.5)$ 速度中心線分布圖。在圖中, 實線 — 為我們的結果, 符號 $\square$ 為 Chiang 等的結果。

伍、三維流場之初始發展與演化

5.1 流場的初始發展

三維 LDC 流場初期為一與頂部平板移動方向平行 ($x-z$ 方向) 之近似二維運動 (圖 1-2), 隨著無因次時間增加, 流場由近似二維發展為複雜三維運動, 本節藉觀察此初期流場於展延方向 (y 方向) 運動之發展以了解流場三維化過程。

流場初期於無因次時間 $t = 2$ 時, 矩形槽中近似二維流場發展展延方向運動, 一正 y 方向流於頂部平板移動方向下游且靠近頂部之角落形成 (圖 5-1), 另有二負 y 方向流各處於頂部平板移動方向上游且靠近頂部之角落與上述正 y 方向流之下方。由於正 y 方向流之速度絕對值 ($|v|$) 較負 y 方向流大一個數量級, 故本論文簡稱此正 y 方向流為「展向噴流」。如圖 5-1 所示, 展向噴流於靠近末端牆面處 y 方向速度 v 值較大, 而後沿展延方向其值則遞減最終至對稱面為零。此展向噴流速度 v 之極值約發生於介於 $y = 0.1$ 至 0.3 處, 為觀察展向噴流隨時間之演化, 選定 $y = 0.2$ 之 $x-z$ 面上之速度 v 極大值以代表展向噴流 (圖 5-2)。隨著無因次時間由 $t = 2$ 至 $t = 30$ 之遞增, 展向噴流由頂部平板移動向下游且近頂部之角落漸移至 $x-z$ 面上近幾何中心約 $x = 0.6$, $z = 0.6$ 處, 而展向噴流之範圍亦隨之擴展, 故往後之研究則鎖定此展向噴流速度極大值中心, 藉以觀察展向噴流之後續發展。另二負 y 方向流則完全佈滿於 $x-z$ 面上除展向噴流外之其餘空間, 形成一中心為正 y 方向及周圍為負 y 方向流動之三維流場。進一步觀察 $x = 0.6$, $z = 0.6$ 位置沿展延方向之速度 v 隨時間之演化, 如圖 5-3 所示, 介於無因次時間 $t = 2$ 至 4 之間, 此時段展向噴流尚未發展至此區域, 故此處流場初期速度 v 為負值, 而無因次時間增至 $t = 5$ 時, 此區域 y 方向速度 v 由負值轉變為正值, 表示展向噴流已影響此區域並隨著無因次時間之增加, 其速度 v 於無因次時間 $t = 12$ 時

遞增至最大值。展向噴流速度 v 達此極大值後始遞減至無因次時間 $t = 30$ 到達一穩定值。如圖 5-4 所示為展向噴流於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面上速度向量分布，亦可清楚觀察到上述展向噴流之發展與演化情形。

展向噴流之出現為矩形槽中初期近似二維發展為三維運動之起始點，故展向噴流形成之過程為下一步研究的目標。由動量方程式中求解出可供分析的資料，除速度場之外尚有壓力場的資料，進一步分析展向噴流與壓力間之關係，首先觀察初期流場中壓力之分布（圖 5-5 與圖 5-6），如前所述，壓力於各邊界之邊界條件皆為 Neumann 型式，表示流場中壓力值本身不具物理意義，但在動量方程式中包含壓力梯度項，所以壓力梯度之變化為壓力等值圖之觀察重點。如圖 5-5 與 5-6 所示，圖中壓力等值線之等值間距於正負壓力值中各為 50 與 -25 ，壓力等值線呈密集狀時表示壓力梯度變化大，而呈現稀疏貌則表示壓力梯度變化小。隨無因次時間之增加，壓力等值線於近末端牆面處呈密集分布，至無因次時間 $t = 12$ 時達最密集狀態（與展向噴流速度達最大值之無因次時間為相同），其後壓力等值線分布漸呈稀疏貌，在此期間壓力梯度之變化相當大，似乎與展向噴流之發展與演化有密切關係。為清楚展現 y 方向壓力梯度 $\partial p / \partial y$ 與展向噴流速度 v 之關係，如圖 5-7 所示，近末端牆面處 $\partial p / \partial y$ 為負值時，展向噴流之速度 v 值為正，當 $\partial p / \partial y$ 於無因次時間 $t = 12$ 達極小值時，展向噴流速度 v 值則達最大值，說明了靠近末端牆面展向壓力梯度之遞減造成展向噴流流速之增加，即為所謂之助益壓力梯度（favorable pressure gradient）。此現象與 Chiang 等（1996）之研究結果相同，如同置一抽吸泵於對稱面中心處，而抽吸泵則不斷吸引矩形槽中流體質點朝對稱面方向移動（圖 5-8（a））。

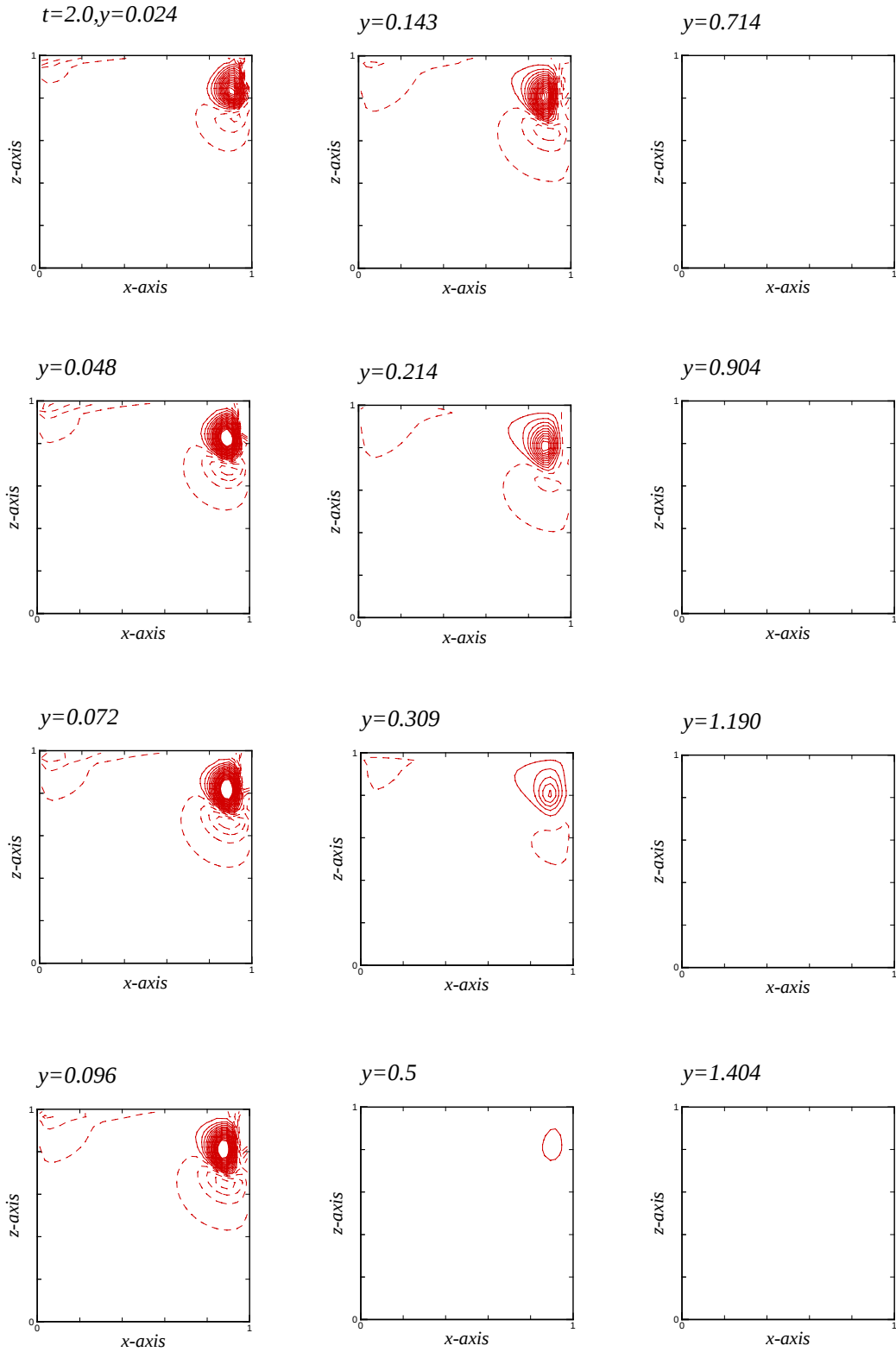


圖 5-1：流場初期於無因次時間 $t=2$ ，不同 y 值之 $x-z$ 面上 y 方向速度 v 等值圖。

等值線之最大與最小值分別為 0.1 與 -0.02 ，共 21 個等值。

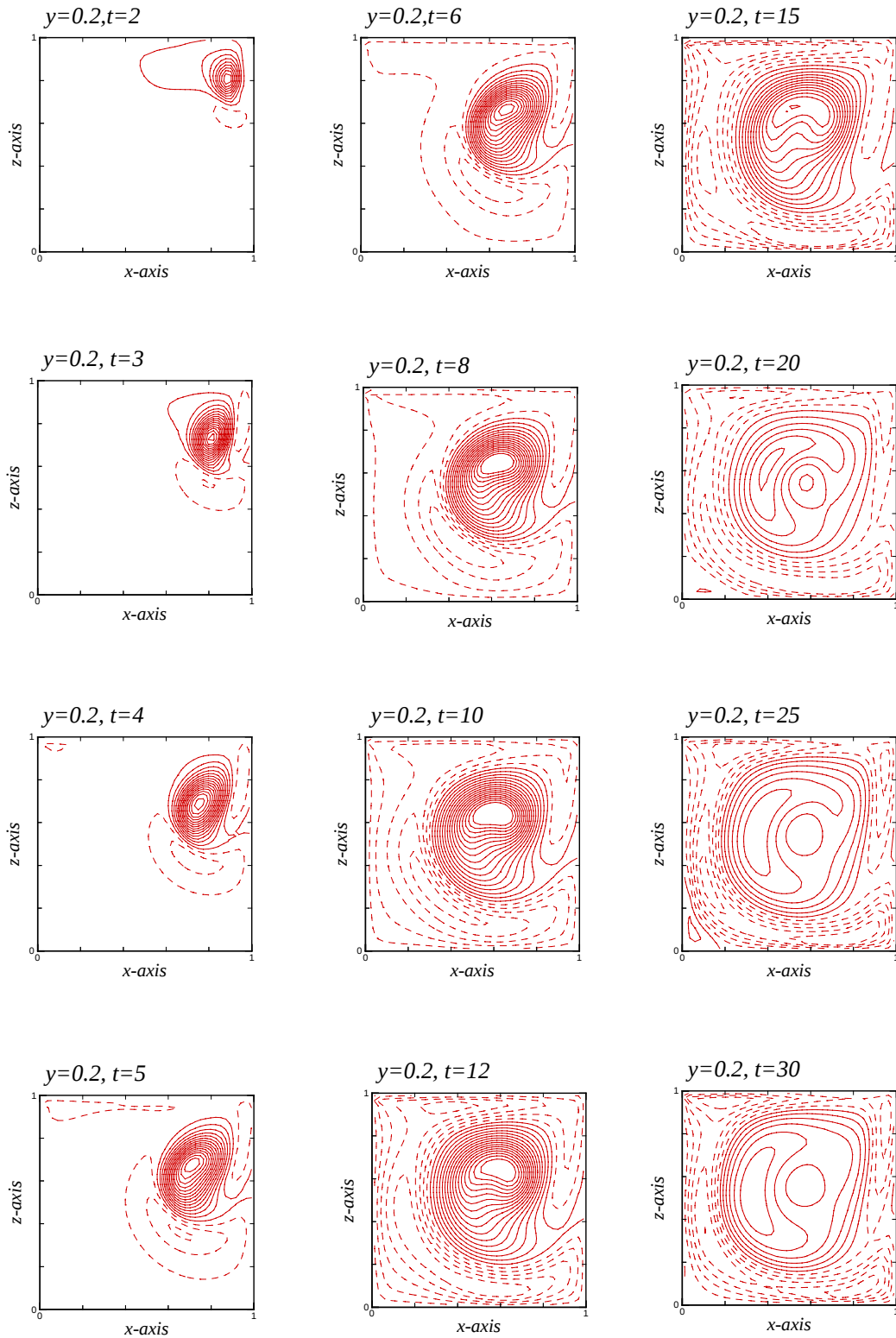


圖 5-2：流場初期於不同無因次時間（ $t = 2 \sim 30$ ）， $y = 0.2$ 之 $x-z$ 面上 y 方向速度 v 之等值圖。等值線之最大與最小值分別為 0.12 與 -0.04，共 21 個等值。

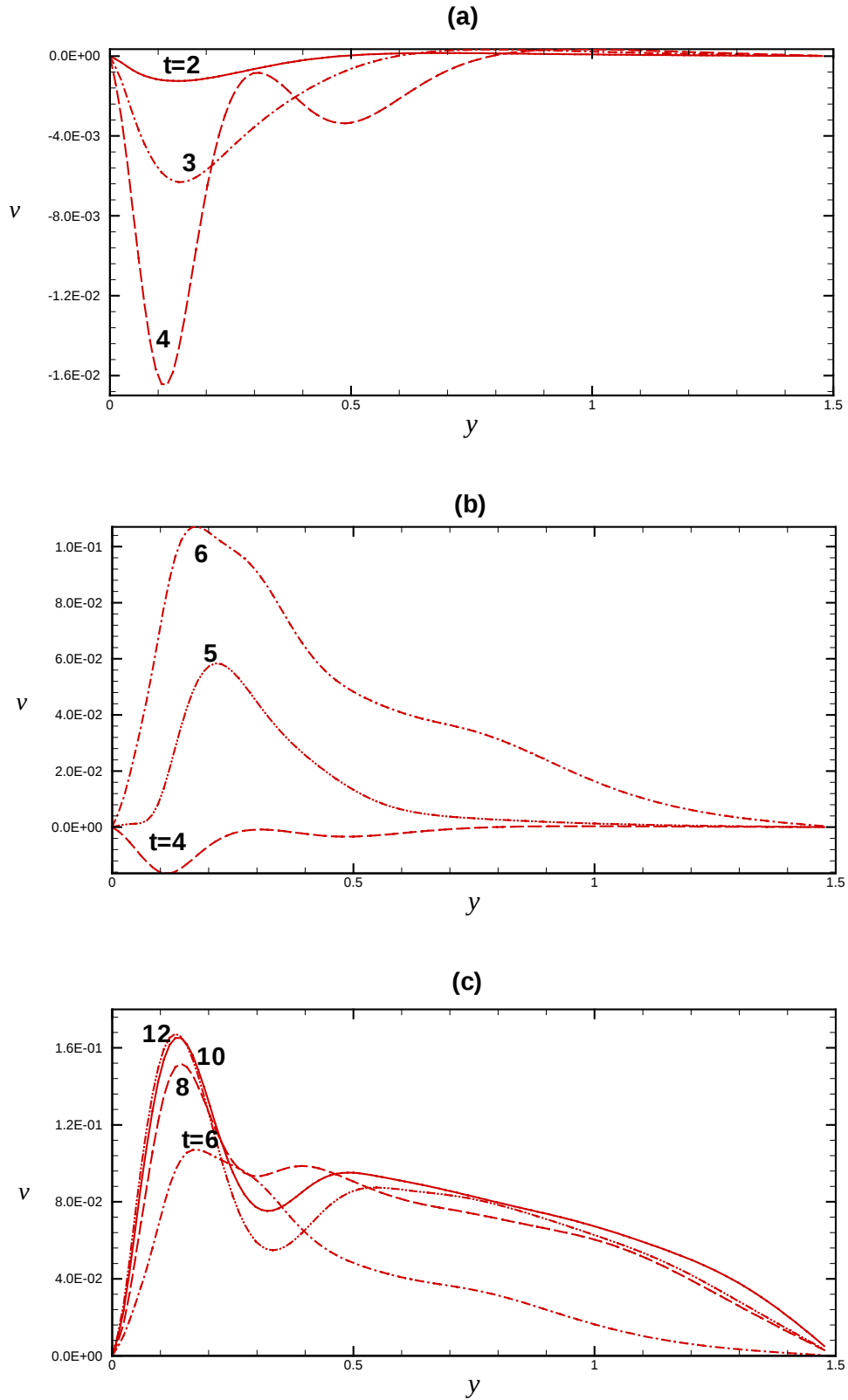


圖 5-3(a)~(c)：不同無因次時間 ($t = 2 \sim 12$) 之速度 $v(x = 0.6, y, z = 0.6)$ 沿 y 方向速度分布圖。

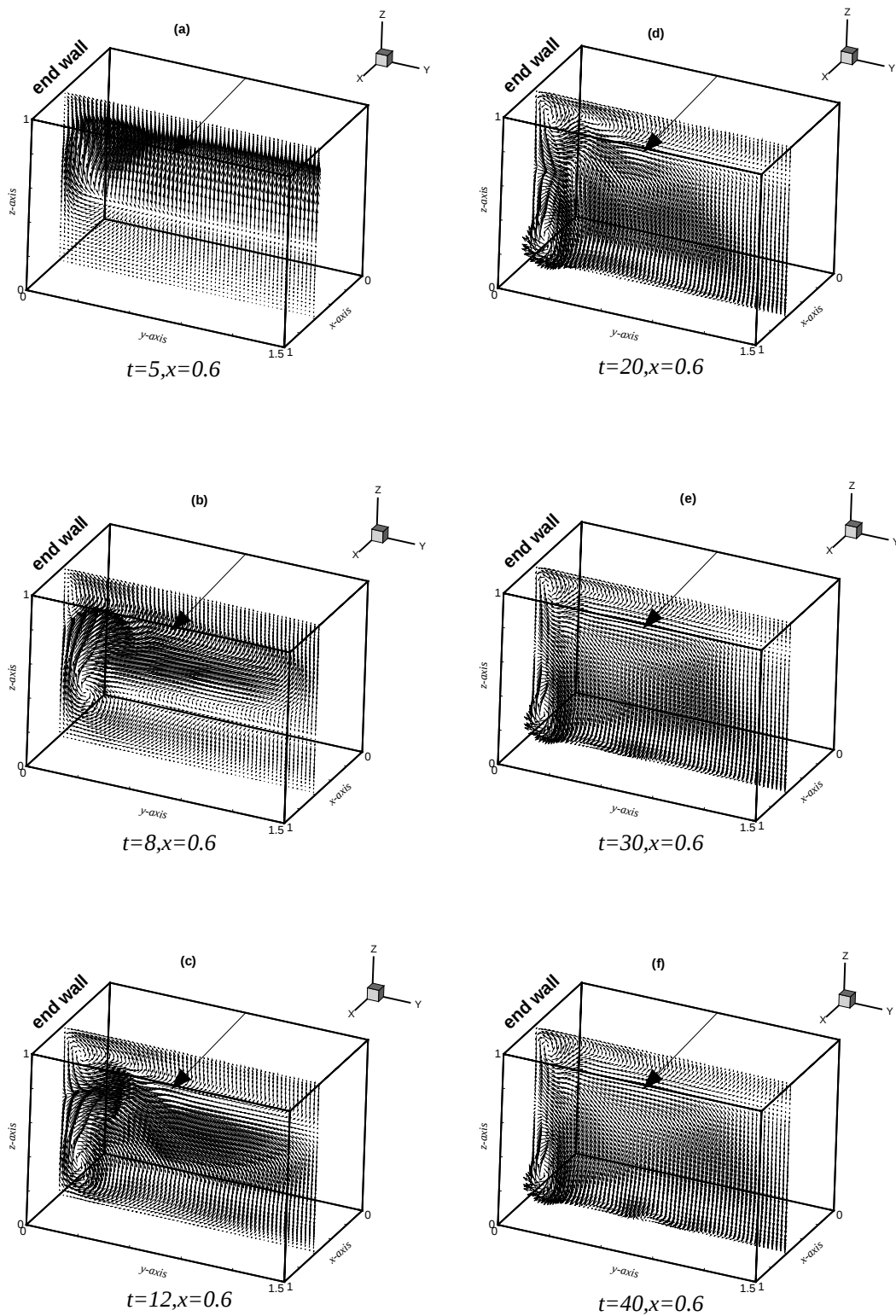


圖 5-4：不同無因次時間（ $t=5 \sim 40$ ）於 $x=0.6$ 之 $y-z$ 面速度向量分布。

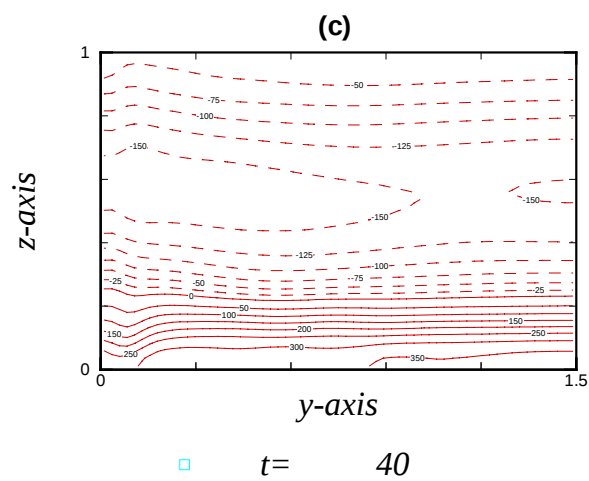
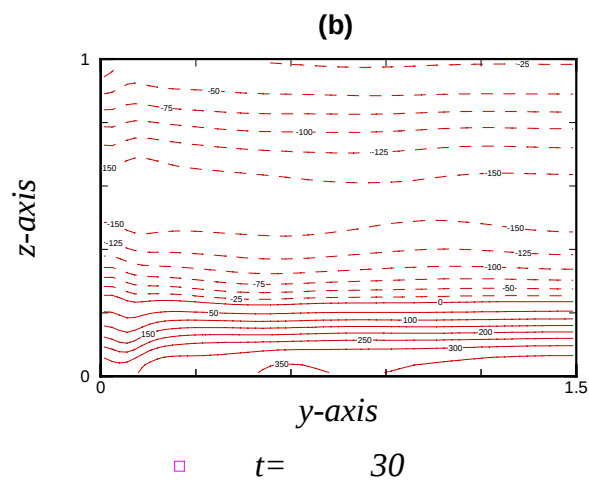
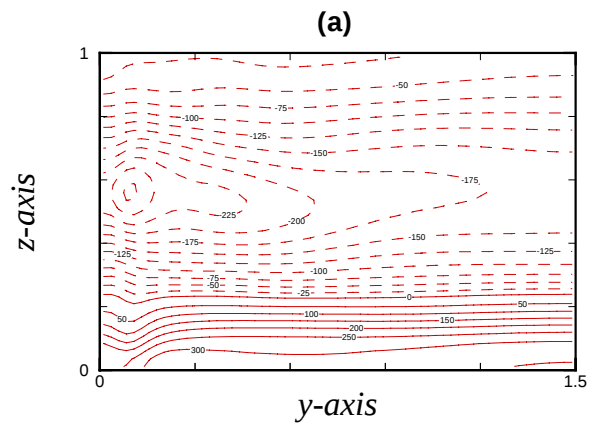


圖 5-6(a)~(c)：流場初期不同無因次時間（ $t = 20 \sim 40$ ）之壓力 $p(x = 0.6, y, z)$ 於 $y - z$ 面上等值線分布，圖中 p 值為原計算值再乘予 10^4 ，壓力等值間距同圖 5-5。

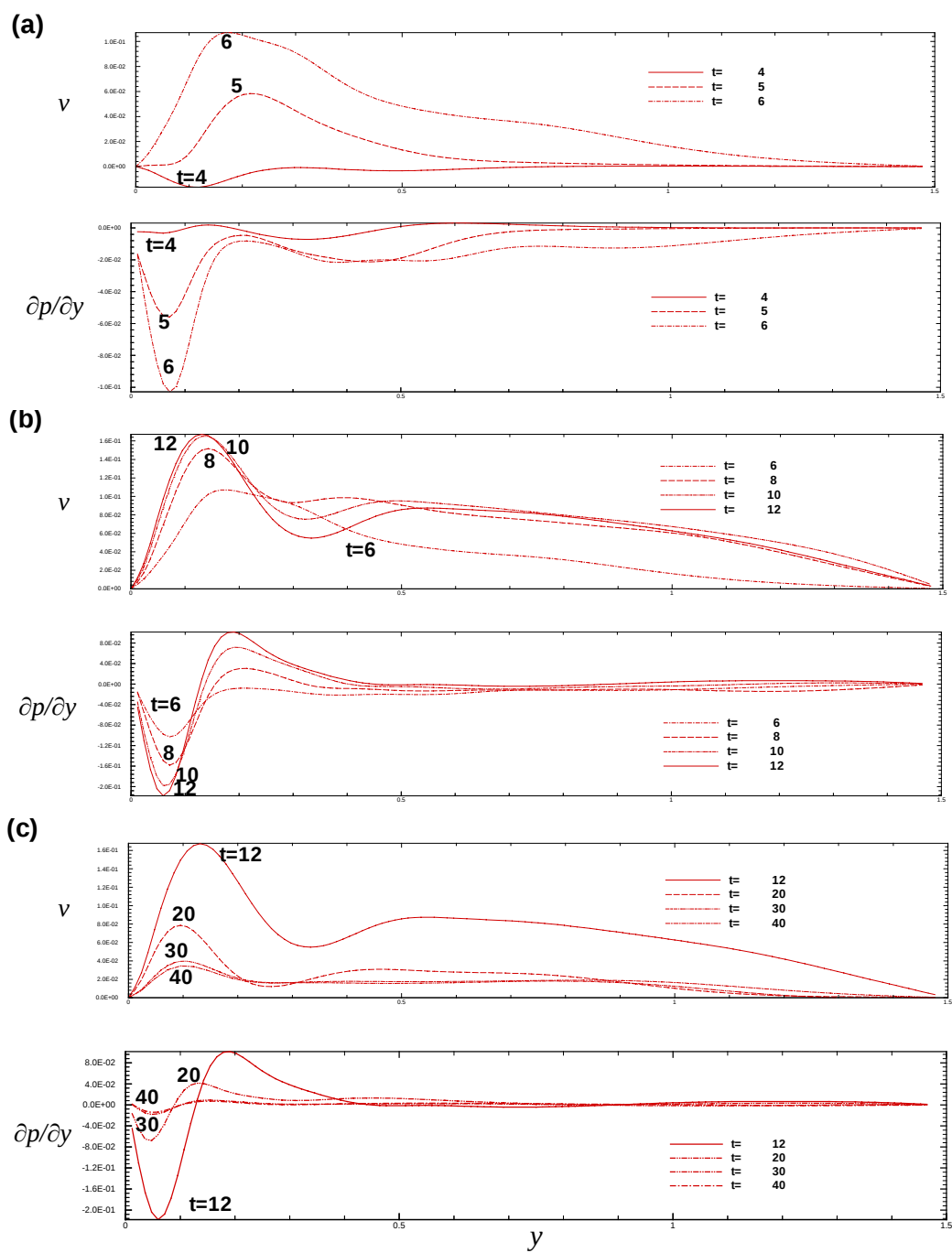
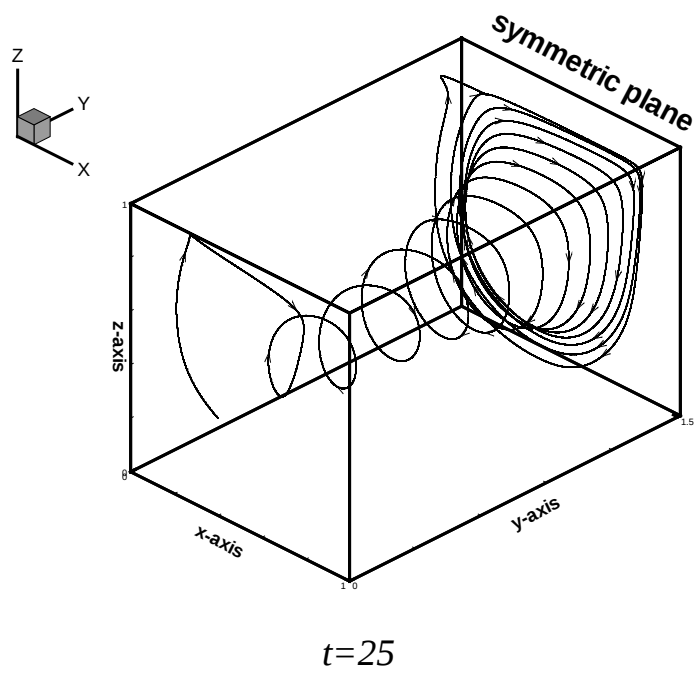


圖 5-7(a)~(c)：流場於不同無因次時間 ($t = 4 \sim 40$) 在 $x = 0.6$ 之速度 v 值與 $\frac{\partial p}{\partial y}$ 值沿 y 方向分布圖。

(a)



(b)

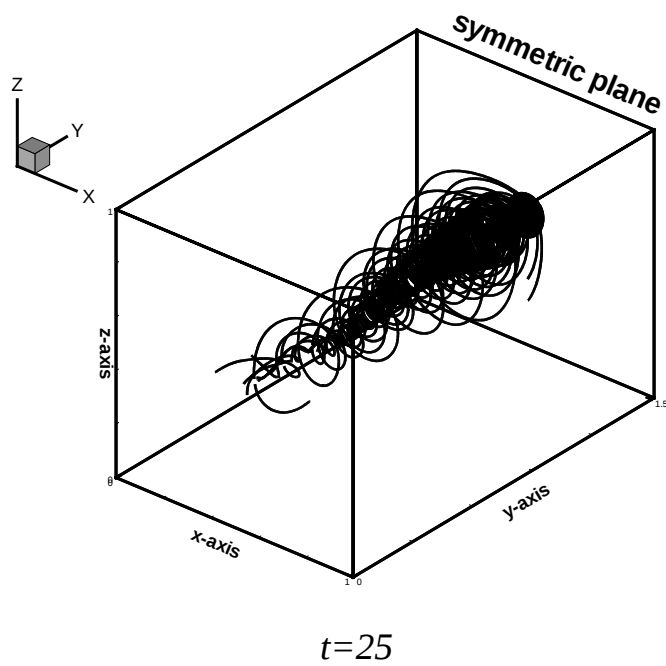


圖 5-8(a)、(b)：三維 LDC 流場於無因次時間 $t = 25$ 之流線分布。圖 (a) 為單一
流體質點之流線分布，圖 (b) 多個流體質點之流線分布。

5.2 展延方向運動之複雜度

三維 LDC 流場由於矩形槽頂部沿 x 方向之連續驅動，故於流場初期以與驅動方向平行之垂直面($x-z$ 面) 近似二維運動為主，但隨著無因次時間之增加，初期近似二維流場漸發展展向噴流，而流體質點於展延方向上運動亦漸趨頻繁，本節之目的乃為探討矩形槽中展延方向往復運動之頻繁程度。

三維 LDC 流場之 $v=0$ 等值面於矩形槽內之分布對於觀察流場展向運動複雜度有極大助益，當此三維流場之展向運動為單一方向，即為展向運動複雜度低，而流場中 $v=0$ 等值面將呈現平滑曲面，若流場產生眾多展向往復運動，意即展向運動複雜度高，其 $v=0$ 等值面則為不規則的波浪狀曲面。如圖 5-9 (a) 所示，流場初期無因次時間 $t=5$ 時展向噴流初於頂部平板移動方向下游之頂部角落形成，所以在靠近末端牆面區域出現明顯之圓柱狀 $v=0$ 等值面，圓柱狀等值面內區域之流體質點朝正 y 方向移動，其外區域則反方向朝負 y 方向移動。而靠近對稱面處之等值曲面則尚未閉合，表示展向噴流尚未發展至此。如前所述，無因次時間 $t=12$ 時展向噴流速度 v 達最大值，故展向噴流內流體質點必皆往對稱面之單一方向運動，依照上述原則推論其 $v=0$ 等值面定呈現平滑分布，如圖 5-9 (b) 所示，於矩形槽中央出現平滑之圓柱狀曲面，與推論之結果為相同。隨著無因次時間之增加至 $t=20$ (圖 5-9 (c))，流場之展向運動趨於頻繁，除位於矩形槽中心之展向噴流形成之 $v=0$ 等值面呈現波浪狀分布之外，頂部平板移動方向之上游區域亦增加不規則之 $v=0$ 等值面，表示流體質點在上游區域展向運動越來越複雜。圖 5-10、5-11 與 5-12 中為無因次時間增至 $t=30 \sim 100$ 之流場上游與下游區域對照圖，隨著無因次時間增加，矩形槽中央平滑圓柱狀 $v=0$ 等值面於柱面呈現起伏劇烈之波浪分布，表示矩形槽中心之流體質點展向往復運動隨時間增多，而且在上游處產生更多的不規則曲面，所以在三維 LDC 流場於上游區域之展向往復運動遠較下游為複雜度高。

進一步分析三維 LDC 流場中展延方向運動型態，如圖 5-8 (b) 所示，流體質點之展向運動為螺旋狀運動。欲詳細觀察此種運動方式，我們視流體質點之運動狀態為兩類，一類為流體質點於矩形槽中不同 y 值($y = 1/4, 1/2, 3/4$)之 $x-z$ 面上二維旋轉運動，此類運動方式以不同 y 值之 $x-z$ 面上流線分布表之。另一類為流體質點之展向往復移動，以不同 y 值之 $x-z$ 面上 $v=0$ 等值線為展向運動方向之判斷，於 $v=0$ 等值線圈內為朝對稱面方向（正 y 方向）移動，而於 $v=0$ 等值線圈外則朝末端牆面方向（負 y 方向）移動，結合上述兩類運動狀態即為流體質點之螺旋往復運動。如 5-13 (a) 與 5-13 (b) 所示，圖中諸多流線與 $v=0$ 等值線為緊密貼和，表示流體質點在此區域只有往單一方向的螺旋運動。而在圖 5-13 (c) 則發現多條流線與 $v=0$ 等值線於 $x-z$ 面右上角區域交錯，諸流線由 $v=0$ 等值線圈外穿入其內時，流體質點沿著流線旋轉並且其展項運動由朝正 y 方向轉變為朝負 y 方向，而流線再由 $v=0$ 等值線圈內穿出其外之時，流體質點則沿著流線旋轉並且其展項運動由朝負 y 方向轉變為朝正 y 方向，上述情形即為流場中流體質點之螺旋往復運動。隨無因次時間增加至 $t=40$ (圖 5-13 與 5-14)，依上述判斷原則大致可歸納出下列結論，首先為隨無因次時間之增加，上游區域之流線與 $v=0$ 等值線交錯較下游區域為多，再次印證了前段所觀察的流場狀況，即上游的流體質點之展向往復運動較下游為複雜。但在無因次時間 $t \geq 40$ 之後介於對稱面與末端牆面之間區域($y = 1/2$)，則不符合上述結論(圖 5-15 (b) (e) 及圖 5-16 (b) (e))，即上游區域並非總是比下游區域有更複雜之展向往復運動，表示有其他因素影響了流場的展向複雜度，我們於稍後的章節再討論此現象。另一結論如圖 5-13、5-14、5-15 與 5-16 所示，靠近對稱面區域(即 $y = 3/4$)之平面上諸流線與 $v=0$ 等值線之交錯較靠近末端牆面($y = 1/4$)更為多，表示靠近對稱面區域之流體質點展向往復運動較靠近於末端牆面更為複雜。

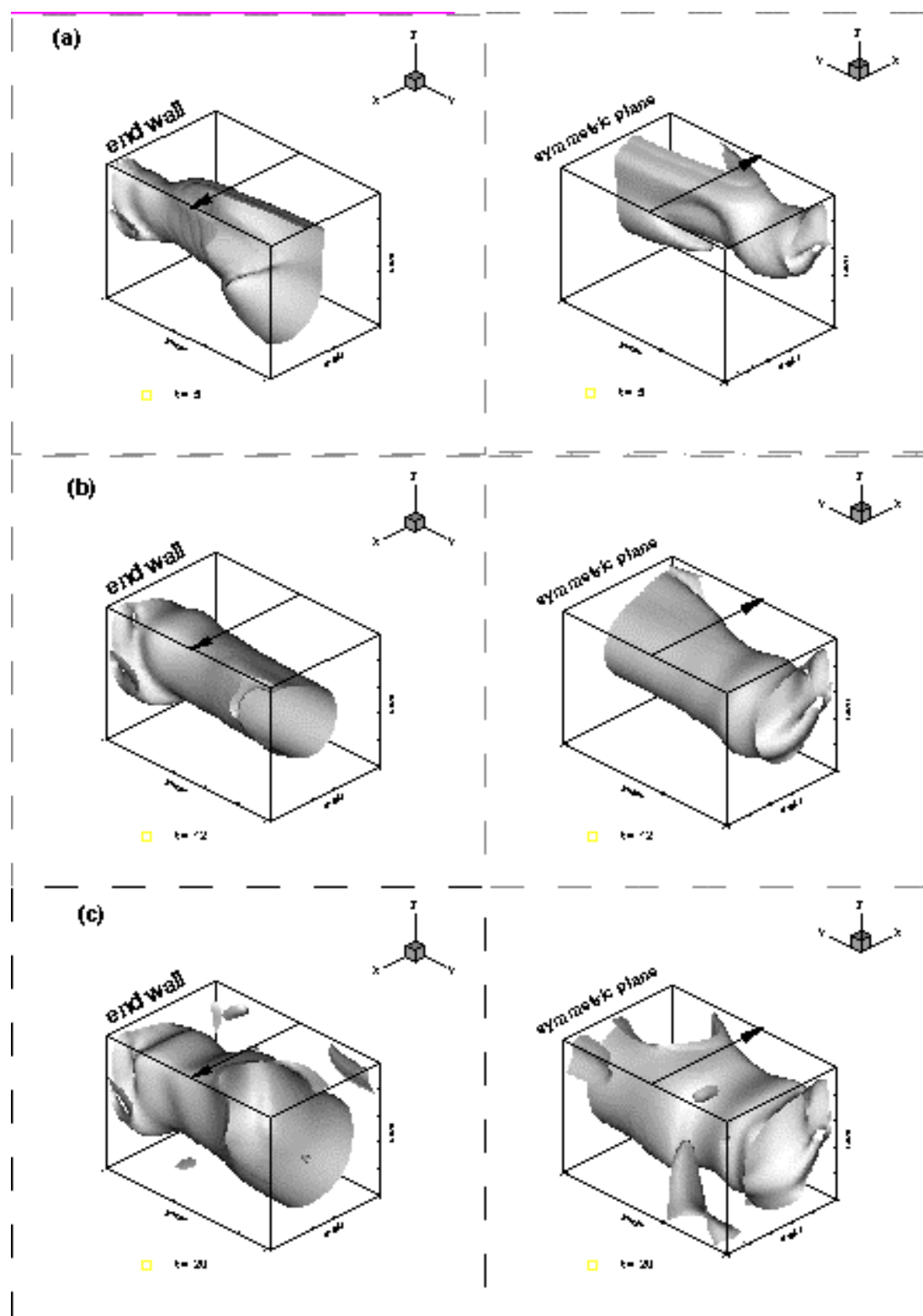


圖 5-9 (a) ~ (c): 不同無因次時間 ($t=5 \sim 20$) 之上、下游 (右圖、左圖) 區域 $v=0$ 的等值面分布。

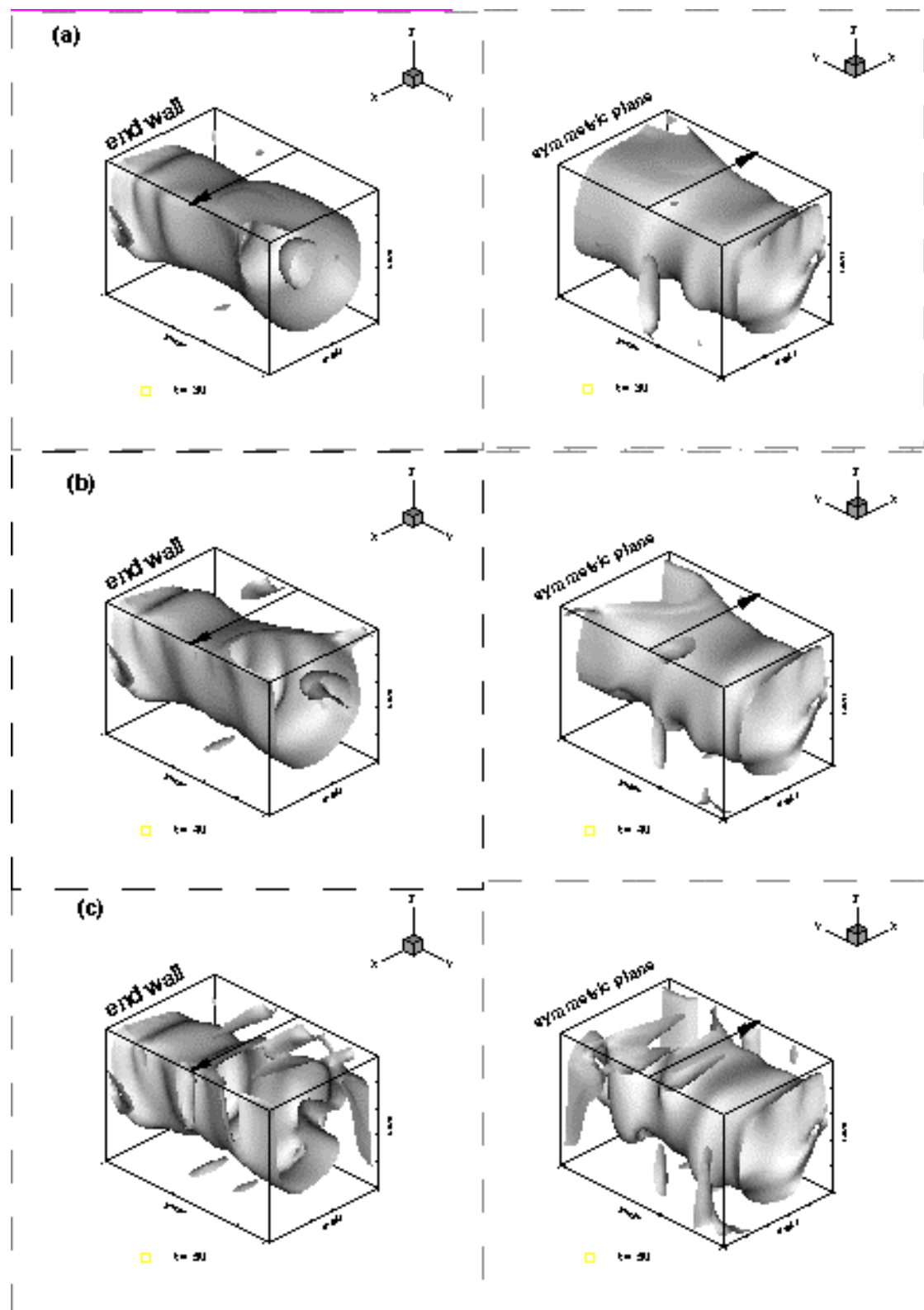


圖 5-10 (a) ~ (c): 不同無因次時間 ($t=30 \sim 50$) 之上、下游區域 $v=0$ 的等值面分布。

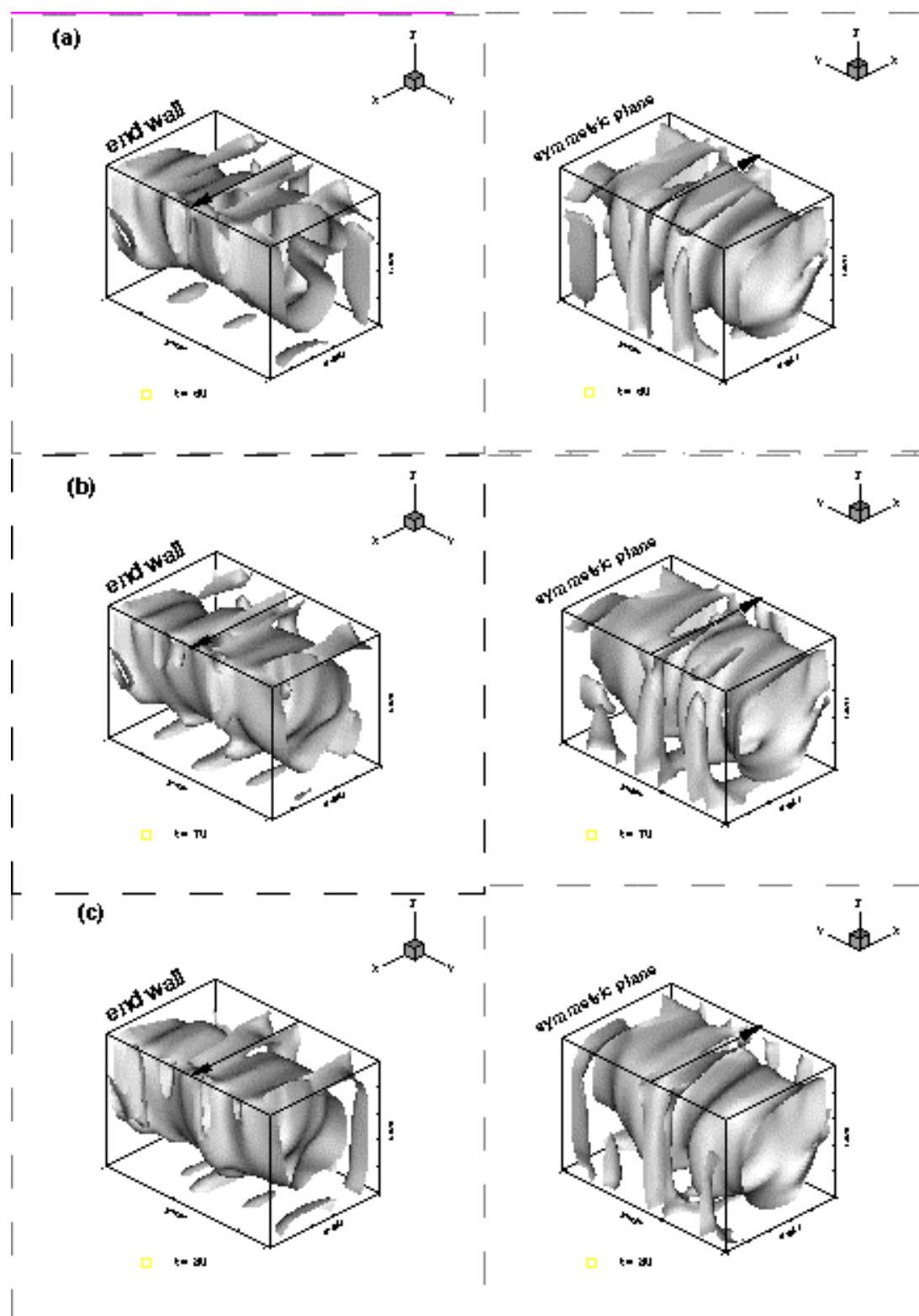


圖 5-11 (a) ~ (c): 不同無因次時間 ($t = 60 \sim 80$) 之上、下游區域 $v = 0$ 的等值面分布。

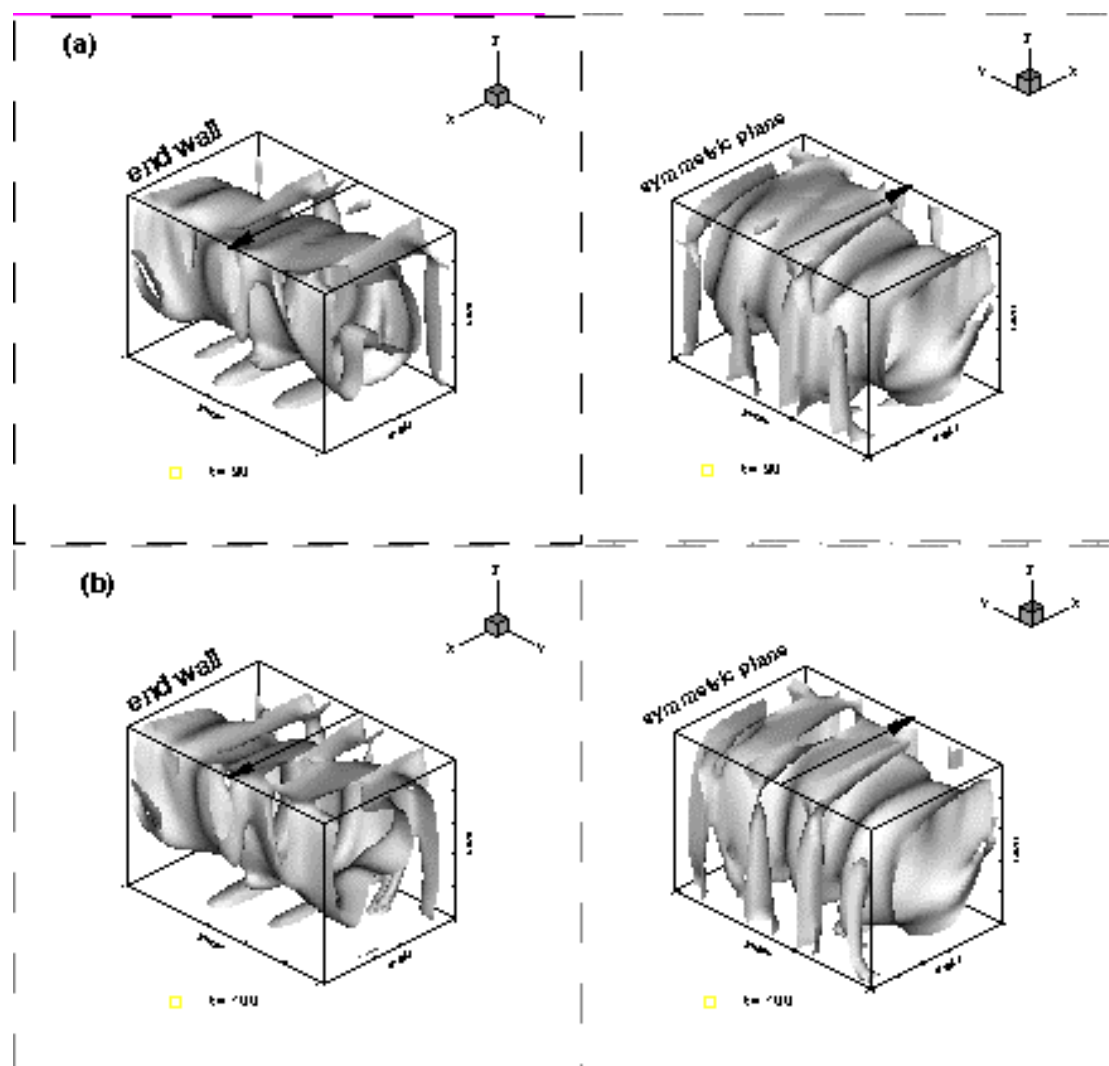


圖 5-12 (a) 與 (b): 不同無因次時間 ($t=90 \sim 100$) 之上、下游區域 $v=0$ 的等值面分布。

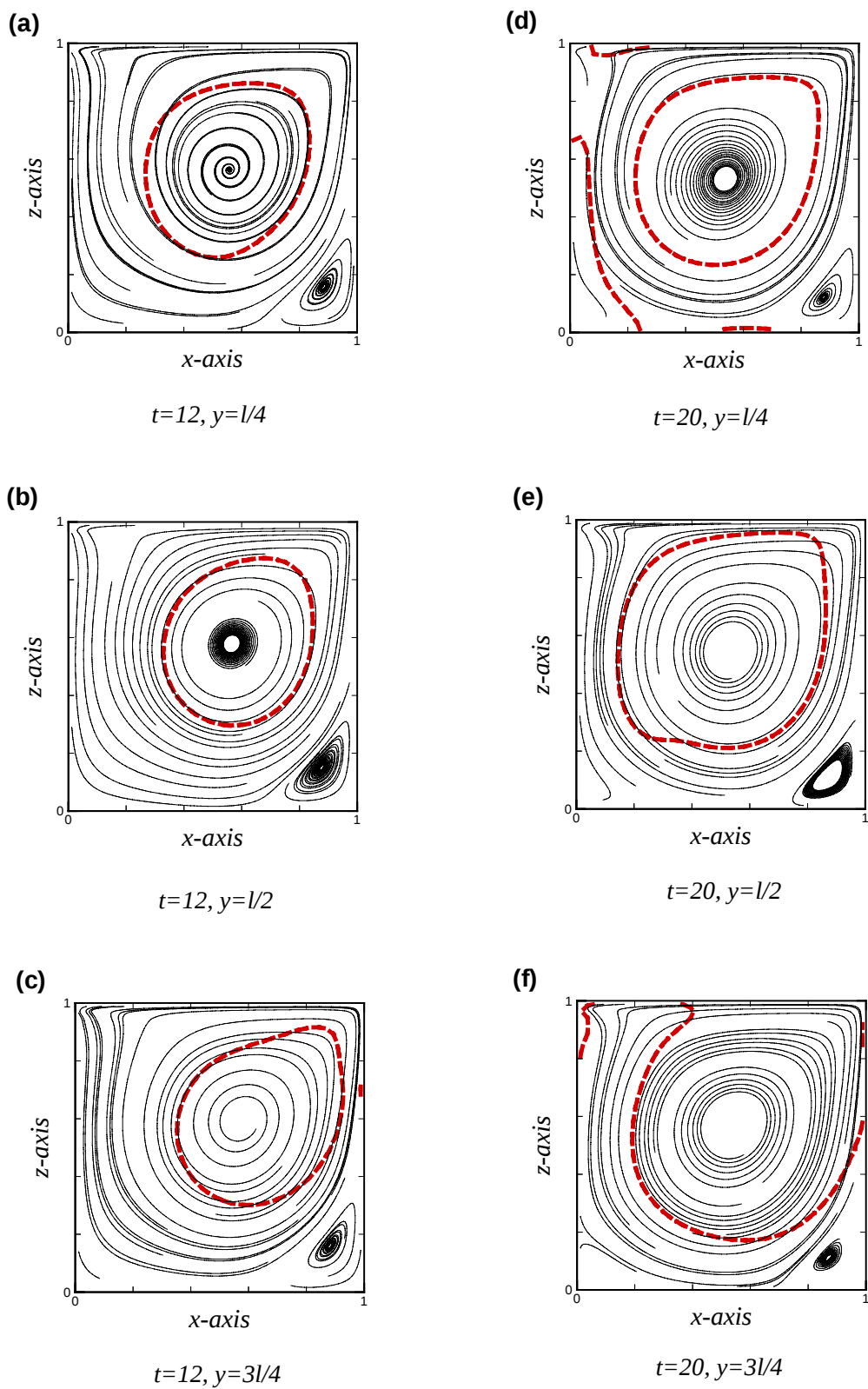


圖 5-13 (a) ~ (f): 不同無因次時間與不同 y 值之 $x-z$ 面的流線與 $v=0$ 等值線分布圖。圖中實線 - 為 $x-z$ 面之流線，虛線 - - - 為 $v=0$ 等值線。

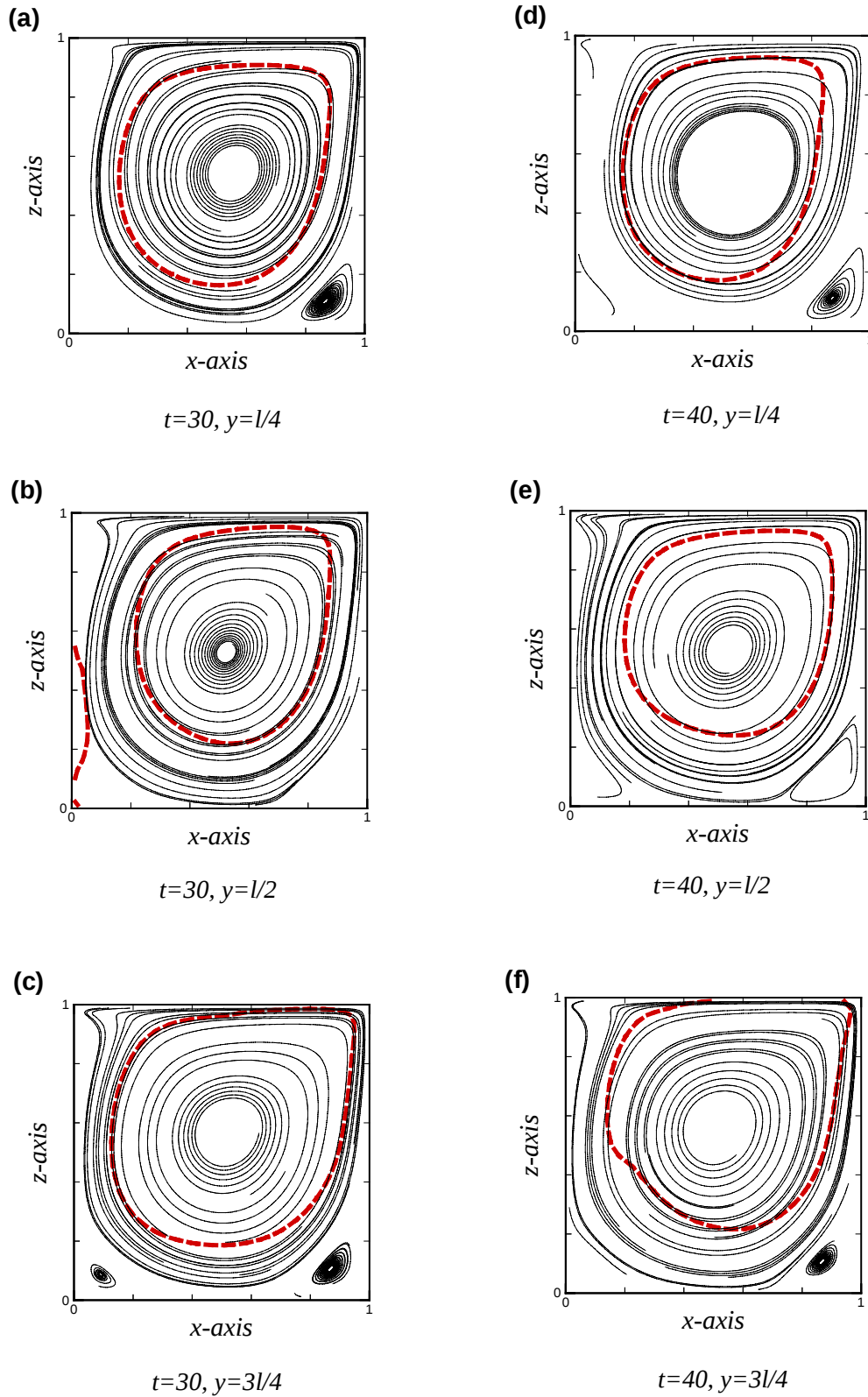
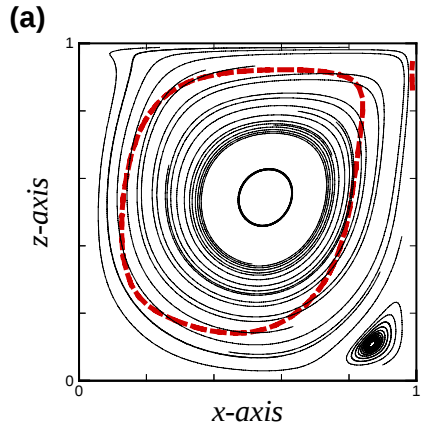
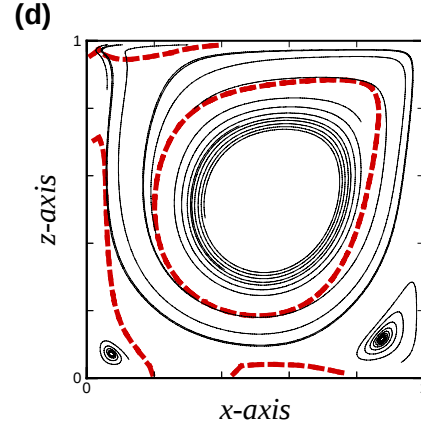


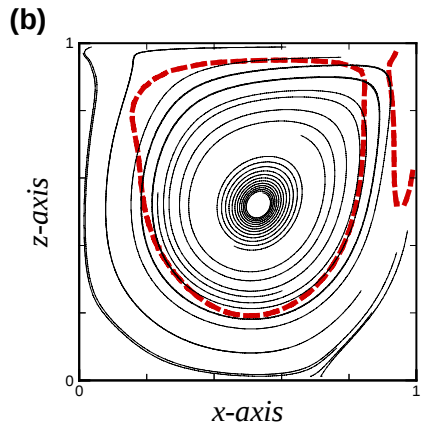
圖 5-14 (a) ~ (f): 不同無因次時間與不同 y 值之 $x-z$ 面的流線與 $v=0$ 等值線分布圖。圖中實線 — 為 $x-z$ 面之流線，虛線 --- 為 $v=0$ 等值線。



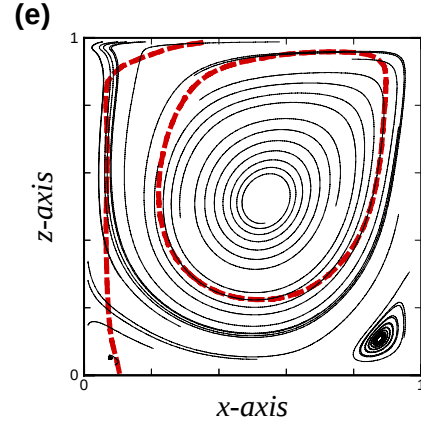
$t=50, y=l/4$



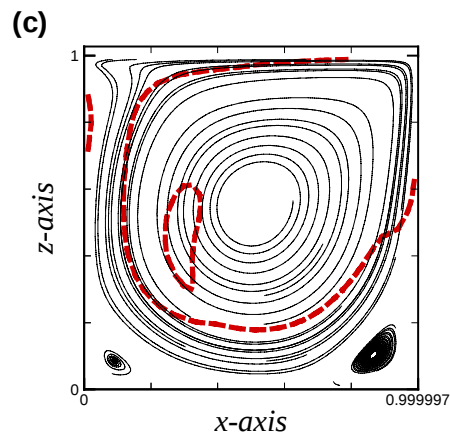
$t=60, y=l/4$



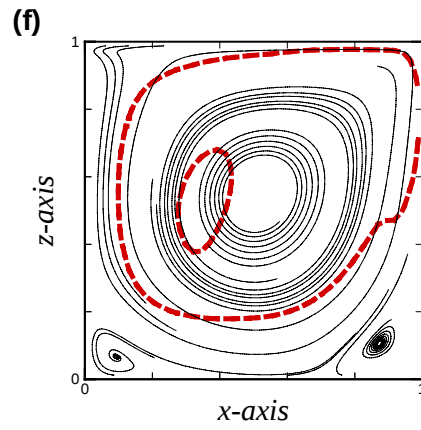
$t=50, y=l/2$



$t=60, y=l/2$



$t=50, y=3l/4$



$t=60, y=3l/4$

圖 5-15 (a) ~ (f): 不同無因次時間與不同 y 值之 $x-z$ 面之流線與 $v=0$ 等值線分布圖。圖中實線 — 為 $x-z$ 面之流線，虛線 --- 為 $v=0$ 等值線。

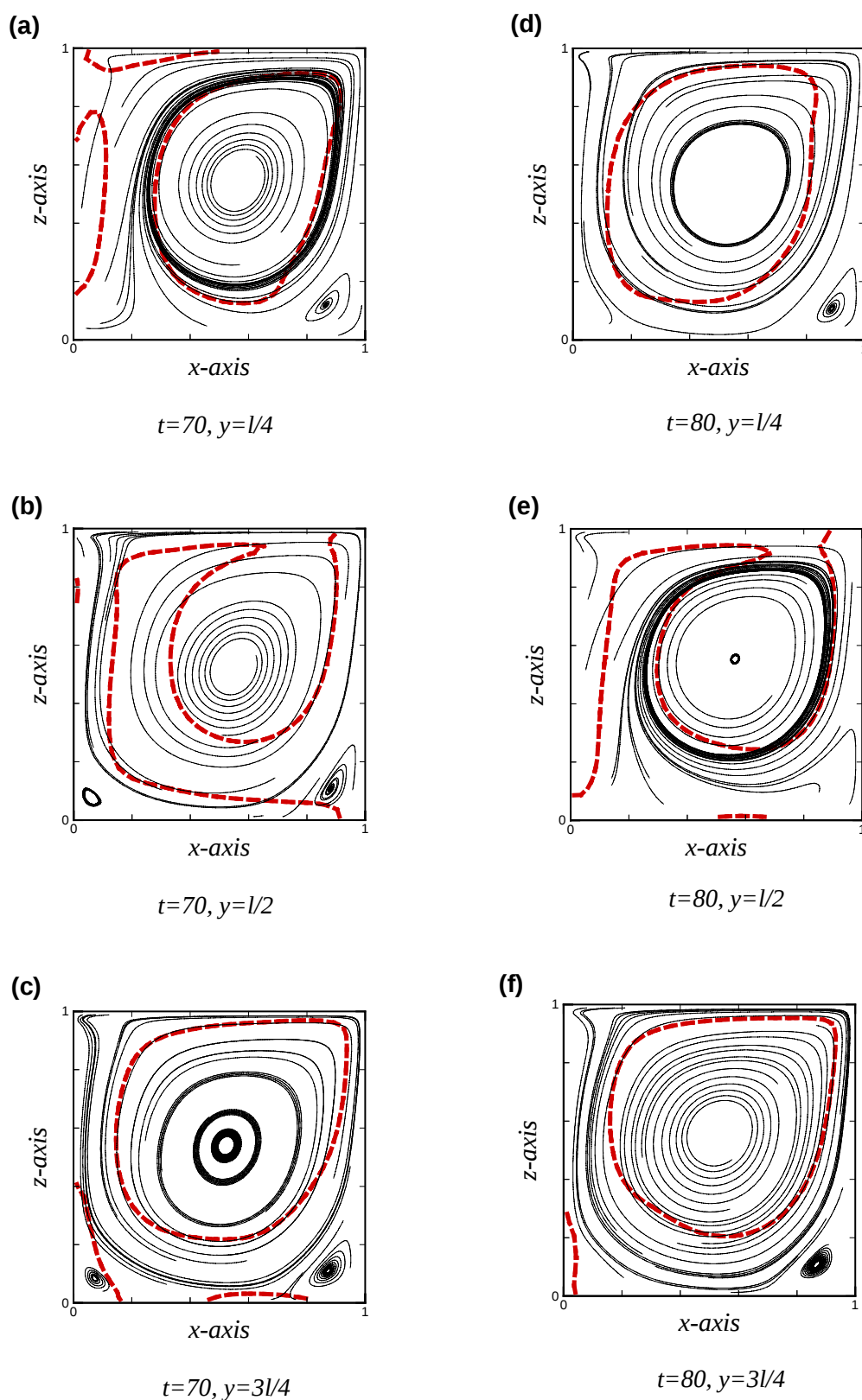


圖 5-16 (a) ~ (f): 不同無因次時間與不同 y 值之 $x-z$ 面的流線與 $v=0$ 等值線分布圖。圖中實線 — 為 $x-z$ 面之流線，虛線 --- 為 $v=0$ 等值線。

5.3 末端牆面漩渦(End-wall vortices)之觀察

三維 LDC 流場中於末端牆面處出現之漩渦總稱為末端牆面漩渦 (end wall vortices), 如圖 1-2 所示, 包含頂部角落漩渦 (upper corner eddy) 及底部角落漩渦 (lower corner eddy), 本節之目的即為觀察此二漩渦之生成與發展。

末端牆面渦為強制漩渦 (forced vortex), 而強制漩渦之漩渦中心速度為零, 在本研究中以觀察漩渦中心之出現來判定末端牆面漩渦之形成, 而圖 5-17 (a) 中 $v = 0$ 與 $w = 0$ 等值線之相交點即為漩渦中心。如前所述, 無因次時間 $t = 5$ 為流場中展向噴流之初始形成時間, 如圖 5-17 (b) 所示, 圖中 $v = 0$ 與 $w = 0$ 等值線尚未相交, 表示末端牆面渦還未生成。而無因次時間增至 $t = 6$ 時 (圖 5-17 (c)), 二等值線開始相交, 頂部角落漩渦與底部角落漩渦同時生成, 速度向量亦出現兩漩渦之圖樣, 此為首次觀察到末端牆面漩渦之生成。隨著無因次時間之遞增由 $t = 6$ 至 30 (圖 5-17 (d) ~ (f)), 頂部角落漩渦中心由 $z = 0.8$ 處漸移至頂部平板 $z = 0.05$ 處後固定, 而底部角落漩渦則由約 $z = 0.4$ 處漸移至矩形槽底部 $z = 0.1$ 處而後其位置不變, 表示末端牆面漩渦已完全發展。由於展向噴流之產生時間為 $t = 5$ 隨後末端牆面漩渦之生成時間為 $t = 6$, 兩現象生成之時間相當接近, 因此展向噴流對於末端牆面漩渦的生成與發展必有極大關係。為進一步觀察末端牆面漩渦隨時間之演化, 我們利用「渦度擬能」(enstrophy) 等值面以檢視末端牆面漩渦結構, 選取 $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 1.5$ 表示末端牆面漩渦強度於 $x - z$ 方向之延伸, 如此可濾掉主漩渦之強大旋度 (ω_y), 而專注於末端牆面漩渦之觀察。流場初期展向噴流尚未發展時 ($t = 1$), 末端牆面漩渦之結構亦不存在 (圖 5-18 (a))。於無因次時間 $t = 5$ 時, 末端牆面處形成一類似甜甜圈狀之等值面 (圖 5-18 (b)), 此即為早期之末端牆面漩渦結構。隨著無因次時間增加此結構漸漸往牆面四周擴張, 如前所述之二末端牆面漩渦各移動至頂面與底部的現象為相同, 至無因次時間 $t = 30$ 末端牆面漩渦可謂完全發展, 如圖 5-18 (e) 與 5-18 (f) 所示, 圖中甜甜圈狀結構外觀已無太多差異。

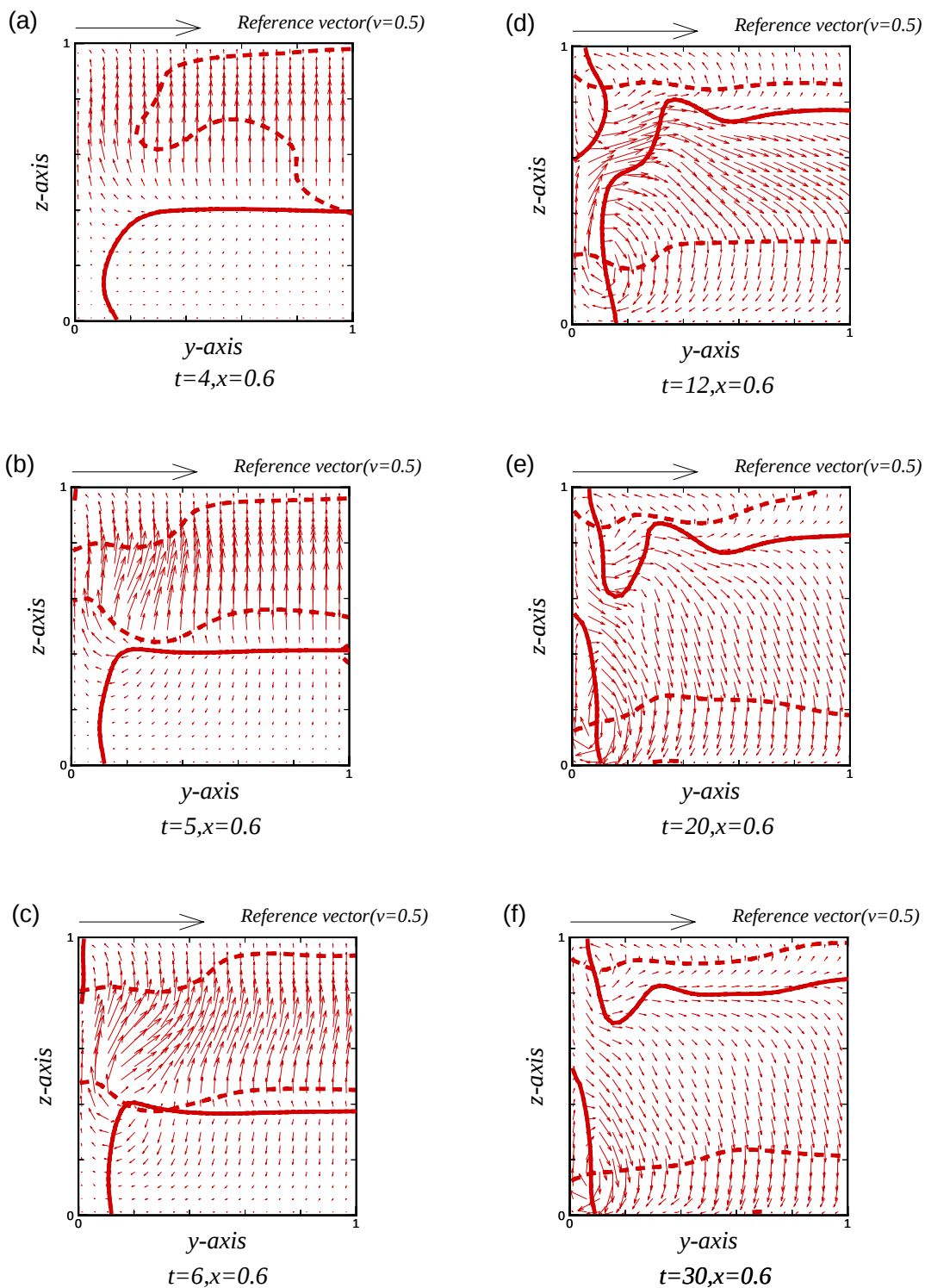


圖 5-17 (a) ~ (f): 不同無因次時間 ($t=1 \sim 30$) 於 $x=0.6$ 之 y - z 面速度分布, 圖中虛線 --- 為 $v=0$ 等值線, 實線 — 為 $w=0$ 等值線。

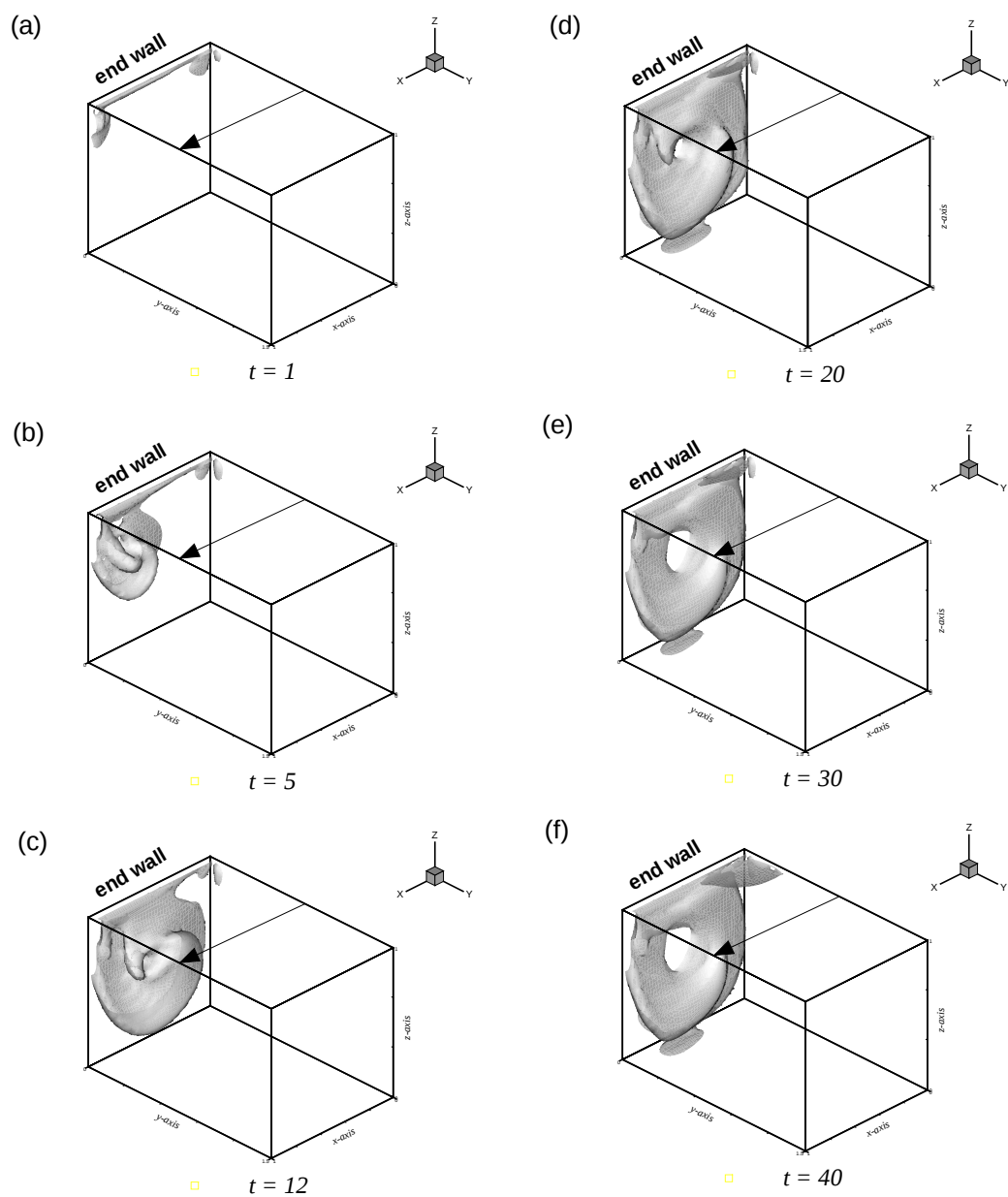


圖 5-18(a)-(f): 不同無因次時間($t = 1 \sim 40$)之渦度擬能等值面($\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 1.5$)
圖。

5.4 Taylor-Gortler like 漩渦之生成與演化

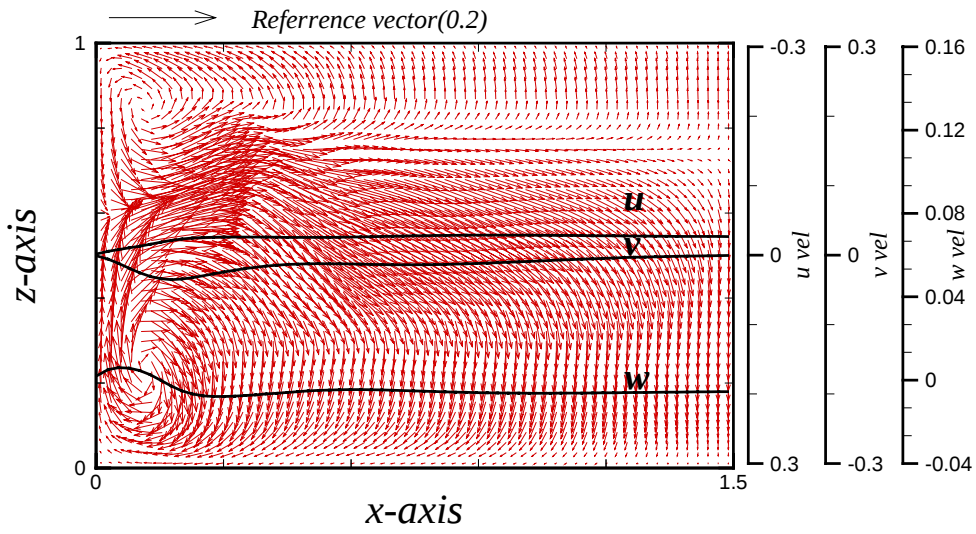
本節的目的為觀察 TGL 漩渦之生成與演化，在眾多前人數值與實驗之研究中皆選擇偏頂部平板移動方向下游之 $y-z$ 面以觀察 TGL 漩渦，而本研究以流場初期之展向噴流速度極值中心點（ $x = 0.6, z = 0.6$ ）作為觀察流場之焦點，選定 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面來觀察 TGL 漩渦隨時間之演化不但能維持整個研究之連貫性，亦可與前人的結果做比較。

根據諸多前人之研究結果，TGL 漩渦首先於矩形槽底部生成，而於 Chiang 等（1996）之研究中認為 TGL 漩渦與矩形槽底部之擾動有密切關係，圖 5-19 即為矩形槽底部（ $z = 0.04, x = 0.6$ ）沿著 y 方向之速度分布。矩形槽底部之初期流場中（圖 5-19（a）與 5-20（a）），靠近末端牆面區域受末端牆面漩渦之影響，因而造成速度分布波動，其餘底部沿展延方向速度分布皆非常平滑，對應之旋度等值圖（圖 5-19（b）與 5-20（b）），位於上、下角落亦可觀察到由旋度極值所代表之末端牆面漩渦的存在。當無因次時間增至 $t = 30$ 時（圖 5-21），底部速度分布由靠近末端牆面區域至展延中央皆呈現波浪狀分布，而至無因次時間 $t = 40$ （圖 5-22），波浪狀速度分布更為劇烈並且遍佈整個矩形槽底部之展延，如圖 5-22（b）所示，底部展延方向上數個成對之旋度極值出現，此為 TGL 漩渦之生成，所以矩形槽底部之擾動與 TGL 漩渦之生成的確關係密切。

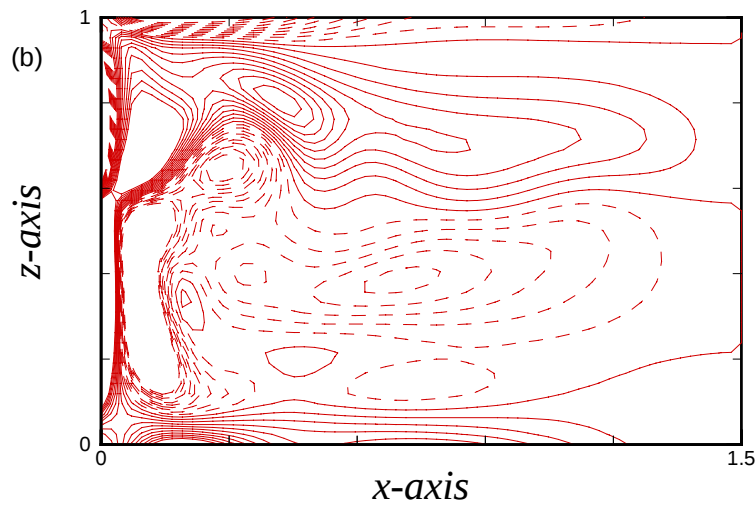
觀察 TGL 漩渦隨時間之演化，本研究於 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面以彩色旋度等值圖（圖 5-23 至 5-25），以助於觀察 TGL 漩渦之發展，圖中紅色表示旋度為正值，旋轉方向為逆時針方向，藍色表示旋度為負值，旋轉方向漩渦為順時針方向。根據圖中之觀察與歸納，於展延出現之 TGL 漩渦隨著無因次時間之增加，重複以下行為：於展延上所有 TGL 漩渦皆向末端牆面移動（圖 5-25（a）與（b））；靠近對稱面處有新增之 TGL 漩渦（圖 5-25（a）與（b）），而靠近於末端牆面處之 TGL 漩渦漸隱沒至末端牆面漩渦（圖 5-23（a）與（b））；於底部展延中央處之 TGL 漩渦有突然消失與產生之現象（圖 5-23（c）、5-24（a）與（b））。根據前人之研

究，TGL 漩渦會往主漩渦流線方向延伸，所以觀察單一平面所得之資訊已不足於描述 TGL 之發展與演化，本研究再次利用前節所述之渦度擬能等值面進行分析。由於渦度擬能等值之選取對於是否能清楚檢視 TGL 漩渦結構為相當重要，等值選取太大則無法看見 TGL 漩渦結構，選取太小則無法過濾雜訊，如前所述，為觀察末端牆面漩渦所選取之等值 ($\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 1.5$) 即為過大，所以只能觀察到末端牆面漩渦，此處則選定 $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 0.5$ 以便觀察旋度較小之 TGL 漩渦結構。以下為矩形槽中渦度擬能等值圖觀察到 TGL 漩渦隨時間之演化：於無因次時間 $t = 40$ 時 (圖 5-26 (a))，首次於矩形槽底部出現 TGL 漩渦結構，此與前人之數值與實驗結果相同，而圓柱狀渦度擬能等值面初始為細長貌，表示 TGL 漩渦強度尚微弱，隨著無因次時間之增加 (圖 5-26 (b) ~ (j))，TGL 漩渦強度漸長，渦度擬能等值面則漸變粗大，並沿矩形槽底部，而後壁，而頂部平板終至前壁重複之伸展行為 (圖 5-26 (a) 至 (j) 圖 5-27 (a) 與 (b))，此現象可說明前述 TGL 漩渦發展初期，於 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面 TGL 漩渦之旋度極值突然出現與消失之行為，而於前節所述介於展延中央其上游區域之展向往復運動總是較下游區域為複雜之結論，於 TGL 漩渦生成後 ($t \geq 40$) 才則不符合此結論，表示上述 TGL 漩渦沿牆面延伸之行為乃造成此現象之因素。隨著無因次時間之增加，TGL 漩渦皆向末端牆面移動，及靠近對稱面處新增 TGL 漩渦而靠近於末端牆面處 TGL 漩渦漸隱沒至末端牆面漩渦之各現象，在渦度擬能的等值諸圖中 (圖 5-26~5-31)，亦能觀察到相同之行為，表示利用渦度擬能等值面之方法有利於觀察 TGL 漩渦於三維空間中之發展與演化。

(a)



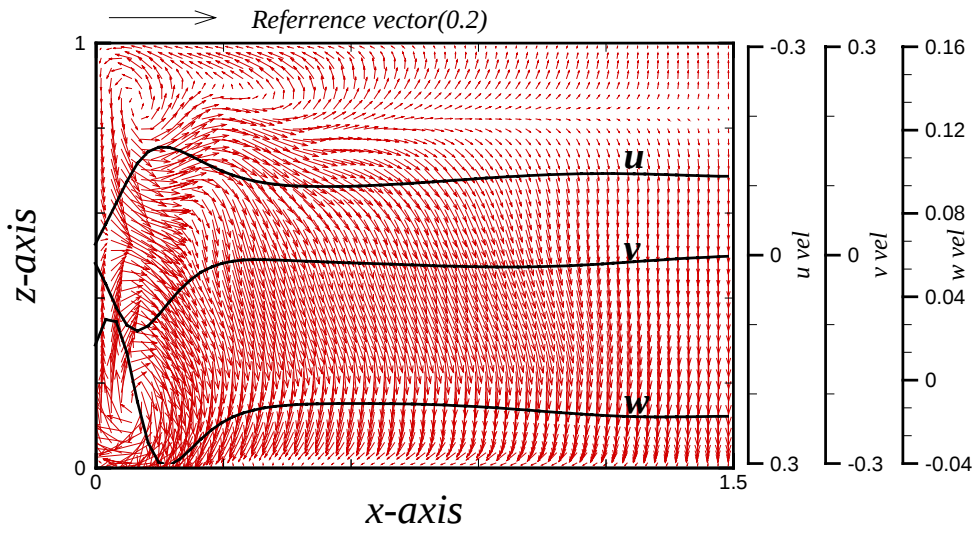
□ $t = 12$



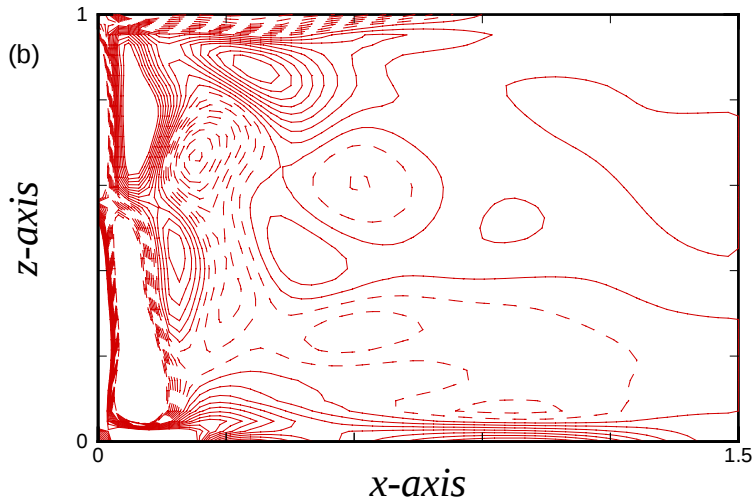
□ $t = 12$

圖 5-19 (a) (b): 圖 (a) 為無因次時間 $t=12$ 在 $x=0.6$ 之 $y-z$ 面上速度向量分布與 $x=0.6, z=0.04$ 沿 y 方向速度分布。圖 (b) 為無因次時間 $t=12$ 在 $x=0.6$ 之 $y-z$ 面上旋度等值圖，最大旋度分別為 1 與 -1，共 21 等值，圖中實線表示旋度值為正值，虛線表示旋度值為負值。

(a)



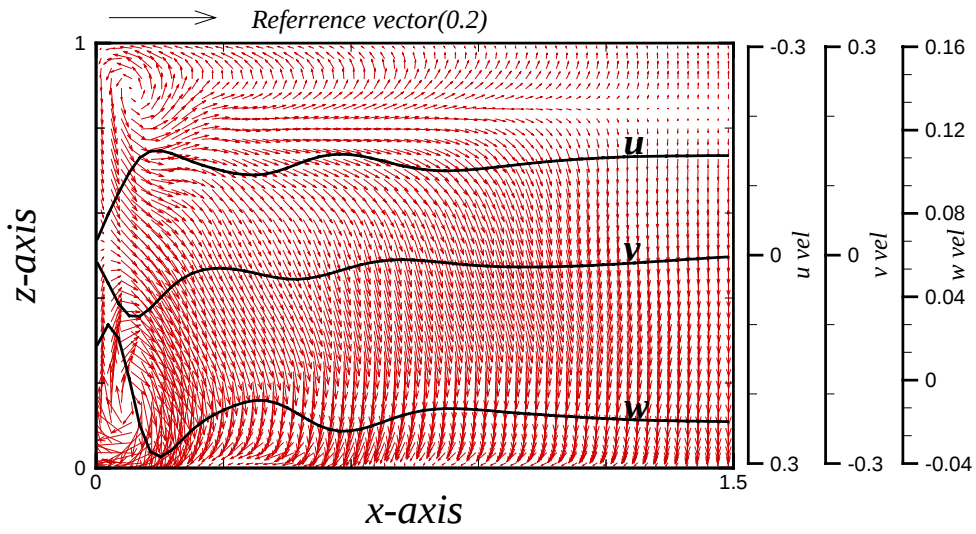
□ $t = 20$



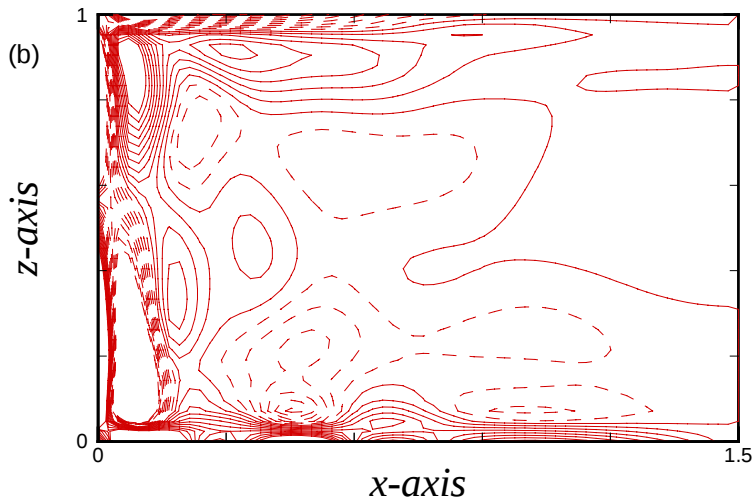
□ $t = 20$

圖 5-20 (a) (b): 圖 (a) 為無因次時間 $t = 20$ 在 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上速度向量分布與 $x = 0.6, z = 0.04$ 沿 y 方向速度分布。圖 (b) 為無因次時間 $t = 20$ 在 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上旋度等值圖，最大旋度分別為 1 與 -1，共 21 等值，圖中實線表示旋度值為正，虛線表示旋度值為負。

(a)



□ $t = 30$



□ $t = 30$

圖 5-21 (a) (b): 圖 (a) 為無因次時間 $t = 30$ 在 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上速度向量分布與 $x = 0.6, z = 0.04$ 沿 y 方向速度分布。圖 (b) 為無因次時間 $t = 30$ 在 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上旋度等值圖，最大旋度分別為 1 與 -1，共 21 等值，圖中實線表示旋度為正值，虛線表示旋度為負值。

(a)

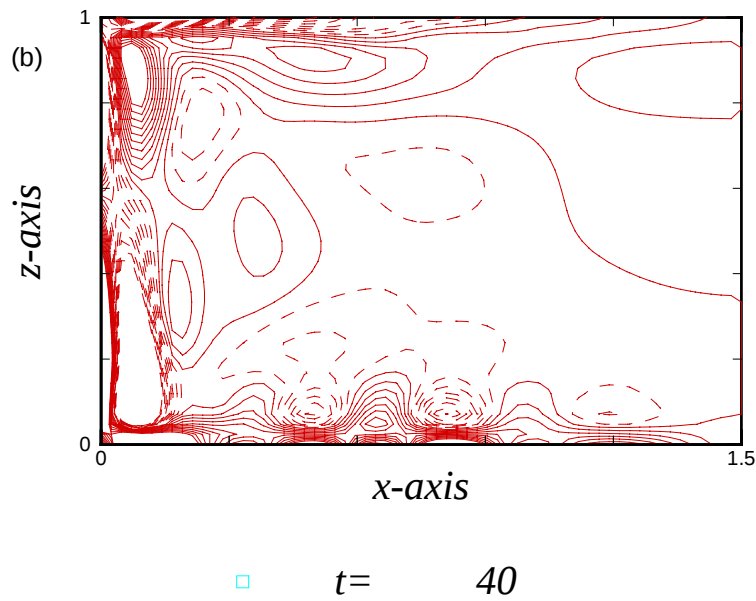
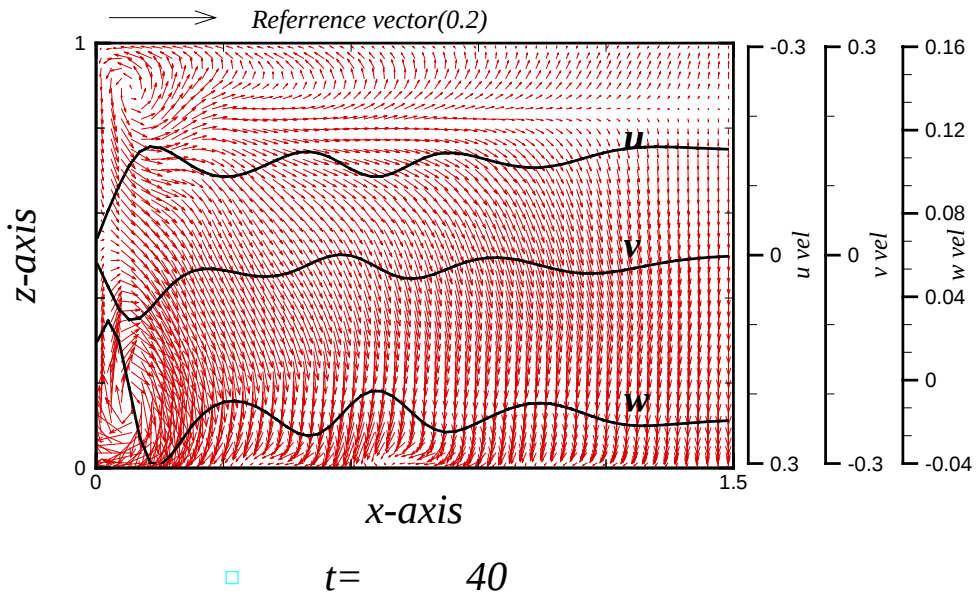


圖 5-22 (a) (b): 圖 (a) 為無因次時間 $t = 40$ 在 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上速度向量分布與 $x = 0.6, z = 0.04$ 沿 y 方向速度分布。圖 (b) 為無因次時間 $t = 40$ 在 $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上旋度等值圖，最大旋度分別為 1 與 -1，共 21 等值，圖中實線表示旋度值為正值，虛線表示旋度值為負值。

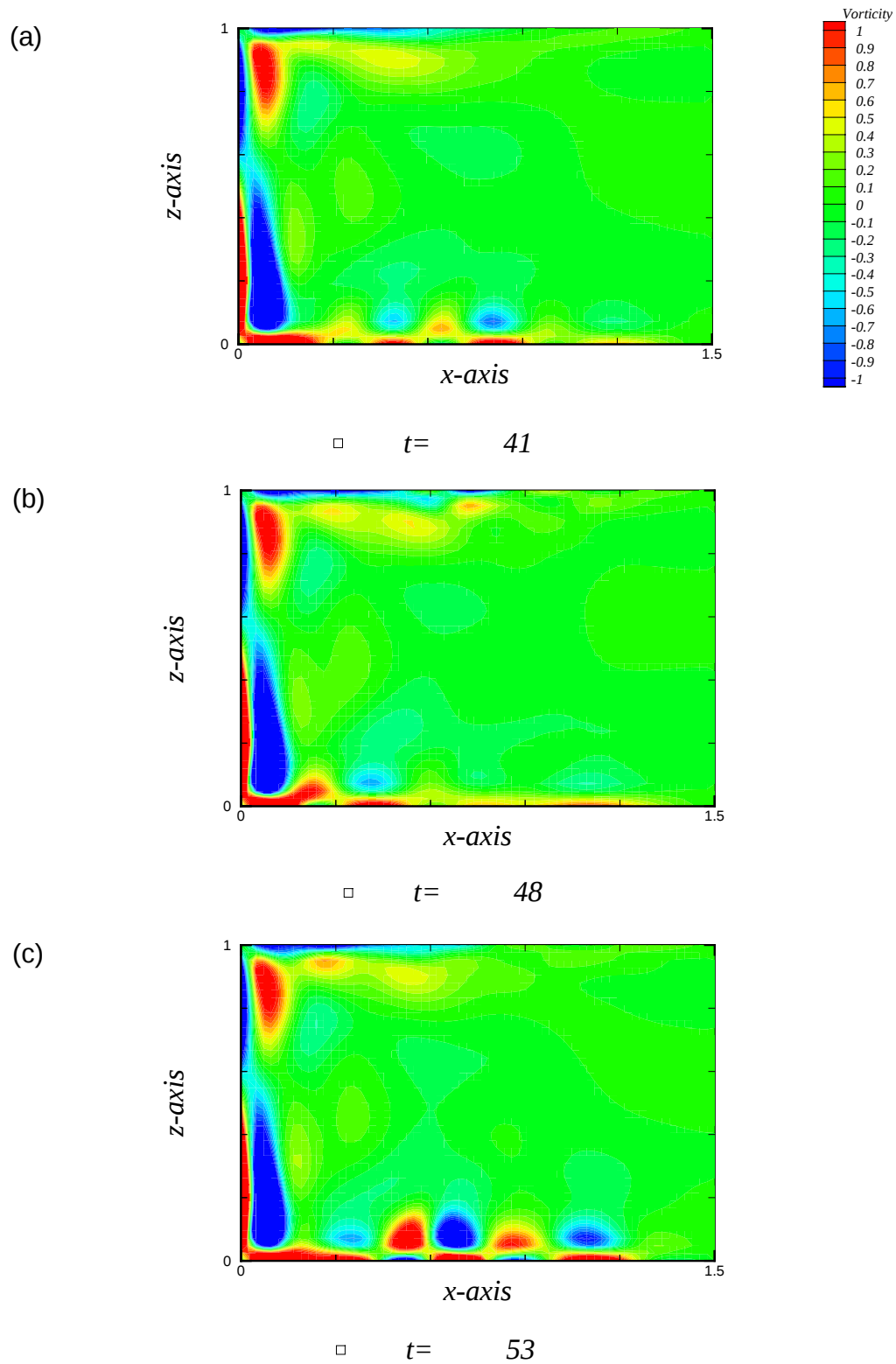


圖 5-23 (a) ~ (c): 不同無因次時間, $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上旋度彩色等值圖。旋度最大與最小值分別為 1 與 -1, 共有 21 個等值。圖中紅色表示旋度值為正值, 藍色表示旋度值為負值。

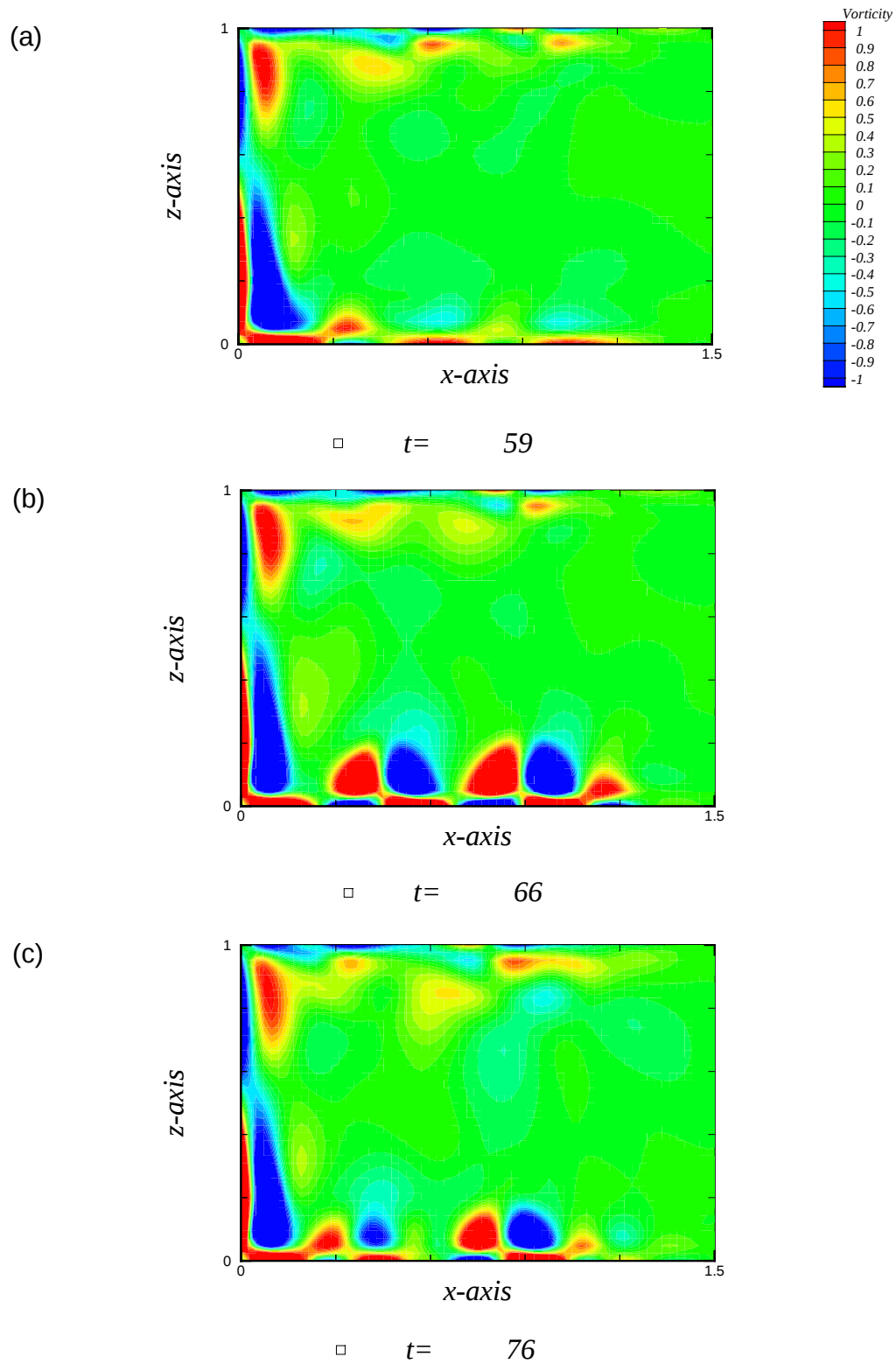


圖 5-24 (a) ~ (c): 不同無因次時間, $x = 0.6$ 之 $y-z$ 面上旋度彩色等值圖。旋度最大與最小值分別為 1 與 -1, 共有 21 個等值, 紅色表示旋度值為正值, 藍色表示旋度值為負值。

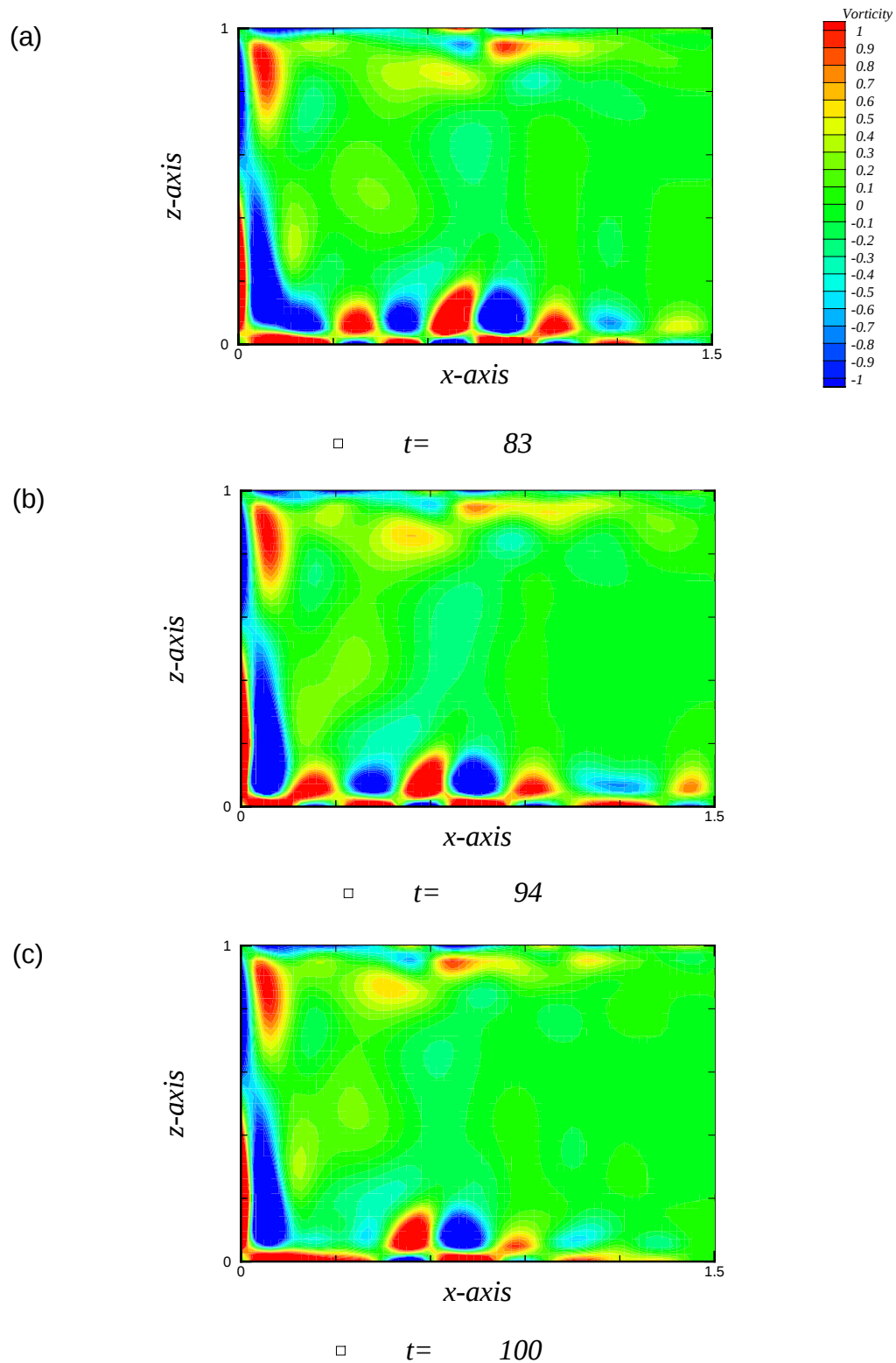


圖 5-25 (a) ~ (c): 不同無因次時間, $x = 0.6$ 之 $y - z$ 面上旋度彩色等值圖。旋度最大與最小值分別為 1 與 -1, 共有 21 個等值, 圖中紅色表示旋度值為正值, 藍色表示旋度值為負值。

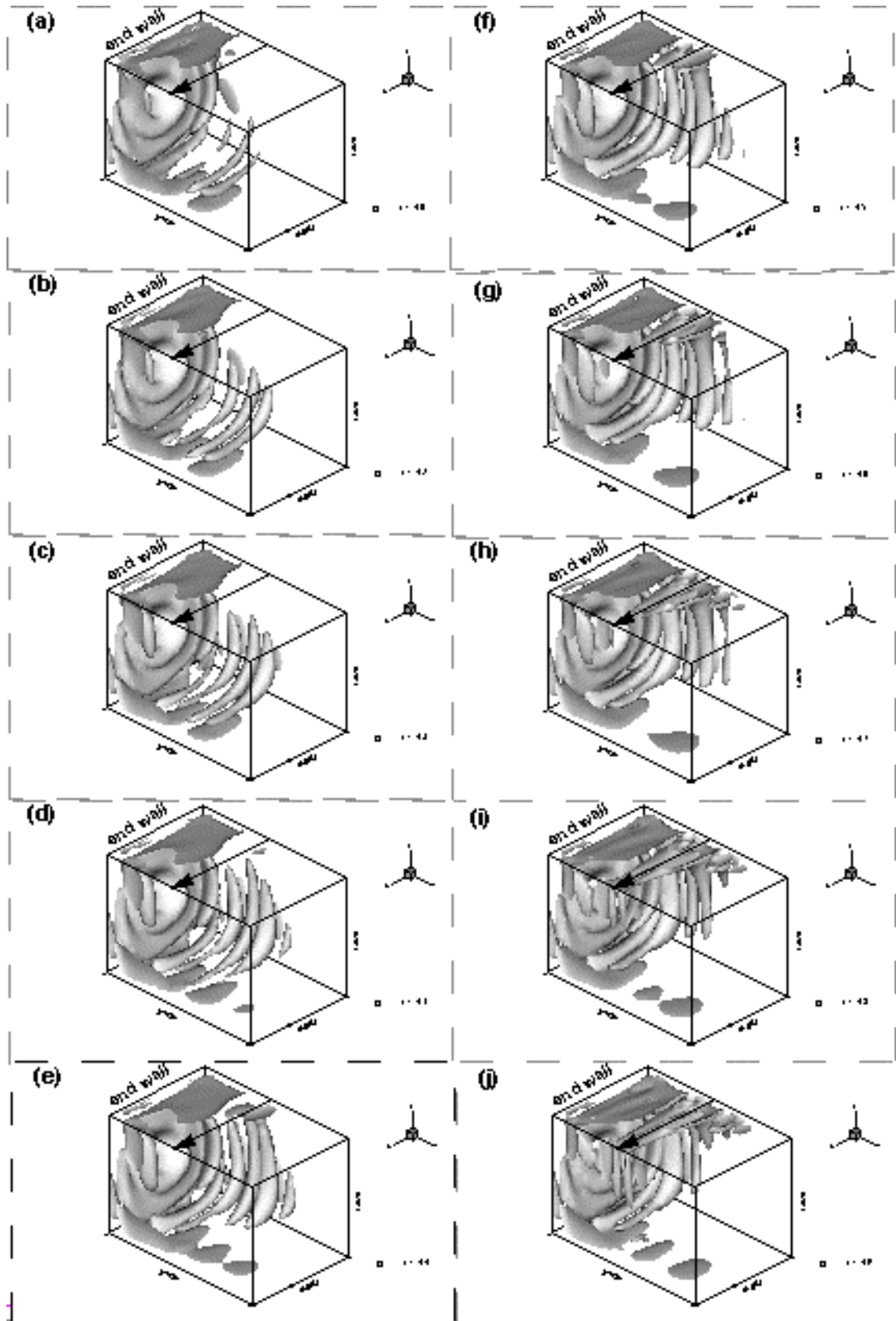


圖 5-26 (a) ~ (j): 三維 LDC 流場中不同無因次時間 ($t = 40 \sim 49$) 之渦度擬能等值圖，其中等值選取為 $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 0.5$ 。

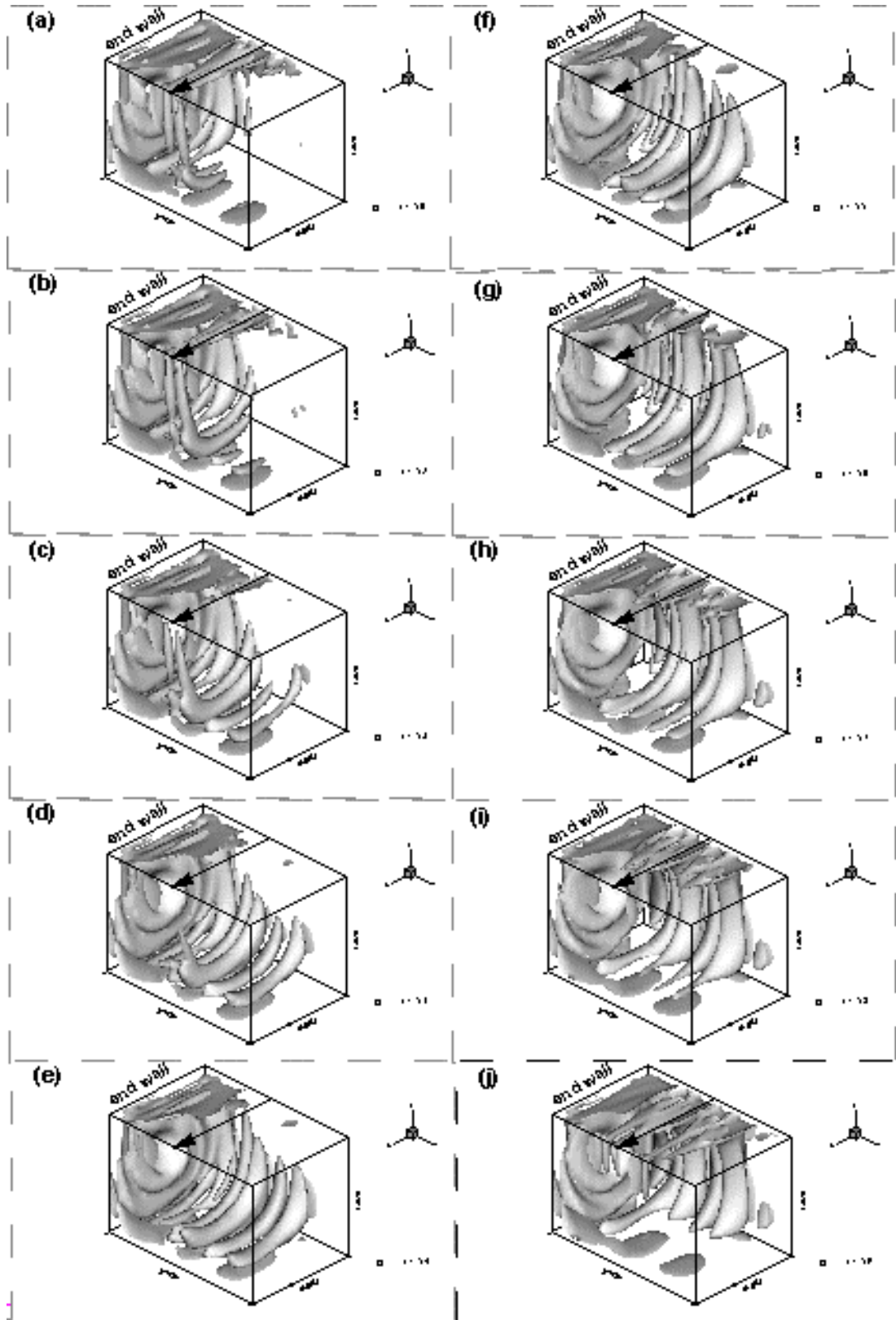


圖 5-27 (a) ~ (j): 三維 LDC 流場中不同無因次時間 ($t = 50 \sim 59$) 之渦度擬能等值圖，其中等值選取為 $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 0.5$ 。

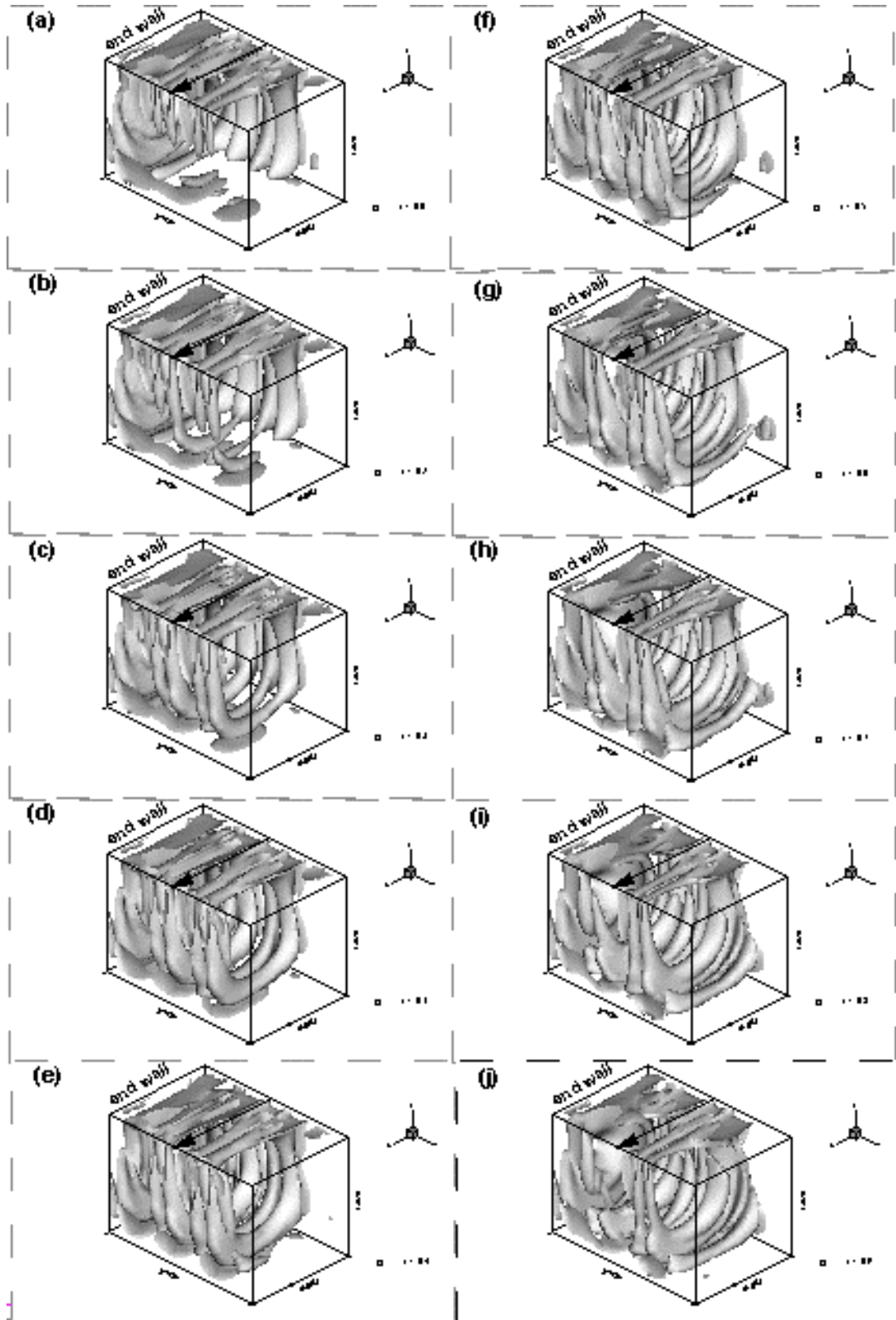


圖 5-28 (a) ~ (j): 三維 LDC 流場中不同無因次時間 ($t = 60 \sim 69$) 之渦度擬能等值圖，其中等值選取為 $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 0.5$ 。

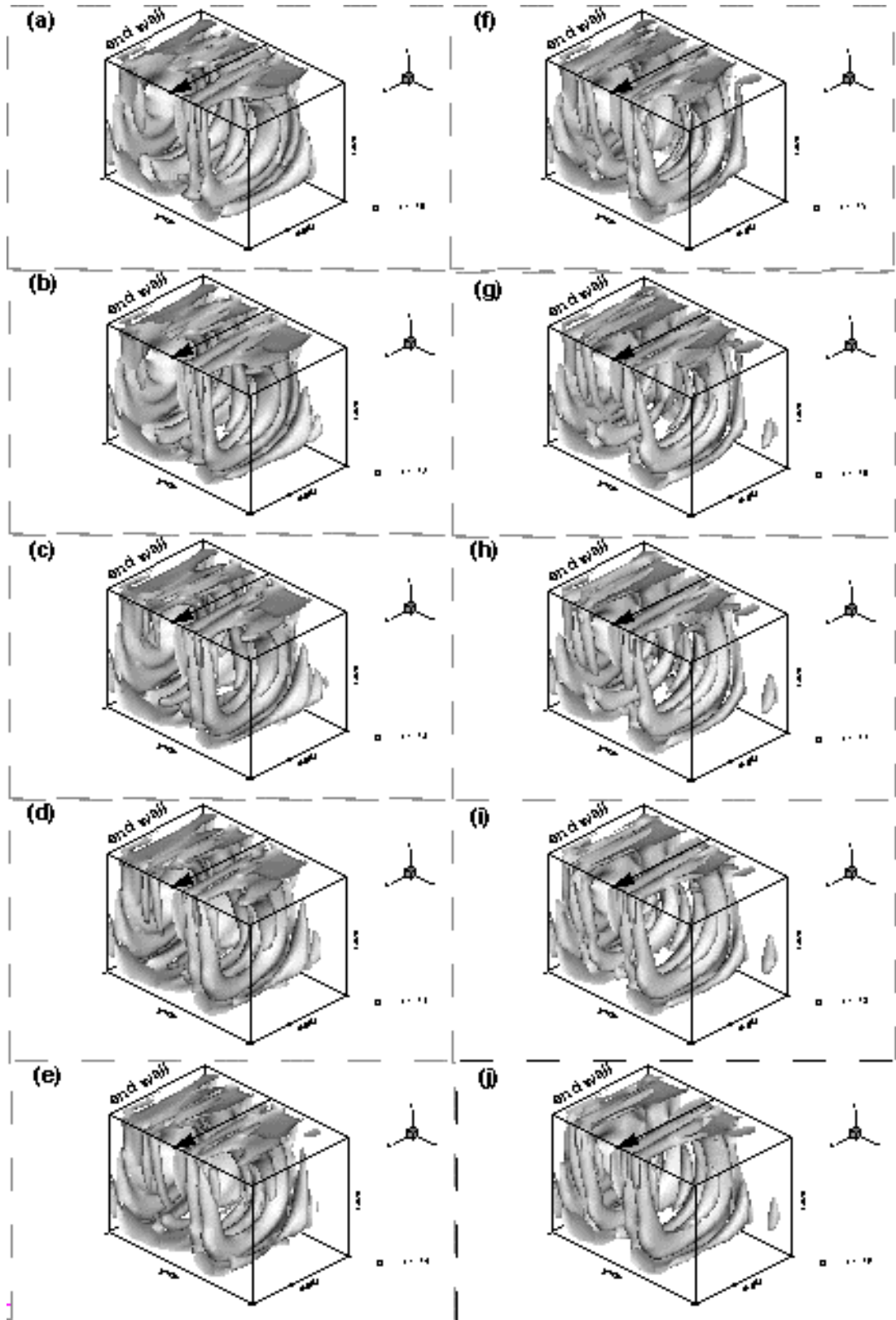


圖 5-29 (a) ~ (j): 三維 LDC 流場中不同無因次時間 ($t = 70 \sim 79$) 之渦度擬能等值面，圖中等值選取 $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 0.5$ 。

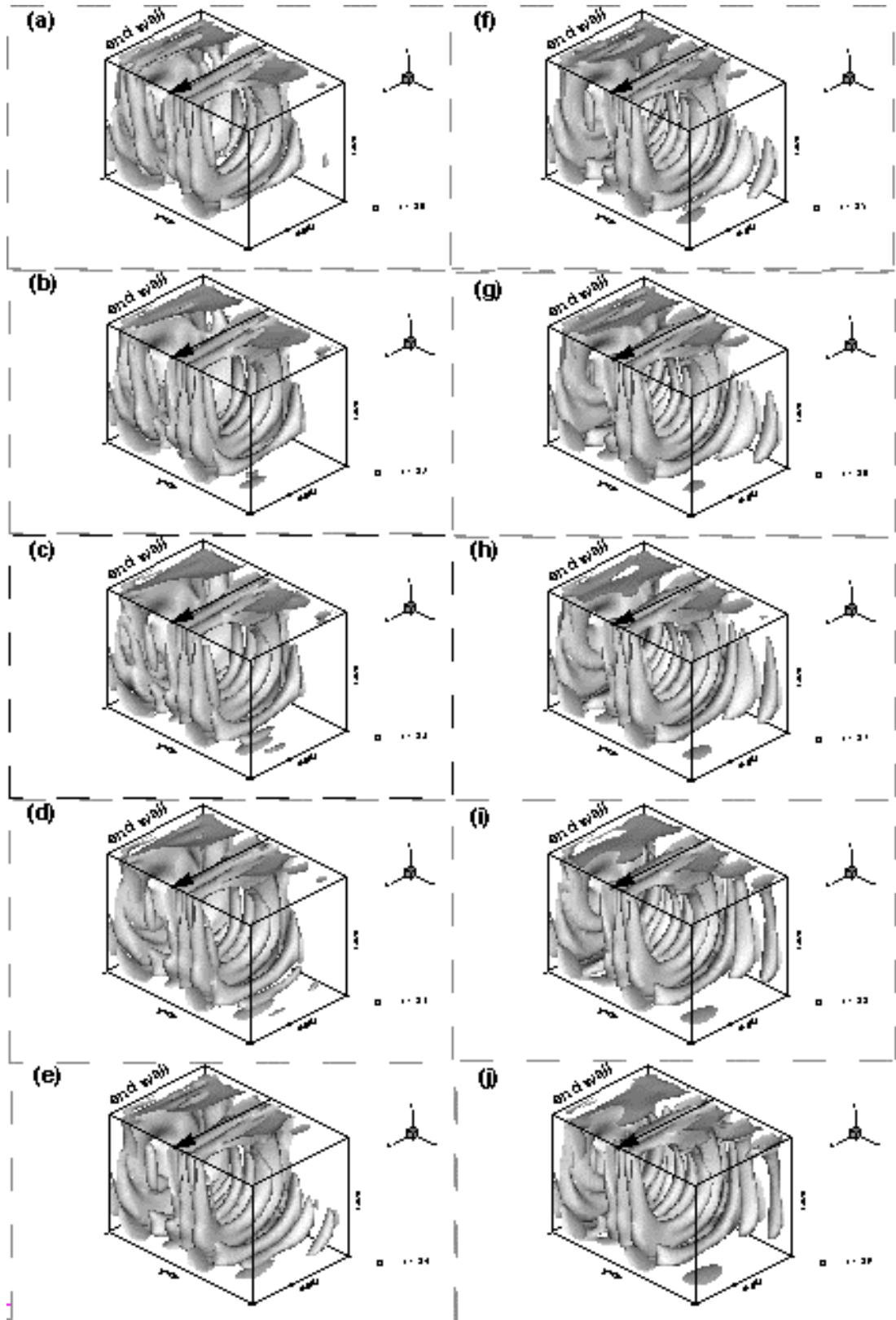


圖 5-30 (a) ~ (j): 三維 LDC 流場中不同無因次時間 ($t = 80 \sim 89$) 之渦度擬能等值圖，其中等值選取為 $\sqrt{\omega_x \omega_z} = 0.5$ 。

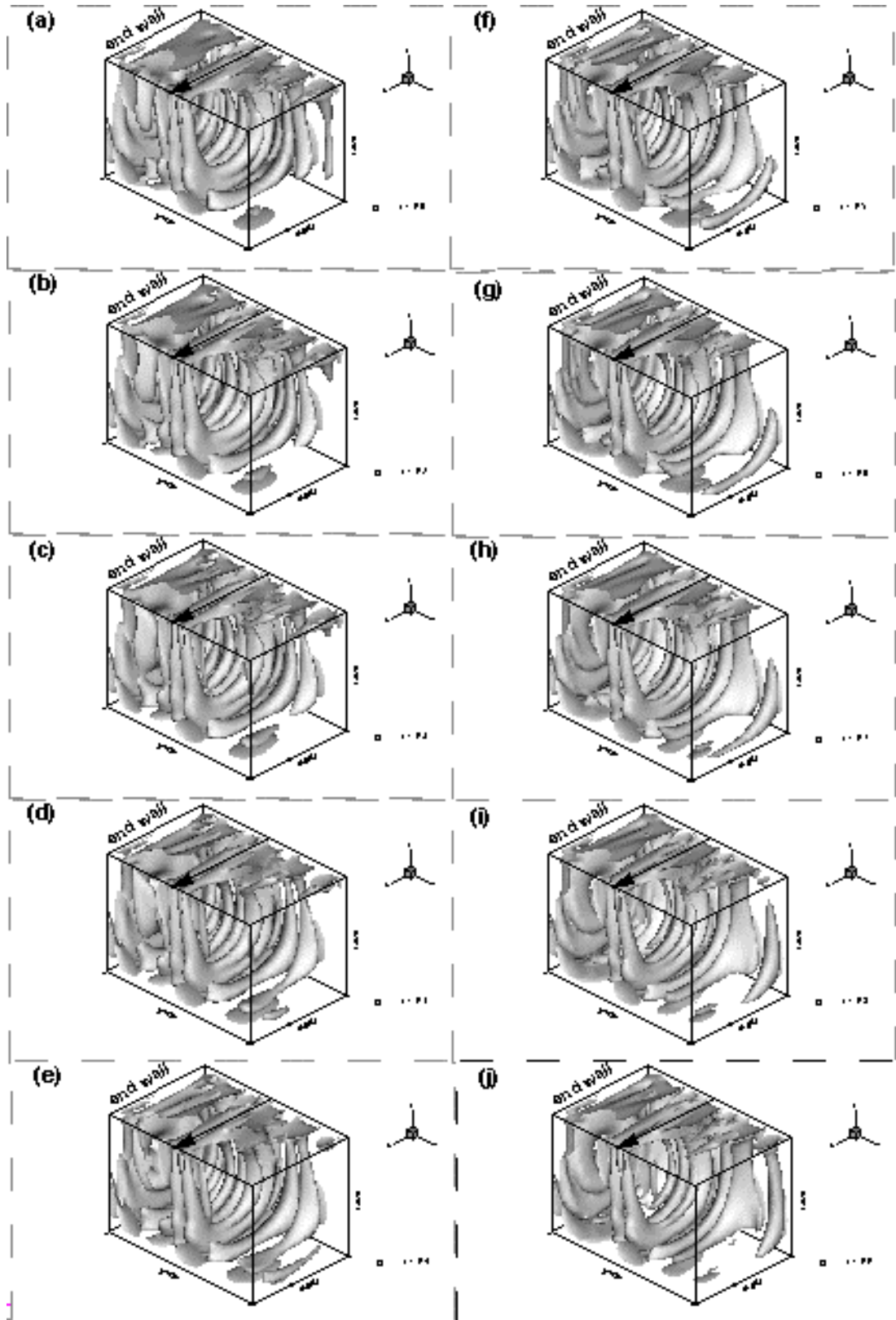


圖 5-31 (a) ~ (j): 三維 LDC 流場中不同無因次時間 ($t = 90 \sim 99$) 之渦度擬能等值圖，其中選取等值 $\sqrt{\omega_x \omega_z} = 0.5$ 。

陸、結論與未來展望

我們以二階準度有限差分近似無因次化、守恆形式的 Navier-Stokes 方程式，並使用類似 MAC (Marker And Cell) 之方法以求解壓力，其中利用特殊高斯消去法 (sparse variant of Gaussian elimination) 解對稱稀疏矩陣方程組之程式套件組 (MA27)，以直接求解壓力 Poisson 方程式，再用一階準度之時間積分求解速度。解得之速度中心線與前人之結果比較，在同為等間距網格配置方法下，並未有太大的差異，此驗證我們的程式為正確的。

在我們的研究中發現，流場初期除了由與頂部驅動方向平行之近似二維運動之外，於展延方向亦有流體運動，即正 y 方向之展向噴流。進一步研究得到 y 方向壓力梯度 $\partial p / \partial y$ 與展向噴流之生成關係密切。我們亦分析三維流場之展向運動複雜度，利用 $v = 0$ 的等值面之觀察發現上游區域之展向運動複雜度遠較於下游區域為高，而利用不同 y 值 $x - z$ 面上流線與 $v = 0$ 等值線交錯情況分析出靠近對稱面區域之螺旋往復運動較近末端牆面區域為多。

在觀察末端牆面漩渦之生成與發展之過程，則應用強制漩渦其中心速度為零之物理性質，於 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 平面 $v = 0$ 與 $w = 0$ 等值線交錯點以判斷出現末端牆面漩渦中心之位置，並代表末端牆面漩渦之生成，研究結果發現末端牆面漩渦之生成與展向噴流之出現時間甚為接近，表示兩現象有因果關係。利用渦度擬能等值面幫助觀察末端牆面漩渦之三維結構發展，此法得到的結果不但與 $x = 0.6$ 之 $y - z$ 平面上二末端牆面漩渦各向頂部及底部移動之情況相同，亦可清楚顯示末端牆面漩渦結構由生成至完全發展情況。

研究 TGL 漩渦之生成與演化過程中，首先對 Chiang 等 (1996) 所提出矩形槽底部之擾動與 TGL 漩渦之生成相關，研究結果顯示相同之結論。進一步研究則利用於 $x = 0.6$ 的 $y - z$ 面之彩色旋度圖觀察 TGL 漩渦隨時間之演化，結果發現

TGL 漩渦於整個模擬時間重複下列行為：展延上所有 TGL 漩渦皆向末端牆面移動；靠近對稱面處有新增之 TGL 漩渦，而靠近於末端牆面處 TGL 漩渦漸隱沒至末端牆面漩渦。以上行為可由渦度擬能等值面觀察到相同之結論，而底部展延中央處 TGL 漩渦突然消失與產生之現象，則可由渦度擬能等值面沿矩形槽底部，而後壁，而頂部平板終至前壁重複之伸展行為解釋之。

三維 LDC 流場未來首要工作為將程式中採取之等間距網格改變為非等間距網格，而打網格之原則為以靠近邊界的區域較密，而往矩形槽中心區域則稀疏，此乃由於近邊界處之黏滯效應較矩形槽中心處為大，而此實際的物理觀念導入本研究之程式為首要之務。於上述工作完成之後，我們可改變頂部平板的移動方向為與 x 方向夾 θ 角之方向，並比較不同 θ 角之頂部驅動三維流場之差異。之後可改變頂部驅動之情況，使頂部平板之移動改變為一剪力，並於頂部邊界設定為自由液面，則三維 LDC 流場轉變為風吹拂於頂部為自由液面之矩形槽，此題目可應用於漁塭之流場相關問題中，而自然界類似於此流場之問題更不甚枚舉，所以三維 LDC 流場為值得繼續探討的問題。

參考資料

1. Aidun, C. K., Triantafillopoulos, N. G. & Benson, J. D. 1991 Global stability of a lid-driven cavity with throughflow : Flow visualization studies. *Phys. Fluids A*, **3**, 2081-2091.
2. Babu, V. & Korpela, S. A. 1994 Numerical solution of the incompressible, three-dimensional Navier-Stokes equations. *Comput. Fluids*, **23**, 675-691.
3. Barragy, E. & Carey, G. F. 1997 Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements. *Comput. Fluids* **26**, 455-468.
4. Batchelor, G. K. 1956 On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **1**:1 77-90.
5. Benjamin A. S., Denny, V. E. 1979 On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re. *J. Comput. Phys.*, **33**, 340-358.
6. Benson, J. D. & Aidun, C. K. 1992 Transition to unsteady nonperiodic state in a through-flow lid-driven cavity. *Phys. Fluids A* , **4 (10)**, 2316-2319.
7. Botella, O. & Peyret, R. 1998 Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Comput. Fluids* **27**, 113-151.
8. Burggraf, O. R. 1966 Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *J. Fluid Mech.*, **24**, 113-151.
9. Chiang, T. P., Hwang, R. R. & Sheu, W. H. 1996 Finite volume analysis of spiral motion in a rectangular lid-driven cavity. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **23**, 325-346.
10. Chiang, T. P., Hwang, R. R. & Sheu, W. H. 1997 On end-wall corner vortices in a lid-driven cavity. *ASME J. Fluids Engng.*, **119**, 201-204.
11. Chiang, T. P. & Sheu, W. H. 1997 Numerical prediction of eddy structure in a shear-driven cavity. *Comput. Mechanics*, **20**, 379-396.
12. Chiang, T. P., Sheu, W. H. & Hwang, R. R. 1998 Effect of Reynolds number on the eddy structure in a lid-driven cavity. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **26**, 557-579.
13. Chiang, T. P., Sheu, W. H. & Hwang, R. R. 1997 Three-Dimensional vortex dynamics in a shear-driven rectangular cavity. *IJCFD*, **8**, 201-214.
14. Cortes, A. B. & Miller, J. D. 1994 Numerical experiments with the lid driven cavity flow problem. *Comput. Fluids*, **23**, 1005-1027.
15. Deville, M., Le, T.-H. & Morchoisne, Y. (Eds.) 1992 Numerical simulation of 3-D incompressible unsteady viscous laminar flows. *Notes on Numerical Fluids Mechanics*, **36**, A GAMM-Workshop.

16. Freitas, C. J., Street, A. N., Findikakis A. N. & Koseff J. R 1985 Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **5**, 561-575.
17. Freitas, C. J. & Street, R. L. 1988 Non-linear transient phenomena in a complex recirculating flow: a numerical investigation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **8**, 769-802.
18. Ghia, U., Ghia, K. N. & Shin, C. T. 1982 High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, **48**, 387-411.
19. Gortler, H. 1954 On the three-dimensional instability of laminar boundary layers on concave walls. *NACA Technical Mem.*, 1375.
20. Kawaguti, M. 1961 Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two dimensional cavity. *J. Phys. Soc. Japan* **16**, 2307-2315.
21. Kato, Y., Kawai, H. & Tanahashi, T. 1990 Numerical flow analysis in a cubic cavity by the GSMAC finite-element method. *JSME Int. J. Ser. II*, **33**, 649-658
22. Koseff, J. R. & Street, R. L. 1984 On end wall effects in a lid-driven cavity flow. *ASME J. Fluids Engng.*, **106**, 385-389.
23. Koseff, J. R. & Street, R. L. 1984 The lid-driven cavity flow: a synthesis of qualitative and quantitative observations. *ASME J. Fluids Engng.*, **106**, 390-398.
24. Koseff, J. R. & Street, R. L. 1984 Visualization studies of a shear driven three-dimensional recirculating flow. *ASME J. Fluids Engng.*, **106**, 21-29.
25. Ku, H. C., Hirsh, R. S. & Thomas D. T., 1987 A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, **70**, 439-462
26. Pan, F. & Acrivos, A. 1967 Steady flows in rectangular cavities. *J. Fluid Mech.*, **28**, 643-655.
27. Prasad, A. K. & Koseff, J. R. 1989 Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. *Phys. Fluids, A*, **1**, 208-218.
28. Schreiber, R. & Keller, H. B. 1983 Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *J. Comput. Phys.*, **49**, 310-333.
29. Taylor, G. I. 1923 Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, **223**, 289-343.