

國立臺灣海洋大學海洋科學研究所
碩士學位論文

海—氣偶合剪流場的穩定性分析

研究生：張維鈞

指導教授：蔡武廷

中華民國八十七年六月

國立臺灣海洋大學海洋科學學系

張維鈞 君之碩士學位論文

經考試及格特此證明

考試委員：

教授

蔡武延

吳俊仁

梁乃信

黃榮德

指導教授：

蔡武延

中華民國八十七年 六月 十一日

摘 要

本研究探討一初始為平滑之水面，受突起陣風吹拂而形成不穩定波的動力機制。利用數值解析偶合空氣與水下流場之穩定性動力方程式—Orr-Sommerfeld 方程式，滿足空氣與水交界面之邊界條件，以求得氣-水界面不穩定波之發展率與傳播速度。並進一步探討不同流體性質(如表面張力、黏滯性)、流場參數(如風速、水面流速)、及空氣流場擾動存在之與否，對不穩定波之發展率與傳播速度的影響。研究結果顯示：表面張力對不穩定波的發展率與傳播速度具相當明顯的影響。降低表面張力，不穩定波發展率增加，而傳播速度則降低。空氣與水的黏滯性對不穩定波傳播速度沒有太大的影響，但發展率則隨黏滯性的降低而增加；且改變水體黏滯性會比改變空氣流體黏滯性對不穩定波發展率造成的影響更大。增加空氣流場黏性次邊界層高度，不穩定波發展率有顯著提升。水體表面流速的增加則會造成不穩定波傳播速度的增加。我們的研究亦證實空氣流場內的擾動為界面不穩定波發展之主要機制。

目 錄

摘要	i
目錄	ii
圖目錄	iv
表目錄	vi
符號表	vii
壹、前言	1
貳、控制方程式及邊界條件	4
2.1 穩定性動力方程式	4
2.2 邊界條件	7
2.3 背景狀態剪流場之速度分佈	9
參、數值方法	18
3.1 方程式與邊界條件的離散	18
3.2 數值方法之測試	23
肆、計算結果與討論	27
4.1 與其他解析以及實驗之比較	27
4.2 流體性質與流場參數對不穩定波的影響	37
4.3 氣-水耦合效應對不穩定波的影響	52
伍、結論	58

參考資料	60
附錄一、流場穩定性動力方程式之推導	62
附錄二、流體應力關係式	64
附錄三、界面邊界條件	66
附錄四、紊流邊界層理論	70
附錄五、特徵方程組矩陣	73
附錄六、不穩定波發展對無因次參數之變化	75

圖目錄

圖 1 (a) : 比較不同水體流場速度分佈	12
圖 1 (b) : 比較不同水體流場速度函數之一次導數	13
圖 1 (c) : 比較不同水體流場速度函數之二次導數	14
圖 2 (a) : $R = 5$ 時之氣-水偶合剪流場速度分佈	15
圖 2 (b) : 氣-水偶合剪流場速度之一次導數於垂直方向之變化	16
圖 2 (c) : 氣-水偶合剪流場速度之二次導數於垂直方向之變化	17
圖 3 (a) : $u_{*o} = 13.6$ cm/s 時不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	29
圖 3 (b) : $u_{*o} = 17.0$ cm/s 時不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	30
圖 3 (c) : $u_{*o} = 21.4$ cm/s 時不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	31
圖 3 (d) : $u_{*o} = 24.8$ cm/s 時不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	32
圖 4 : 比較我們與 van Gastel 等解得之不穩定波發展率	33
圖 5 : 比較我們與 Kawai 解得之不穩定波發展率	34
圖 6 : 比較我們與 Valenzuela 及 Larson & Wright 得到之不穩定波發展率	35
圖 7 : 不穩定波發展率極大值對空氣摩擦速度的變化關係	36
圖 8 : 不穩定波發展率對不同表面張力的變化關係	41
圖 9 : 不穩定波傳播速度對不同表面張力的變化關係	42
圖 10 : 不穩定波發展率對不同空氣動黏滯係數值的變化關係	43
圖 11 : 不穩定波傳播速度對不同空氣動黏滯係數值的變化關係	44
圖 12 : 不穩定波發展率對不同水體動黏滯係數值的變化關係	45
圖 13 : 不穩定波傳播速度對不同水體動黏滯係數值的變化關係	46
圖 14 : $R = 8$ 時之氣-水偶合剪流場速度分佈	47

圖 15：不穩定波發展率對不同 R 值的變化關係	48
圖 16：不穩定波傳播速度對不同 R 值的變化關係	49
圖 17：不穩定波發展率對不同水面流速的變化關係	50
圖 18：不穩定波傳播速度對不同水面流速的變化關係	51
圖 19 (a)： $u_{*a} = 13.6$ cm/s 時降低空氣密度至 0.0005 g/cm ³ 所求得 之不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	54
圖 19 (b)： $u_{*a} = 17.0$ cm/s 時降低空氣密度至 0.0005 g/cm ³ 所求得 之不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	55
圖 19 (c)： $u_{*a} = 21.4$ cm/s 時降低空氣密度至 0.0005 g/cm ³ 所求得 之不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	56
圖 19 (d)： $u_{*a} = 24.8$ cm/s 時降低空氣密度至 0.0005 g/cm ³ 所求得 之不穩定波發展率與傳播速度對波數之變化	57
附圖 1：不同空氣流場雷諾數對不穩定波發展率之影響	76
附圖 2：不同水體流場雷諾數對不穩定波發展率之影響	77
附圖 3：不同偉伯數對不穩定波發展率之影響	78

表 目 錄

表 1：以二階準度有限差分和 QZ 特徵矩陣求解法求解平面 Poiseuille 流場 Orr-Sommerfeld 方程式所得特徵值的收斂情況	25
表 2：數值解析之收斂性測試，波數等於 1 cm^{-1}	26
表 3：數值解析之收斂性測試，波數等於 5 cm^{-1}	26
表 4：不同空氣摩擦速度下解得之 β_{\max} 與 u_*^3 之比值	28

符 號 表

希臘字母

Δ	格點間距(cm)
α	空氣流場速度函數參數(參見 3.2 節)
β	發展率(1/s)
γ	水下流場函數參數(參見 3.2 節)
η	水面高度(cm)
κ	卡曼常數(Karman constant)
λ	波長(cm)
μ	絕對黏滯係數(g/s cm)
ν	動黏滯係數(cm ² /s)
ρ	密度(g/cm ³)
ψ	流函數(cm ² /s)
τ	剪應力(dynes/cm ²)
ω	角頻率(1/s)

英文字母

c_r	傳播速度(cm/s)
Fr	福勞數
g	重力加速度(cm/s ²)
k	波數(1/cm)
M	水體流場格點區間數
N	空氣流場格點區間數
p	壓力(dynes/cm ²)
q	振幅(cm)
R	黏性次邊界層高度參數(參見 3.2 節)

Re	雷諾數
r	空氣與水之動黏滯係數比
s	空氣與水之密度比
T	表面張力(dynes/cm)
t	時間(s)
We	偉伯數
U_0	水面流速(cm/s)
U_1^a	空氣黏性次邊界層高度處速度(cm/s)
u_*	摩擦速度(cm/s)
x	位置向量之水平分量(cm)
z	位置向量之垂直分量(cm)
z_1^a	空氣黏性次邊界層高度(cm)(參見 3.2 節)

壹、前言

一初始為平滑靜止的水面，在受到空氣中突起強風的吹拂後，水下形成一剪流場，空氣與水體交界面也因此被激起不穩定波。經過近一世紀前人豐富的研究，我們對不穩定波之形成與發展機制的了解也更深入，然仍不可謂完全。

近年來由於雷達波在海洋遙測上的應用越趨頻繁；如對海底地形的探測、海面油污的偵測、船跡之追蹤等。當應用雷達波在海面之反射與散射進行遙測時，海表面短波的存在對遙測影像具有相當的影響，因此有關造成這些被稱為海面「小尺度表面粗糙度」(small-scale surface roughness)的海面短波之形成與演化，在近年來又引起廣泛之研究(Phillips & Hasselmann, 1986)。

對於氣-水界面不穩定波形成與發展的機制，各派的意見相當分歧。首先嘗試解釋不穩定波發展機制的是 Jeffreys, Jeffreys(1925)考慮空氣之邊界層流場在不穩定波波峰的下風處剝離，造成水體流場向上運動的質點受到空氣壓力較小，而向下運動的質點受到的空氣壓力則較大，所以造成了不穩定波的發展。但 Jeffreys(1925)此一「剝離」理論適用於較長且較陡的波，並不適用於小尺度、短波長的氣-水界面不穩定波。自此之後即有許多有關氣-水界面不穩定波形成與發展的理論或數值解析之文獻，以下僅就與本研究有直接相關之部分做一回顧。

Miles 於 60 年代發表一系列有關風引致水面不穩定波生成之理論模式與解析(Miles, 1957, 1959a, 1959b, 1962), Miles 假設風吹水波的形成是起因於空氣流場中不穩定擾動的成長，藉由擾動空氣流場內壓力的作用，將水面波動發展所需的動量傳輸至水體流場。Miles(1957)並計算出：從空氣流場傳輸至不穩定波的能量傳輸率與空氣流場中臨界高度處(critical height; 空氣流速等於不穩定波傳播速度之高度)空氣流速之二次導數成比例。Miles(1962)根據上述之理論基礎，僅考慮空氣流場進行不穩定波發展機制之研究而忽略水體流場的存在對不穩定波發展的影響，其據此所求得的不穩定波發展率，與 Larson & Wright (1975) 實驗測量得到的發展率比較，兩者大致吻合。

Valenzuela (1976) 數值解析滿足氣-水界面邊界條件之氣-水偶合剪流場的穩定性動力方程式(Orr-Sommerfeld equation), 以求得不穩定波的發展率與傳播速度。Valenzuela 所得到的不穩定波發展率較 Miles(1962)的結果更接近 Larson & Wright (1975) 的實驗測量值。同時 Valenzuela 並指出, 研究氣-水界面不穩定波之發展機制時, 不可忽略水體流場。因為考慮水體流場存在時, 我們將解得較大之不穩定波發展率, 特別是在較大之空氣流場流速情況下。

相同於 Valenzuela 的解析, Kawai (1979) 亦以數值方法求解偶合氣-水剪流場的穩定性邊界值問題, 以得不穩定波的發展率與傳播速度。Kawai 並進行實驗量測以與其解析結果比較。Kawai(1979)與 Valenzuela(1976)數值解析主要不同之處為, Kawai 的水體剪流場函數是由他實驗量測所得的流速資料推得的。Kawai 的研究驗證了 Valenzuela 的結論: 「在研究不穩定波的發展機制時, 完整的氣-水偶合剪流場及界面邊界條件是不可忽略的」。Kawai 並根據他研究所得的結果發現, 擁有極大值發展率的不穩定波其傳播速度幾乎為極小值。

van Gastel 等 (1985) 使用逼進法 (asymptotic method) 理論解析滿足氣-水界面邊界條件之偶合剪流場的穩定性動力方程式, 並探討不同流場參數對不穩定波生成的影響。van Gastel 等發現增加空氣流場的黏性次邊界層 (viscous sublayer) 之高度, 不穩定波發展率有大幅度的增加。而隨著水面流速的增加, 不穩定波的傳播速度亦隨之增加。van Gastel 等的研究結果並得到不穩定波發展率的極大值與空氣摩擦速度三次方成比例的簡單關係。

最近 Wheless & Csanady(1993)同樣以數值方法解析滿足界面邊界條件之氣-水偶合穩定性動力方程式, 並改變流體的性質 (如流體黏滯性、表面張力) 和流場參數(如空氣摩擦速度、無窮高處之自由空氣流速), 討論其對不穩定波發展的影響。Wheless & Csanady 發現: 降低表面張力, 不穩定波之發展率將增加, 而傳播速度則將降低。擁有極大值發展率與極小值傳播速度的不穩定波波數在降低表面張力後均增加, 且後者增加的較前者多。因此 Wheless & Csanady 認為 Kawai (1979) 的研究發現—「不穩定波發展率的極大值和傳播速度的極小值幾乎同時發生」, 僅是一個在特定表面張力值下的巧合而已, 並非

一般情況。

在不穩定波生成初期之短時間內，流場運動之動力方程式中的非線性項尚未有重要影響時，線性不穩定理論是合理且足夠的。因此參考 Valenzuela (1976)、Kawai (1979) 以及 Wheless & Csanady (1993) 之數值解析，本研究將以線性不穩定理論探討空氣與水偶合之剪流場。經由數值解析滿足氣-水界面邊界條件之流場穩定性動力方程式，求解氣-水界面不穩定短波 ($\lambda < 6$ cm) 之發展率與傳播速度，並探討不同流體性質與流場參數對不穩定短波發展之影響及其成因。

而 Valenzuela (1976) 曾指出：「研究氣-水界面不穩定波之發展機制時，必需考慮完整的氣-水偶合剪流場及界面邊界條件」。但 Valenzuela 及後續的研究並未提及若僅單獨考慮水體流場時是否可對不穩定波的發展率得到正確的預測。因此我們將藉由忽略空氣流場內部的擾動，以相同的水體流場參數進行穩定性解析，並將所得的不穩定波發展率與考慮完整的氣-水偶合剪流場時所得的結果相比較，以了解是否可以僅以水體流場來進行不穩定波發展機制的研究。

Linear
instability

貳、控制方程式及邊界條件

2.1 穩定性動力方程式

考慮一受微小擾動之空氣與水體偶合之二維黏性流場，空氣流場在無窮高處以 U_w 之水平自由流場速度運動，並引致水體之運動。在未受擾動前，空氣與水體之運動為二維之平行剪流場。建立之 $x-z$ 座標系統中， x 軸指向水平之方向， z 軸座標表示向上為正之垂直位置， $z=0$ 位於平均水平面處。假設空氣與水皆為不可壓縮之牛頓流體，流體之密度均勻分佈且黏滯係數為一定值。

以 u_w 及 w_w 表示水體流場 x 與 z 方向之速度， p_w 表流場之動壓力(dynamic pressure)， ν_w 與 ρ_w 分別表示水體的動黏滯係數與密度，則受擾動後流場之總速度與總動壓力可分解成未受擾動之「背景狀態流場」項與「擾動狀態流場」項：

$$u_w(x, z, t) = U_w(z) + u'_w(x, z, t) \quad (2.1)$$

$$w_w(x, z, t) = w'_w(x, z, t) \quad (2.2)$$

$$p_w(x, z, t) = P_w(x, z, t) + p'_w(x, z, t) \quad (2.3)$$

式中 u'_w 、 w'_w 與 p'_w 分別為擾動項的速度與動壓力， $U_w = U_w(z)$ 表水體背景狀態二維平行流場的流速。

不可壓縮流體的流場存在流函數 (stream function)，若考慮一在水平方向以週長 λ 週期變動之擾動狀態流場，則其流函數可表示為 $\psi_w(x, z, t) = \phi_w(z) \exp\{ik(x - ct)\}$ ，其中 $k = 2\pi/\lambda$ 表擾動波數， c 表擾動之傳播速度。因我們僅考慮擾動在時間上的不穩定性(temporal instability)，而非空間中之不穩定性(spatial instability)，所以 k 為一正實數，而 c 則為複數 ($c = c_r + ic_i$)。若 $c_i > 0$ ，則擾動波以 kc_i 之發展率成長，故為不穩定擾動波。反之若 $c_i < 0$ ，則為穩定擾動波。

以擾動狀態流函數來表示擾動狀態速度項：

$$u'_w(x, z, t) = \frac{\partial \psi_w(x, z, t)}{\partial z} = \frac{d\phi_w(z)}{dz} \exp\{ik(x - ct)\} \quad (2.4)$$

$$w'_w(x, z, t) = \frac{-\partial \psi_w(x, z, t)}{\partial x} = -ik\phi_w(z) \exp\{ik(x - ct)\} \quad (2.5)$$

將擾動狀態流場之 x 與 z 方向動量方程式中之速度項以(2.4)與(2.5)代入，並忽略非線性擾動項，合併兩方程式以消去壓力項 p'_w 可得水體擾動流場之線性穩定性動力方程式：

$$k(U_w(z) - c) \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} + \left[k^3 c - k^3 U_w(z) - k \frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} \right] \phi_w(z) + i\nu_w \left[\frac{d^4 \phi_w(z)}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} + k^4 \phi_w(z) \right] = 0 \quad (2.6)$$

此即為通稱之 **Orr-Sommerfeld** 方程式。上式穩定性動力方程式推導之細節部份參見附錄一。

選擇空氣之摩擦速度 $u_{*a} = \sqrt{\tau_a / \rho_a}$ 為流場之因次特徵速度， $1/k$ 為特徵長度。其中 τ_a 為氣-水界面作用於空氣之剪應力，因通過界面之剪應力需為連續，故在界面上作用於空氣之剪應力 τ_a 應等於作用於水體之剪應力 τ_w ，即 $\rho_a u_{*a}^2 = \rho_w u_{*w}^2$ 。以上述所選之特徵速度與特徵長度將水體流場之穩定性動力方程式(2.6)無因次化，並以原有之因次符號表示無因次之物理量與變數，則無因次之擾動流場穩定性動力方程式為：

$$k(U_w(z) - c) \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} + \left[k^3 c - k^3 U_w(z) - k \frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} \right] \phi_w(z) + \frac{i}{Re_w} \left[\frac{d^4 \phi_w(z)}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} + k^4 \phi_w(z) \right] = 0 \quad (2.7)$$

上式中， $Re_w = u_{*a} / k\nu_w$ 為水體之雷諾數。

同上述水體之流場，空氣中無因次的擾動流場穩定性動力方程式為：

$$k(U_a(z) - c) \frac{d^2 \phi_a(z)}{dz^2} + \left[k^3 c - k^3 U_a(z) - k \frac{d^2 U_a(z)}{dz^2} \right] \phi_a(z) + \frac{i}{Re_a} \left[\frac{d^4 \phi_a(z)}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 \phi_a(z)}{dz^2} + k^4 \phi_a(z) \right] = 0 \quad (2.8)$$

上式中含下標 a 之符號表示空氣流場中的物理量與參數，空氣流場的擾動狀態流函數 $\psi_a(x, z, t) \equiv \phi_a(z) \exp\{ik(x - ct)\}$ ， $Re_a = u_a / k \nu_a$ 為空氣之雷諾數， $U_a(z)$ 表空氣流場在背景狀態的二維平行流流速。

$$Re_a = \frac{U_a a}{k \nu_a} = \frac{U_a L}{\nu_a}$$

$$Re_w = \frac{U_w a}{k \nu_w} = \frac{U_w L}{\nu_w}$$

2.2 邊界條件

在本研究所考慮的流場中共存在三個邊界，一為空氣與水體的界面，另兩個分別是空氣流場與水體流場的無窮遠處，求解(2.7)與(2.8)之穩定性動力方程式需於上述之邊界上滿足適當之邊界條件。為與動力方程式的階次(線性)一致，氣-水界面之邊界條件需經線性化。

空氣與水體流場在受擾動後之氣-水界面 $z = \eta(x, t)$ 處需滿足以下之物理條件：(1)流體質點之運動需相切於界面、(2)空氣與水體流場之速度需連續、(3)界面上之剪應力需連續、(4)界面上之正應力需與表面張力平衡。我們考慮均勻表面張力分佈，而無張力梯度之存在。如同擾動狀態之空氣與水體流場，我們亦考慮波數為 k 、發展率為 kc_i 之擾動狀態氣-水界面，則擾動界面位移 $\eta(x, t) = q \exp\{ik(x - ct)\}$ ，其中 q 表振幅。

上述界面條件之數學表示式可見於如 Phillips (1969)，有關流體剪應力及正應力在界面處之表示式參見附錄二。以泰勒級數展開將擾動界面 $z = \eta(x, t)$ 條件中之各物理量以背景(未受擾動)狀態界面 $z = 0$ 之值表示，並線性化各界面條件，得到如下在 $z = 0$ 處滿足之無因次線性界面條件(有關界面邊界條件之詳細推導參見附錄三)：

$$cq - U_0 q - \phi(0) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d\phi_a(z)}{dz} + \frac{dU_a(z)}{dz} q = \frac{d\phi_w(z)}{dz} + \frac{dU_w(z)}{dz} q; \quad \phi_a(0) = \phi_w(0) \quad (2.10)$$

$$r \left[\frac{d^2 U_a(z)}{dz^2} q + \frac{d^2 \phi_a(z)}{dz^2} + k^2 \phi(0) \right] = \frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} q + \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} + k^2 \phi(0) \quad (2.11)$$

$$s \left[(U_0 - c) \frac{d\phi_a(z)}{dz} - \frac{dU_a(z)}{dz} \phi(0) + \frac{i}{Re_a} \left(k^{-1} \frac{d^3 \phi_a(z)}{dz^3} - 3k \frac{d\phi_a(z)}{dz} \right) + kC_0^2 q \right] \\ = (U_0 - c) \frac{d\phi_w(z)}{dz} - \frac{dU_w(z)}{dz} \phi(0) + \frac{i}{Re_w} \left(k^{-1} \frac{d^3 \phi_w(z)}{dz^3} - 3k \frac{d\phi_w(z)}{dz} \right) + kC_0^2 q \quad (2.12)$$

上列邊界條件中，背景狀態之水面流速 $U_0 \equiv U_a(0) = U_w(0)$ ，擾動流場之勢函數 $\phi(0) \equiv \phi_a(0) = \phi_w(0)$ ，空氣與水之絕對黏滯係數 $\mu_a = \rho_a \nu_a$ 、 $\mu_w = \rho_w \nu_w$ ，空氣

對水之絕對黏滯係數比 $r = \mu_a / \mu_w$ ，空氣對水之密度比 $s = \rho_a / \rho_w$ ， $C_0^2 = 1/(kFr) + k/We$ ，福勞數 $Fr = ku_a^2 / g$ ，偉伯數 $We = (\rho_w - \rho_a)k^{-1}u_a^2 / T$ ， T 為表面張力係數。

擾動狀態之空氣與水體流場在無窮遠處需滿足「輻射條件」，亦即在無窮遠處的邊界上流場之擾動速度為零。然在實際之數值解析時，計算之區間需為有限，因此必須以適當之替代條件，在一「截斷邊界」(truncated boundary) 上滿足。在我們的數值解析中，上(空氣)下(水)之截斷邊界分別取在 $z = z_{\max}$ 與 $-z_{\max}$ ，而擾動狀態之流場在此邊界上滿足「自由滑溜條件」(free-slip condition)，亦即在 $z = \pm z_{\max}$ 邊界之切線(水平)方向無剪力作用，流體質點之運動與邊界相切，其與邊界垂直之速度分量為零。以流函數表示擾動速度，則「自由滑溜條件」之數學形式為：

$$\left. \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} \right|_{z=-z_{\max}} = 0 ; \quad \phi_w(-z_{\max}) = 0 \quad (2.13)$$

$$\left. \frac{d^2 \phi_a(z)}{dz^2} \right|_{z=z_{\max}} = 0 ; \quad \phi_a(z_{\max}) = 0 \quad (2.14)$$

Valenzuela (1976)、Kawai (1979)以及 Wheless & Csanady (1993)分別使用與上述不同之上、下邊界條件，然在爾後有關本數值解析結果的討論中可知，以截斷邊界之自由滑溜條件替代無窮遠邊界之輻射條件所解得的不穩定波發長率及傳播速度，與其他實驗、理論或數值解析之結果比較皆合理吻合，證實此「虛擬」邊界條件之有效性。

2.3 背景狀態剪流場之速度分佈

(A) 空氣流場速度分佈

利用平板邊界層紊流場的實測速度資料，Miles(1962)提出了空氣背景狀態平行流場的「對數-線性」(logarithmic-linear)形式速度分佈，此速度函數的一般形式可由紊流邊界層理論(附錄四)推導而得到(Kundu, 1990; White, 1991)。Miles(1962)僅考慮空氣流場之不穩定性，因此氣-水界面可視為一「不平滑」之邊界(no-slip boundary)，在界面上空氣之流速為零。

若考慮空氣與水體偶合之流場，則空氣在界面上之流速等於水體表面之流速 U_0 ，而 Miles 之空氣流場速度分佈應予以修正，其在黏性層流次邊界層(viscous laminar sublayer) ($0 \leq z \leq z_1^a$)中之流場「線性」速度分佈為：

$$U_a(z) = U_0 + u_{*a} \frac{z}{z_0^a} \quad (2.15)$$

在黏性次邊界層流層以外($z \geq z_1^a$)之流場速度呈「對數函數」形態分佈：

$$U_a(z) = U_0 + U_1^a + 2.5u_{*a} \left(\alpha - \tanh \frac{\alpha}{2} \right) \quad (2.16)$$

式中； α 滿足函數關係：

$$\sinh \alpha = \frac{2\kappa(z - z_1^a)}{z_0^a} \quad (2.17)$$

von Karman 常數 $\kappa=0.4$ ，壁單位(wall unit) $z_0^a = \nu_a / u_{*a}$ ，黏性次邊界層高度 $z_1^a = Rz_0^a$ ，黏性次邊界層邊緣之流速 $U_1^a = Ru_{*a}$ 。 R 值決定黏性次邊界層之厚度，水面上空氣邊界層紊流之 R 值約為 5，為討論不同流場參數對不安定波的影響，我們亦以 $R=8$ 進行數值解析。

上述由 Miles 提供的空氣流場速度函數，廣泛被使用於氣-水界面不穩定波(如 Valenzuela 1976; Kawai 1979 與 van Gastel 等 1985)，而較無爭議性，因此在本研究中，我們亦選擇「對數-線性」形式的空氣背景狀態流場速度函數分佈。

(B) 水體流場速度分佈

相較於空氣流場的「對數-線性」函數速度分佈，對於水體流場之速度分佈，

各研究的選擇都不相同。

Valenzuela(1976)使用與空氣流場相似的「線性-對數」形式速度分佈，然相較於空氣紊流場；在水體受空氣之吹拂而開始運動時，其流場仍未如空氣般已達完全發展狀況，因此空氣紊流場的「線性-對數」形式速度分佈並不完全適用於發展中的水體流場。

Kawai(1979)由其實驗量測水體受空氣之吹拂而開始運動之流場流速，提出以誤差函數(error function) $\text{erf}(\xi)$ 之形式近似水體流場速度分佈：

$$U_w(z) = U_0 \left[\exp(-\xi^2) + \sqrt{\pi} \xi (1 + \text{erf}(\xi)) \right] \quad (2.18)$$

上式中誤差函數定義為：

$$\text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-x^2) dx \quad (2.19)$$

水體表面的流速 U_0 ：

$$U_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} u_{*w}^2 \left(\frac{t - t_s}{\nu_w} \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

無因次高度 ξ ：

$$\xi = \frac{z}{2\sqrt{\nu_w(t - t_s)}} \quad (2.21)$$

而 t 為自風開始吹拂的時間， t_s 為一調整之時間參數以符合實驗量測值。一如(2.20)所示，水體表面的流速實際上是隨時間改變的，但一般之穩定性分析皆假設定常的背景流場，因此 Kawai 亦僅考慮一水體表面流速已發展至 U_0 的定常水體流場。給定一水體表面流速 U_0 以及空氣摩擦速度 u_{*a} ， $u_{*w} = u_{*a} (\rho_a / \rho_w)^{1/2}$ ，(2.20)式決定時間變數 $(t - t_s)$ ，(2.21)式決定無因次高度 ξ ，水體背景狀態水平流速的垂直分佈可由(2.18)求得。

van Gestel 等(1985)以指數函數近似背景狀態水體流速的垂直分佈：

$$U_w(z) = U_0 \exp(\gamma \xi) \quad (2.22)$$

上式中，無因次高度 $\xi = kz$ ，參數 γ ：

$$\gamma = \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{u_{*a}}{U_0} \frac{u_{*a}}{\nu_w k} = s \frac{u_{*a}}{U_0} Re_w \quad (2.23)$$

相同於 Kawai(1979)的流速分佈，給定一水體表面流速 U_0 以及空氣摩擦速度 u_{*a} ，水體背景狀態之水平流速的垂直分佈 $U_w(z)$ 即可由(2.22)求得。

Wheless & Csanady (1993)亦採指數函數形式之水體流速分佈，然其指數參數之選擇不同於 van Gastel 等(1985)，因此其流速分佈亦不相同。Wheless & Csanady 之指數函數形式為：

$$U_w(z) = U_0 \exp(2z / L_s) \quad (2.24)$$

式中，參數 L_s 為：

$$L_s = \sqrt{\pi} U_0 \frac{\rho_w v_w}{\rho_a u_{*a}^2} \quad (2.25)$$

圖 1(a)為上述四種水體流場速度函數其垂直分佈之比較，顯示「線性-對數」形式的速度分佈與其它分佈(2.18、2.22 與 2.24)差異最大。圖 1(b)與圖 1(c)分別顯示上述四種流速度函數之一次導數 $dU_w(z)/dz$ 與二次導數 $d^2U_w(z)/dz^2$ 在水深方向變化的比較，因「線性-對數」形式的速度分佈為不連續之函數，其二次導數在次邊界層中為零，隨即急速增大而達一局部極大值，然後再隨水深而減小。此與「誤差函數」以及「指數函數」形態分佈自水面隨水深而單調遞減大不相同。在本穩定性分析中之水體背景流場速度，我們選擇指數函數形式的分佈(2.8)。

圖 2(a)~(c)顯示本研究所採用之氣-水耦合剪流場的速度、速度之一次導數與二次導數在垂直方向的變化。我們由圖 2(a)~(c)中可以看出空氣流場中之速度、速度之一次導數與二次導數均遠較水體流場大。而流場的速度、速度之一次導數與二次導數分別在流場的穩定性動力方程式及界面邊界條件中扮演著不穩定擾動的影響因子；但這並不一定表示空氣流場比水體流場對不穩定擾動的影響大，因為空氣流體的密度遠小於水體流體的密度。因此，在本研究中，我們也有興趣來探討空氣流場對不穩定波發展的影響。

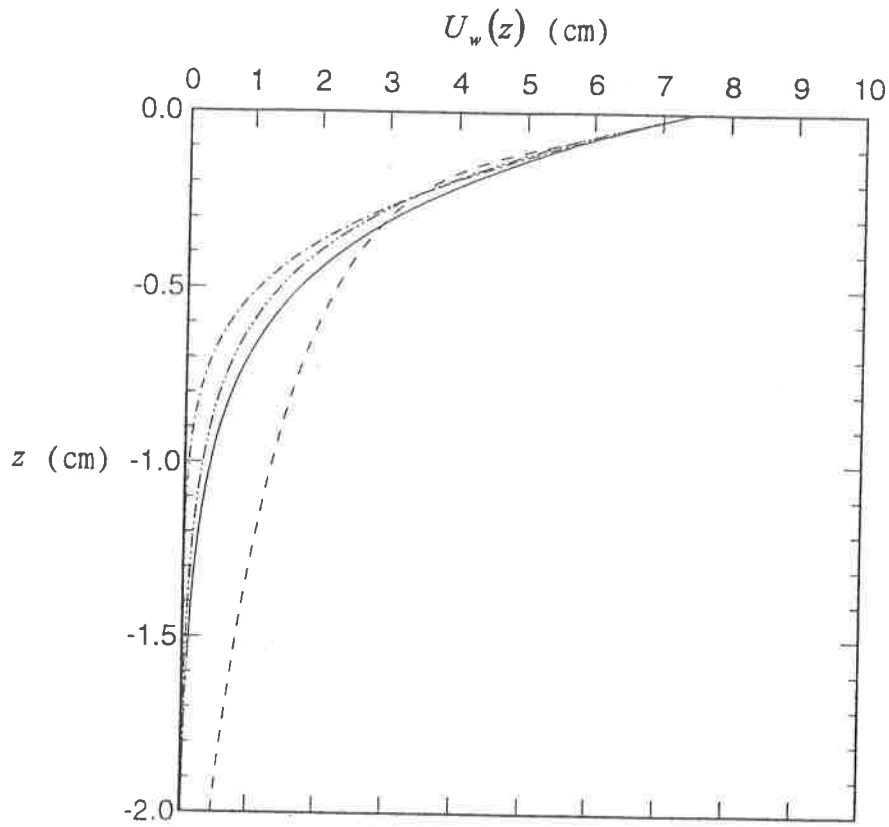


圖 1 (a)：比較不同的水體流場速度分佈。—：van Gastel 等使用的指數形式速度分佈；---：Valenzuela 使用的線性-對數形式速度分佈；-·-：Kawai 使用的誤差函數形式速度分佈；-··-：Wheless & Csanady 使用的指數形式速度分佈。

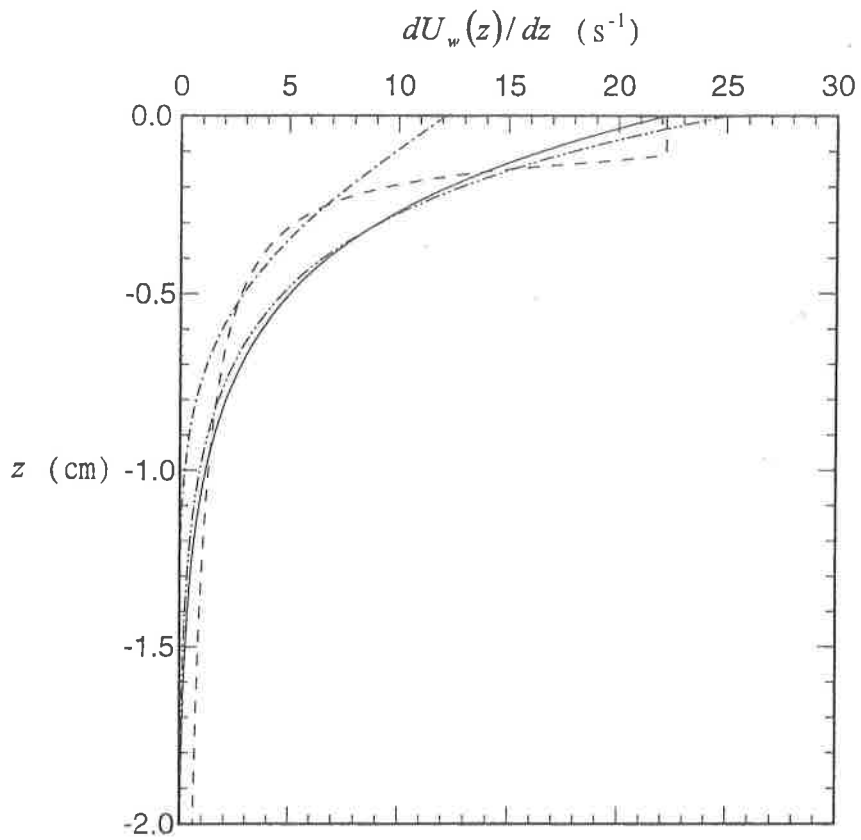


圖 1 (b)：比較不同的水體流場速度函數之一次導數。—：van Gastel 等使用的指數形式函數；- - -：Valenzuela 使用的線性-對數形式函數；- · -：Kawai 使用的誤差函數形式函數；- · · -：Wheless & Csanady 使用的指數形式函數。

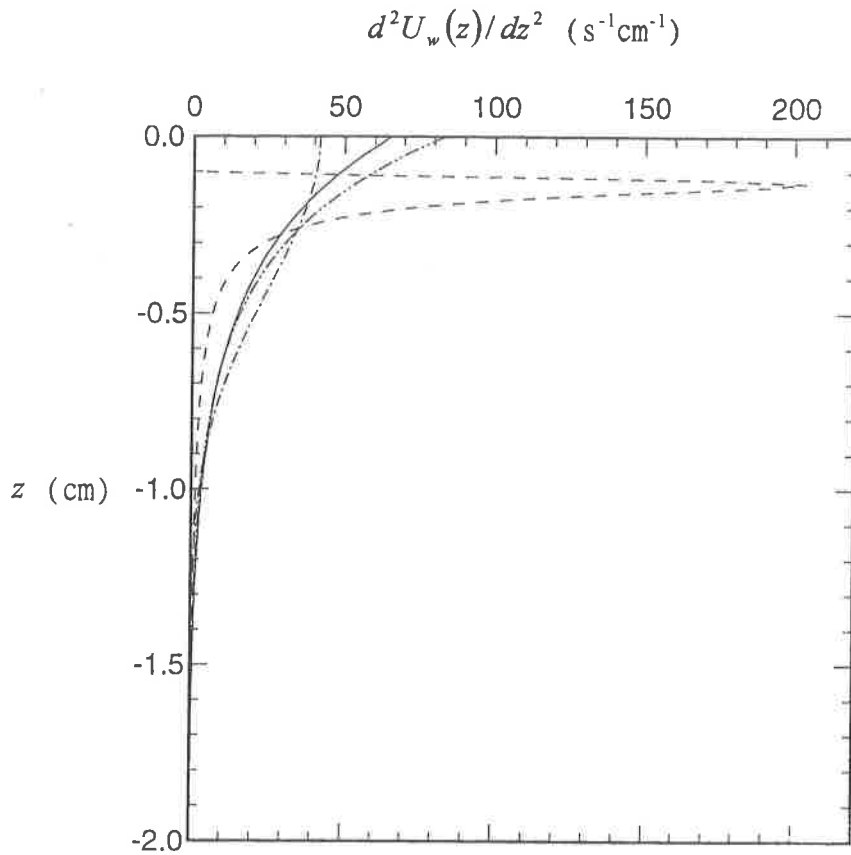


圖 1 (c) : 比較不同的水體流場速度函數之二次導數。— : van Gastel 等使用的指數形式函數 ; - - - : Valenzuela 使用的線性-對數形式函數 ; - · - : Kawai 使用的誤差函數形式函數 ; - · · - : Wheless & Csanady 使用的指數形式函數。

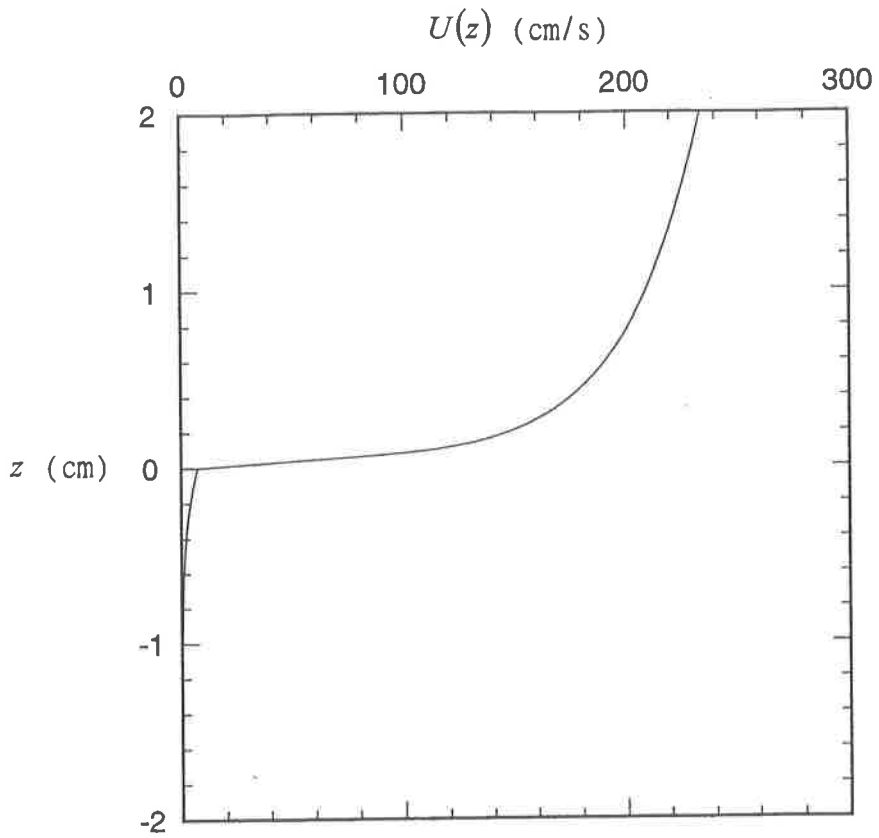


圖 2 (a) : 背景狀態氣-水耦合剪流場速度分佈。 $u_{*c} = 13.6$ cm/s, $U_0 = 7.5$ cm/s。

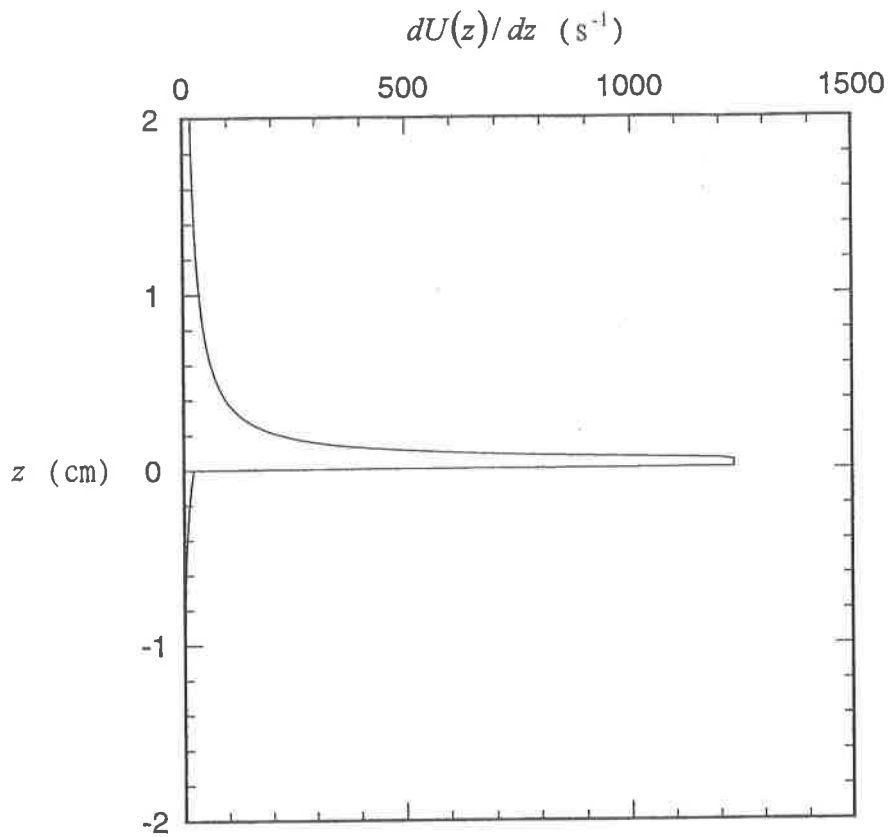


圖 2 (b)：背景狀態氣-水耦合剪流場速度之一次導數於垂直方向之變化。
 $u_{*a} = 13.6 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 7.5 \text{ cm/s}$ 。

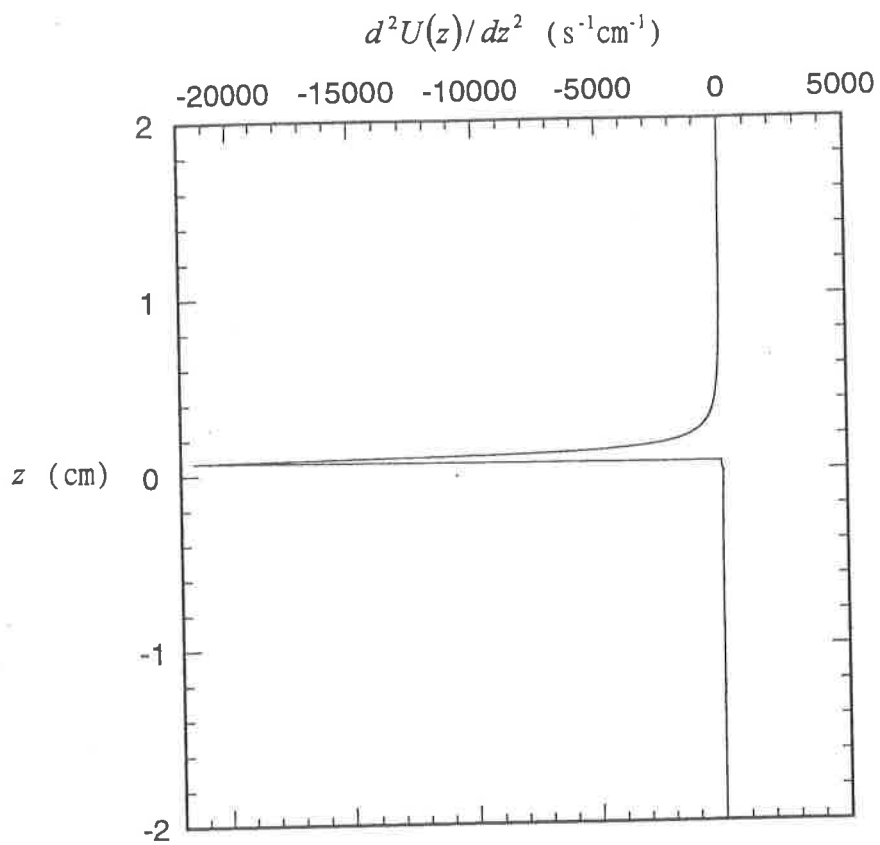


圖 2 (c)：背景狀態氣-水耦合剪流場速度之二次導數於垂直方向之變化。
 $u_{*a} = 13.6 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 7.5 \text{ cm/s}$ 。

參、數值方法

3.1 方程式與邊界條件的離散

理論(近似)求解穩定性方程式(2.7)與(2.8)並滿足界面邊界條件(2.9)、(2.10)、(2.11)與(2.12)以及適當之上、下輻射邊界條件(2.15)與(2.16)並非不可能(如 van Gastel 等, 1985), 然為能接續未來有關海面「物理化學性質」對不穩定波形成之影響的探討(氣-水界面之邊界條件將更複雜, 使得理論求解更為困難), 我們選擇數值求解上述之穩定性邊界值問題。

本研究之數值方法, 先將水體與空氣之穩定性方程式以及氣-水界面各邊界條件中的導數以二階準度中央有限差分近似, 經離散後之流場穩定性動力方程式與邊界條件可表示成一矩陣型式之特徵聯立方程式, 因此數值計算之最大工作為寫下邊界特徵矩陣以及特徵值與特徵向量之求解。詳細之數值解析將於以下敘述, 為方便說明; 我們先將待解析之方程式以及邊界條件整理收錄如下。

經整理後之無因次擾動流場穩定性動力方程式為:

$$\begin{aligned} & \left[-k^3 U_\alpha(z) - k \frac{d^2 U_\alpha(z)}{dz^2} + \frac{i}{Re_\alpha} k^4 \right] \phi_\alpha(z) + \left[k U_\alpha(z) - \frac{i}{Re_\alpha} 2k^2 \right] \frac{d^2 \phi_\alpha(z)}{dz^2} \\ & + \left[\frac{i}{Re_\alpha} \right] \frac{d^4 \phi_\alpha(z)}{dz^4} = \omega \left[\frac{d^2 \phi_\alpha(z)}{dz^2} - k^2 \phi_\alpha(z) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

上式中之下標 $\alpha = a$ 時為空氣流場之方程式, $\alpha = w$ 時則表水體流場之方程式。角頻率 $\omega = kc$ 。空氣與水交界面處 ($z = 0$) 之邊界條件為:

$$\phi(0) + U_0 q = \omega \left[\frac{1}{k} q \right] \quad (3.2)$$

$$\frac{d\phi_w(z)}{dz} - \frac{d\phi_a(z)}{dz} + \left[\frac{dU_w(z)}{dz} - \frac{dU_a(z)}{dz} \right] q = 0 \quad (3.3)$$

$$\left[\frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} - r \frac{d^2 U_a(z)}{dz^2} \right] q + \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} - r \frac{d^2 \phi_a(z)}{dz^2} + [k^2 - k^2 r] \phi(0) = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& \left[-skC_0^2 + kC_0^2 \right] q + \left[s \frac{dU_a(z)}{dz} - \frac{dU_w(z)}{dz} \right] \phi(0) \\
& - s \left[U_0 - \frac{i}{Re_a} 3k \right] \frac{d\phi_a(z)}{dz} + \left[U_0 - \frac{i}{Re_w} 3k \right] \frac{d\phi_w(z)}{dz} \\
& - \left[\frac{s}{k} \frac{i}{Re_a} \right] \frac{d^3\phi_a(z)}{dz^3} + \left[\frac{1}{k} \frac{i}{Re_w} \right] \frac{d^3\phi_w(z)}{dz^3} \\
& = \omega \left\{ \frac{1}{k} \frac{d\phi_w(z)}{dz} - \frac{s}{k} \frac{d\phi_a(z)}{dz} \right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

選取適當之上邊界高度與下邊界深度(在計算中我們選取上下邊界相同之高度，即上下邊界位於 $z = \pm z_{\max}$)，將水體流場與空氣流場分別分割為 M 與 N 個格點區間(在計算中我們選取 $M = N$ ，即格點間距 $\Delta z = z_{\max} / M$)。以二階準度之有限差分近似(3.1)式流場穩定性動力方程式中對 z 之導數，則由水下之邊界往上依序可以得到如下離散型式之差分方程式：

$$A^{w2}(\phi_{i+2}^w + \phi_{i-2}^w) + A_i^{w1}(\phi_{i+1}^w + \phi_{i-1}^w) + A_i^{w0}\phi_i^w = \omega [B^{w1}(\phi_{i+1}^w + \phi_{i-1}^w) + B^{w0}\phi_i^w] \tag{3.6}$$

$$A^{a2}(\phi_{j+2}^a + \phi_{j-2}^a) + A_j^{a1}(\phi_{j+1}^a + \phi_{j-1}^a) + A_j^{a0}\phi_j^a = \omega [B^{a1}(\phi_{j+1}^a + \phi_{j-1}^a) + B^{a0}\phi_j^a] \tag{3.7}$$

上述方程式中 $i = 1, 2 \dots M$ ， $j = 0, 1, 2 \dots N - 2, N - 1$ 。 $i = 1$ 時表示距水下流場截斷邊界 Δz 之點，即 $z = -z_{\max} + \Delta z$ 處； $i = M$ 與 $j = 0$ 同表示氣-水界面 $z = 0$ 處；而 $j = M - 1$ 表示距空氣流場截斷邊界 $-\Delta z$ 之點，即 $z = z_{\max} - \Delta z$ 處。

$i = 1, 2$ 與 $j = N - 2, N - 1$ 時，因上、下截斷邊界之自由滑溜條件之故，離散型式之差分方程式(3.6)與(3.7)需稍加整理。以二階準度之中央有限差分近似 $\pm z_{\max}$ 處之邊界條件(2.13)與(2.14)，我們得到：

$$\phi_0^w = 0; \quad \phi_N^a = 0 \tag{3.8}$$

$$\phi_{-1}^w = -\phi_1^w \tag{3.9}$$

$$\phi_{N-1}^a = -\phi_{N+1}^a \tag{3.10}$$

即特徵函數 ϕ_j^a 與 ϕ_i^w 分別對 $j = N$ ($z = z_{\max}$) 與 $i = 0$ ($z = -z_{\max}$) 呈反對稱。因此 $i = 1$ 時，(3.6)改寫成：

$$A^{w2}\phi_3^w + A_1^{w1}\phi_2^w + (A_1^{w0} - A^{w2})\phi_1^w = \omega [B^{w1}\phi_2^w + B^{w0}\phi_1^w] \tag{3.11}$$

$i = 2$ 時，(3.6)改寫成：

$$A^{w2}\phi_4^w + A_2^{w1}(\phi_3^w + \phi_1^w) + A_2^{w0}\phi_i^w = \omega[B^{w1}(\phi_3^w + \phi_1^w) + B^{w0}\phi_2^w] \quad (3.12)$$

$j = N - 2$ 時，(3.7)改寫成：

$$A^{a2}\phi_{N-4}^a + A_{N-2}^{a1}(\phi_{N-1}^a + \phi_{N-3}^a) + A_{N-2}^{a0}\phi_{N-2}^a = \omega[B^{a1}(\phi_{N-1}^a + \phi_{N-3}^a) + B^{a0}\phi_{N-2}^a] \quad (3.13)$$

而 $j = N - 1$ 時，(3.7)改寫成：

$$A^{a2}\phi_{N-3}^a + A_{N-1}^{a1}\phi_{N-2}^a + (A_{N-1}^{a0} - A^{a2})\phi_{N-1}^a = \omega[B^{a1}\phi_{N-2}^a + B^{a0}\phi_{N-1}^a] \quad (3.14)$$

上列離散型式差分方程式中之係數符號分別為：

$$A_i^{w0} = (\Delta z)^4 \left(-k^3 U_w(- (M - i)\Delta z) - k \frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} \Big|_{z=-(M-i)\Delta z} + i \frac{k^4}{Re_w} \right) - 2(\Delta z)^2 \left(k U_w(- (M - i)\Delta z) - i \frac{2k^2}{Re_w} \right) + i \frac{6}{Re_w}$$

$$A_i^{w1} = (\Delta z)^2 \left(k U_w(- (M - i)\Delta z) - i \frac{2k^2}{Re_w} \right) - i \frac{4}{Re_w} \quad A^{w2} = \frac{i}{Re_w}$$

$$B^{w0} = -2(\Delta z)^2 - k^2 (\Delta z)^4 \quad B^{w1} = (\Delta z)^2$$

A^{a2} 、 A_j^{a1} 、 A_j^{a0} 、 B^{a1} 和 B^{a0} 之表示式只需將 A^{w2} 、 A_i^{w1} 、 A_i^{w0} 、 B^{w1} 與 B^{w0} 表示式中參數之下標符號 w 改成 a ，並以 j 替代 $-(M - i)$ 即可。

以有限差分近似離散後之氣-水界面邊界條件(3.2)、(3.3)、(3.4)與(3.5)為：

$$\phi_M^w + U_0 q = \omega[k^{-1} q] \quad (3.15)$$

$$\phi_{M+1}^w - \phi_{M-1}^w - \phi_1^a + \phi_{-1}^a + \left[2(\Delta z) \left(\frac{dU_w(z)}{dz} - \frac{dU_a(z)}{dz} \right) \Big|_{z=0} \right] q = 0 \quad (3.16)$$

$$\phi_{M+1}^w + \phi_{M-1}^w + C_1 \phi_M^w - r \phi_1^a - r \phi_{-1}^a + C_2 q = 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
& D_1\phi_{M+2}^w + D_2\phi_{M+1}^w + D_3\phi_M^w - D_2\phi_{M-1}^w - D_1\phi_{M-2}^w \\
& + E_1\phi_2^a + E_2\phi_1^a - E_2\phi_{-1}^a - E_1\phi_{-2}^a + Dq \\
& = \omega \left[k^{-1}(\Delta z)^2 (\phi_{M+1}^w - \phi_{M-1}^w) - k^{-1}(\Delta z)^2 s (\phi_1^a - \phi_{-1}^a) \right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

上列邊界條件中：

$$\begin{aligned}
C_1 &= [(\Delta z)^2 k^2 - 2](1-r) \\
C_2 &= (\Delta z)^2 \left(\frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} - r \frac{d^2 U_a(z)}{dz^2} \right) \Big|_{z=0} \\
D &= 2k(\Delta z)^3 C_0^2 (1-s) \quad D_1 = \frac{i}{kRe_a} \\
D_2 &= (\Delta z)^2 \left(U_0 - \frac{i}{Re_w} 3k \right) - i \frac{2}{kRe_w} \\
D_3 &= 2(\Delta z)^3 \left(s \frac{dU_a(z)}{dz} - \frac{dU_w(z)}{dz} \right) \Big|_{z=0} \\
E_1 &= -i \frac{s}{kRe_a} \quad E_2 = -s(\Delta z)^2 \left(U_0 - i \frac{3k}{Re_a} \right)
\end{aligned}$$

整理上述離散型式之差分方程式(3.6)、(3.7)、(3.11)、(3.12)、(3.13)、(3.14)、(3.15)、(3.16)、(3.17)與(3.18)可得一複數特徵方程組：

$$[A]\{x\} = \omega[B]\{x\} \tag{3.18}$$

複數矩陣[A]與[B]如附錄五所示， ω 為複數特徵值， $\{x\}$ 為複數特徵向量：

$$\{x\}^T = \left\{ \phi_1^w, \phi_2^w, \dots, \phi_M^w, \phi_{M+1}^w, \phi_{M+2}^w, q, \phi_{-2}^a, \phi_{-1}^a, \phi_1^a, \phi_2^a, \dots, \phi_{N-1}^a \right\} \tag{3.19}$$

在特徵向量中， $\phi_M^w \equiv \phi(0) = \phi_a(0) = \phi_w(0)$ 。

由於我們使用二階準度中央有限差分法近似方程式中之微分項，所以當考慮 $z=0$ 處之空氣流場穩定性動力方程式、水體流場穩定性動力方程式及界面邊界條件時，需將特徵函數 $\phi_a(z)$ 與 $\phi_w(z)$ 分別向下與向上延伸，因此我們的特徵向量多出 ϕ_{-1}^a 、 ϕ_{-2}^a 、 ϕ_{M+1}^w 與 ϕ_{M+2}^w 四個未知數；連同 q ，我們共有 $M+N+4$ 個未知數，亦有 $M+N+4$ 個方程式。給定空氣與水下流場背景狀態速度函數，即可建立複數矩陣[A]與[B]，以求解聯立方程式(3.18)之特徵值 ω 與特徵向量 $\{x\}$ 。我們

使用 QZ 法 (Anderson 等 1991) 解出此特徵方程組所有的特徵值與特徵向量，再找出符合要求的特徵值 ($\omega_i > 0$)，以求得不穩定波之發展率與傳播速度。

3.2 數值方法之測試

在本研究的數值方法中，對於導數之離散乃採二階準確度之中央有限差分近似，此與大量文獻中數值求解穩定性動力方程式所採之其他離散方法相較，誠乃低準確度之近似。基於邊界條件之複雜度，以及離散邊界條件所造成的誤差對於穩定性問題本身的敏感度仍然未知，因此我們犧牲了離散近似的收斂速率，而採需要高格點數的低準確度近似，以簡化數值解析步驟，降低可能造成的其他誤差。然為能預估並控制結果之誤差，在討論計算結果之前，我們先對本數值方法(包括二階準確度中央有限差分之離散近似以及 QR 特徵值問題的求解)之收斂性與準確性有所了解。

我們先以本數值方法求解介於兩平板間二維平面 Poiseuille 流場的穩定性問題之穩定性動力方程式，其解廣泛被引用於印證解析流場穩定性動力方程式之數值方法。Orszag(1971)使用 Chebyshev 多項式展開之頻譜法計算方程式中之導數以離散穩定性動力方程式，再以 QR 特徵值問題的求解法求解離散矩陣之特徵值。當背景流場的雷諾數(以半渠寬為特徵長度，渠中間流速為特徵速度) $Re=10000$ ，無因次不穩定波波數等於 1 時，其解得收斂之特徵值為 $(0.23752649 + 0.00373967i)$ 。

針對與 Orszag(1971)計算相同的流場參數，本數值方法(二階準確度有限差分法和 QR 特徵值矩陣求解法)以不同離散格點數所解得的特徵值表列於表 1。從表 1 之結果可以看出，本數值方法所解得的特徵值隨格點數之增加緩慢收斂，在使用超過 800 個格點後其特徵值收斂準確至小數點以下四位，且可預測其解隨格點之增加將收斂至準確值。

為決定數值解析氣-水偶合剪流場不穩定波問題所需之離散格點數，我們接著檢視以本數值方法解析該問題時之收斂性質。表 2 與表 3 分別表列出對波數為 1 cm^{-1} 與 5 cm^{-1} 之擾動波，以不同離散格點數所解得的特徵值，其空氣摩擦速度 $u_a = 17 \text{ cm/s}$ ，水面流速 $U_0 = 9.6 \text{ cm/s}$ 。在我們考慮的波數範圍內，波數等於 1 cm^{-1} 之波具有最長之波長，亦即有最大之格點間距；而波數等於 5 cm^{-1} 之波其發展率接近極大值，所以我們選取這兩個具代表性的波數來檢視本數值方法之收斂性質。根據 Valenzuela(1976)研究中指出：空氣流場之「截斷邊界」

至少需位於一半波長值之高度，才可以截斷邊界之自由滑溜邊界條件替代無窮高度處之輻射邊界條件。因此，在上述兩個測試收斂性的研究中，我們選擇以一半波長來當做空氣流場高度與水體流場深度，即空氣流場與水體流場之上、下「截斷邊界」分別位於 $\pm \lambda/2$ 處。又我們的因次特徵長度為 $1/k$ ，所以空氣流場與水體流場之無因次高度與深度均為 π 。表 2 與表 3 中所示之離散格點數 $N_{\text{total}} = M + N + 4$ ， M 與 N 分別為水下流場與空氣流場的格點區間數，取 $N = M$ 。其結果顯示，當格點數高於 1004 後，對於波數為 1 cm^{-1} 跟 5 cm^{-1} 計算所得之特徵值皆收斂至小數點以下 3 位。故在以下章節中我們討論的數值結果全是令空氣流場與水體流場之無因次高度與深度均為 π 及 $N_{\text{total}} = 1004$ 來計算求得。

格點數	特徵值
99	$0.23537321 + 0.00312565i$
299	$0.23729091 + 0.00369996i$
499	$0.23744196 + 0.00372618i$
699	$0.23748340 + 0.00373290i$
799	$0.23749350 + 0.00373449i$
899	$0.23750043 + 0.00373561i$
999	$0.23750536 + 0.00373641i$
1099	$0.23750898 + 0.00373697i$
Orszag 之收斂值	$0.23752649 + 0.00373967i$

表 1：利用二階準度有限差分和 QZ 特徵值矩陣求解法求解平面 Poiseuille 流場 Orr-Sommerfeld 方程式所得特徵值的收斂情況。

格點數	特徵值
304	2.09792552+0.01201549i
604	2.09101128+0.01328901i
1004	2.08975744+0.01357355i
1404	2.09057649+0.01331318i
1804	2.09078021+0.01324201i

表 2：收斂性測試，波數等於 1 cm^{-1}

格點數	特徵值
204	1.81388985+0.00314562i
604	1.81389961+0.00294927i
1004	1.81389960+0.00293570i
1404	1.81389937+0.00293287i
1804	1.81390341+0.00292921i

表 3：收斂性測試，波數等於 5 cm^{-1}

肆、計算結果與討論

4.1 與其他解析以及實驗之比較

為驗證本數值解析結果之正確性，及進一步探討不同流體性質與流場參數對不穩定波發展與傳播機制的影響，我們選用了四組與 Kawai(1979)與 van Gastel 等(1985)之解析相同的空氣摩擦速度 $u_{*a}=13.6、17.0、21.4$ 以及 24.8 cm/s(與之對應的水面流速 $U_0=7.5、9.6、9.8$ 以及 10.2 cm/s)，進行界面不穩定波發展率與傳播速度的計算，並與 Kawai 以及 van Gastel 等的結果比較。空氣與水之性質為：空氣密度 $\rho_a = 0.0012$ g/cm³，水密度 $\rho_w = 1.00$ g/cm³，空氣動黏滯係數 $\nu_a = 0.15$ cm²/s，水動黏滯係數 $\nu_w = 0.01$ cm²/s，表面張力係數 $T = 75.0$ dynes/cm。

圖 3(a) ~ (d)為我們求得四組不同空氣摩擦速度下之不穩定波發展率 β 與傳播速度 c_r 對波數的變化關係。在此處以及往後的討論中，為易於與前人的結果比較，我們使用的不穩定波的發展率定義為 $\beta = 2kc_i$ ，以表示不穩定波「能量的發展率」。從圖 3(a) ~ (d)可以看出，在我們考慮的波數範圍內，不穩定波的發展率 β 隨著空氣摩擦速度 u_{*a} 的增加而增加，尤其不穩定波發展率之極大值 (β_{\max}) 增加的比例更遠大於空氣摩擦速度增加的比例；反之，不穩定波傳播速度並未隨著空氣摩擦速度的變化而有明顯的改變。

van Gastel 等(1985)以逼進法解得相同剪流場函數的不穩定波發展率。比較我們以數值方法解得的不穩定波發展率與 van Gastel 等解得理論值，兩者相當的吻合(圖 4)；而與 Kawai(1979)以數值方法解得的不穩定波發展率比較，兩者間也無甚大差異(圖 5)，其差異都在 10%之內。

我們並進一步比較本數值結果與 Larson & Wright(1975)之實驗量測值，圖 6 顯示我們解得的不穩定波發展率與 Larson & Wright(1975)之量測值以及 Valenzuela(1976)之數值計算值的互相比較。其結果顯示我們解得的发展率與 Larson & Wright 的量測值之最大差異達到 23%，造成此一差異之原因乃由於

Larson & Wright(1975)與我們計算所使用的空氣摩擦速度存在一不確定的差異:Larson & Wright 實驗中的空氣摩擦速度是處於「穩定」狀態(steady state),而我們使用的空氣摩擦速度則是處在「轉移」狀態(transient state)(van Gastel 等, 1985)。Kawai(1979)曾指出:轉移狀態流場的空氣摩擦速度值會比已完全發展流場的空氣摩擦速度值小,其間之差異可能達到 50%。所以當實驗與數值解析之空氣摩擦速度存在著「轉移狀態」與「穩定狀態」這種不確定的差異時,其分別得到的不穩定波發展率的差異是可以理解的。

Kawai(1979)比較其以實驗量測及數值解析所得到之不穩定波頻率(frequency)、發展率及傳播速度,發現其以數值解析求得之具極大值發展率之不穩定波為其實驗中最先被觀測到的不穩定波,並且指出不穩定波發展率極大值與空氣摩擦速度間有一比例關係: $\beta_{\max} \propto u_{*a}^{3.5}$ 。van Gastel 等(1985)的研究中也指出,不穩定波發展率極大值與空氣摩擦速度間有一近似的簡單相依關係可循:當空氣摩擦速度介於 0.05 m/s 至 0.4 m/s 之間時,不穩定波發展率極大值與空氣摩擦速度的三次方成正比,即 $\beta_{\max} \propto u_{*a}^3$ 。下列表 4 列舉我們在不同空氣摩擦速度下所解得之 β_{\max} 與 u_{*a}^3 之比值。由表 4 可看出 β_{\max} 與 u_{*a}^3 之比值很趨近於一定值,即 β_{\max} 與 u_{*a}^3 之間確存在著比例關係。

u_{*a} m/s	β_{\max} / u_{*a}^3
0.136	120
0.170	164
0.214	180
0.248	195

表 4: 比較四種空氣摩擦速度下解得之 β_{\max} 與 u_{*a}^3 之比值。

我們另外將不穩定波發展率極大值 β_{\max} 對空氣摩擦速度 u_{*a} 的變化關係製成圖 7,並與 Kawai(1979)以及 van Gastel 等(1985)所解得兩者間的變化關係作一比較。由圖 7 我們清楚地看出空氣摩擦速度增加,不穩定波發展率極大值亦有顯著增加。表 4 及圖 7 之結果明白地指出了不穩定波發展率極大值與空氣摩擦速度兩者間有著強烈的相依關係。

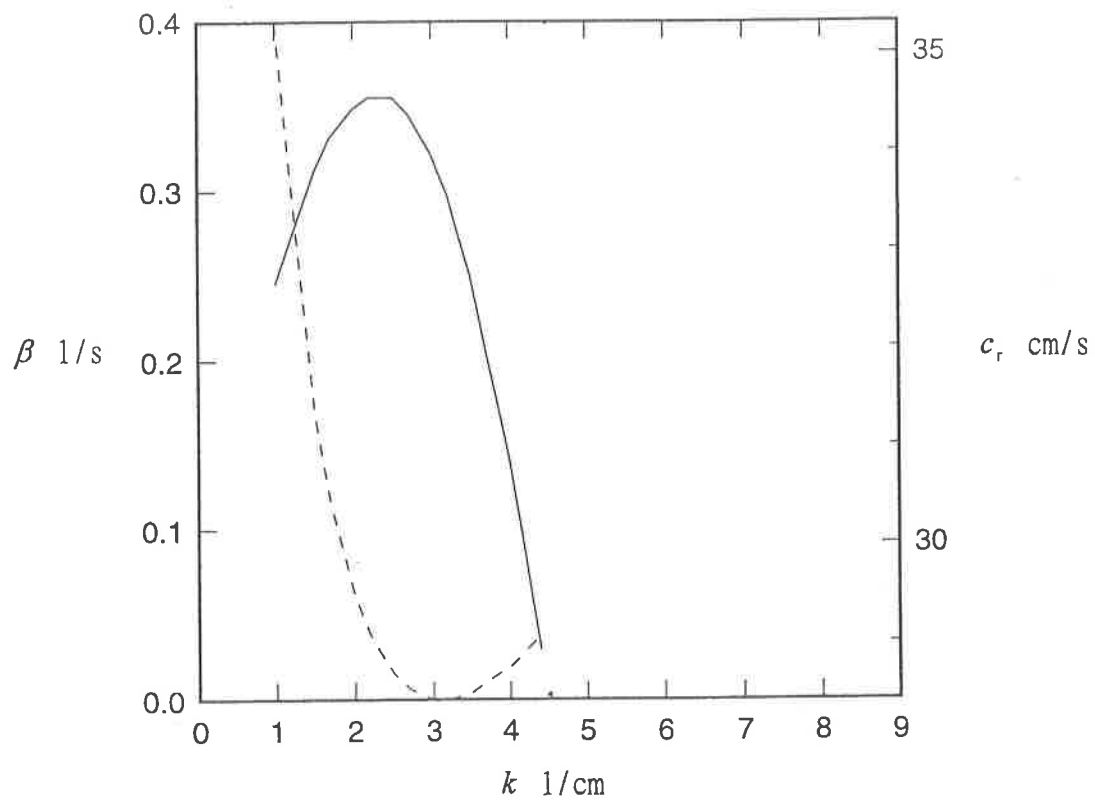


圖 3 (a)：不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $u_{*a} = 13.6$ cm/s, $U_0 = 7.5$ cm/s。

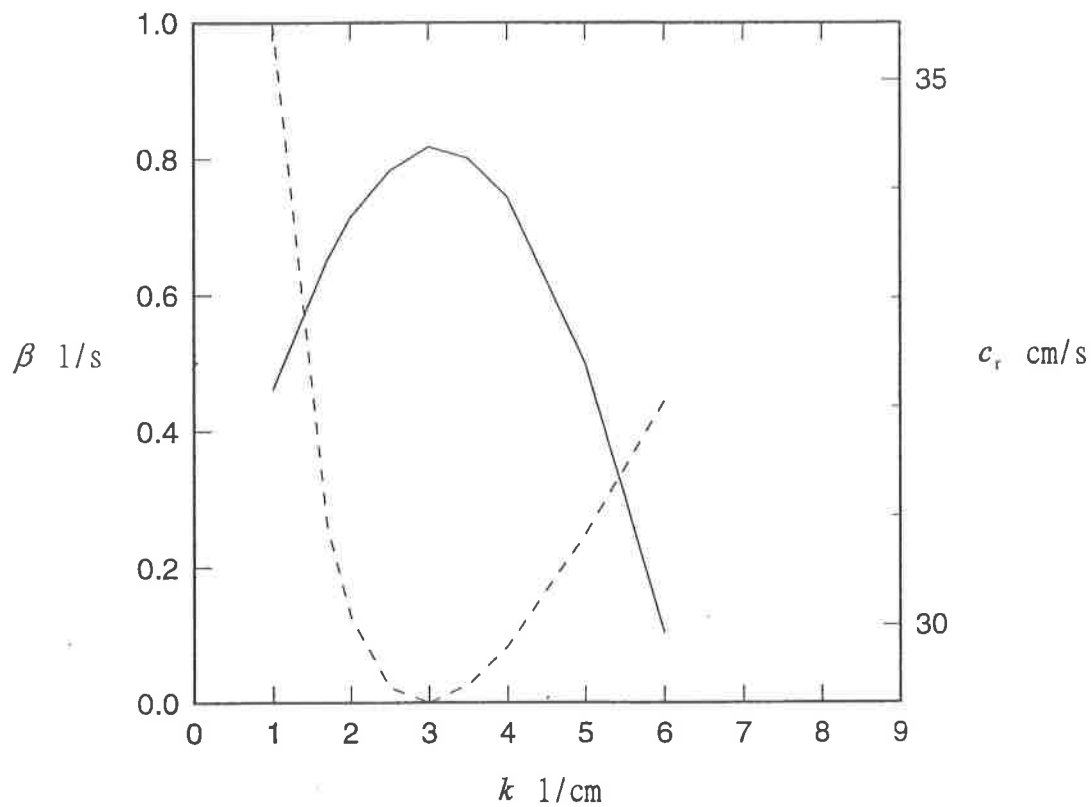


圖 3 (b)：不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $u_{*a} = 17.0 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 9.6 \text{ cm/s}$ 。

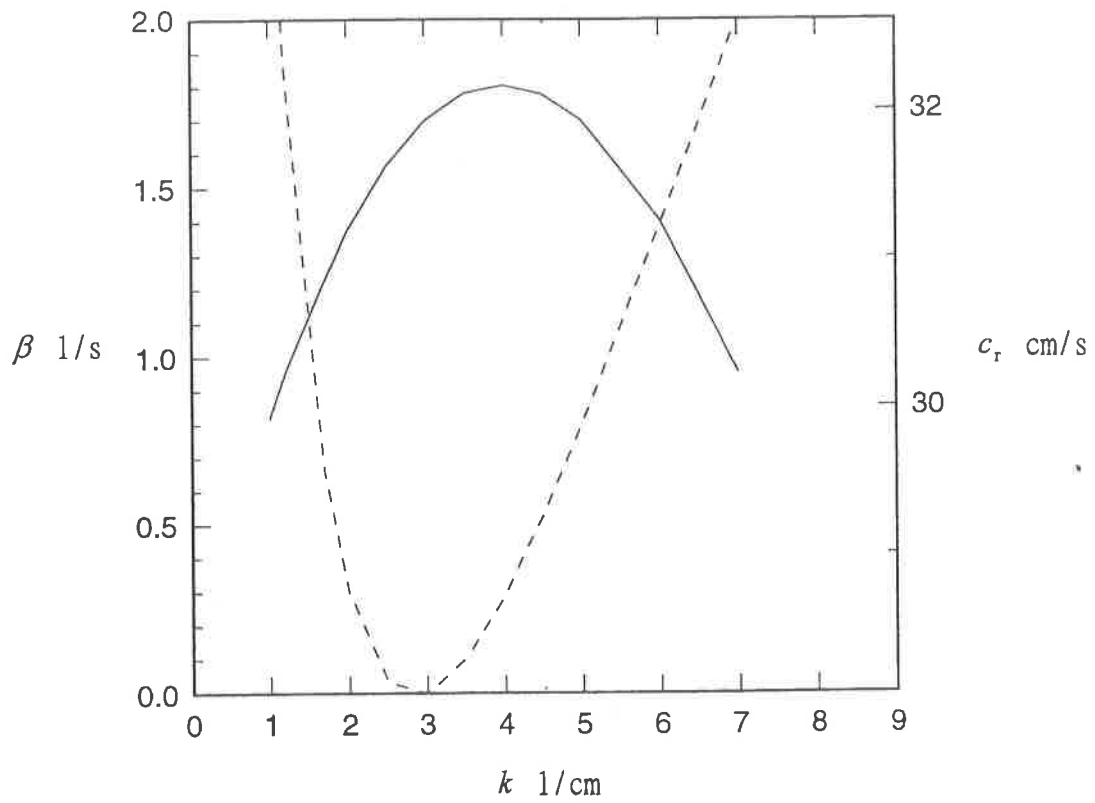


圖 3 (c)：不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $u_* = 21.4 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 9.8 \text{ cm/s}$ 。

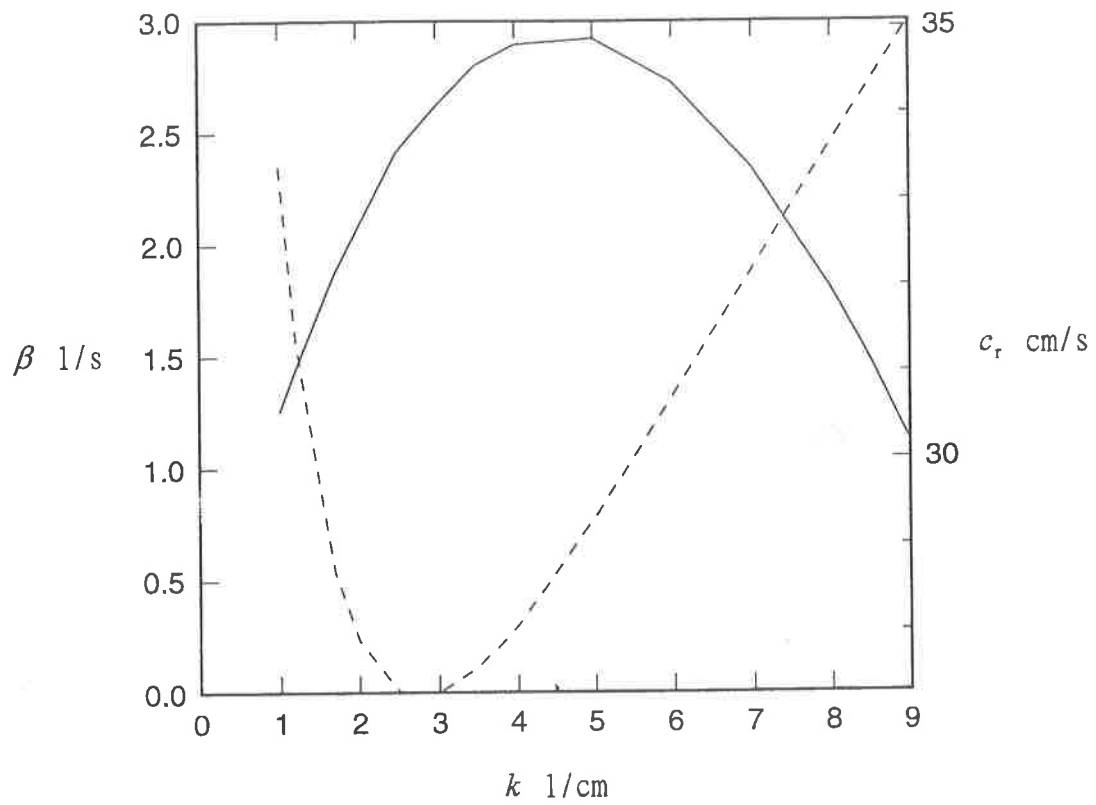


圖 3 (d)：不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $u_* = 24.8 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 10.2 \text{ cm/s}$ 。

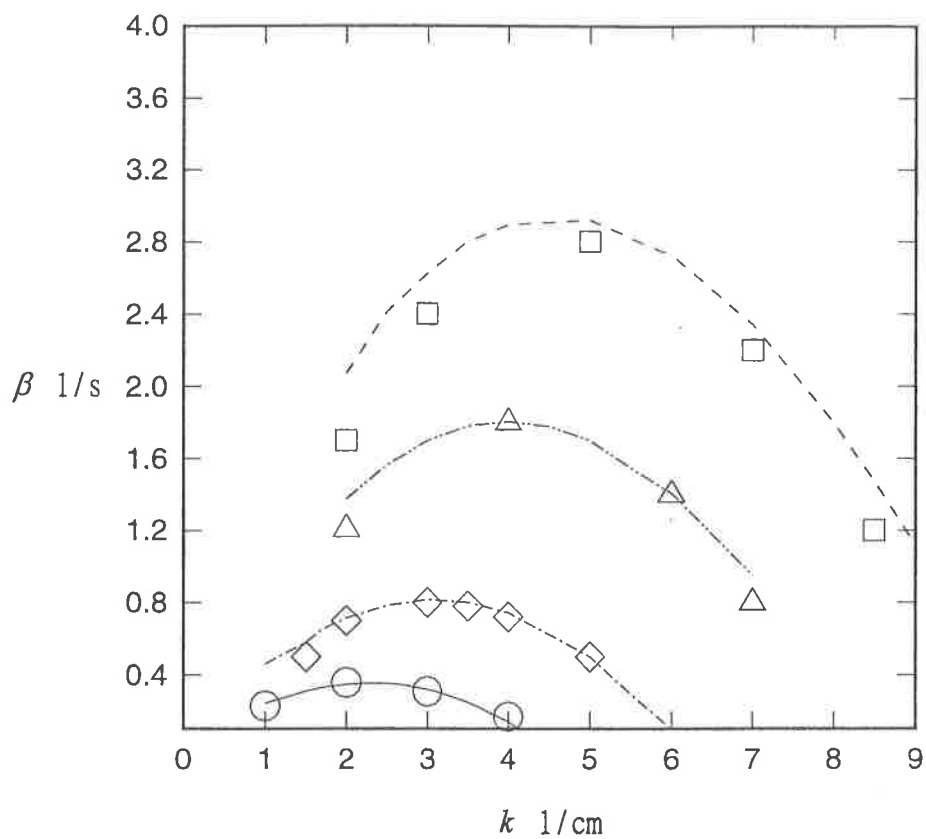


圖 4：比較我們與 van Gastel 等解得的不穩定波發展率。 $u_{*o} = 13.6$ cm/s：— 我們解得的發展率，○ van Gastel 等解得的發展率； $u_{*o} = 17.0$ cm/s：-·- 我們解得的發展率，◇ van Gastel 等解得的發展率。 $u_{*o} = 21.4$ cm/s：-·-·- 我們解得的發展率，△ van Gastel 等解得的發展率。 $u_{*o} = 24.8$ cm/s：- - - - 我們解得的發展率，□ van Gastel 等解得的發展率。

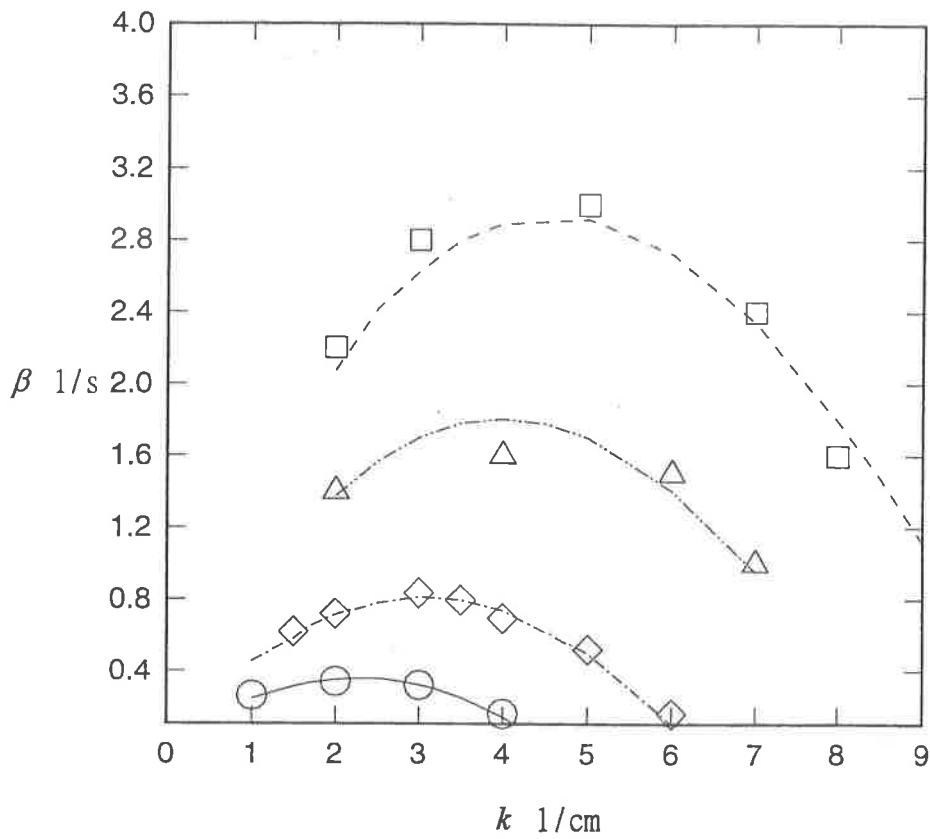


圖 5：比較我們與 Kawai 解得的發展率。 $u_a = 13.6$ cm/s：— 我們解得的發展率， \square Kawai 解得的發展率； $u_a = 17.0$ cm/s：- · - 我們解得的發展率， \triangle Kawai 解得的發展率； $u_a = 21.4$ cm/s：- · · - 我們解得的發展率， \diamond Kawai 解得的發展率； $u_a = 24.8$ cm/s：- - - 我們解得的發展率， \circ Kawai 解得的發展率。

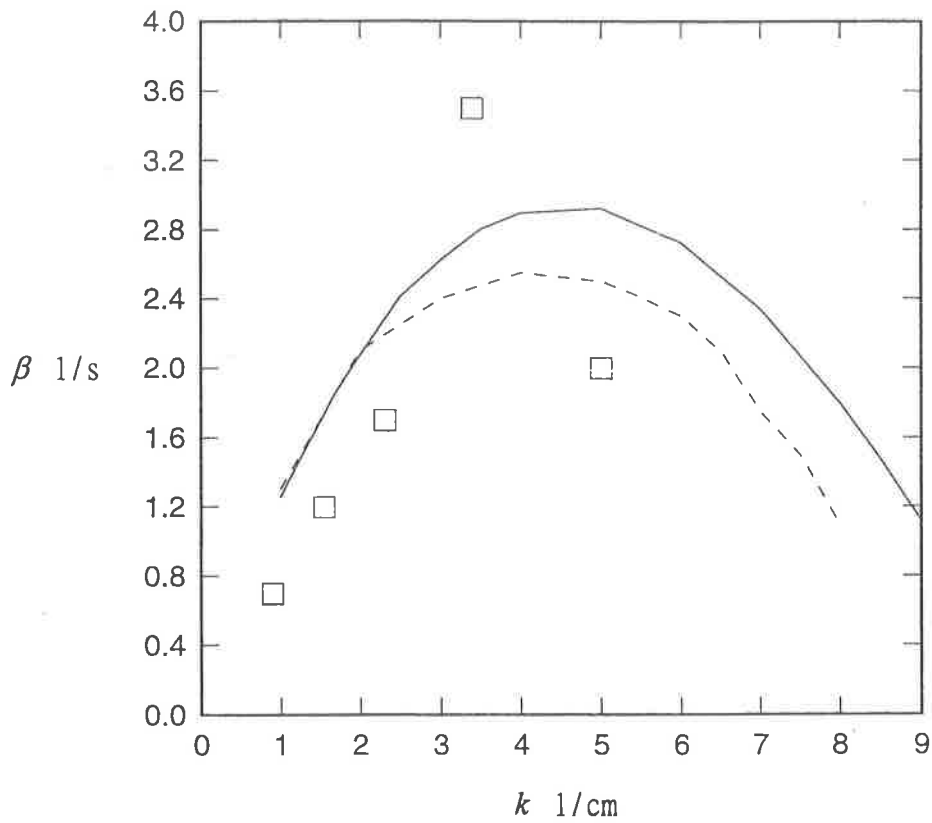


圖 6：比較我們與 Valenzuela 及 Larson & Wright 得到的發展率。— 我們解得的發展率， $u_{*0} = 24.8$ cm/s。- - - Valenzuela 解得的發展率， $u_{*0} = 25$ cm/s。□ Larson & Wright 量測所得的發展率， $u_{*0} = 27$ cm/s。

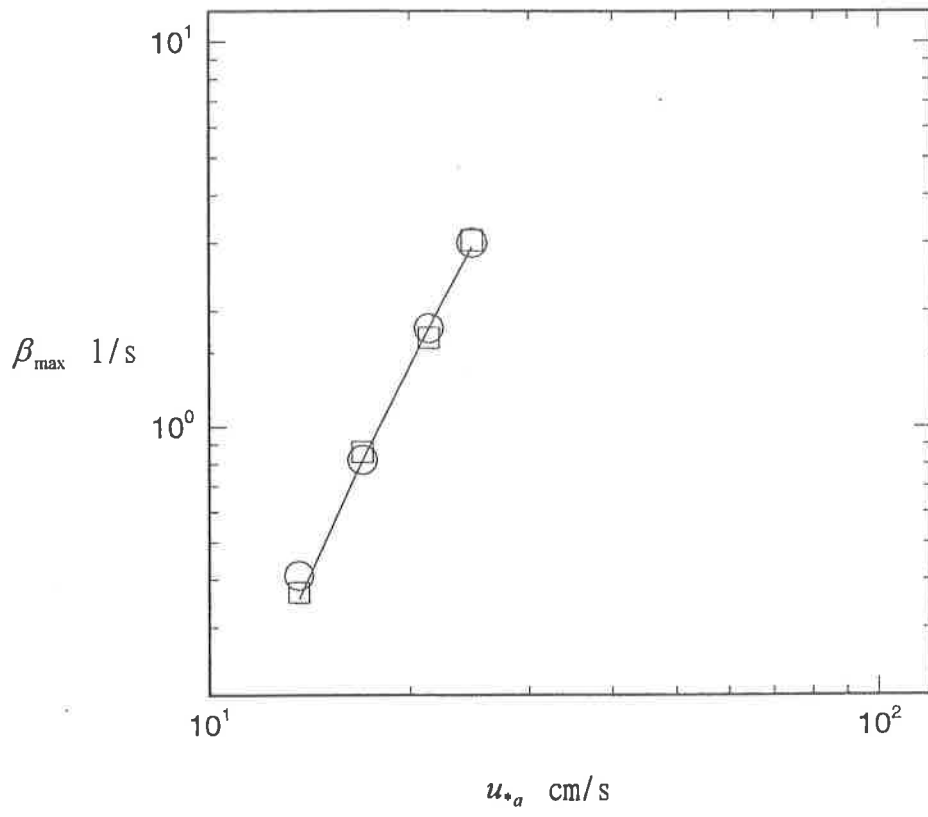


圖 7: 發展率極大值對空氣摩擦速度的變化關係。— 我們的結果。○ van Gastel 等的結果。□ Kawai 的結果。

4.2 流體性質與流場參數對不穩定波的影響

我們進一步改變流場參數及流體性質，以探討其對於不穩定波的發展率與傳播速度的影響。

(A) 表面張力的影響

選擇三個不同的表面張力係數值 $T = 1$ dynes/cm、45 dynes/cm 及 75 dynes/cm，固定其他之流場參數及流體性質，以觀察不穩定波的發展率(圖 8) 傳播速度(圖 9)對不同表面張力的變化關係。從圖 8 與圖 9 中我們發現，表面張力的變化對不穩定波的發展率與傳播速度的影響很大。隨著表面張力的降低，不穩定波發展率明顯地增大。與表面張力係數值為 75 dynes/cm 時的不穩定波發展率極大值相比，表面張力係數值為 45 dynes/cm 及 1 dynes/cm 時之發展率極大值分別增加了 15% 及 60%。不穩定波傳播速度則隨著表面張力值的降低而降低，表面張力係數值為 45 dynes/cm 及 1 dynes/cm 時之傳播速度極小值分別比表面張力係數值為 75 dynes/cm 時之傳播速度極小值減小約 7% 及 35%。

在相同的流場狀況下，當表面張力降低時，水面會比較不那麼緊繃而易於被擾動，因此不穩定波發展率也就隨之增大。在實際情況中，表面張力很容易受流場狀況影響。譬如溫度的升高或降低，界面是否存在「界面活性物質」(surfactant)等。亦或表面張力並非均勻分佈，而存在著張力梯度，那麼表面張力對不穩定波發展的影響將更複雜了。

從三種不同表面張力係數值得到的結果也顯示：表面張力的降低同時會導致擁有發展率極大值之不穩定波的波數以及傳播速度極小值之不穩定波的波數增加；但影響傳播速度極小值的較發展率大，即因降低表面張力而引致傳播速度極小值的不穩定波波數增加的比例較發展率極大值的不穩定波波數大。所以在 $T = 75$ dynes/cm 時擁有發展率極大值的不穩定波與擁有傳播速度極小值的不穩定波兩者的波數很接近，但在 $T = 1$ dynes/cm 時兩波數間的差異就相當明顯了。此與 Wheless & Csanady(1993)得到的結論是一致的，也說明 Kawai(1979)之推論：擁有傳播速度極小值的不穩定波其發展率亦為極大值，僅只是一個在特定的表面張力值下偶發的結果。

(B) 流體黏滯性的影響

爲了解空氣流體黏滯性對不穩定波生成與發展的影響，我們選擇了三個不同的空氣動黏滯係數值 $\nu_a = 0.12 \text{ cm}^2/\text{s}$ 、 $0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ 與 $0.18 \text{ cm}^2/\text{s}$ ，分別爲空氣在溫度 $2 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $20 \text{ }^\circ\text{C}$ 與 $56 \text{ }^\circ\text{C}$ 時的動黏滯係數值，並固定其餘參數進行穩定性數值分析。圖 10 與圖 11 顯示在上述三個不同的空氣動黏滯係數值下，不穩定波的發展率（圖 10）與傳播速度（圖 11）對波數變化的關係。從圖中可以看出，隨著空氣動黏滯係數值的降低，發展率因而增加。與 $\nu_a = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ 時的發展率極大值相比，在 $\nu_a = 0.18 \text{ cm}^2/\text{s}$ 與 $\nu_a = 0.12 \text{ cm}^2/\text{s}$ 情況下解得發展率極大值分別減少約 15% 與增加約 20%。而不同的空氣動黏滯係數值對傳播速度影響相當微小，就我們得到的結果而言，可說是無變化。

如同上述空氣的情況一般，我們也選取了水溫爲 $2 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $20 \text{ }^\circ\text{C}$ 與 $56 \text{ }^\circ\text{C}$ 時的水體流體動黏滯係數值 $\nu_w = 0.017 \text{ cm}^2/\text{s}$ 、 $0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ 與 $0.005 \text{ cm}^2/\text{s}$ ，來探討水體流體黏滯性的變化對不穩定波發展的影響。圖 12 與圖 13 分別顯示在上述三個不同水體流體動黏滯係數值下，不穩定波的發展率（圖 12）與傳播速度（圖 13）對波數變化的關係。隨著水體流體動黏滯係數值的降低，不穩定波發展率大幅的提升。與 $\nu_w = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ 時的發展率 β_{\max} 比較， $\nu_w = 0.005 \text{ cm}^2/\text{s}$ 及 $0.017 \text{ cm}^2/\text{s}$ 時的發展率分別增加約 40% 及減少約 30%。相對於發展率受水體黏滯性的影響，圖 13 顯示的結果說明水體流體黏滯性的變化對不穩定波傳播速度並無太大影響。在我們考慮的情況之下， $\nu_w = 0.005 \text{ cm}^2/\text{s}$ 時傳播速度極小值與 $\nu_w = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ 時傳播速度極小值之間的差異僅約 4% 而已。

流體的溫度變化爲改變流體黏滯性最簡單的因素之一，水體分子間的內聚力因溫度的升高而降低，黏滯性亦隨之而降低。一般而言，水體流場的黏滯力作用具有抵銷能量的趨勢，能量的消散會使流場趨於穩定。在氣-水界面不穩定短波成長的問題中，水下邊界層內的流場因黏滯力作用而消散的能量會造成不穩定波發展率的降低。但在我們的研究中臨界層厚度很薄，致使臨界層與氣-水界面幾乎貼近在一起，所以水體流場於邊界層內黏滯力的作用會影響到空氣流場臨界層內之擾動，而由於空氣流場臨界層內之擾動對不穩定波生長有很重要

的影響(Miles, 1957), 所以水體流場邊界層內的黏滯力亦為一股助益不穩定波發展的作用力, 致使不穩定波發展率增大。因此若水體流場內黏滯力作用抵銷的能量小於其對擾動所提供的能量的話, 就有造成不穩定波發展的可能。

而水體流體黏滯性的降低會伴隨著水體流場邊界層的變薄, 所以黏滯力作用抵銷掉的能量也比較少; 但也因水體流場邊界層的變薄, 使得水體流場黏滯力的作用更易於影響臨界層內之擾動, 這也就是為何較小的水體流體動黏滯係數值卻形成具有較大發展率之不穩定波之故。

(C) 空氣流場黏性次邊界層高度的影響

在先前之計算中, 空氣黏性次邊界層高度之參數 $R = 5$ 。增大參數 R (例如 $R = 8$), 空氣黏性次邊界層的高度增加, 空氣流場之流速亦隨之增大(如圖 14 中所示)。van Gastel 等(1985)考慮 R 值變化對不穩定波發展的影響, 其結果顯示不穩定波的發展率對 R 值的變化相當敏感; 而傳播速度在空氣摩擦速度小於 25 cm/s 的情況下對不同 R 值的變化都在 1% 以內。圖 15 顯示在不同 R 值下, 不穩定波發展率對波數的變化。隨著 R 值的增加, 不穩定波發展率顯著增加, 在 $R = 8$ 時的 β_{\max} 比 $R = 5$ 時的 β_{\max} 增加約 80%。不穩定波發展率隨 R 值增加而增加的現象是很容易理解的, 我們於 4.1 節中提及不穩定波發展率與空氣摩擦速度有強烈的相依關係。而從(2.17)與(2.18)可看出空氣摩擦速度增加, 空氣流場流速亦增加, 因此不穩定波發展率與空氣流場流速亦有相依關係。所以增大 R 值, 空氣流場流速增加, 不穩定波發展率也增加。而圖 16 的結果則顯示在不同 R 值下, 不穩定波傳播速度的變化相當微小。

(D) 水面流速的影響

在我們選擇的空氣與水體背景流場流速函數中, 決定流場流速的參數值為空氣摩擦速度 u_{*a} 與水面流速 U_0 。以上計算所採用之參數值為參考 Kawai(1979) 實驗之量測數據。但 Shemdin(1972)與 Wu(1975)的實驗則結論: 在風的吹拂之下, 所引致水體流場之水面流速 U_0 約為空氣流場無窮高處自由空氣流速的 3.5%~4%。

在 Valenzuela(1976)的研究中提及：穩定性數值解析中空氣流場的上截斷邊界高度 z_{\max} 至少需有一半波長值。在此情況下，空氣摩擦速度的值趨近於自由空氣流速值的 5%。所以在 Valenzuela(1976)的研究中選擇水面流速值為自由空氣流速值的 4%，即水面流速值為 0.8 倍的空氣摩擦速度值。

我們選取了兩個不同的水面流速 U_0 與空氣摩擦速度 u_{*a} 關係式： $U_0 = 0.8u_{*a}$ 以及 $U_0 = 0.5u_{*a}$ 來和我們原先使用之空氣摩擦速度與水面流速(其比值 U_0/u_{*a} 介於 0.5 到 0.8 之間)所得的結果做比較。圖 17 為不同水面流速下，不穩定波發展率對波數的變化圖，其結果清楚顯示：不同的水面流速對不穩定波發展率並無明顯的影響。相對於發展率，圖 18 中顯示的不穩定波傳播速度在不同水面流速下的變化則較明顯。當水面流速增加時，傳播速度亦隨之增加。在我們考慮的情況中， $U_0 = 0.8u_{*a}$ 時的傳播速度極小值比 $U_0 = 0.5u_{*a}$ 時的傳播速度極小值增加約 15%。

不穩定波的傳播速度取決於兩種效應的影響：一為水體流場引起的「平流效應」(advection effect)，另一為空氣流場內的「慣性效應」(inertial effect)。水面流速的增加會造成水體流場平流效應的增強，不穩定波的傳播速度也就跟著增加。而增加空氣流場流速將使空氣流場內向下的壓力增加，造成氣-水界面受到壓迫而減低不穩定波的傳播速度。這兩種效應的影響以水體流場引起的平流效應較大，因此在比較空氣黏性次邊界層高度與水面流速對不穩定波傳播速度的影響結果發現，相較於「由風吹引起的水面流速變化」對不穩定波傳播速度的影響，「風速的變化」所造成的影響就顯得相當輕微了。

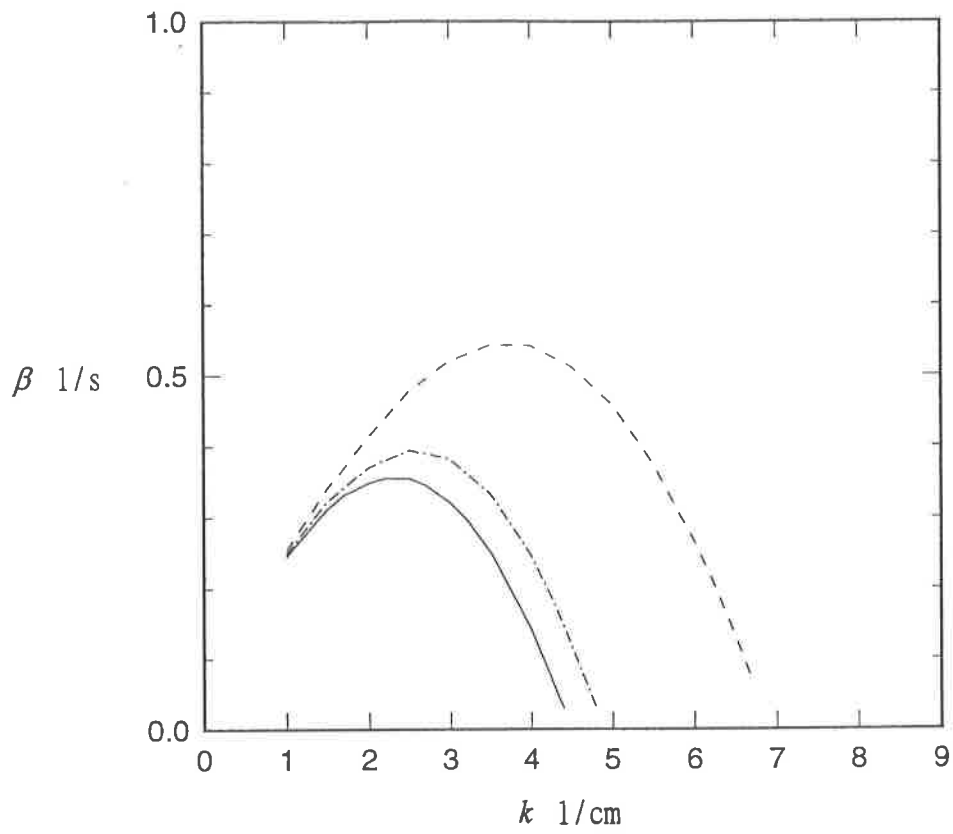


圖 8：不同表面張力值下，發展率對波數的變化。— $T = 75$ dynes/cm，
 - · - $T = 45$ dynes/cm，- - - $T = 1$ dynes/cm。 $u_{*o} = 13.6$ cm/s。

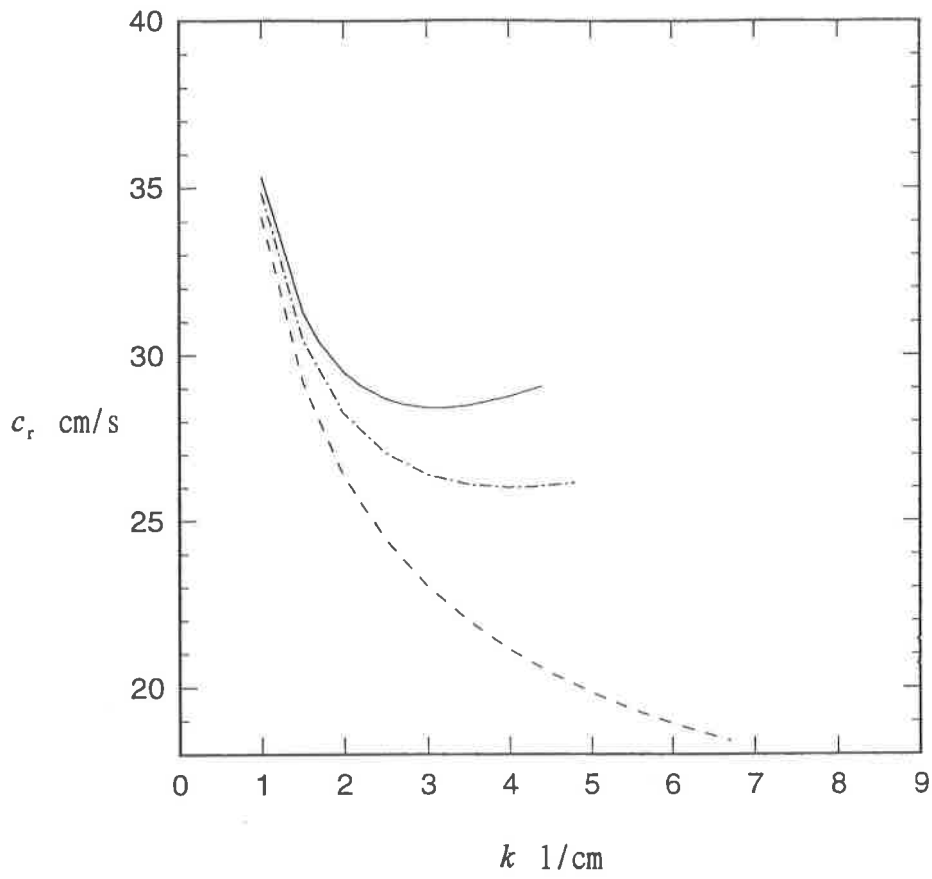


圖 9：不同表面張力值下，傳播速度對波數的變化。— $T = 75$ dynes/cm，—•— $T = 45$ dynes/cm，- - - - $T = 1$ dynes/cm。 $u_{*a} = 13.6$ cm/s。

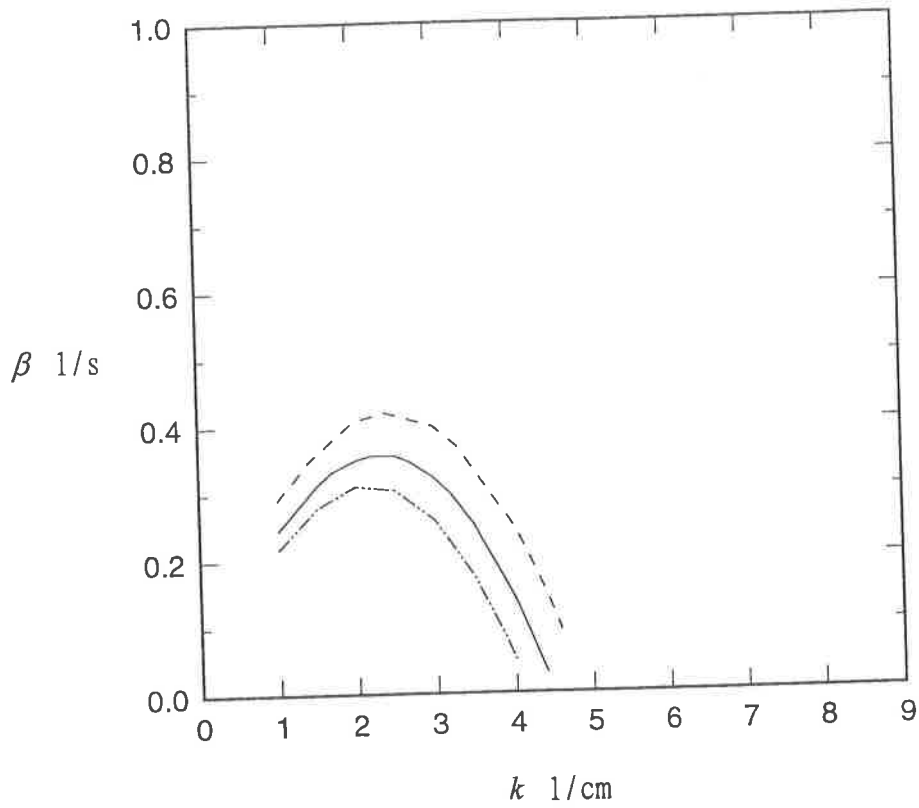


圖 10：不同空氣動黏滯係數下，發展率對波數的變化。- - - $\nu_a = 0.12$ cm^2/s ，— $\nu_a = 0.15$ cm^2/s ，- · · - $\nu_a = 0.18$ cm^2/s 。 $u_{*a} = 13.6$ cm/s 。

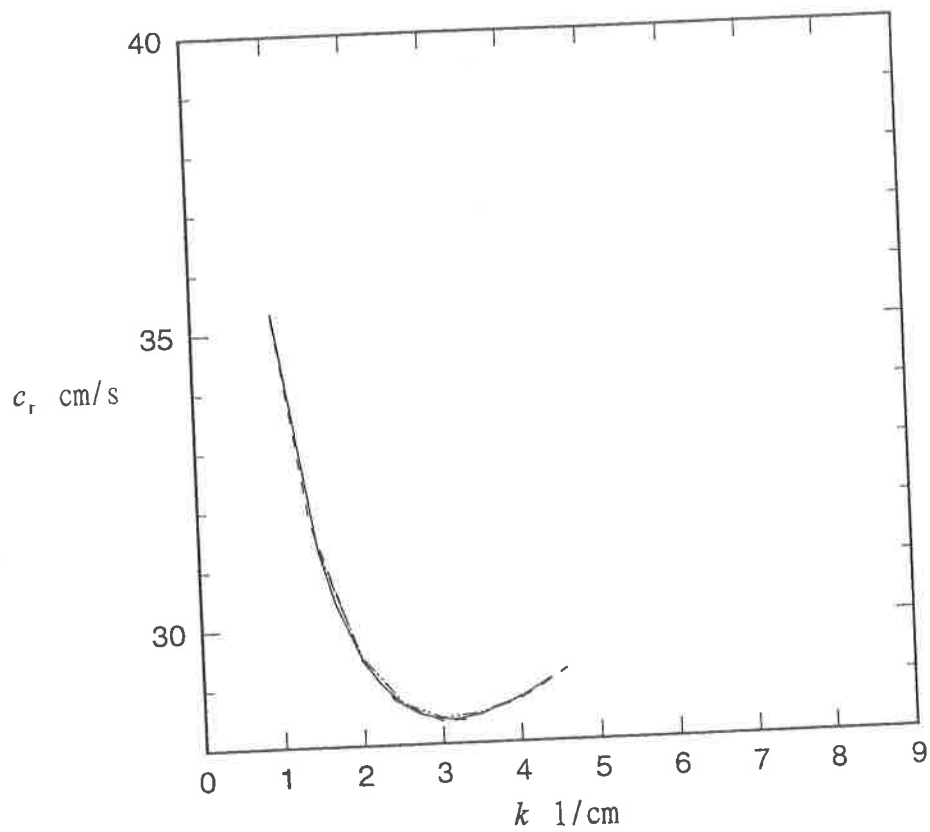


圖 11：不同空氣動黏滯係數下，傳播速度對波數的變化。- - - - $\nu_a = 0.12$ cm²/s，— $\nu_a = 0.15$ cm²/s，- · · - $\nu_a = 0.18$ cm²/s。 $u_{*a} = 13.6$ cm/s。

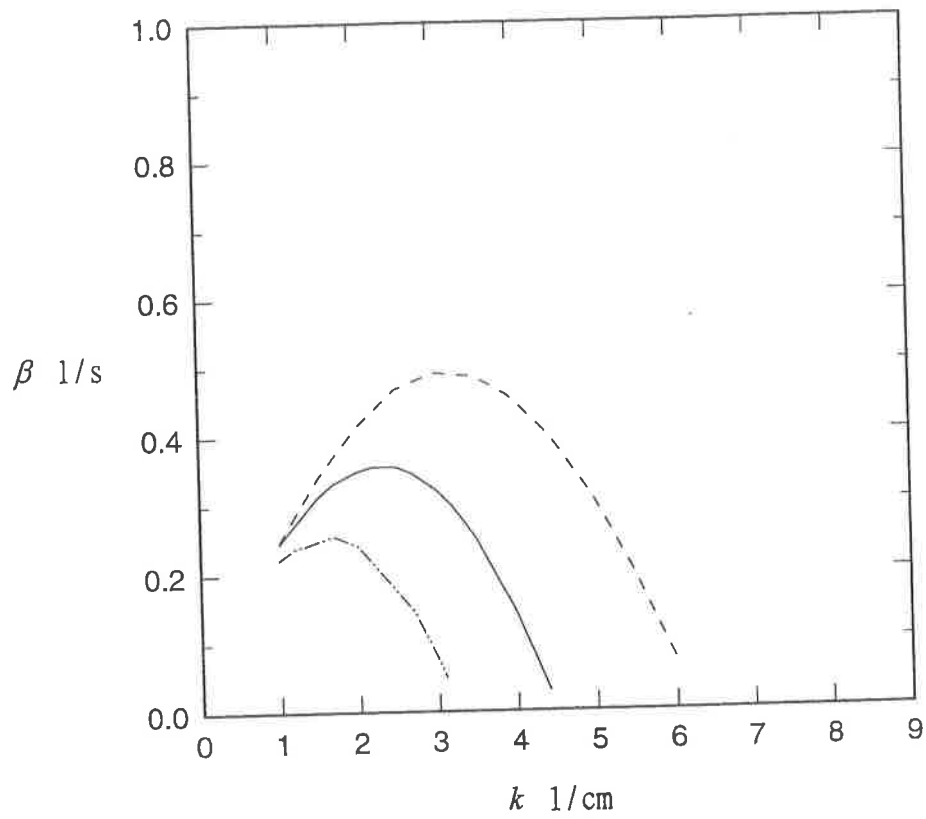


圖 12：不同水體動黏滯係數下，發展率對波數的變化。----- $\nu_w = 0.005$ cm²/s，— $\nu_w = 0.01$ cm²/s，-·-·- $\nu_w = 0.017$ cm²/s。 $u_{*o} = 13.6$ cm/s。

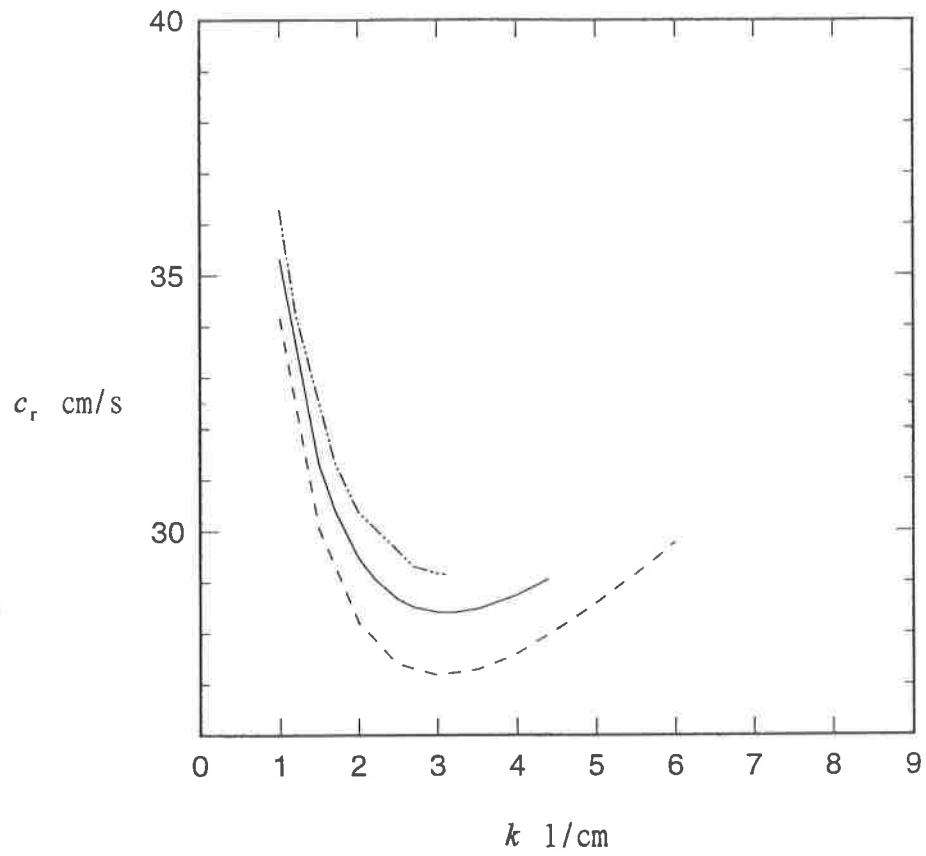


圖 13：不同水體動黏滯係數下，傳播速度對波數的變化。--- $\nu_w = 0.005$ cm²/s，— $\nu_w = 0.01$ cm²/s，- · · - $\nu_w = 0.017$ cm²/s。 $u_{*a} = 13.6$ cm/s。

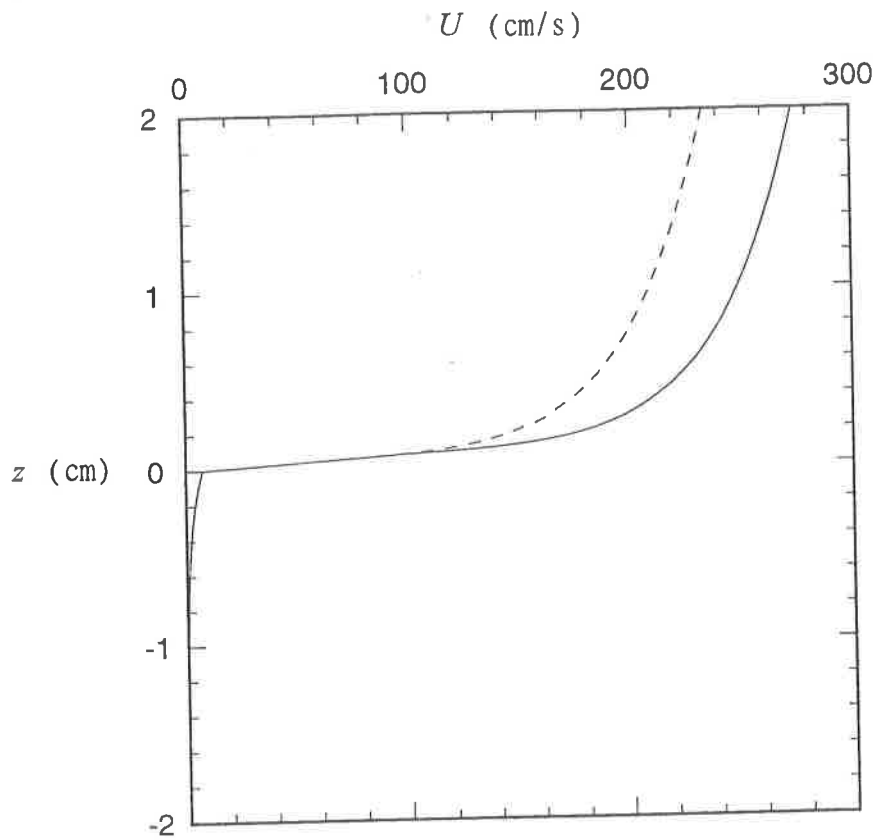


圖 14：本研究使用的氣-水剪流場速度函數分佈：— $R=8$ ，--- $R=5$ 。
 $u_{*o} = 13.6$ cm/s， $U_0 = 7.5$ cm/s。

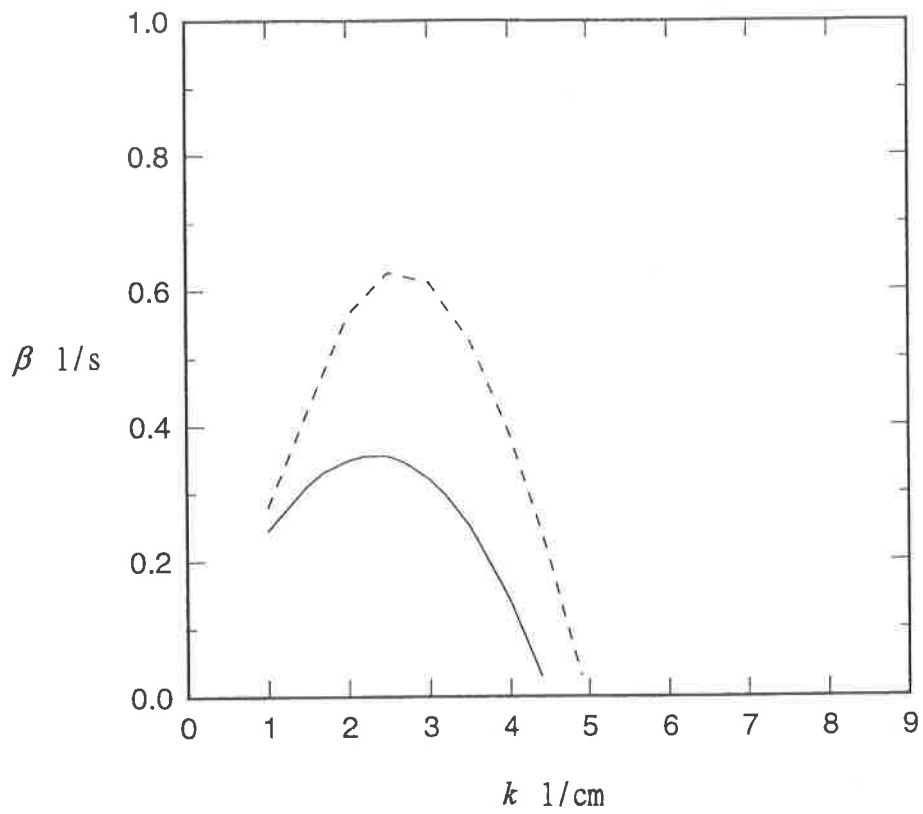


圖 15：不同黏性次邊界層高度下，發展率對波數的變化。— $R=5$ ，- - - - $R=8$ 。 $u_* = 13.6$ cm/s。

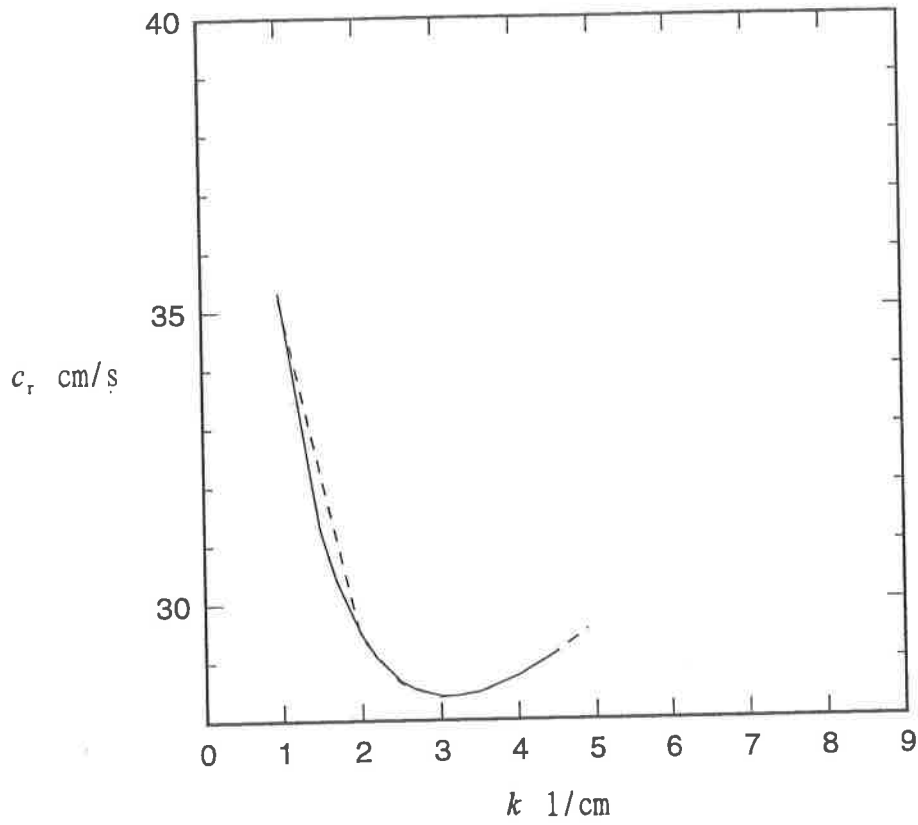


圖 16：不同黏性次邊界層高度下，傳播速度對波數的變化。— $R=5$ ，- - - - $R=8$ 。 $u_{*o} = 13.6$ cm/s。

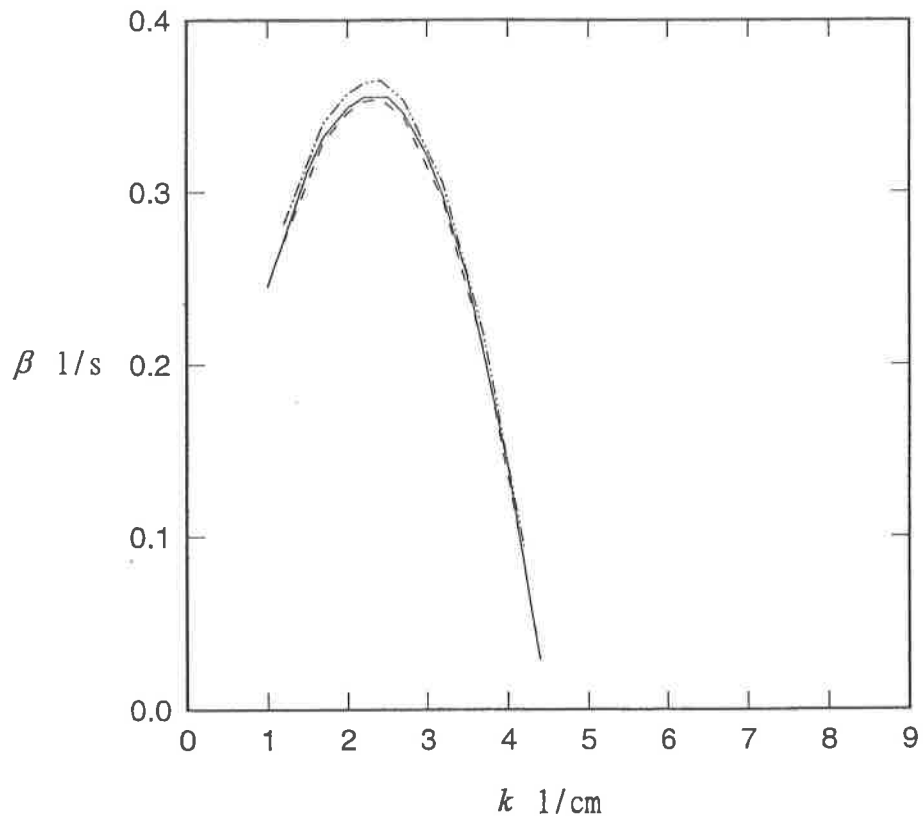


圖 17：不同表面流速下，發展率對波數的變化。— $U_0 = 7.5 \text{ cm/s}$ ，- - - - $U_0 = 0.5u_{*a}$ ，- · - $U_0 = 0.8u_{*a}$ 。 $u_{*a} = 13.6 \text{ cm/s}$ 。

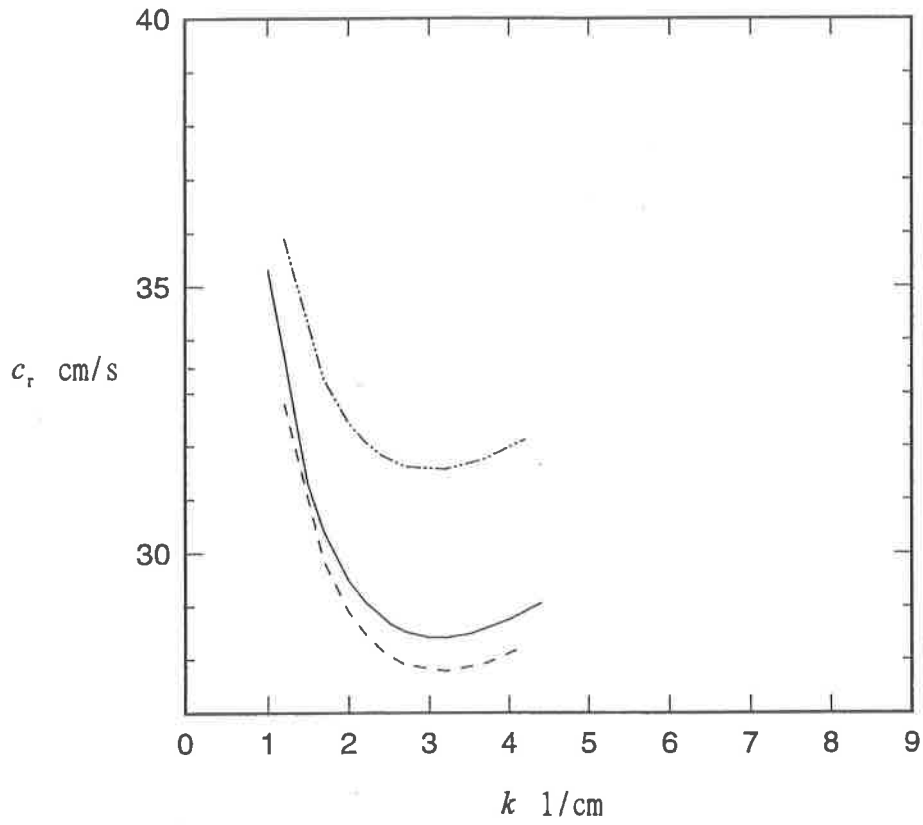


圖 18：不同表面流速下，傳播速度對波數的變化。— $U_0 = 7.5$ cm/s，- - - - $U_0 = 0.5u_{*a}$ ，- · - $U_0 = 0.8u_{*a}$ 。 $u_{*a} = 13.6$ cm/s。

4.3 氣-水偶合效應對不穩定波的影響

Valenzuela(1976)由其對於「氣-水偶合界面」不穩定波之穩定性數值分析結果推論，水體流場對氣-水界面不穩定波的成長具相當程度的影響，因此若僅考慮空氣剪流場之不穩定性為氣-水界面不穩定波的生成與發展機制，而忽略水下流場之影響(如 Miles 1962)，則線性穩定性分析將低估長波的發展率而高估短波的發展率。為進一步了解水體流場對氣-水界面不穩定波成長影響的程度，我們進行以下之數值實驗。

首先，我們將空氣密度 ρ_a 由原先的 0.0012 g/cm^3 降低至 0.0005 g/cm^3 並固定其餘參數進行數值計算，其發展率與波數之關係如圖 19(a) ~ (d)所示。比較圖 19(a) ~ (d)與圖 3(a) ~ (d)可以看出：空氣變稀薄後，不穩定波的發展率顯著降低，短波長(高波數)之不穩定波不易被激發。在四個不同的空氣摩擦速度值下，不穩定波發展率的極大值均因空氣密度的減小而下降了 70%以上。此乃因降低空氣密度亦減小空氣流場作用於水面的正向壓力，所以由空氣流場傳輸至水下流場以形成擾動的動量也隨之減少，不穩定波的發展率也就因而下降。

而隨著空氣密度的降低，不穩定波之傳播速度則些許增加。圖 19(a) ~ (d)中之傳播速度均較圖 3(a) ~ (d)中同波數之傳播速度大，但增加的比例最大僅約 10%。這是因為氣-水界面正向壓隨著空氣密度的降低而減小，界面所受到的壓迫也就較少，所以不穩定波之傳播速度會有所增加。但因決定不穩定波傳播速度之主要因素為水體流場的「平流效應」，因此隨著空氣密度的降低不穩定波傳播速度增加的比例並沒有很大。當我們將空氣密度繼續降低至原來之十分之一甚或更低時，在我們考慮的波數範圍內，所求得的特徵值皆為穩定解($c_i < 0$)，亦即我們無法預測到不穩定波的形成。

我們更進一步完全忽略空氣流場內的運動，僅考慮背景狀態之空氣流場作用於氣-水界面的正應力與剪應力。亦即在穩定性分析中，我們僅考慮水體流場之穩定性動力方程式；忽略界面邊界條件中有關空氣擾動的項，但考慮背景狀態空氣流場產生之正應力與剪應力，我們得到新的在 $z = 0$ 處成立之線性剪應力與正應力邊界條件：

$$\frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} q + \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} + k^2 \phi(0) = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & kC_0^2 q - \frac{dU_w(z)}{dz} \phi(0) + \left(U_0 - \frac{i}{Re_w} 3k \right) \frac{d\phi_w(z)}{dz} + \left(\frac{i}{kRe_w} \right) \frac{d^3 \phi_w(z)}{dz^3} \\ & = \omega \left[\frac{1}{k} \frac{d\phi_w(z)}{dz} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

並以如前之水體流場速度函數與水體流體性質進行穩定性分析。得到的結果顯示在我們考慮的波數範圍內，所有之擾動波皆為穩定。

從以上降低空氣密度及忽略空氣流場的擾動對不穩定波的影響兩項研究的結果，我們可以了解空氣流場內的擾動為形成氣-水界面不穩定波的最主要機制。所以在研究氣-水界面不穩定波發展問題時，忽略空氣流場內之擾動並不能得到任何不穩定的解。

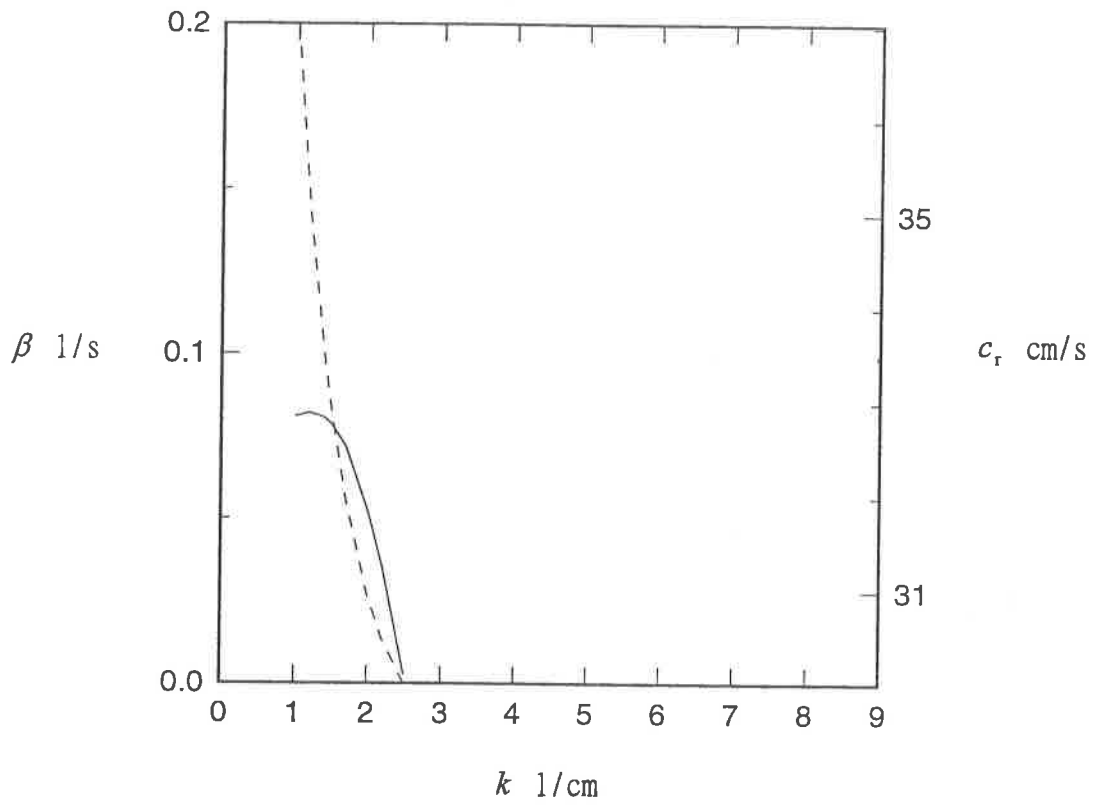


圖 19 (a)：不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $\rho_a = 0.0005 \text{ g/cm}^3$ ， $u_{*a} = 13.6 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 7.5 \text{ cm/s}$ 。

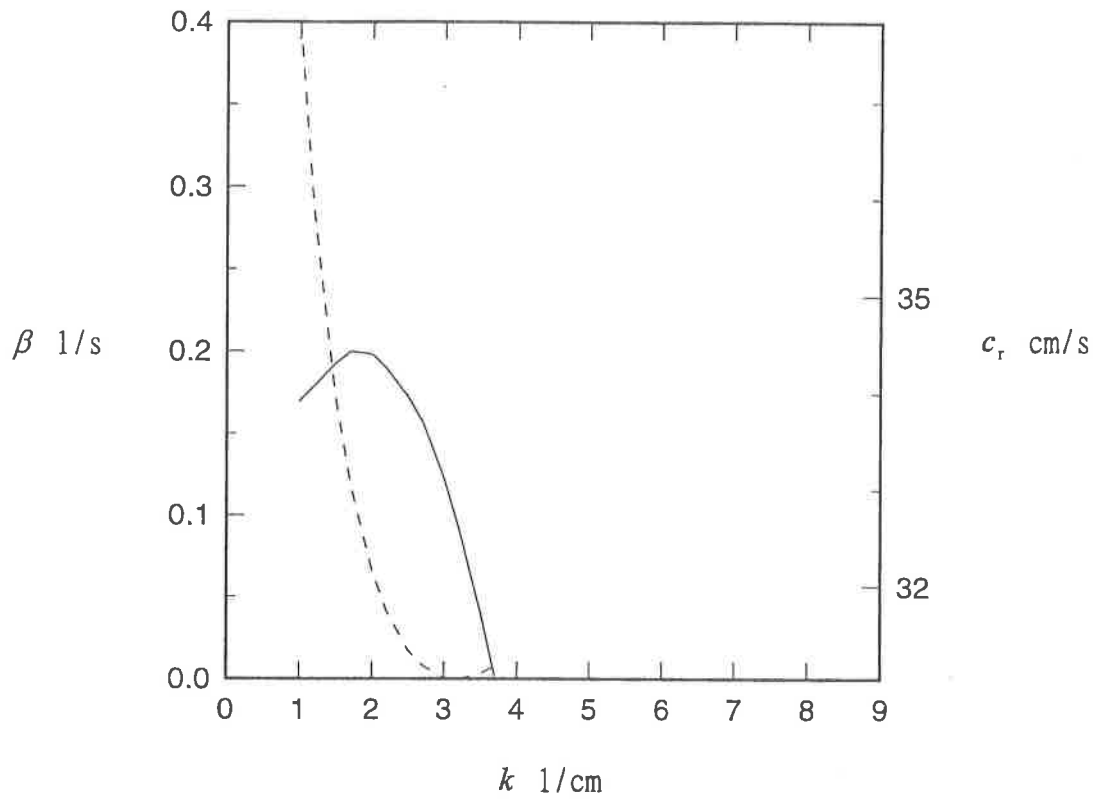


圖 19 (b)：不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $\rho_a = 0.0005 \text{ g/cm}^3$ ， $u_{*a} = 17.0 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 9.6 \text{ cm/s}$ 。

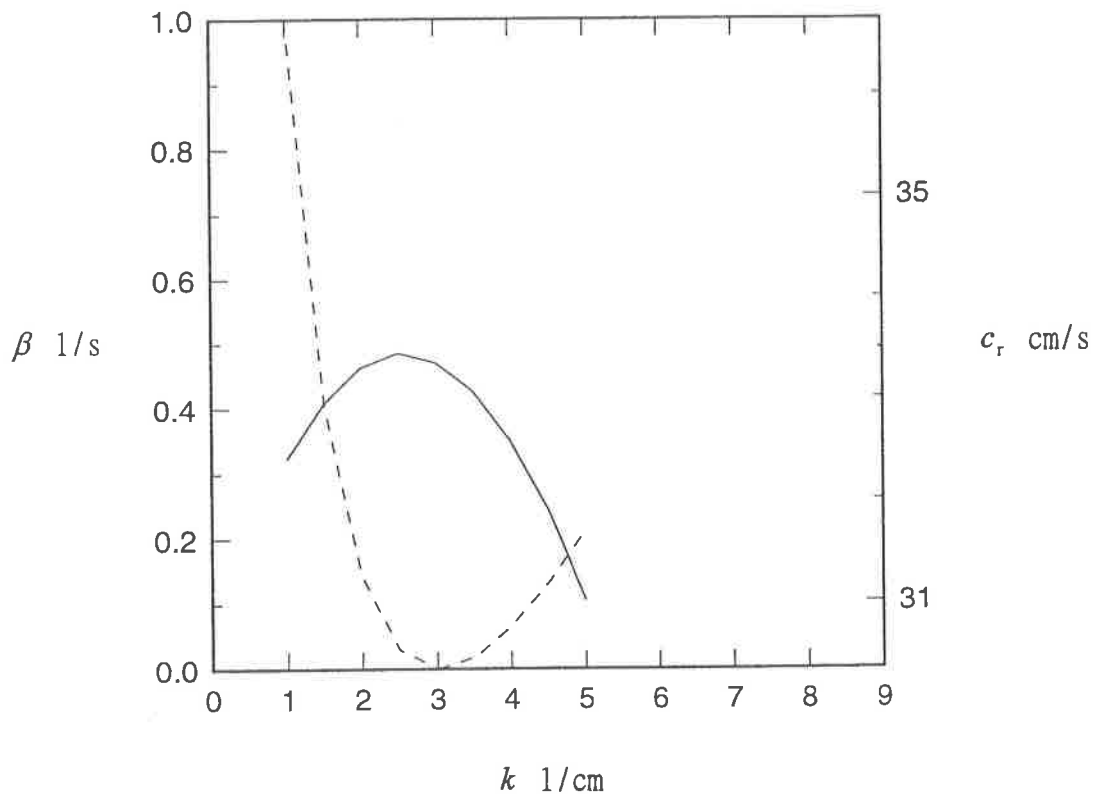


圖 19 (c)：不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $\rho_a = 0.0005 \text{ g/cm}^3$ ， $u_{*a} = 21.4 \text{ cm/s}$ ， $U_0 = 9.8 \text{ cm/s}$ 。

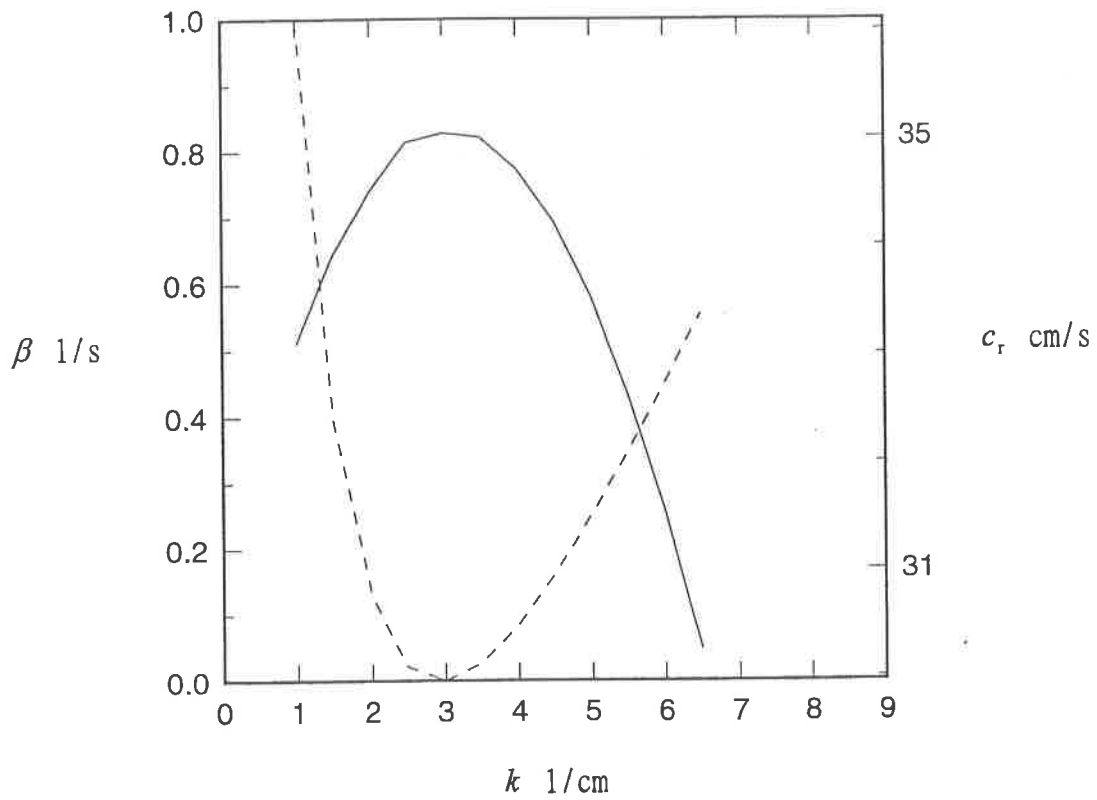


圖 19 (d) : 不穩定波的發展率和傳播速度對波數的變化。— 發展率；- - - 傳播速度。 $\rho_a = 0.0005 \text{ g/cm}^3$, $u_{*a} = 24.8 \text{ cm/s}$, $U_0 = 10.2 \text{ cm/s}$ 。

伍、結論

我們以二階準度有限差分近似氣-水耦合剪流場的穩定性動力方程式及氣-水交界面邊界條件，並使用 *QZ* 法解出特徵聯立方程式之特徵值，求得不穩定波發展率與傳播速度。解得之不穩定波發展率與前人的研究結果比較，並未發現有太大的差異，證明我們使用的數值解析方法對研究不穩定波發展機制的問題是有效的。

我們的研究中改變表面張力、空氣流體與水體流體之動黏滯係數以及有關的流場參數進行解析工作，以了解其對不穩定波發展的影響。

改變表面張力的大小，對不穩定波之發展率與傳播速度有很大的影響。隨著表面張力的降低，會導致不穩定波發展率的增加與傳播速度的降低。擁有傳播速度極小值的不穩定波波數與擁有發展率極大值的不穩定波波數在表面張力降低後均增加，且前者增加的較後者多，此一結果說明了 Kawai(1979)認為擁有傳播速度極小值與擁有發展率極大值的不穩定波幾乎同時發生為一特定表面張力值下巧合的事件。

不管空氣或者水體流體的黏滯性變化對不穩定波的傳播速度都沒有明顯的影響；但對發展率而言，隨著流體黏滯性的降低，發展率都會有所提升，尤其是水下流體黏滯性的降低，不穩定波發展率的提升非常顯著。

改變空氣流場黏性次邊界層高度，不穩定波發展率會有顯著的變化。增加黏性次邊界層的高度，空氣流場流速會增大，而不穩定波發展率亦隨之大幅提升，說明了不穩定波發展率與空氣流場流速間的相依關係。但不穩定波傳播速度並未隨空氣流場黏性次邊界層高度變化而發生太大的變化。

水面流速的改變對不穩定波傳播速度的影響會比改變黏性次邊界層高度的影響顯著：隨著水面流速的增大，傳播速度也隨著增大；這表示水體流場的「平流效應」對不穩定波傳播速度的影響較空氣流場的「慣性效應」大。而水面流速的變化對不穩定波發展率並無太大影響。

隨著空氣流體密度的降低，不穩定波的發展率急遽降低。當空氣密度降低

至原有之十分之一以上甚或完全不考慮空氣流場的擾動時，數值解析的結果並不能求得任何不穩定的解。此一結果說明空氣流場內的擾動為形成氣-水界面不穩定波的主要機制。

因此我們從降低空氣密度及忽略空氣流場內部擾動兩項研究所得的結果得知：在進行界面不穩定波之形成與發展機制研究時，不能僅考慮背景狀態之空氣流場所造成的剪應力及正應力作用，而將空氣流場內的擾動排除在外。

參考資料

- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Demmel, J., Dongarra, J., Croz, J. D., Greenbaum, A., & Sorensen, D. 1991 *Preliminary LAPACK Users' Guide*. NAG.
- Gastel, K. van, Janssen, P. A. E. M. & Komen, G. J. 1985 On phase velocity and growth rate of wind-induced gravity-capillary waves. *J. Fluid Mech.* **161**, 199-216.
- ✓ Jeffreys, H. 1925 On the formation of water waves by wind. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **107**, 189-206.
- ⊙ Kawai, S. 1979 Generation of initial wavelets by instability of a coupled shear flow and their evolution to wind waves. *J. Fluid Mech.* **93**, 661-703.
- Kundu, P. K. 1990 *Fluid Mechanics*. Academic.
- Larson, T. R. & Wright, J. W. 1975 Wind-generated gravity-capillary waves: laboratory measurements of temporal growth rate using microwave backscatter. *J. Fluid Mech.* **70**, 417-436.
- Miles, J. M. 1957 On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.* **3**, 185-204.
- Miles, J. M. 1959 On the generation of surface waves by turbulent shear flws. Part 2. *J. Fluid Mech.* **6**, 568-582.
- Miles J. M. 1959 On the generation of surface waves by shear flows. Part 3. Kelvin-Helmholtz instability. *J. Fluid Mech.* **6**, 583-598.
- Miles, J. M. 1962 On the generation of surface waves by shear flows. Part 4. *J. Fluid Mech.* **13**, 433-448.
- Orszag, S. A. 1971 Accurate solution of the Orr-Sommerferd stability equation. *J. Fluid Mech.* **207**, 689-703.
- Phillips, O. M. 1969 *The Dynamics of the Upper Ocean*. Cambridge University Press.
- Phillips, O. M. & Hasselmann K. 1986 *Wave Dynamics and Radio Probing of the Ocean Surface*. Plenum.

Shemdin, O. H. 1972 Wind-generated currents and phase speed of wind waves. *J. Phys. Ocean.* **2**, 411-419.

Valenzuela, G. R. 1976 The growth of gravity-capillary waves in a coupled shear flow. *J. Fluid Mech.* **76**, 229-250.

Wheless, G. H. & Csanady G. T. 1993 Instability waves on the air-sea interface. *J. Fluid Mech.* **248**, 363-381.

White, F. M. 1991 *Vicous Fluid Flow*, 2nd ed. McGraw-Hill.

Wu, J. 1975 Wind-induced drift currents. *J. Fluid Mech.* **68**, 49-70.

附錄一、流場穩定性動力方程式之推導

此處以水下流場為例介紹流場穩定性動力方程式細節部份的推導過程。

水下受擾動流場 x 與 z 方向之動量方程式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial t} + (U_w(z) + u'_w(x, z, t)) \frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial x} + w'_w(x, z, t) \left(\frac{\partial U_w(z)}{\partial z} + \frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial z} \right) \\ &= \frac{-1}{\rho_w} \left(\frac{\partial p_w(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial p'_w(x, z, t)}{\partial x} \right) + \nu_w \left(\frac{\partial^2 u'_w(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_w(z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u'_w(x, z, t)}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial t} + (U_w(z) + u'_w(x, z, t)) \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial x} + w'_w(x, z, t) \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial z} \\ &= \frac{-1}{\rho_w} \left(\frac{\partial p_w(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial p'_w(x, z, t)}{\partial z} \right) + \nu_w \left(\frac{\partial^2 w'_w(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'_w(x, z, t)}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

而背景狀態流場亦滿足動量方程式：

$$0 = \frac{-1}{\rho_w} \frac{\partial p_w(x, z, t)}{\partial x} + \nu_w \left(\frac{\partial^2 U_w(z)}{\partial z^2} \right)$$

$$0 = \frac{-1}{\rho_w} \frac{\partial p_w(x, z, t)}{\partial z}$$

將背景狀態流場之動量方程式從受擾動流場之動量方程式中扣除，忽略非線性項後可以得到：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial t} + U_w(z) \frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial x} + w'_w(x, z, t) \frac{\partial U_w(z)}{\partial z} \\ &= \frac{-1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w(x, z, t)}{\partial x} + \nu_w \left(\frac{\partial^2 u'_w(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_w(x, z, t)}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial t} + U_w(z) \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial x} \\ &= \frac{-1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w(x, z, t)}{\partial z} + \nu_w \left(\frac{\partial^2 w'_w(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'_w(x, z, t)}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

此即擾動流場的 x 方向與 z 方向的動量方程式。

流場滿足連續方程式。不可壓縮的擾動狀態流場連續方程式如下，

$$\frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial z} = 0$$

以擾動狀態流函數表示之擾動狀態速度項代入連續方程式中，將出現 $0=0$ 之恆等式。所以引入流函數後，連續方程式就自動滿足。

把以流函數表示的速度項代入動量方程式中得到：

$$\begin{aligned} & \left[-ikc \frac{d\phi_w(z)}{dz} + ikU_w(z) \frac{d\phi_w(z)}{dz} - ik \frac{dU_w(z)}{dz} \phi_w(z) \right] \exp\{ik(x - ct)\} \\ &= \frac{-1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w(x, z, t)}{\partial x} + \nu_w \left(-k^2 \frac{d\phi_w(z)}{dz} + \frac{d^3\phi_w(z)}{dz^3} \right) \exp\{ik(x - ct)\} \\ & \left[-k^2 c \phi_w(z) + k^2 U_w(z) \phi_w(z) \right] \exp\{ik(x - ct)\} \\ &= \frac{-1}{\rho_w} \frac{\partial p'_w(x, z, t)}{\partial z} + \nu_w \left(ik^3 \phi_w(z) - ik \frac{d^3\phi_w(z)}{dz^3} \right) \exp\{ik(x - ct)\} \end{aligned}$$

上面兩式交叉對 x 與 z 微分消去壓力項，以特徵速度與特徵長度將方程式無因次化後可以得到

$$\begin{aligned} & k(U_w(z) - c) \frac{d^2\phi_w(z)}{dz^2} + \left[k^3 c - k^3 U_w(z) - k \frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} \right] \phi_w(z) \\ & + \frac{i}{Re_w} \left[\frac{d^4\phi_w(z)}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2\phi_w(z)}{dz^2} + k^4 \phi_w(z) \right] = 0 \end{aligned}$$

附錄二、流體應力關係式

考慮兩不相溶(或難相溶)的流體，兩者間存在著一共同交界面(interface)。令 $F(x, y, z, t)$ 表示此一交界面。另外令 $R_1(t)$ 表示存在一流體的區域， $R_2(t)$ 表示存在另一流體的區域。根據流體的應力張量表示式，作用於流體的應力張量為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

若 (x, y, z) 為交界面上的一點，則此交界面在點 (x, y, z) 上的單位法向量 (l, m, n) 可表示成 $(l, m, n) = \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \right)$ 。

令 R_1, R_2 表示曲率半徑，所以在交界面處可得到如下之應力平衡關係式：

$$\sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})l$$

$$\sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})m$$

$$\sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})n$$

T 表示表面張力係數。但是對不可壓縮流體而言，應力張量可表示為(本附錄中下標符號 x, y 及 z 分別表示對 x, y 及 z 之偏微分)：

$$\begin{bmatrix} P_i - 2\mu u_x & -\mu(u_y + v_x) & -\mu(u_z + w_x) \\ -\mu(v_x + u_y) & P_i - 2\mu v_y & -\mu(v_z + w_y) \\ -\mu(u_z + w_x) & -\mu(v_z + w_y) & P_i - 2\mu w_z \end{bmatrix}$$

令交界面對平均水平面之高度變化為 $z = \eta(x, y, t)$ ，則交界面可以表示成 $F(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z$ ，因此 $F_x = \partial\eta(x, y, t)/\partial x$ ， $F_y = \partial\eta(x, y, t)/\partial y$ ， $F_z = -1$ 。所以單位法向量為：

$$(l, m, n) = \left(\frac{\eta_x}{\sqrt{1+\eta_x^2+\eta_y^2}}, \frac{\eta_y}{\sqrt{1+\eta_x^2+\eta_y^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+\eta_x^2+\eta_y^2}} \right)$$

將上述應力表示式和法向量表示式代入應力和表面張力的平衡式中，化簡後得到：

$$P_i \eta_x - \{2[\mu u_x] \eta_x + \mu[u_y + v_x] \eta_y - \mu[u_z + w_x]\} = T(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \eta_x$$

$$P_i \eta_y - \{\mu[v_x + u_y] \eta_x + 2[\mu v_y] \eta_y - \mu[v_z + w_y]\} = T(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \eta_y$$

$$P_i + \{\mu[u_z + w_x] \eta_x + \mu[v_z + w_y] \eta_y - 2[\mu w_z]\} = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

若取二維流場($x-z$ 座標)的話，上式變成，

$$P_i \eta_x - [2\mu u_x \eta_x - \mu(u_z + w_x)] = T(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \eta_x$$

$$P_i + [\mu(u_z + w_x) \eta_x - 2\mu w_z] = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

再分別將上面二式改寫成在此一界面的法線和切線上的分量，

$$\text{法線上分量： } P_i - \frac{2\mu u_x \eta_x^2 - 2\mu(u_z + w_x) \eta_x + 2\mu w_z}{1 + \eta_x^2} = T(R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

$$\text{切線上分量： } 2\mu \eta_x (u_x - w_z) + \mu(w_x + u_z)(\eta_x^2 - 1) = 0$$

把二維座標中 $R_1^{-1} + R_2^{-1} = \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}}$ ，將其代入上述二式後，忽略非線性項，得

到：

$$P_i - 2\mu w_z = T \eta_{xx}$$

$$\mu(u_z + w_x) = 0$$

附錄三、界面邊界條件

此處我們介紹如何將 $z = \eta$ 處成立之界面邊界條件推導至在 $z = 0$ 處成立之線性方程式。

(1) 空氣與水交界面的運動邊界條件(kinematic condition)

對於空氣與水體界面而言，不管空氣與水體如何的運動，必需符合沒有任何物質的傳輸此一條件，即空氣與水都無法穿透此一界面。以方程式表示即為：

$$\frac{DF(x, z, t)}{Dt} = 0$$

上式在 $z = \eta$ 處成立。將上式展開後可以得到：

$$\frac{-\partial\eta(x, t)}{\partial t} + (U_w(z) + u'_w(x, z, t)) \frac{-\partial\eta(x, t)}{\partial x} + w'_w(x, z, t) = 0$$

以泰勒級數將上式對 $z = 0$ 展開可得：

$$\begin{aligned} & \frac{-\partial\eta(x, t)}{\partial t} + \left(U_w(z) \Big|_{z=0} + \frac{dU_w(z)}{dz} \Big|_{z=0} \eta(x, t) + \dots \right) \frac{-\partial\eta(x, t)}{\partial x} \\ & + \left(u'_w(x, z, t) \Big|_{z=0} + \frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} \eta(x, t) + \dots \right) \frac{-\partial\eta(x, t)}{\partial x} \\ & + \left(w'_w(x, z, t) \Big|_{z=0} + \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} \eta(x, t) + \dots \right) = 0 \end{aligned}$$

忽略上式中之非線性項，並以流函數表示上式中之擾動速度項的話可以得到在 $z = 0$ 處成立的線性方程式：

$$cq - U_0q - \phi(0) = 0$$

(2) 在空氣與水交界面處的速度需連續

x 方向與 z 方向上之空氣流場與水體流場速度在 $z = \eta$ 處需連續：

$$u_a(x, z, t) = u_w(x, z, t)$$

$$w_a(x, z, t) = w_w(x, z, t)$$

將上述二式以泰勒級數對 $z = 0$ 展開，扣除背景流場所滿足的界面邊界條件部份： $U_a(0) = U_w(0)$ ，忽略式中非線性項，以流函數表示方程式中之擾動速度項則可以得到在 $z = 0$ 處成立的線性方程式：

$$\frac{d\phi_a(z)}{dz} + \frac{dU_a(z)}{dz} q = \frac{d\phi_w(z)}{dz} + \frac{dU_w(z)}{dz} q$$

$$\phi_a(0) = \phi_w(0)$$

(3) 剪應力在空氣與水交界面處需連續

在 $z = \eta$ 處，此條件之數學方程式可寫成，

$$2\mu_a \left[\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial u_a(x, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial w_a(x, z, t)}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial u_a(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w_a(x, z, t)}{\partial x} \right) \right]$$

$$= 2\mu_w \left[\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial u_w(x, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial w_w(x, z, t)}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial u_w(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w_w(x, z, t)}{\partial x} \right) \right]$$

將上式中速度項分解成背景狀態和擾動狀態代入原式；背景狀態流場之剪應力在界面處也需連續：

$$\mu_a \frac{dU_a(z)}{dz} \Big|_{z=\eta} = \mu_w \frac{dU_w(z)}{dz} \Big|_{z=\eta}$$

將背景狀態流場滿足之條件從原式扣除，以泰勒級數將其對 $z = 0$ 展開後忽略非線性項，以流函數表示方程式中之擾動速度，則可得到在 $z = 0$ 處成立的線性方程式：

$$\frac{\mu_a}{\mu_w} \left[\frac{d^2 U_a(z)}{dz^2} q + \frac{d^2 \phi_a(z)}{dz^2} + k^2 \phi(0) \right] = \frac{d^2 U_w(z)}{dz^2} q + \frac{d^2 \phi_w(z)}{dz^2} + k^2 \phi(0)$$

(4) 正應力在空氣與水交界面處需與表面張力平衡

在 $z = \eta$ 處，此條件之方程式為：

$$\begin{aligned}
& P_{a'}(x, z, t) - 2\mu_a \frac{\frac{\partial u_a(x, z, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_a(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w_a(x, z, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + \underbrace{w_a(x, z, t)}_{\frac{\partial w_a}{\partial z}}}{1 + \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2} \\
& = P_{w'}(x, z, t) - 2\mu_w \frac{\frac{\partial u_w(x, z, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_w(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w_w(x, z, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + \underbrace{w_w(x, z, t)}_{\frac{\partial w_w}{\partial z}}}{1 + \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2} \\
& \quad + T \frac{\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$P_{a'}(x, z, t) = P_{ba'}(x, z, t) + P'_{a'}$ 及 $P_{w'}(x, z, t) = P_{bw'}(x, z, t) + P'_{w'}$ 分別為空氣流場與水下流場之總壓力。將上述方程式中之壓力及速度項分解成背景狀態和擾動狀態，而背景狀態流場之壓力需滿足： $P_{ba'}(x, z, t) = P_{bw'}(x, z, t)$ 。將上述方程式扣除背景狀態所滿足之條件後得到：

$$\begin{aligned}
& P'_{a'}(x, z, t) - 2\mu_a \frac{\frac{\partial u'_a(x, z, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u'_a(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w'_a(x, z, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + w'_a(x, z, t)}{1 + \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2} \\
& = P'_{w'}(x, z, t) - 2\mu_w \frac{\frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u'_w(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w'_w(x, z, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + w'_w(x, z, t)}{1 + \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2} \\
& \quad + T \frac{\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$P'_{a'}$ 與 $P'_{w'}$ 分別可表示成：

$$P'_{a'}(x, z, t) = p'_a(x, z, t) - \rho_a g \eta(x, t) = p_a(z) \exp\{ik(x - ct)\} - \rho_a g \eta(x, t)$$

$$P'_{w'}(x, z, t) = p'_w(x, z, t) - \rho_w g \eta(x, t) = p_w(z) \exp\{ik(x - ct)\} - \rho_w g \eta(x, t)$$

$p_a(z)$ 與 $p_w(z)$ 可分別從空氣與水體流場的 x 方向擾動狀態動量方程式求得，

$$\frac{p_a(z)}{\rho_a} = -(U_a(z) - c) \frac{d\phi_a(z)}{dz} + \frac{dU_a(z)}{dz} \phi_a(z) - ik^{-1} \nu_a \left(\frac{d^3 \phi_a(z)}{dz^3} - k^2 \frac{d\phi_a(z)}{dz} \right)$$

$$\frac{p_w(z)}{\rho_w} = -(U_w(z) - c) \frac{d\phi_w(z)}{dz} + \frac{dU_w(z)}{dz} \phi_w(z) - ik^{-1} \nu_w \left(\frac{d^3 \phi_w(z)}{dz^3} - k^2 \frac{d\phi_w(z)}{dz} \right)$$

將 $P'_{at}(x, z, t)$ 與 $P'_{wt}(x, z, t)$ 之表示式代入正應力的邊界條件方程式中，以泰勒級數將方程式對 $z = 0$ 展開並忽略非線性項，以流函數表示方程式中之擾動速度，則此一條件在 $z = 0$ 之線性方程式如下所示：

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_a}{\rho_w} \left[(U_0 - c) \frac{d\phi_a(z)}{dz} - \frac{dU_a(z)}{dz} \phi_a(z) + ik^{-1} \nu_a \left(\frac{d^3 \phi_a(z)}{dz^3} - 3k^2 \frac{d\phi_a(z)}{dz} \right) + gq \right] \\ & = (U_0 - c) \frac{d\phi_w(z)}{dz} - \frac{dU_w(z)}{dz} \phi_w(z) + ik^{-1} \nu_w \left(\frac{d^3 \phi_w(z)}{dz^3} - 3k^2 \frac{d\phi_w(z)}{dz} \right) + gq \end{aligned}$$

以特徵長度及特徵速度將上述四個線性界面邊界條件無因次化，可得到如

2.2節中之無因次線性界面邊界條件。

附錄四、紊流邊界層理論

(A) 內部區域

考慮二維流體 (x 軸與 z 軸) 在邊界層內部 (inner layer) 的流場狀況。在此一區域的流速只與邊界處的參數有關，而與自由流速 (U_∞) 或流場高度 (δ) 無關。因此，在一平滑邊界處之流速應具有下列之函數關係：

$$U = U(\rho, \tau_0, \nu, z)$$

τ_0 為邊界處的剪應力。

在上述關係式中。只有密度和剪應力有質量的因次，因此這兩個參數必需成對的出現在無因次化的過程中。而我們可以看出這兩個參數的比值 (τ_0 / ρ) 的因次為 L^2/s^2 ，所以定義摩擦速度為：

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

因此上述邊界區域內的流速關係式可寫成：

$$U = U(u_*, \nu, z)$$

將上述速度關係根據 Buckingham's Pi Theorem 推導成一無因次關係式，則必存在著兩個無因次的參數， U/u_* 與 zu_*/ν 。所以可以得到一個無因次的流速關係式，

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) = f(z_+)$$

上述關係式也叫做 Law of the wall，敘述靠近一平滑邊界處的流場情況。在邊界層內最靠近邊界 (wall) 的區域，受黏滯性影響很大，也因此被稱之為黏性次邊界層 (viscous sublayer)。

因為黏性次邊界層相當的薄，所以在此區域內應力被視為常數 (τ_0)，因此由剪應力公式：

$$\mu \frac{dU}{dz} = \tau_0$$

可知速度分佈是呈現線性的。利用上式對高度積分，得到 $U = \frac{z\tau_0}{\mu}$ ，亦即：

$$\frac{U}{u_*} = z_+$$

實驗證實黏性次邊界層存在並延伸至 $z_+ \approx 5$ ，即黏性次邊界層厚度：

$$z \approx 5 \frac{\nu}{u_*}$$

(B) 外部區域

對於外部區域(outer layer)部分一般認為與不受邊界存在而影響的流場相似。且由於 Reynolds stresses 的影響，產生一拉力作用於流體之上。在此一區域的流速關係式為：

$$\frac{U - U_\infty}{u_*} = F\left(\frac{z}{\delta}\right) = F(\xi)$$

上式亦稱作為 velocity defect law。

(C) 重疊區域

由(A)和(B)的結果可看出內部和外部區域的流速分別由不同的函數控制著。但在內部區域的頂端和外部區域的底部卻是可以借由令 $z_+ \rightarrow \infty$ 和 $\xi \rightarrow 0$ 而重疊在一起而同時成立(overlap layer)。

由內部區域流速的關係式中可以推得速度的梯度為：

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dz_+}$$

同時，從外部區域的流速關係式也可推得速度梯度為：

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dF}{d\xi}$$

把上述二式同乘以 z/u_* ，得到，

$$\xi \frac{dF}{d\xi} = z_+ \frac{df}{dz_+} = \frac{1}{\kappa}$$

κ 為卡曼常數。對上式積分分別可以得到，

$$f(z_+) = \frac{1}{\kappa} \ln z_+ + A$$

$$F(\xi) = \frac{1}{\kappa} \ln \xi + B$$

實驗結果證實若邊界為一平滑平板，常數 A 和 B 分別等於 5.0 和 -1.0，即

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z u_*}{\nu} + 5.0$$

$$\frac{U - U_\infty}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{\delta} - 1.0$$

這一個區域因此也被簡稱為對數層 (logarithmic layer)。前面曾提及此一關係成立的條件為足夠大的 z_+ ，以及足夠小的 ξ 才可以。一般來說此一重疊區域約存在於 $30 \leq z_+ \leq 300$ 之處。而此一區域的上限與流場雷諾數有很大的關係。雷諾數越大的流場，擁有較大的重疊區域。

附錄五、特徵方程組矩陣

特徵方程組 $[A]\{x\} = \omega[B]\{x\}$ 之矩陣 $[A]$ 與 $[B]$ 分別如下所示。其中矩陣 $[A]$ 之元素 $C = 2\Delta z(dU_w(z)/dz - dU_a(z)/dz)|_{z=0}$ ，其餘皆同 3.1 中之符號及定義。

$$[A] =$$

$$\begin{bmatrix}
 A_1^{w0} - A^{w2} & A_1^{w1} & A^{w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_2^{w1} & A_2^{w0} & A_2^{w1} & A^{w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A^{w2} & A_3^{w1} & A_3^{w0} & A_3^{w1} & A^{w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & A^{w2} & A_M^{w1} & A_M^{w0} & A_M^{w1} & A^{w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & U_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_1 & 1 & 0 & C_2 & 0 & -r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -D_1 & -D_2 & D_3 & D_2 & D_1 & D & -E_1 & -E_2 & E_2 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{a0} & 0 & 0 & 0 & A^{a2} & A_1^{a1} & A_1^{a1} & A^{a2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2^{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{a2} & A_2^{a0} & A_2^{a1} & A^{a2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{a2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_3^{a1} & A_3^{a0} & A_3^{a1} & A^{a2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{a2} & A_4^{a1} & A_4^{a0} & A_4^{a1} & A^{a2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{a2} & A_{N-2}^{a1} & A_{N-2}^{a0} & A_{N-2}^{a1} & A^{a2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{a2} & A_{N-1}^{a1} & A_{N-1}^{a0} & A_{N-1}^{a1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{a2} & A_N^{a1} & A_N^{a0} - A^{a2}
 \end{bmatrix}$$

附錄六、不穩定波發展對無因次參數之變化

在進行有關流體動力的研究時，無因次的方程式及參數可方便我們解析一般流場的狀況，而不局限於一些特定的情形。本研究中亦使用無因次的方程式來解析氣-水偶合剪流場的穩定性，但為與前人研究的結果作比較，故在研究中選擇以特定之流體性質與流場參數來進行不穩定波發展之解析，及以有因次之結果進行討論。

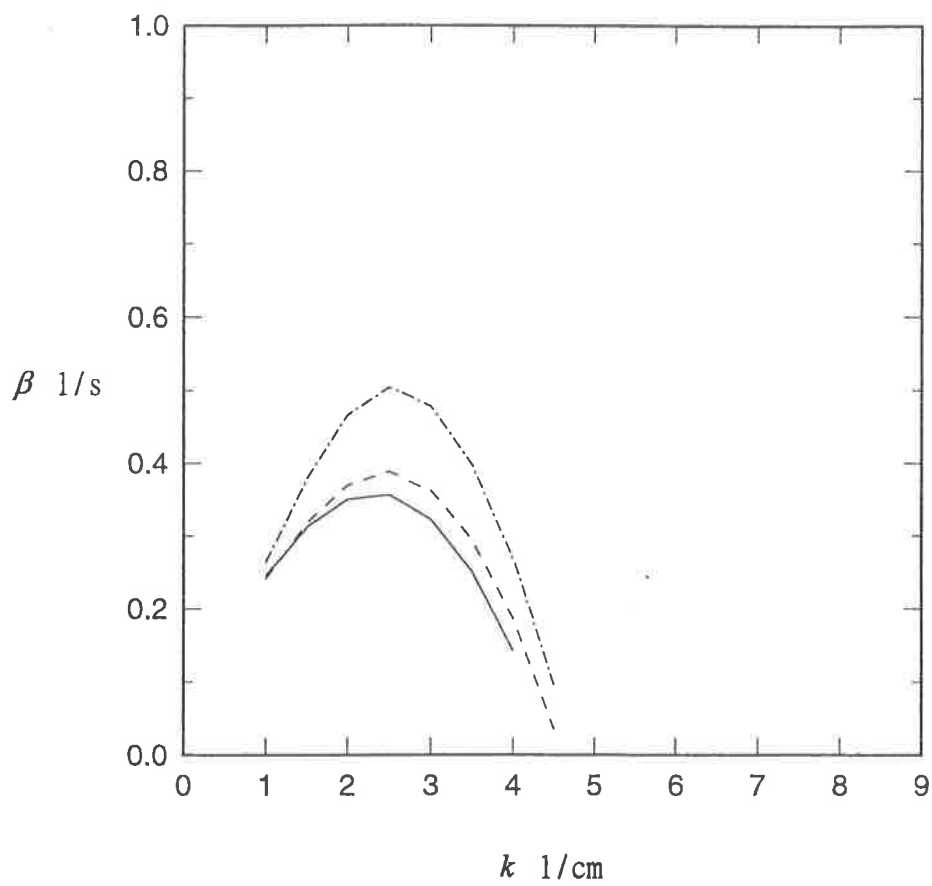
在本研究中所使用的無因次參數有空氣與水體流場雷諾數(Re_a, Re_w)、福勞數(Fr)與偉伯數(We)。在前文中，我們已探討過各別流體性質與流場參數下，不穩定波發展的變化。因此，此處我們將藉由無因次參數來探討流體性質與流場參數的改變對不穩定波發展的影響。

在前文中，由於我們使用 $1/k$ 作為特徵長度，故無因次參數將隨波數變化而改變。此處我們改用水體流場邊界層深度之半

$$L = (\nu_w T)^{1/2}$$

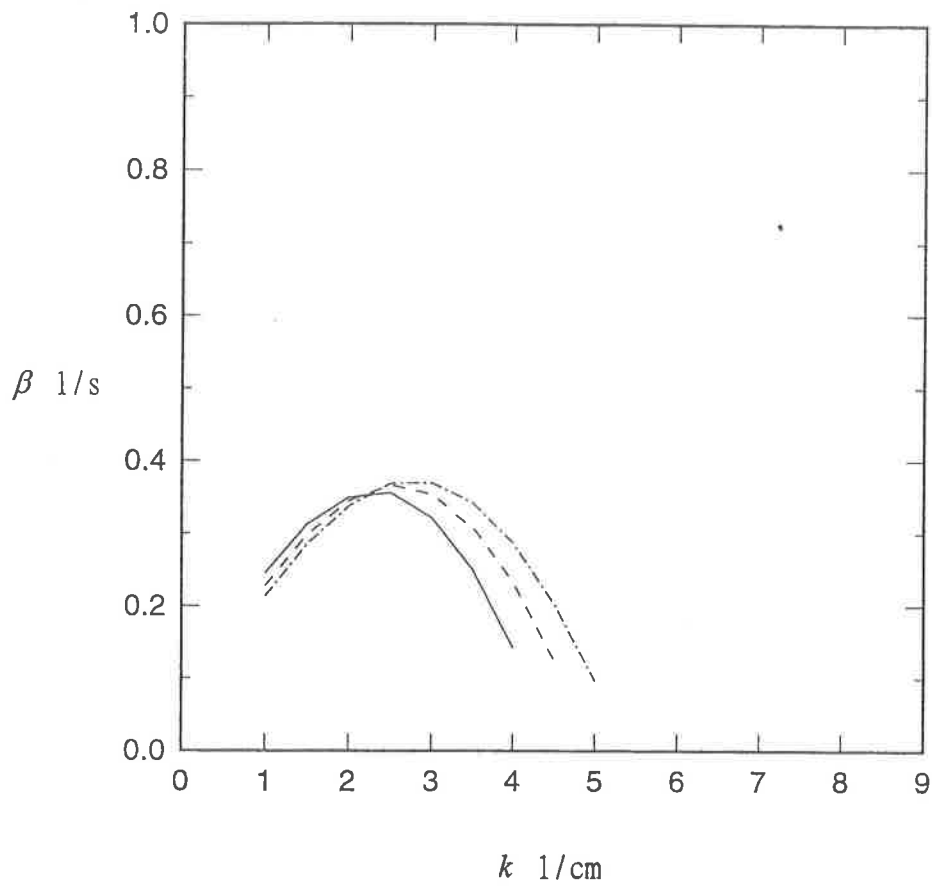
為特徵長度以使無因次參數不隨波數改變，式中 T 為發展時間(Wheless & Csanady, 1993)。所以在此處空氣流場雷諾數 $Re_a = u_{*a} L / \nu_a$ ，水體流場雷諾數 $Re_w = u_{*a} L / \nu_w$ ，福勞數 $Fr = u_{*a}^2 / gL$ ，偉伯數 $We = (\rho_w - \rho_a) L u_{*a}^2 / T$ 。

如同 Wheless & Csanady(1993)的選擇一樣，在此處我們選取發展時間 $T = 5$ s。且以空氣摩擦速度 $u_{*a} = 13.6$ cm/s 及水面流速 $U_0 = 7.5$ cm/s 進行解析。附圖 1、附圖 2 與附圖 3 分別為改變 Re_a 、 Re_w 及 We 所得之結果。由附圖 1 與附圖 2 中可看出隨 Re_a 與 Re_w 的增加，不穩定波發展率亦增加。即空氣摩擦速度的增加或流體黏滯性的降低會導致不穩定波發展率的增加。而附圖 3 的結果顯示不穩定波發展率隨偉伯數增加而增加，亦即表面張力的降低會導致不穩定波發展率的增加。這些結果與前文中以各別流體性質與流場參數解析不穩定波發展所得的結論是吻合的。



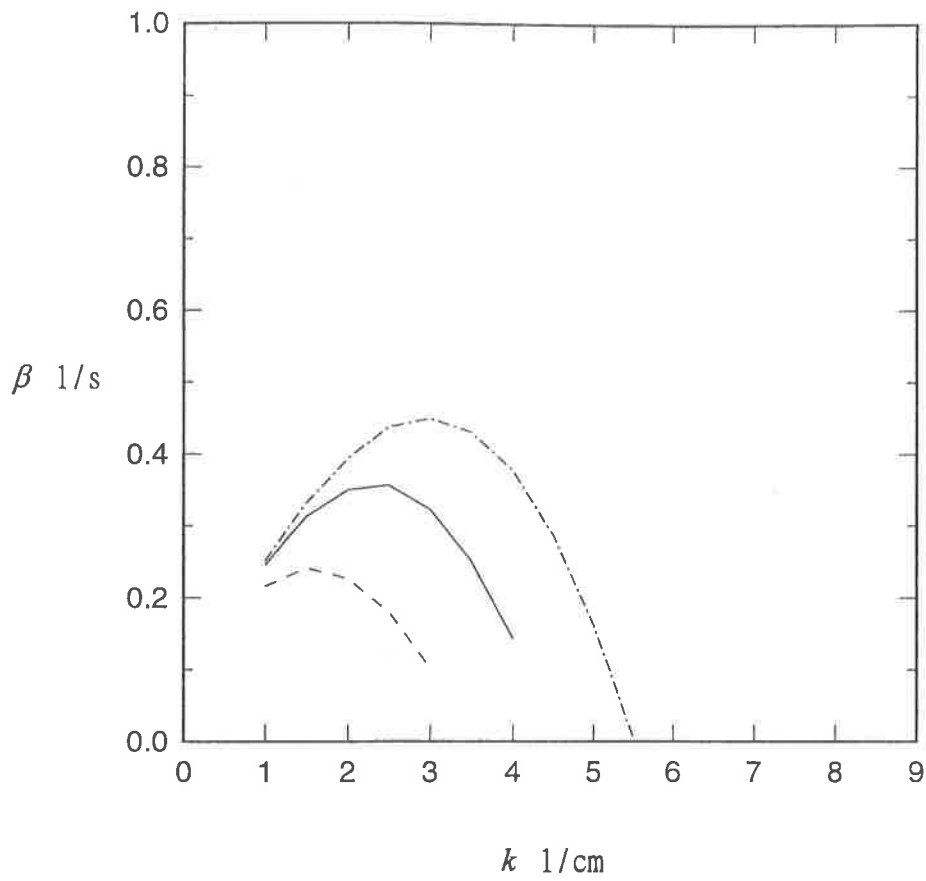
附圖 1：不同空氣流場雷諾數下，發展率對波數的變化。— $Re_a = 20.27$

· - - - - $Re_a = 30$, - · - $Re_a = 60$ 。



附圖 2：不同水體流場雷諾數下，發展率對波數的變化。— $Re_w = 304$

， - - - - $Re_w = 400$ ， - · - $Re_w = 500$ 。



附圖 3：不同偉伯數下，發展率對波數的變化。— $We = 0.55$ ，-----
 $We = 0.1$ ，- · - $We = 2$ 。