

GRENZSCHICHTEN IN FLÜSSIGKEITEN
MIT KLEINER REIBUNG

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT GEORGIA AUGUSTA
ZU GÖTTINGEN

VORGELEGT VON

H. BLASIUS

AUS BERLIN

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Juni 1907.

Referent: Herr Professor Dr. PRANDTL.

Einleitung.

1. Die Wirbel, die in strömendem Wasser hinter festen Körpern entstehen, werden weder durch die Lösung der Potentialtheorie, noch durch die Helmholtzschen Strahlen richtig dargestellt: Der Potentialtheorie ist es unmöglich, die Bedingung zu erfüllen, daß das Wasser an den benetzten Körpern haftet; und ihre Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen stimmen nicht mit der Beobachtung überein, daß sich an einer bestimmten Stelle die Strömung vom Körper ablöst und eine stark wirbelnde Grenzschicht in die freie Strömung hinausendet. Die Helmholtzsche Theorie der Strahlen versucht diesen letzteren Effekt in der Weise nachzubilden, daß sie längs einer Stromkurve zwei Potentialströmungen, Strahl und ruhendes Wasser, nicht-analytisch aneinandersetzt. Die Zulässigkeit dieses Verfahrens wird dadurch begründet, daß beim Drucke Null, der an der genannten Stromkurve herrschen soll, der Zusammenhang der Flüssigkeit und damit der Einfluß benachbarter Teile aufgehoben ist. In Wirklichkeit aber ist an diesen Grenzen der Druck durchaus nicht Null, sondern kann sogar beliebig geändert werden. Überdies erfüllt die Helmholtzsche Theorie mit ihren Potentialströmungen nicht die Bedingung des Haftens und erklärt nicht die *Entstehung* der Wirbel, denn bei allen diesen Problemen ist nach dem Wirbelsatz die Berücksichtigung der Reibung prinzipiell erforderlich.

Wenn wir z. B. einen Zylinder in fließendes Wasser tauchen, so wird vor ihm die Strömung qualitativ dem bekannten Potential entsprechen: an der Zylinderwand dagegen bildet sich, da das Wasser am Zylinder haftet, eine Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeit vom Werte Null an der Wand zu dem durch die Potentialströmung gegebenen Wert ansteigt. In dieser Grenzschicht spielt wegen des starken Geschwindigkeitsgefälles die Reibung eine wesentliche Rolle, von ihr hängt es auch ab, wie weit sich der die Geschwindigkeit vermindernde Einfluß der Wand, der ja durch Schubkräfte vermittelt

werden muß, in die Flüssigkeit hineinestreckt, d. h. wie dick die Grenzschicht wird. Daß sich an einer gewissen Stelle die äußere Strömung ablöst, und das an der Grenze in starke Rotation versetzte Wasser ins Freie hinausführt, muß aus den Vorgängen in der Grenzschicht zu erklären sein.

Die exakte Behandlung dieser Frage ist zuerst von Prandtl¹⁾ in Angriff genommen. Seine Erklärung der Ablösung ist unten (3) wiedergegeben. Da die Integration der hydrodynamischen Gleichungen mit Reibung ein zu schwieriges Problem ist, so ist in der genannten Arbeit die innere Reibung als klein vorausgesetzt, während die Bedingung des Haftens an der Grenzfläche beibehalten wird. In der vorliegenden Arbeit werden im Anschluß an die genannte Abhandlung auf Grund der so vereinfachten hydrodynamischen Gleichungen einige Probleme durchgerechnet, die sich auf die Ausbildung der Grenzschichten an festen Körpern und die Entstehung der Ablösung von Strahlen aus diesen Grenzschichten heraus beziehen. Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Prandtl.

2. Wir nehmen also mit Prandtl (l. c.) die Konstante der inneren Reibung als klein an; die Grenzschichten werden dann entsprechend dünn, die Flüssigkeit behält ihre normale (Potential) Geschwindigkeit bis nahe an die Grenzfläche heran bei. Trotzdem muß natürlich der Abfall der Geschwindigkeit bis zum Werte Null und, wie die Rechnung zeigen wird, die in dieser Grenzschicht stattfindende Ablösung bestehen bleiben, d. h. wir

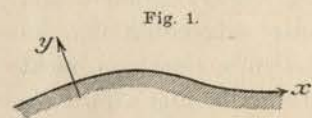


Fig. 1.

kommen auch bei beliebig kleiner Reibung nicht vollständig auf die Potentialströmung zurück, sondern die Ablösung und die durch sie bewirkte Umgestaltung der Strömung hinter dem Körper bleibt auch bei beliebig

kleiner Reibung bestehen. — Wir beschränken uns auf zweidimensionale Probleme und verwenden Koordinaten, die parallel und senkrecht zur Grenze verlaufen (Bogenlänge und normaler Abstand). Trotz der Krümmung derselben wird sich der Typus der Grundgleichungen in dem kleinen Raum der Grenzschicht nicht merklich von dem für rechtwinklige Koordinaten entfernen. Die Größenordnung der Dicke der Grenzschicht sei ε , dann wird, da die Geschwindigkeit u auf dieser Strecke von Null zu normalen Werten ansteigen soll: $\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$,

u , $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ haben normalen Wert, aus der Kontinuitätsgleichung

folgt dann $\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$, und durch Integration $v \sim \varepsilon$. Die Glieder in den Grundgleichungen erhalten hiernach folgende Größenordnung¹⁾:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 \cdot 1 & \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} & 1 & 1 & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{array} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \begin{array}{ccccccc} \varepsilon & 1 \cdot \varepsilon & \varepsilon \cdot 1 & & \varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

Die Reibung gewinnt Einfluß, wenn wir $k \sim \varepsilon^2$ setzen; dies liefert uns den Zusammenhang der Dicke der Grenzschicht mit der Kleinheit der Reibungskonstante. In der ersten Gleichung fällt dann $\partial^2 u / \partial x^2$ gegen die übrigen Glieder fort; in der zweiten Gleichung bleibt allein stehen: $\partial p / \partial y \sim \varepsilon$ oder bei Berücksichtigung der Koordinatenkrümmung: (vergl. Fußnote) ~ 1 . In beiden Fällen ist die Abhängigkeit des Druckes von y zu vernachlässigen, da in dem kleinen Raum der Grenzschicht die Integration von $\partial p / \partial y$ höchstens zu Druckunterschieden von der Größenordnung ε^2 oder ε Veranlassung geben kann, d. h. Druck und Druckgefälle $\partial p / \partial x$ sind von y unabhängig, werden also der Grenzschicht durch die äußere Strömung „eingepägt.“ Die Geschwindigkeit der äußeren Strömung dicht an der Grenzschicht bezeichnen wir mit \bar{u} . \bar{u} ist nur als Funktion von x zu betrachten, da die eigentlich vorhandene Abhängigkeit von y gegen die starken Variationen in der Grenzschicht selbst im Sinne obiger Vernachlässigungen ignoriert werden kann; \bar{v} ist nach obigem $\sim \varepsilon = \sqrt{k}$, wird also mit k Null. Es bleiben uns also als Grundgleichungen für unsere Grenzschichten:

$$\begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array}$$

Grenzbedingungen sind:

$$\begin{array}{lll} \text{für } y = 0: & u = 0 & v = 0 \\ \text{für } y = \infty: & u = \bar{u}. & \end{array}$$

1) Die Berücksichtigung der Koordinatenkrümmung liefert, wie man durch Umformung der Differentialquotienten erkennt, nur in der zweiten Gleichung ein nicht zu vernachlässigendes Glied $\rho u^2/r$, wenn r der Krümmungsradius ist. Dies Glied ist von der Größenordnung 1.

1) Verhdlg. d. intern. Math. Kongr. 1904.

Diese Gleichungen begründen gewissermaßen eine besondere *Mechanik der Grenzschichten*, da die äußere Strömung nur in „eingepägter“ Weise eingeht.

3. Die qualitative Erklärung für die Ablösung der Strahlen ist nach Prandtl (l. c.) folgende: Das Druckgefälle und somit die Beschleunigung ist, vom Reibungsglied abgesehen, durch die Grenzschicht hindurch konstant, die Geschwindigkeit dagegen in der Nähe der Wand geringer. Daher wird hier bei Druckanstieg die Geschwindigkeit früher als draußen den Wert Null unterschreiten und so zur Rückströmung und Strahlbildung Veranlassung geben, wie die Geschwindigkeitsprofile in nebenstehender Figur (vergl. Prandtl l. c.) zeigen. Die Ablösungsstelle selbst ist hiernach durch

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = 0$$

charakterisiert. Diese Erklärung arbeitet nicht, wie die Helmholtzsche Strahlentheorie mit einer ad hoc gemachten Annahme, sondern nur mit den Vorstellungen, die unseren hydrodynamischen Gleichungen zugrunde liegen.

Die Stromlinie, die den abgelösten Teil der Strömung begrenzt, geht unter einem gewissen Winkel von der Grenzfläche ab, da die Stromfunktion ψ sich um den Ablösungspunkt $[x]$ herum in folgender Weise entwickelt:

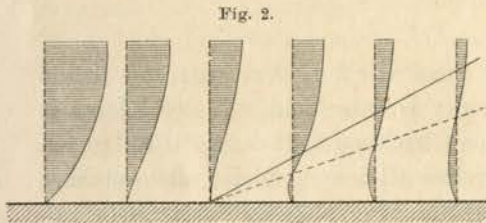
$$\psi = c_1 y^3 + c_2 (x - [x]) y^2.$$

Als weniger wichtiger Effekt ist noch vor auszusehen, daß infolge der durch das Haften bewirkten Aufstauung des Wassers die Strömung vom Körper fortgedrängt wird. Hierdurch, sowie durch die hinter dem Körper eintretende Umgestaltung der Strömung wird natürlich auch die Strömung vor dem Körper beeinflusst, so daß die Annahme der Potentialströmung für quantitative Richtigkeit der Resultate nicht ausreicht, und etwa durch experimentelle Aufnahme des Druckverlaufs ersetzt werden muß.

I. Grenzschicht für die stationäre Bewegung an einer ebenen parallel den Stromlinien eingetauchten Platte.

Die Strömung fließe parallel der x -Achse. Die Platte beginnt im Koordinatenanfang und liegt in der positiven x -Achse.

In diesem einfachsten Falle ist kein Druckgefälle vorhanden, also auch Ablösung nicht zu erwarten. Wir wollen ihn trotzdem durch-



rechnen, schon um zunächst an diesem Fall die später zu benutzenden Rechenmethoden zu zeigen. Die Grundgleichungen lauten hier:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung integrieren wir durch Einführung der Stromfunktion ψ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Grenzbedingungen sind:

$$\text{für } y = 0: \quad u = 0 \quad v = 0$$

$$\text{für } y = \infty: \quad u = \bar{u}, \quad \text{konstant.}$$

1. Nach dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit können wir unsere Gleichungen vereinfachen, wenn wir eine Ähnlichkeitstransformation kennen, welche Differentialgleichungen und Grenzbedingungen in sich überführt: Multiplizieren wir x, y, u, v, ψ mit den Faktoren $x_0, y_0, u_0, v_0, \psi_0$, so erhalten wir:

$$\frac{\rho u_0}{x_0} = \frac{k}{y_0^2}; \quad v_0 = \frac{u_0 y_0}{x_0}; \quad \psi_0 = u_0 y_0; \quad u_0 = \bar{u}$$

als Bedingungen dafür, das erstens das Problem und seine Lösung in sich übergeführt wird, und daß zweitens durch die Transformation $\rho, k, \bar{u} = 1$ geworden sind. Die vier soeben gewonnenen Gleichungen lassen uns noch einen Freiheitsgrad in der Auswahl der Faktoren $x_0, y_0, u_0, v_0, \psi_0$. Die drei letzten Gleichungen bestimmen die Faktoren, die u, v, ψ bei der Ähnlichkeitstransformation annehmen; die erste sagt aus, daß die gesuchte Lösung des Problems in sich übergeht, wenn nur: $\frac{\rho \bar{u} y_0^2}{k x_0} = 1$ ist; d. h.: unter Rücksicht auf die Faktoren, die u, v, ψ annehmen, kann der Zustand nur von $\frac{\rho \bar{u} y^2}{k x}$ abhängen. Durch diese Überlegung haben wir die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen reduziert. Wir führen daraufhin ein:

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho \bar{u}}{k}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x}}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{k \bar{u}}{\rho}} \sqrt{x} \cdot \zeta.$$

ζ wird dann allein Funktion von ξ und ferner ist:

$$u = \frac{1}{2} \bar{u} \zeta'$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k \bar{u}}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{x}} (\xi \zeta' - \zeta).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\xi \xi'' = - \xi'''.$$

Grenzbedingungen:

$$\begin{array}{llll} \text{für } \xi = 0: & \xi' = 0 & \xi = 0 & \text{aus } u = 0; v = 0; \\ \text{für } \xi = \infty: & \xi' = 2 & & \text{aus } u = \bar{u}. \end{array}$$

2. Zur Integration dieser und späterer Gleichungen müssen wir Reihenentwicklungen benutzen: und zwar Potenzentwicklungen um $\xi = 0$, asymptotische Näherungen für $\xi = \infty$. Da Grenzbedingungen an beiden Stellen gegeben sind, so bleiben eine bez. zwei Integrationskonstanten in den beiderseitigen Entwicklungen stehen. Sie werden dadurch bestimmt, daß beide Entwicklungen an einem beliebigen Punkt im Funktionswert ξ , erstem und zweiten Differentialquotienten übereinstimmen müssen. Die Übereinstimmung in sämtlichen Differentialquotienten ist dann durch die Differentialgleichung gewährleistet.

3. Potenzentwicklung der Lösung obiger Gleichung:

$$\xi \xi'' = - \xi'''$$

um $\xi = 0$ mit den Grenzbedingungen an dieser Stelle:

$$\xi' = 0 \quad \xi = 0$$

geschieht durch den Ansatz:

$$\xi = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{c_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \xi^{3n+2}$$

der so gewählt ist, daß die zu bestimmenden Koeffizienten c_n ganze positive Zahlen werden, was ihre Berechnung vereinfacht. Der Faktor α^{n+1} bringt die Art des Eingehens der Integrationskonstante α zum Ausdruck: c_0 , welches sonst als solche auftreten würde, kann nunmehr = 1 gesetzt werden. Es ergibt sich für die c_n die Rekursionsformel:

$$c_n = \sum_0^{n-1} \binom{3n-1}{3r} c_r c_{n-1-r}.$$

Die ersten so berechneten Koeffizienten sind:

$$\begin{array}{cccccc} c_0 = 1 & c_1 = 1 & c_2 = 11 & c_3 = 375 & c_4 = 27\,897 \\ c_5 = 3\,817\,137 & c_6 = \frac{814\,823\,115}{865\,874\,415} & c_7 = \frac{255\,164\,849\,103}{298\,013\,289\,795} & & \end{array}$$

Wegen der Konvergenz ist zu beachten, daß wir in obigen Ansatz als Nenner $(3n+2)!$ eingestellt haben. ξ' und ξ'' sind leicht zu bilden.

4. Bei der asymptotischen Näherung für ξ tritt eine Integrationskonstante additiv zu ξ , da

$$\begin{array}{ll} \text{für } \xi = \infty: & \xi' = 2 \\ \text{also:} & \xi = 2\xi + \text{const.} = 2\eta \end{array}$$

ist, wodurch η als neue, gegen ξ verschobene Koordinate eingeführt ist.

Wir setzen nun, um eine erste Korrektur ξ_1 zu berechnen:

$$\xi = 2\eta + \xi_1$$

und erhalten unter Vernachlässigung der Quadrate der Korrekturen:

$$2\eta \xi_1'' = - \xi_1'''$$

und hieraus durch Integration:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \gamma \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \gamma \eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{\gamma}{2} e^{-\eta^2} \\ \xi_1' &= \gamma \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta & \xi_1'' &= \gamma e^{-\eta^2}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung weiterer Glieder der asymptotischen Näherung verfährt man allgemein so, daß man weitere kleine Korrekturen ξ_n hinzufügt und ihre Quadrate vernachlässigt. Man erhält so lineare Differentialgleichungen für die ξ_n , deren linke, homogene Seite stets die gleiche ist, während rechts als „eingeprägte Kraft“ der Fehler erscheint, den die Summe der vorhergehenden Näherungen, in die Differentialgleichung eingesetzt, übrig läßt.

5. Wir kommen hier schneller durch folgende Überlegung zum Ziel: Die Differentialgleichung für ξ_1 :

$$2\eta \xi_1'' = - \xi_1'''$$

geht aus unserer ursprünglichen Gleichung:

$$\xi \xi'' = - \xi'''$$

dadurch hervor, daß wir links für ξ die gröbste Näherung $\xi = 2\eta$ einsetzen. Offenbar hat also ξ an dieser Stelle den geringsten Einfluß und wir wollen unsere Differentialgleichung formal so integrieren, als ob ξ an dieser Stelle bekannt wäre. Wir erhalten:

$$\xi = \int d\eta \int d\eta e^{-\int \xi d\eta}.$$

Die 3 Integrationskonstanten stecken in den beliebigen unteren Grenzen. Setzen wir rechts $\xi = 2\eta$, so erhalten wir links, wie oben, ξ_1 ; setzen wir dagegen rechts $\xi = 2\eta + \xi_1$, so wird:

$$\xi = \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta e^{-\eta^2} e^{-\int_{\infty}^{\eta} \xi_1 d\eta}$$

oder unter Rücksicht auf die Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} \xi &= 2\eta + \gamma \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta e^{-\eta^2} \left(1 - \int_{\infty}^{\eta} \xi_1 d\eta\right) \\ &= 2\eta + \xi_1 - \gamma \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} \xi_1 d\eta. \end{aligned}$$

Es ist also die zweite asymptotische Näherung:

$$\xi_2 = -\gamma^2 \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta \cdot e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Durch partielle Integrationen erhalten wir hieraus:

$$\begin{aligned} \xi_2' &= -\frac{\gamma^2}{4}(2\eta^2 + 1)e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{\gamma^2}{4}\eta e^{-2\eta^2} \\ \xi_2' &= \frac{\gamma^2}{4}\eta e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{\gamma^2}{4} \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{\gamma^2}{8} e^{-2\eta^2} \\ \xi_2 &= -\frac{3\gamma^2}{8} e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{\gamma^2}{4} \eta \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{\gamma^2}{2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-2\eta^2} d\eta. \end{aligned}$$

6. Über solche Integrationen läßt sich allgemein folgendes aussagen: Nach der durch partielle Integration zu gewinnenden Formel:

$$\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} \eta^n d\eta = -\frac{1}{2} \eta^{n-1} e^{-\eta^2} + \frac{n-1}{2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} \eta^{n-2} d\eta$$

läßt sich jedes Integral dieser Form zurückführen auf die beiden Funktionen $e^{-\eta^2}$ und $\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$, multipliziert mit Potenzen von η . Haben wir mehrere übereinandergeschachtelte Integrale, wie oben, so formen wir zunächst, wenn nötig, das innerste in der angegebenen Weise um: Unter dem vorletzten Integralzeichen steht dann als Integrand $e^{-\eta^2}$ oder $\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$ mit Potenzen multipliziert. Ersteres liefert keine neue

Schwierigkeit, letzteres können wir durch partielle Integration auf die beiden Funktionen $e^{-\eta^2}$ und $\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$ zurückführen:

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta &= \eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{2} e^{-\eta^2} \\ \int_{\infty}^{\eta} \eta d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta &= \frac{1}{2} \eta^2 \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{1}{4} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{4} \eta e^{-\eta^2} \\ \int_{\infty}^{\eta} \eta^2 d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta &= \frac{1}{3} \eta^3 \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{6} \eta^2 e^{-\eta^2} + \frac{1}{6} e^{-\eta^2} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Kann, wie oben, der Integrand quadratisch in $e^{-\eta^2}$ sein, so haben wir folgende vier Typen zu unterscheiden:

$$e^{-2\eta^2}, \quad e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta, \quad \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2, \quad \int_{\infty}^{\eta} e^{-2\eta^2} d\eta$$

multipliziert mit Potenzen von η . Der erste und vierte Typus liefert nichts Neues. Für den zweiten schaffen wir uns durch partielle Integration die Formel:

$$\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$$

oder:

$$\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2$$

und weiter:

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\eta} \eta e^{-\eta^2} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta &= -\frac{1}{2} e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-2\eta^2} d\eta \\ \int_{\infty}^{\eta} \eta^2 e^{-\eta^2} d\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta &= -\frac{1}{2} \eta e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{4} \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \frac{1}{8} e^{-2\eta^2} \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Ebenso für den dritten Typus:

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\eta} \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 d\eta &= \eta \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\infty}^{\eta} e^{-2\eta^2} d\eta \\ \int_{\infty}^{\eta} \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 \eta d\eta &= \frac{1}{2} \eta^2 \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{1}{2} \eta e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{1}{8} e^{-2\eta^2} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Da durch diese Formeln neue Typen für Integranden nicht hinzugekommen sind, so beherrschen wir mit den angedeuteten Formeltafeln alle Integrale, in denen $e^{-\eta^2}$ nicht mehr als zweimal vorkommt. Wir können über solche Funktionen beliebig viele aufeinanderfolgende Integrationen ausführen; die eingehenden Potenzen von η sind unbeschränkt. — In dieser Weise sind die Formeln für ξ_2 in (5) gewonnen. Auch später werden uns diese Integrationen begegnen. — Da der Typus des Integrationsresultates hiermit bekannt ist, kann zur Durchführung der Rechnung auch ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten benutzt werden.

7. Es gelingt bei dieser Differentialgleichung auch, den Fehler zu bestimmen, mit dem infolge der geschehenen Vernachlässigungen unsere Lösung behaftet ist. Leicht läßt sich feststellen, daß 2η , $2\eta + \xi_1$, $2\eta + \xi_1 + \xi_2$ unter dem wahren Wert von ξ bleiben; um nun auch eine obere Grenze zu finden, benutzen wir die, in obiger (vgl. 5), etwas abgeänderter Form:

$$\xi = 2\eta + \gamma \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta e^{-\eta^2} e^{-\int_{\infty}^{\eta} (\xi - 2\eta) d\eta}$$

gegebene Möglichkeit, aus einer groben Annäherung eine feinere zu berechnen: Wir setzen rechts für $\xi - 2\eta$ eine ziemlich willkürlich gewählte obere Grenze, z. B. das erste Glied der semikonvergenten Entwicklung von ξ_1 , — haben also die Gleichung:

$$\xi - 2\eta < \frac{\gamma}{4} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^2}$$

und berechnen aus dieser Annahme eine asymptotisch feinere obere Grenze für ξ'' , ξ' , ξ . Solange letztere unterhalb der angenommenen bleibt, ist sie garantiert. Die Ausrechnung ergibt [nach der allgemeinen Formel:

$$\int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^v} = \frac{1}{2} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^{v+1}} - \frac{v+1}{2} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^{v+2}}$$

$$< \left[\frac{1}{2} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^{v+1}} \right]$$

$$\int_{\eta}^{\infty} (\xi - 2\eta) d\eta < \frac{\gamma}{8} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^5} = \vartheta$$

$$e^{-\int_{\infty}^{\eta} (\xi - 2\eta) d\eta} < e^{\vartheta}$$

Für e^{ϑ} finden wir nach nebenstehender Figur als obere Grenze:

$$e^{\vartheta} < 1 + \sigma \vartheta \quad \sigma = \frac{e^{\vartheta_0} - 1}{\vartheta_0},$$

wobei ϑ_0 der größte vorkommende Wert von ϑ ist, also dem Koordinatenwert η , für den ξ gerade berechnet werden soll, entspricht. Wir erhalten so:

$$\xi < 2\eta + \gamma \int_{\eta}^{\infty} d\eta \int_{\eta}^{\infty} d\eta e^{-\eta^2} \left(1 + \frac{\sigma \gamma e^{-\eta^2}}{8 \eta^3} \right) e^{\vartheta \eta}$$

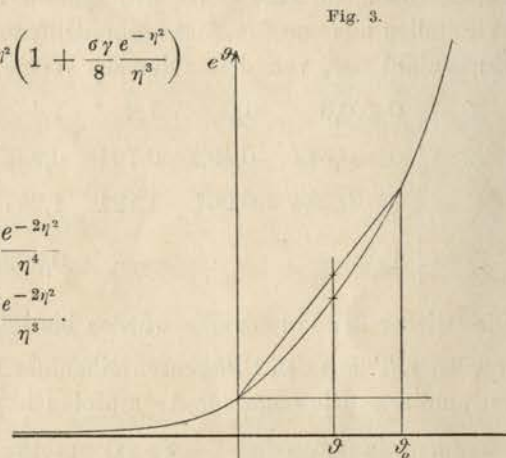
$$< 2\eta + \xi_1 + \frac{\sigma \gamma^2 e^{-2\eta^2}}{128 \eta^6}.$$

Analog für ξ' und ξ'' :

$$\xi' > 2 + \xi_1 - \frac{\sigma \gamma^2 e^{-2\eta^2}}{32 \eta^4}$$

$$\xi'' < \xi_1' + \frac{\sigma \gamma^2 e^{-2\eta^2}}{8 \eta^3}.$$

Durch genauere Ausführung der Integrale kann das Resultat leicht verschärft werden.



8. Der Anschluß der beiden Entwicklungen und die Bestimmung der Integrationskonstanten (α , γ und $\eta - \xi$) vollzieht sich nun in folgender Weise: In die Potenzentwicklung (3) führen wir ein, um die Integrationskonstante α herauszuheben:

$$Z = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} \xi \quad X = \sqrt[3]{\alpha} \xi$$

und erhalten so:

$$Z = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} \xi = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{(3n+2)!} X^{3n+2}$$

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{\alpha^{2/3}} \xi' = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{(3n+1)!} X^{3n+1}$$

$$\frac{d^2Z}{dX^2} = \frac{1}{\alpha} \xi'' = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{(3n)!} X^{3n}.$$

Die Verschiebung von η gegen ξ bringen wir durch Einführung der Integrationskonstanten β :

$$\sqrt[3]{\alpha} \cdot \eta = X - \beta$$

zum Ausdruck. Wenn wir jetzt noch von der asymptotischen Näherung her aus (4) und (5):

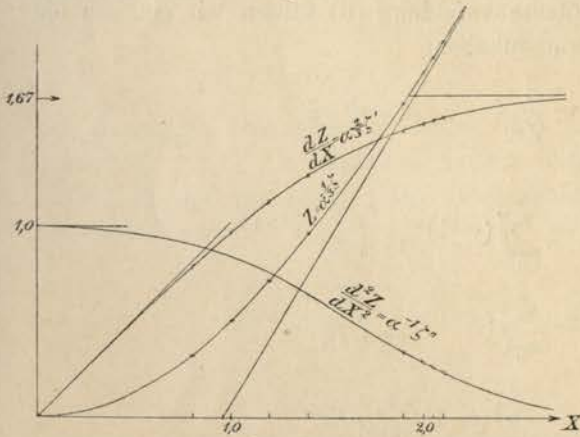
$$\begin{aligned}\xi &= 2\eta + \xi_1 + \xi_2 \\ \xi' &= 2 + \xi'_1 + \xi'_2 \\ \xi'' &= \xi''_1 + \xi''_2\end{aligned}$$

aufschreiben, so haben wir den ganzen Formelapparat beisammen. — Wir stellen uns nun für Z und seine Differentialquotienten untenstehendes Kurvenbild her, von dem folgende Werte angegeben sein mögen:

$X =$	0	0,8	1,0	1,2	1,4	1,9	2,0	2,05	2,1
$Z =$	0	0,317	0,492	0,701	0,938	1,63	1,79	1,8561	1,94
$\frac{dZ}{dX} =$	0	0,784	0,961	1,121	1,257	1,50	1,53	1,5479	1,56
$\frac{d^2Z}{dX^2} =$	1	—	—	—	0,639	0,34	0,28	0,2582	0,23

Die Glieder der Potenzreihe wurden bis $\frac{c_7 X^{23}}{23!}$ berechnet; weitere Glieder wurden z. T. aus den Differenzenreihen der Logarithmen der Koeffizienten extrapoliert. Die Lage der Asymptoten ist in der Figur 4 bereits gut zu erkennen; da nun wegen $\xi = 2\eta$ asymptotisch: $Z = \frac{1}{\alpha^3}(X - \beta)$ ist, so kann man bereits aus der Zeichnung rohe Näherungswerte für α und β ablesen:

Fig. 4.



$\alpha = 1,30$, $\beta = 0,96$. Zu $\eta = 1,00$ gehört dann als Anschlußkoordinate ungefähr $X = 2,05$. Für γ ergibt sich aus den entsprechenden Werten von $\frac{d^2Z}{dX^2}$ bez. ξ'' : $\gamma = 0,92$. Die genauere Berechnung geschieht, indem wir α , γ und die zu $\eta = 1$ gehörige Anschlußkoordinate X durch kleine Korrekturen variieren und diese dann aus linearen Gleichungen be-

rechnen. Um ein Urteil über die Genauigkeit zu geben, sei mitgeteilt, daß ich für $X = 2,05$ berechnete:

$$Z = 1,8561, \quad \frac{dZ}{dX} = 1,5479, \quad \frac{d^2Z}{dX^2} = 0,2582, \quad \frac{d^3Z}{dX^3} = -0,479,$$

wobei die vierte Dezimale nicht mehr sicher ist. Aus der asymptotischen Näherung ergab sich für $\eta = 1$: (unter Benutzung von Markoff: $\int_0^\infty e^{-t} dt$).

$$\xi = 2 + 0,04454 \cdot \gamma + \left\{ \begin{matrix} 0,00012 \\ 0,00106 \end{matrix} \right\} \gamma^2$$

$$\xi' = 2 - 0,13940 \cdot \gamma - \left\{ \begin{matrix} 0,00076 \\ 0,00423 \end{matrix} \right\} \gamma^2$$

$$\xi'' = 0,36788 \cdot \gamma + \left\{ \begin{matrix} 0,00462 \\ 0,01692 \end{matrix} \right\} \gamma^2.$$

wobei in den $\{ \}$ die obere Zahl von ξ_2 , die untere von der in (7) bestimmten oberen Grenze her stammt. (Letztere ist, wie oben erwähnt, ziemlich roh. Die „vorläufige Annahme“ über die obere Grenze von ξ ergibt: $\xi < 2 + 0,092 \cdot \gamma$. Die oberen Grenzen sind also garantiert vergl. [7]). Es ergibt sich als Resultat:

$$\alpha = 1,3266, \quad X = 2,0494, \quad \gamma = 0,9227, \quad (\beta = 0,9508).$$

Als gesichert können wir annehmen:

$$\alpha \text{ liegt zwischen } 1,326 \text{ und } 1,327.$$

9. Wir können z. B. hieraus berechnen, welchen Zug eine Platte der Breite b und der Länge l erleidet, wenn sie parallel zu den Stromlinien in eine mit der Geschwindigkeit \bar{u} fließende Strömung eingetaucht wird. Pro Flächeneinheit ist derselbe:

$$\begin{aligned}X_y &= k \frac{\partial u}{\partial y} = k \frac{1}{2} \bar{u} \xi''^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\rho \bar{u}}{k}} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\alpha}{4} \sqrt{k \rho \bar{u}^3} \frac{1}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Durch Integration über die Platte erhalten wir:

$$b \cdot \int_0^l X_y dx = \frac{\alpha}{2} b \sqrt{k \rho l \bar{u}^3},$$

also, wenn das Wasser auf beiden Seiten der Platte strömt:

$$\text{Zug} = 1,327 \cdot b \sqrt{k \rho l \bar{u}^3}$$

II. Berechnung der Ablösungsstelle hinter einem in eine stationäre Strömung eingetauchten Körper.

1. Wir behandeln folgendes Problem: In eine sonst parallele Strömung werde ein zur Stromrichtung symmetrischer zylindrischer Körper eingetaucht. Unsere Grenzschichtenkoordinaten rechnen wir

vom Teilungspunkt der Strömung an. \bar{u} sei als Funktion von x in eine Potenzreihe entwickelt. Zur Integration unserer Grundgleichungen:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

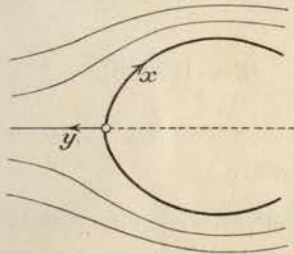
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} = \sum_0^{\infty} q_l x^{2l+1}$$

benutzen wir unter Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse für die Stromfunktion ψ den Ansatz:

$$\psi = \sum_0^{\infty} \chi_l(y) x^{2l+1}.$$

Fig. 5.



u und v erhalten wir hieraus durch Differentiation. Den allgemeinen Grenzbedingungen gemäß müssen dann die Funktionen $\chi_l(y)$ den Grenzbedingungen:

$$\text{für } y = 0: \quad \chi'_l = 0 \quad \chi_l = 0$$

$$\text{für } y = \infty: \quad \chi'_l = q_l$$

$$\text{also} \quad \chi_l = q_l y + r_l$$

genügen, wobei r_l Integrationskonstante ist. Durch Einsetzen in die erste Grundgleichung ergeben sich dann noch als Differentialgleichungen für die χ :

$$\sum_0^l (2\lambda + 1) (\chi'_\lambda \chi'_{l-\lambda} - \chi_\lambda \chi''_{l-\lambda}) = \sum_0^l (2\lambda + 1) q_\lambda q_{l-\lambda} + \frac{k}{\rho} \chi''',$$

die für $l=0$ quadratisch, für $l>0$ linear in der zu bestimmenden Funktion χ_l ist. Zur Lösung dieser Gleichung können wir, wie beim vorigen Problem, um $y=0$ nach Potenzen entwickeln, bei $y=\infty$ asymptotisch annähern und beides aneinander anschließen. Wir werden nachher sehen, daß wir uns die asymptotische Näherung ersparen können, da bereits die Potenzreihe, wie vorhin, die Asymptote und damit die eine Integrationskonstante mit genügender Genauigkeit erkennen läßt. Wir beschränken uns auf die Berechnung von χ_0 und χ_1 , d. h. auf die erste und dritte Potenz von x . Da nämlich die entsprechenden Koeffizienten q_0 und q_1 in \bar{u} bereits eine erst zu-, nachher abnehmende Geschwindigkeit ergeben, — der Fall, in dem voraussichtlich Ablösung eintritt, ist durch $q_0 > 0$, $q_1 < 0$ charakterisiert, — so ist der in der Einleitung (3) verlangte Typus der Druckverteilung bereits durch die ersten beiden Potenzen geliefert; es ist daher zu erwarten, daß auch χ_0

und χ_1 , wenn auch nicht quantitativ genau, bereits den Effekt der Ablösung darstellen werden. Bei einem der nachher in ähnlicher Weise zu behandelnden Probleme ist auch noch die nächste Näherung berechnet, und es hat sich dort die Zulässigkeit der Beschränkung auf die ersten beiden Potenzen in x herausgestellt.

2. Für χ_0 und χ_1 haben wir die Gleichungen:

$$\chi_0'^2 - \chi_0 \chi_0'' = q_0^2 + \frac{k}{\rho} \chi_0''',$$

$$\chi_0' \chi_1' - \chi_0 \chi_1'' + 3(\chi_1' \chi_0' - \chi_1 \chi_0'') = 4q_0 q_1 + \frac{k}{\rho} \chi_1''.$$

Die Art, wie q_0, q_1, k, ρ eingehen, können wir hier noch durch mechanische Ähnlichkeit feststellen. Auch hierin zeigen die beiden ersten Glieder gewissermaßen universelle Bedeutung. Wir schreiben also:

$$\bar{u} = q_0 x \pm q_1 x^3 \quad \psi = \chi_0 x \pm \chi_1 x^3$$

und führen folgende Größen für x, y, χ_0, χ_1 ein:

$$\xi = \sqrt{\frac{q_1}{q_0}} x \quad \eta = \sqrt{\frac{\rho q_0}{2k}} y \quad \zeta_0 = \sqrt{\frac{2\rho}{k q_0}} \chi_0 \quad \zeta_1 = \sqrt{\frac{2\rho q_0}{k q_1^2}} \chi_1.$$

Wir erhalten dann:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{q_0^3}{q_1}} (\xi \pm \xi^3)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{k q_0^2}{2 \rho q_1}} (\zeta_0 \xi \pm \zeta_1 \xi^3)$$

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_0^3}{q_1}} (\zeta_0 \xi \pm \zeta_1 \xi^3) \text{ usw.}$$

ζ_0 und ζ_1 genügen als Funktionen von η den Differentialgleichungen:

$$\zeta_0'^2 - \zeta_0 \zeta_0'' = 4 + \zeta_0'''$$

$$4 \zeta_0' \zeta_1' - 3 \zeta_0'' \zeta_1 - \zeta_0 \zeta_1'' = 16 + \zeta_1'''$$

Grenzbedingungen:

$$\text{für } \eta = 0: \quad \zeta_0 = 0 \quad \zeta_0' = 0 \quad \zeta_1 = 0 \quad \zeta_1' = 0$$

$$\text{für } \eta = \infty: \quad \zeta_0 = 2 \quad \zeta_0' = 2 \quad \zeta_1 = 2 \quad \zeta_1' = 2$$

3. Für ζ_0 setzen wir die Potenzreihe an:

$$\zeta = \sum_2^{\infty} \frac{\alpha^{\mu+1} b_\mu}{\mu!} \eta^\mu.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

b_2 willkürlich = 1: da α bereits Integrationskonstante;

$\alpha^4 \beta_3 = -4$: da wir im Ansatz der Integrationskonstante α auf die Inhomogenität der Gleichung für ζ_0 keine Rücksicht genommen haben, so erscheint α ungewöhnlicherweise auch in dieser Gleichung;

$b_4 = 0$: die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils ändert sich zunächst nicht, da die Reibung in ihrer Wirkung der Trägheit um zwei Glieder voraus ist; von $m = 5$ an ist:

$$b_m = \sum_2^{m-3} \left[\binom{m-3}{\mu-1} - \binom{m-3}{\mu} \right] b_\mu b_{m-1-\mu}.$$

Die Koeffizienten dieser Rekursionsformeln können, wie alle in dieser Weise aus Binomialkoeffizienten zusammengesetzten Zahlen, aus einem Schema ähnlich dem Pascalschen Dreieck berechnet werden, dessen Anfang der folgende ist:

	$\mu \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
m								
3		-1	1					
4		-1	0	1				
5		-1	-1	1	1			
6		-1	-2	0	2	1		
7		-1	-3	-2	2	3	1	
8		-1	-4	-5	0	5	4	1

und in dem jedes Glied die Summe der darüberstehenden ist. Nur der eingerahmte Teil kommt gemäß obiger Summengrenzen in Betracht. Die 13 ersten Koeffizienten sind (z. T. s. o.)

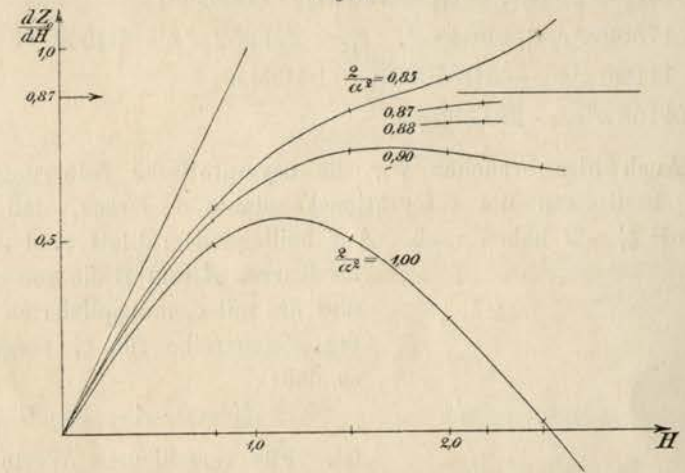
$$\begin{aligned} b_2 &= 1 & b_3 &= -\frac{4}{\alpha^4} & b_4 &= 0 \\ b_5 &= 1 & b_6 &= 2b_3 & b_7 &= 2b_3^2 \\ b_8 &= -1 & b_9 &= -4b_3 & b_{10} &= -16b_3^2 \\ b_{11} &= 27 - 16b_3^3 & b_{12} &= 181b_3 & b_{13} &= 840b_3^2. \end{aligned}$$

4. Außer α kommen noch zwei Integrationskonstanten durch die asymptotische Näherung hinein, die wir, wie beim vorigen Problem, an die hier berechnete Potenzreihe anschließen müßten. Für unsere Zwecke (Berechnung des Ablösungspunktes) genügt es jedoch, α zu kennen, und wir werden, wie oben bemerkt, sehen, daß sich α mit genügender Genauigkeit bereits allein mit Hilfe der Potenzreihe berechnen läßt.

Wir setzen $Z_0 = \frac{1}{\alpha} \xi_0$, $H = \alpha \eta$ und zeichnen $\frac{dZ_0}{dH}$ als Funktion von H nach der Potenzreihe auf. Es hängt selbst noch von $b_3 = -\frac{4}{\alpha^4}$ ab, und soll sich für den richtigen Wert von α der Asymptote: $\frac{dZ_0}{dH} = \frac{2}{\alpha^2}$ nähern. Für andere Werte von α nähert es sich überhaupt

keiner Asymptote, und dadurch wird, wie beiliegende Figur 6 zeigt, diese Methode zur Bestimmung von α sogar ziemlich empfindlich. Wir erhalten $\alpha = 1,515$, die letzte Ziffer nicht mehr sicher.

Fig. 6.



5. Die Berechnung von ξ_1 nach obiger linearer Gleichung und den Grenzbedingungen geschieht in analoger Weise: Potenzansatz:

$$\xi_1 = \delta \cdot \sum_2^{\infty} \frac{c_\mu}{\mu!} \eta^\mu$$

$c_2 = 1$, weil δ bereits Integrationskonstante; $\delta c_3 = -16$; $c_4 = 0$; und für $m \geq 5$:

$$c_m = \sum_2^{m-3} \left[-3 \binom{m-3}{\mu-2} + 4 \binom{m-3}{\mu-1} - \binom{m-3}{\mu} \right] \alpha^{\mu+1} b_\mu c_{m-1-\mu}.$$

Wie oben, so können auch hier die Koeffizienten in diesen Formeln aus einem Schema berechnet werden, dessen erste Zeile ($m = 3$) aus den Zahlen $-1, +4, -3$ besteht, während die anderen durch Addition folgen:

	$\mu \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
m									
3		-1	+4	-3					
4		-1	3	1	-3				
5		-1	2	4	-2	-3			
6		-1	1	6	2	-3	-3		
7		-1	0	7	8	-3	-8	-3	
8		-1	-1	7	15	5	-11	-11	-3

Die ersten Koeffizienten werden:

$$\begin{aligned} c_2 &= 1; \delta c_3 = -16; c_4 = 0; c_5 = 4\alpha^3; c_6 = 6\alpha^3 c_3 - 8; c_7 = -32 c_3; \\ c_8 &= 17\alpha^6; c_9 = 30\alpha^6 c_3 - 224\alpha^3; c_{10} = -576\alpha^3 c_3 - 256; \\ c_{11} &= 2048 c_3 + 294\alpha^9; c_{12} = 783\alpha^9 c_3 - 5092\alpha^6; \\ c_{13} &= -17392\alpha^6 c_3 + 59648\alpha^3; c_{14} = 221952\alpha^3 c_3 - 315\alpha^{12} - 136192; \\ c_{15} &= -11025\alpha^{12} c_3 - 1024000 c_3 - 54864\alpha^9; \\ c_{16} &= 174168\alpha^9 c_3 - 221296\alpha^6. \end{aligned}$$

6. Auch hier brauchen wir die asymptotische Näherung nicht, sondern bestimmen die Integrationskonstante δ daraus, daß ξ'_1 die Asymptote $\xi'_1 = 2$ haben muß. Auf beiliegendem Blatt sind zunächst als Kurven *A* und *B* die von c_3 freien und die mit c_3 multiplizierten Glieder der Potenzreihe für ξ'_1 aufgetragen, so daß:

$$\xi'_1 = \delta \cdot A - 16 \cdot B$$

ist. Für verschiedene Werte von δ ist dann ξ'_1 gezeichnet, und man erkennt aus dieser Kurve, daß bereits bei $\eta = 1,6$ die Konvergenz unserer Reihen trotz der großen Anzahl der berechneten Koeffizienten c ziemlich schlecht ist; immerhin zeigen die Glieder, wenn man gleiche Potenzen von α zusammenfaßt, einen befriedigenden Gang, so daß die Reihen trotzdem brauchbar sind. Wir vermögen noch zu erkennen, daß der richtige Wert von δ zwischen 8,20 und 8,30 liegt. Die Kurve steigt zunächst sehr stark an und nähert

sich dann von oben ihrer Asymptote. Dieser starke Einfluß auf u in der Nähe von $\eta = 0$ im Vergleich zu $\eta = \infty$ erlaubt es auch, daß u im Ablösungsfalle an der Grenze eher als draußen ein Zeichen wechselt.

7. Wir kommen nun zur Berechnung des Ablösungspunktes und erinnern dabei an die Bemerkung (1), daß die Resultate quantitativ nicht genau sind, da wir nur die erste und dritte Potenz von x berücksichtigt haben. Der Ablösungspunkt $[\xi]$ ist bestimmt durch:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{e q_0^2}{8 k q_1}} (\zeta_0' [\xi] \pm \zeta_1' [\xi]^3) \quad \text{für } \eta = 0$$

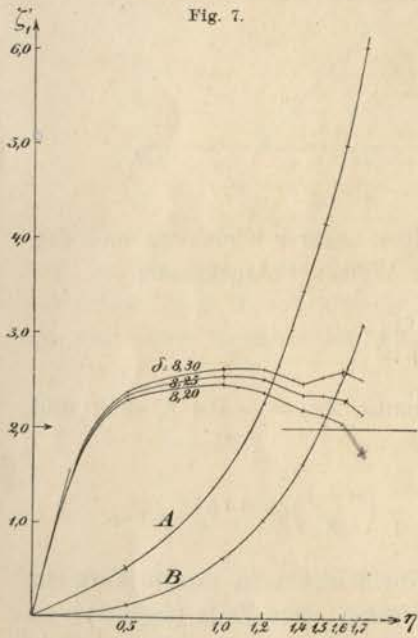


Fig. 7.

oder nach (3) und (5):

$$\alpha^3 \pm \delta [\xi]^2 = 0.$$

Nach (4) bez. (6) ist $\alpha = 1,515$, $\delta = 8,25$; es ist also im Falle des unteren Vorzeichens, der uns hier allein interessiert, die Koordinate des Ablösungspunktes:

$$[\xi] = 0,65$$

also:

$$[x] = 0,65 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$$

Dabei war:

$$\bar{u} = q_0 x - q_1 x^3.$$

Das Maximum der Geschwindigkeit (Minimum des Druckes) liegt daher bei:

$$x = 0,577 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}},$$

während die Geschwindigkeit Null in der äußeren Strömung erst bei $x = 1 \cdot \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$ erreicht würde. Der Ablösungspunkt liegt also hiernach um 12% der Gesamtlänge der Grenzschicht hinter dem Druckmaximum. Die gewonnenen Zahlen sind von Reibungskonstante und Dichte unabhängig.

8. Nach der bei Prandtl gegebenen Zeichnung (vgl. Einleitung 3) geht die Stromlinie $\psi = 0$ unter einem bestimmten Winkel von der Grenze ab. Wir berechnen diesen in folgender Weise: In der Umgebung des Ablösungspunktes lautet die Entwicklung des in (2) gegebenen Ausdrucks für ψ :

$$\psi = \sqrt{\frac{k q_0^2}{2 e q_1}} \cdot \frac{1}{3!} ((\zeta_0''' [\xi] - \zeta_1''' [\xi]^3) \eta^3 + 3 (\zeta_0'' - 3 \zeta_1'' [\xi]^2) (\xi - [\xi]) \eta^2)$$

$\psi = 0$ liefert nun für die abzweigende Stromlinie:

$$\frac{\eta}{\xi - [\xi]} = 3 \frac{3 \delta [\xi]^2 - \alpha^3}{16 [\xi]^3 - 4 [\xi]} = 11,5$$

oder in den nicht-reduzierten Koordinaten:

$$\frac{y}{x - [x]} = 11,5 \cdot \sqrt{\frac{2 k q_1}{e q_0^2}}$$

Diese Formeln sind mit ziemlicher Unsicherheit behaftet, da wir erstens nur zwei Glieder der Entwicklung von ψ berechnet haben, und weil zweitens die höheren Differentialquotienten, die ja auch subtilere Vorgänge darstellen, stets ungenauer als die früheren berechnet werden.

III. Entstehung der Grenzschicht und der Ablösungsstelle beim plötzlichen Beginn der Bewegung aus der Ruhe.

1. Die beiden vorhergehenden Probleme behandelten stationäre Strömungen. Wir wenden uns nunmehr dem Problem der Entstehung der Grenzschichten zu: Ein Zylinder von beliebigem Querschnitt werde in einer ruhenden Flüssigkeit plötzlich in Bewegung gesetzt und von $t=0$ an dauernd auf konstanter Geschwindigkeit erhalten. Zunächst wird sich unter der alleinigen Wirkung der durch den Stoß hergestellten Druckverteilung der Zustand der Potentialströmung einstellen; die Dicke der Grenzschicht ist im Anfang Null, soweit überhaupt die plötzliche Geschwindigkeitsverteilung ausgeführt werden kann. Die Ausbildung der Grenzschicht geschieht in erster Linie unter der Wirkung der Reibung, sodann durch die konvektiven Glieder. Als Resultat werden wir erhalten, daß nach einer gewissen Zeit die Ablösung an der Rückseite des Körpers beginnt und von dort aus langsam fortschreitet. Da unsere Grundgleichungen sich nur auf dünne Grenzschichten beziehen, so wird natürlich nur der Beginn des Ablösungsprozesses von ihnen dargestellt, ebenso wie die vorigen Probleme die Grenzschicht nur bis zur Ablösungsstelle betrafen.

2. Die jetzt zu benutzenden Gleichungen sind:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

κ steht hier der Einfachheit halber für $\frac{k}{\rho}$.

Die Potentialströmung, die sich zunächst einstellt, liefert uns den Randwert \bar{u} als Funktion von x . Da der Vorgang für $t=0$ singular ist, so ist uns vorläufig die Art der Entwicklung noch unbekannt, sie ist erst durch sukzessive Näherung festzustellen. Den Haupteinfluß auf die Änderungen hat zunächst (bei kleinem t) die Reibung und wir schreiben daher für die erste Näherung u_0 :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung,

$$u_0 = \frac{2\bar{u}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}$$

genügt unseren Bedingungen, eine für $t=0$ verschwindende Grenzschicht zu liefern, und sich für $y = \infty$ an die äußere Strömung $u_0 = \bar{u}$ anzuschließen. Die folgende Näherung werden wir erhalten, indem wir u_0 in die konvektiven Glieder einsetzen, während Zeit- und Reibungsglied $u = u_0 + u_1$ erhält. Es kommt so folgende Gleichung für u_1 heraus:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot [\text{Funktion von } \eta.]$$

Nach mechanischer Ähnlichkeit genügen wir dieser Gleichung durch den Ansatz:

$$u_1 = t\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot f(\eta)$$

der auch der Grenzbedingung $u_1 = 0$ für $y=0$ und $y = \infty$ nicht widerspricht.

Nach weiteren Überlegungen, die insbesondere das Eingehen von x betreffen, gelangen wir dazu, u darzustellen in einer Reihe nach Potenzen von t , deren Koeffizienten Funktionen von η sind, also auch noch t enthalten. Von x hängen diese Funktionen auch noch ab, doch geht diesmal x nur als Parameter in die Differentialgleichungen ein.

3. Als Ansatz für ψ ergibt sich hiernach:

$$\psi = 2\sqrt{\kappa t} \cdot \sum_0^\infty t^r \chi_r(x\eta)$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}$$

$$u = \sum_0^\infty t^r \frac{\partial \chi_r}{\partial \eta}$$

und hieraus für die χ die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^3 \chi_\mu}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial \eta^2} - 4\mu \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \eta} = 4 \sum_0^{\mu-1} \left(\frac{\partial \chi_{\mu-1-r}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \chi_r}{\partial x} \frac{\partial^2 \chi_{\mu-1-r}}{\partial \eta^2} \right)$$

für $\mu=1$ tritt zur rechten Seite noch $-4\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$.

Wir beschränken uns, wie im vorigen Abschnitt, auf die beiden ersten Glieder und setzen:

$$\chi_0 = \bar{u} \zeta_0(\eta) \quad \chi_1 = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \zeta_1(\eta),$$

so daß also:

$$u = \bar{u} \zeta_0' + t\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \zeta_1'.$$

Für ξ_0 und ξ_1 erhalten wir dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi_0''' + 2\eta\xi_0'' &= 0 \\ \xi_1''' + 2\eta\xi_1'' - 4\xi_1' &= 4(\xi_0'^2 - \xi_0\xi_0'' - 1). \end{aligned}$$

Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{für } \eta = 0: & \quad \xi_0 = 0 & \xi_0' = 0 \\ & \quad \xi_1 = 0 & \xi_1' = 0 \\ \text{für } \eta = \infty: & \quad \xi_0' = 1 & \xi_1' = 0. \end{aligned}$$

4. Die Lösungen obiger Differentialgleichungen, die wir auch beim folgenden Problem brauchen werden, sind durch Quadratur zu gewinnen, wenn die homogenen Gleichungen integriert sind. Letztere Integrale erhielt ich durch folgende Überlegung: Die homogenen Teile unserer Gleichungen stammen aus dem Zeit- und Reibungsglied, die zusammen die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

bilden. Von dieser Gleichung existieren, wie man aus Ähnlichkeitsüberlegungen erkennt, Integrale der Form:

$$\begin{aligned} u_n &= t^n f_n(\eta) \\ \eta &= \frac{y}{2\sqrt{kt}}, \end{aligned}$$

wobei f_n der Differentialgleichung:

$$f_n'' + 2\eta f_n' - 4n f_n = 0,$$

die also obige Form besitzt, genügt.

So ist z. B. (s. o.)

$$u_0 = f_0 = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta.$$

$$\begin{aligned} \text{Für } \eta = 0 \text{ ist} & \quad u_0 = 1 \quad \text{wenn } t > 0 \\ & \quad u_0 = 0 \quad \text{wenn } t < 0. \end{aligned}$$

u_n ist für $\eta = 0$, d. h. für $y = 0$, proportional zu t^n , es muß sich also durch Superposition von Lösungen u_0 in folgender Form darstellen lassen:

$$u_n = n \cdot \int_0^{\infty} u_0 \left(\frac{y}{2\sqrt{k(t-t_0)}} \right) \cdot t_0^{n-1} dt_0 = n \int_0^t u_0 \left(\frac{y}{2\sqrt{k(t-t_0)}} \right) \cdot t_0^{n-1} dt_0.$$

denn für $y = 0$ ist dies

$$= n \int_0^t t_0^{n-1} dt_0 = t^n.$$

Zur Auswertung dieses Integrals setzen wir $t - t_0 = \tau$,

$$u_n = -n \int_t^0 u_0 \left(\frac{y}{2\sqrt{k\tau}} \right) \cdot (t - \tau)^{n-1} d\tau.$$

Führen wir hierin ein:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2\sqrt{k}t} &= \eta; & \frac{y}{2\sqrt{k}\tau} &= \xi; \\ t &= \frac{1}{4k} \frac{y^2}{\eta^2}; & \tau &= \frac{1}{4k} \frac{y^2}{\xi^2}; \\ d\tau &= -\frac{1}{2k} \frac{y^2}{\xi^3} d\xi; \end{aligned}$$

so wird schließlich:

$$u_n = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} t^n \eta^{2n} \int_{\frac{y}{2\sqrt{k}t}}^{\frac{y}{2\sqrt{k}\tau}} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\xi^2} \right)^{n-1} d\xi \int_{\infty}^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Ausrechnung dieser Integrale nach dem binomischen Satze und dem früher erwähnten Verfahren der partiellen Integration liefert schließlich:

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_0^n \frac{2^\mu \binom{n}{\mu}}{(2\mu-1) \dots 3 \cdot 1} \eta^{2\mu} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \\ &+ \sum_1^n \left\{ \sum_v^{\mu} (-1)^{u+v} \frac{2^{v-1} \binom{n}{\mu}}{(2\mu-1) \dots (2\mu-2v+1)} \right\} \eta^{2v-1} e^{-\eta^2}. \end{aligned}$$

Das andere Integral ist algebraisch und zwar gleich obigem Faktor von $\int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$:

$$f_n = \sum_0^n \frac{2^\mu \binom{n}{\mu}}{(2\mu-1) \dots 3 \cdot 1} \eta^{2\mu}.$$

5. ξ_0 wird hiernach in folgender Weise bestimmt: Unter Rücksicht auf die Grenzbedingungen ist:

$$\xi_0' = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Hieraus durch Integration:

$$\xi_0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{2} e^{-\eta^2} \right).$$

Wir brauchen noch:

$$\xi_0'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}.$$

Die zweite Differentialgleichung (zweiter Ordnung für ξ_1) erhält dann die Form:

$$\begin{aligned} \xi_1'' + 2\eta\xi_1' - 4\xi_1 &= \frac{16}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \\ &+ \frac{16}{\pi} \left[\left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \eta e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{1}{2} e^{-2\eta^2} + \frac{1}{2} e^{-\eta^2} \right]. \end{aligned}$$

Das Integral der homogenen Gleichung für ξ_1 ist nach (4):

$$f_1 = \alpha(2\eta^2 + 1) + \beta \left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2 + 1) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right].$$

Das Integral der inhomogenen Gleichung wäre nunmehr durch Quadratur zu erhalten. Wir können aber auch den Umstand verwenden, daß durch zweimalige Differentiation die Differentialgleichung schließlich in

$$\xi'''' + 2\eta\xi'''' = \text{Funktion von } \eta$$

übergeht, welche als Gleichung von wesentlich erster Ordnung leichter zu integrieren ist. Es wird dann:

$$\xi'''' = e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{+\eta^2} \cdot [\text{Funktion von } \eta] \cdot d\eta.$$

Da nach zweimaliger Differentiation die eingeprägte Kraft unserer Differentialgleichung in jedem Gliede $e^{-\eta^2}$ enthält, so fällt $e^{+\eta^2}$ hiergegen fort, und wir können erst ξ'''' und schließlich ξ ausintegrieren. Denn unter den Integralen stehen nur Funktionen, die höchstens zweimal $e^{-\eta^2}$ und außerdem Potenzen von η enthalten und die mehrmals zu integrieren sind, was sich nach den früher I. 6. angegebenen Methoden erledigen läßt. Das Resultat der sehr umfangreichen Rechnung lautet:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \frac{6}{\pi} \eta e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2}{\pi} (2\eta^2 - 1) \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} \\ &+ \alpha(2\eta^2 + 1) + \beta \left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2 + 1) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right], \\ \xi_1'' &= -\frac{2}{\pi} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{8}{\pi} \eta \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \frac{2}{\pi} \eta e^{-2\eta^2} \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\eta^2 + 3) e^{-\eta^2} + \frac{8}{3\pi} \eta e^{-\eta^2} \\ &+ 4\alpha\eta + \beta \left[2e^{-\eta^2} + 4\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right]. \end{aligned}$$

Daß hier die Gleichung trotz ihrer Verwandtschaft mit obigen stationären Problemen in geschlossener Form integriert werden konnte, hat seine Ursache darin, daß $\frac{\partial u}{\partial t}$ einfacher als $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ist, trotzdem beide der Ordnung des Differentialquotienten gemäß „Wärmeleitungscharakter“ besitzen.

Die Bestimmung von α und β aus den Grenzbedingungen $\xi_1' = 0$ für $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ liefert:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\pi^{3/2}}.$$

6. Zur Berechnung der Ablösungsstelle haben wir:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(\bar{u} \xi_0'' + [t] \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \xi_1'' \right) \quad \text{für } \eta = 0.$$

Nun ist

$$\xi_0'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \xi_1'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8}{3\pi^{3/2}}.$$

Als Bedingung für die Ablösungszeit $[t]$ erhalten wir:

$$1 + \left(1 + \frac{4}{3\pi} \right) [t] \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0.$$

Es muß also $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ negativ sein. Wo $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ absolut am größten ist, geschieht die Ablösung am frühesten. Das Resultat gilt für zylindrische Körper von beliebigem Querschnitt. \bar{u} ist die entsprechende Potentialströmung.

IV. Entstehung der Ablösungsstelle aus der Ruhe bei gleichförmig beschleunigter Bewegung.

1. Gegen die physikalischen Grundlagen des vorigen Problems kann als Bedenken geltend gemacht werden, daß bei dem plötzlichen Stoße der Zusammenhang der Flüssigkeit aufgehoben werden könnte. Es sei deshalb hier die Lösung des Problems gegeben, daß von der Zeit $t=0$ an der eingetauchte Körper konstanter Beschleunigung unterworfen sei. Es ist dann:

$$\bar{u} = tw(x),$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = w + t^2 w \frac{\partial w}{\partial x}.$$

2. Aus ähnlichen Überlegungen heraus wie vorhin machen wir für die Lösung unserer Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

den Ansatz:

$$\psi = 2\sqrt{\kappa t} \cdot \sum_0^{\infty} t^{2\nu+1} \chi_{2\nu+1}(x\eta),$$

$$u = \sum_0^{\infty} t^{2\nu+1} \frac{\partial \chi_{2\nu+1}}{\partial \eta},$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}.$$

Durch Einsetzen in die Grundgleichung erhalten wir:

$$\frac{\partial^3 \chi_{2\lambda+1}}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \chi_{2\lambda+1}}{\partial \eta^2} - 4(2\lambda+1) \frac{\partial \chi_{2\lambda+1}}{\partial \eta}$$

$$= 4 \sum_0^{\lambda-1} \left[\frac{\partial \chi_{2\mu+1}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \chi_{2\lambda-2\mu-1}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \chi_{2\lambda-2\mu-1}}{\partial x} \frac{\partial^2 \chi_{2\mu+1}}{\partial \eta^2} \right],$$

für $\lambda = 0$ tritt zur rechten Seite $-4w$, für $\lambda = 1$ tritt $-4w \frac{\partial w}{\partial x}$ hinzu.

Auch hier beschränken wir die Ausrechnung des Zustandes auf die beiden ersten Glieder, wobei zu erwähnen ist, daß durch diese beiden Glieder auch gerade die beiden Glieder des Druckes $w + t^2 w \frac{\partial w}{\partial x}$ berücksichtigt sind. Die eingeprägte Kraft der nächsten Gleichungen enthält nur noch frühere Entwicklungskoeffizienten. Für die Schlußgleichung, die uns die Ablösungsstelle liefert, werden wir jedoch auch

noch den Koeffizienten des nächsten Gliedes berechnen. Für χ_1 und χ_3 können wir die Abhängigkeit von x in folgender Weise einführen:

$$\chi_1 = w \xi_1(\eta), \quad \chi_3 = w \frac{\partial w}{\partial x} \xi_3(\eta).$$

Die Differentialgleichungen für die ξ sind dann:

$$\frac{\partial^3 \xi_1}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} - 4 \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = -4,$$

$$\frac{\partial^3 \xi_3}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2} - 12 \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} = -4 + 4 \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} \right)^2 - \xi_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} \right],$$

Grenzbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \eta = 0: \quad \xi_1 = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = 0 \\ \quad \quad \quad \xi_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right\} \text{aus } \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0, \end{array}$$

$$\text{für } \eta = \infty: \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} = 0 \quad \text{aus } u = tw.$$

3. Nach den in III (4) angegebenen allgemeinen Lösungen des vorliegenden Typus von Differentialgleichungen können wir $\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta}$ sofort hinschreiben, da das inhomogene Glied -4 durch $\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = 1$ erledigt wird. ξ_1 erhalten wir durch Integration nach den schon mehrfach angewandten Methoden (I 6):

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-\eta^2} + 2\eta \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' \right],$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\eta e^{-\eta^2} + (1 + 2\eta^2) \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' \right],$$

$$\xi_1 = \eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left[-1 + (1 + \eta^2) e^{-\eta^2} + (3\eta + 2\eta^3) \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' \right].$$

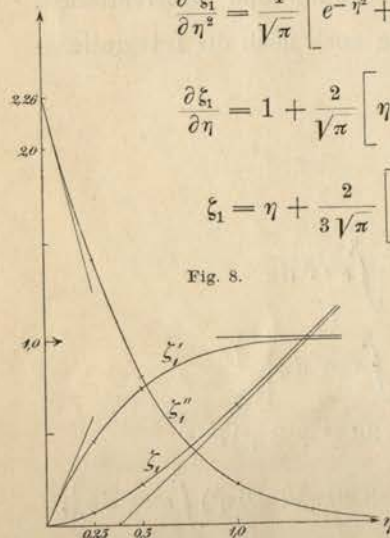


Fig. 8.

Diese Funktionen sind in nebenstehender Figur quantitativ gezeichnet. Eine Tabelle der Werte befindet sich weiter unten (6). Die eingeprägte Kraft auf der rechten Seite der zweiten Gleichung ist hiernach:

$$\begin{aligned} & \frac{16}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{16}{3\pi} \left[4\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + 2e^{-\eta^2} \right] \\ & + \frac{16}{3\pi} \left[(-2 + \eta^2) e^{-2\eta^2} + (-4\eta + 4\eta^3) e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right. \\ & \quad \left. + (3 + 4\eta^4) \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 \right]. \end{aligned}$$

4. Die Integration der zweiten Gleichung gelingt auch hier in geschlossener Form nach denselben Methoden, die in III 5 zum Ziele führten. Speziell für den in $e^{-\eta^2}$ quadratischen Teil der eingepprägten Kraft ist ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & (a + b\eta^2 + c\eta^4) e^{-2\eta^2} \\ & + (d\eta + e\eta^3 + f\eta^5) e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \\ & + (g + h\eta^2 + i\eta^4 + k\eta^6) \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 \end{aligned}$$

empfehlenswert. Dieser Ansatz versagt, wenn die eingepprägte Kraft Glieder enthält, die über $\eta^6 e^{-2\eta^2}$, $\eta^5 e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$, $\eta^4 \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2$ hinausgehen (vgl. III 5). Die Koeffizienten sind aus linearen Gleichungen zu bestimmen. Leichter sind die übrigen Anteile von $\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2}$ zu berechnen. ξ_3 und $\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2}$ ergeben sich dann durch Integration und Differentiation. Als Resultat erhalten wir schließlich, wenn auch noch die Integrationskonstanten richtig bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2} &= -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} - \frac{32}{15\pi} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \\ & + \frac{2}{3\pi} \left[(-\eta + 2\eta^3) e^{-2\eta^2} \right. \\ & \quad \left. + (1 + 2\eta^2 + 8\eta^4) e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right. \\ & \quad \left. + (6\eta + 8\eta^3 + 8\eta^5) \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 \right] \\ & + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{6\sqrt{\pi}} - \frac{16}{45\sqrt{\pi^3}} \right) \left[(16 + 36\eta^2 + 8\eta^4) e^{-\eta^2} \right. \\ & \quad \left. + (60\eta + 80\eta^3 + 16\eta^5) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} &= -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \\ & - \frac{16}{15\pi} \left[e^{-\eta^2} + 2\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right] \\ & + \frac{1}{9\pi} \left[(8 + \eta^2 + 2\eta^4) e^{-2\eta^2} \right. \\ & \quad \left. + (24\eta + 8\eta^3 + 8\eta^5) e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right. \\ & \quad \left. + (-9 + 18\eta^2 + 12\eta^4 + 8\eta^6) \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 \right] \\ & + \frac{1}{15} \left(\frac{5}{6\sqrt{\pi}} - \frac{16}{45\sqrt{\pi^3}} \right) \left[(33\eta + 28\eta^3 + 4\eta^5) e^{-\eta^2} \right. \\ & \quad \left. + (15 + 90\eta^2 + 60\eta^4 + 8\eta^6) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right] \end{aligned}$$

und hieraus durch Integration:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= -\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left[e^{-\eta^2} + 2\eta \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right] \\ & - \frac{8}{15\pi} \left[\eta e^{-\eta^2} + (1 + 2\eta^2) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right] \\ & + \frac{1}{315\pi} \left[(49\eta + 11\eta^3 + 10\eta^5) e^{-2\eta^2} + 768 \int_{\infty}^{\eta} e^{-2\eta^2} d\eta \right. \\ & \quad \left. + (-537 + 198\eta^2 + 64\eta^4 + 40\eta^6) e^{-\eta^2} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right. \\ & \quad \left. + (-315\eta + 210\eta^3 + 84\eta^5 + 40\eta^7) \left\{ \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 \right] \\ & + \frac{1}{105} \left(\frac{5}{6\sqrt{\pi}} - \frac{16}{45\sqrt{\pi^3}} \right) \left[(24 + 87\eta^2 + 40\eta^4 + 4\eta^6) e^{-\eta^2} \right. \\ & \quad \left. + (105\eta + 210\eta^3 + 84\eta^5 + 8\eta^7) \int_{\infty}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right] \\ & + \left(\frac{128}{1575\sqrt{\pi^3}} + \frac{128}{105\sqrt{2\pi}} - \frac{9}{14\sqrt{\pi}} \right) \end{aligned}$$

Diese drei Funktionen sind in umstehender Figur gezeichnet, sie genügen streng den Differentialgleichungen und Grenzbedingungen für die Entwicklungskoeffizienten χ .

5. Die Bedingung für die Ablösungsstelle hat die Form:

$$0 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{x}} w \left[\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} + t^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=0}$$

wobei sich aus obigen Formeln ergibt:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2} = \frac{31}{15 \sqrt{\pi}} - \frac{256}{225 \sqrt{\pi}^3},$$

Wir würden also folgende Gleichung für die Ablösungszeit [t] erhalten:

$$1 + \left(\frac{31}{60} - \frac{64}{225 \pi}\right) [t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Das nächste Glied in der Ablösungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ würde lauten: $\frac{1}{2 \sqrt{x} t} t^5 \frac{\partial^2 \chi_5}{\partial \eta^2}$, und um dieses noch berücksichtigen zu können, wollen wir zwar nicht den ganzen Verlauf von χ_5 , aber doch den Koeffizienten in dieser Ablösungsgleichung berechnen.

Das Entwicklungsglied χ_5 genügt der Gleichung:

$$\frac{\partial^3 \chi_5}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \chi_5}{\partial \eta^2} - 20 \frac{\partial \chi_5}{\partial \eta} = 4 \left[\frac{\partial \chi_3}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \chi_3}{\partial x} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \eta^2} \right].$$

Das Eingehen von x in χ_1 und χ_3 ist bekannt, und durch Ausrechnen der rechten Seite überzeugt man sich, daß χ_5 die Form:

$$\chi_5 = w \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \xi_5 + w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \xi_{5a}$$

Wir erhalten als Bedingung der Ablösung, da sich tw (s. oben) heraushebt:

$$\left[\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} + t^2 \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} + t^4 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} + t^4 w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 \xi_{5a}}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} = 0.$$

6. Zu leisten ist noch die Berechnung der Koeffizienten $\left[\frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$ und $\left[\frac{\partial^2 \xi_{5a}}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$:

Für ξ_5 haben wir die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^3 \xi_5}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \eta^2} - 20 \frac{\partial \xi_5}{\partial \eta} = 8 \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} - 4 \xi_1 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2} - 4 \xi_3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} = f(\eta)$$

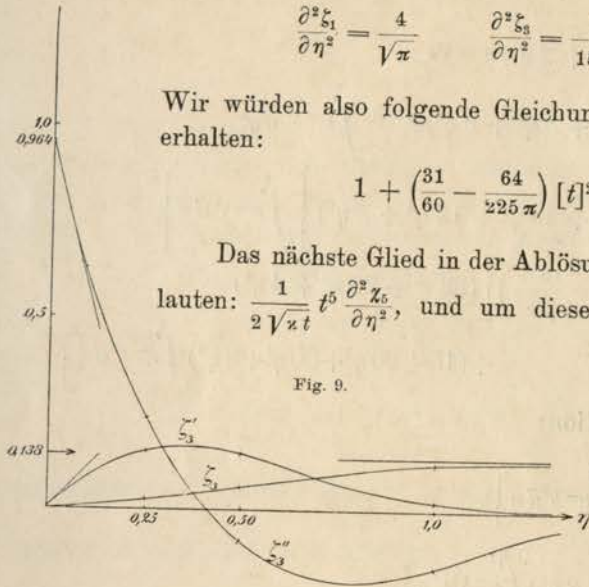


Fig. 9.

und die Grenzbedingungen:

$$\xi_5 = 0, \quad \frac{\partial \xi_5}{\partial \eta} = 0 \quad \text{für } \eta = 0; \quad \frac{\partial \xi_5}{\partial \eta} \text{ für } \eta = \infty.$$

Die eingeprägte Kraft $f(\eta)$ ist aus den oben angeschriebenen Funktionen bekannt. Den gesuchten Koeffizienten $\left[\frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$ berechnen wir nach dem Greenschen Verfahren in folgender Weise:

$$\int_0^\infty \vartheta \left(\frac{\partial^3 \xi_5}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \eta^2} - 20 \frac{\partial \xi_5}{\partial \eta} \right) d\eta = \left[\vartheta \frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \xi_5}{\partial \eta} + 2\eta \vartheta \frac{\partial \xi_5}{\partial \eta} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\partial \xi_5}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \eta \vartheta}{\partial \eta} - 20 \vartheta \right) d\eta$$

Lassen wir nun ϑ der adjungierten Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} - 22 \vartheta = 0$$

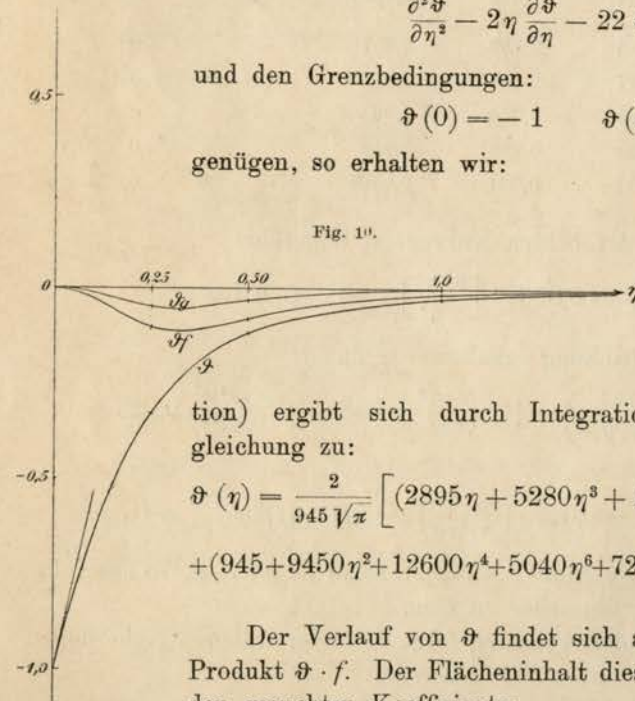
und den Grenzbedingungen:

$$\vartheta(0) = -1 \quad \vartheta(\infty) = 0$$

genügen, so erhalten wir:

$$\left[\frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} = \int_0^\infty \vartheta \cdot f \cdot d\eta$$

Fig. 10.



$f(\eta)$ ist schon oben angegeben; der Einflußkoeffizient ϑ (Greensche Funktion) ergibt sich durch Integration seiner Differentialgleichung zu:

$$\vartheta(\eta) = \frac{2}{945 \sqrt{\pi}} \left[(2895\eta + 5280\eta^3 + 2352\eta^5 + 352\eta^7 + 16\eta^9) + (945 + 9450\eta^2 + 12600\eta^4 + 5040\eta^6 + 720\eta^8 + 32\eta^{10}) e^{\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \right].$$

Der Verlauf von ϑ findet sich auf Fig. 10, ebenso das Produkt $\vartheta \cdot f$. Der Flächeninhalt dieser letzten Kurve liefert den gesuchten Koeffizienten.

Ebenso haben wir zur Berechnung von $\left[\frac{\partial^2 \xi_{5a}}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$ die Gleichungen:

$$\frac{\partial^3 \xi_{5a}}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 \xi_{5a}}{\partial \eta^2} - 20 \frac{\partial \xi_{5a}}{\partial \eta} = 4 \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} - \xi_3 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} \right] = g(\eta)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \xi_{5a}}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0} = \int_0^\infty \vartheta \cdot g \cdot d\eta$$

$\vartheta \cdot g$ ist den unten angegebenen Werten nach auf Fig. 10 gezeichnet.

Die berechneten Werte sind folgende:

η	0	0,25	0,50	1,00	1,50	∞
ξ_1	0	0,061	0,211	0,638	—	$\eta - 0,376$
$\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta}$	0	0,450	0,720	0,943	—	1
$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2}$	2,26	1,396	0,799	0,201	0,035	0
ξ_3	0	0,022	0,060	0,115	—	0,138
$\frac{\partial \xi_3}{\partial \eta}$	0	0,137	0,150	0,020	—	0
$\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2}$	0,964	0,231	-0,092	-0,156	-0,05	0
$f(\eta)$	0	0,315	0,750	0,457	—	0
$\vartheta(\eta)$	-1	-0,327	-0,112	-0,018	—	0
$\vartheta \cdot f$	0	-0,103	-0,084	-0,008	—	0
$g(\eta)$	0	0,124	0,240	-0,016	—	0
$\vartheta \cdot g$	0	-0,041	-0,027	0,0003	—	0

Der Flächeninhalt der beiden Kurven ist ungefähr:

$$\left[\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=0} = -0,058; \quad \left[\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=0} = -0,023.$$

7. Als Ablösungsgleichung erhalten wir daher:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} + [t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{31}{15\sqrt{\pi}} - \frac{256}{225\sqrt{\pi^3}} \right) - [t]^4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \cdot 0,058 - [t]^4 w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot 0,023 = 0$$

oder:

$$1 + 0,427 \cdot [t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} - 0,026 \cdot [t]^4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 0,01 \cdot [t]^4 w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Da das neu hinzutretende Korrektionsglied sogar negativ ist, so scheint die Existenz der Nullstelle sicher zu sein.

Die Lage und Zeit der Ablösung folgt nach der früheren Näherung (ohne das zuletzt noch berechnete Glied) zu:

$$[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = -2,34.$$

Mit der neu berechneten Korrektur erhalten wir für den Fall eines zur Stromrichtung symmetrischen Zylinders, wo für den hinteren Punkt, in dem die Ablösung beginnt, $w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ ist:

$$[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = -2,08.$$

Also ungefähr 10% Fehler. Hiernach läßt sich die Güte der Annäherung wohl auch bei den anderen Problemen, bei denen wir nur die ersten beiden Potenzen mitgenommen haben, beurteilen.

V. Anwendung der Resultate der Ablösungsprobleme auf den Kreiszyylinder.

1. Beim Kreiszyylinder ist:

$$\bar{u} = 2V \sin \frac{x}{R}.$$

$\frac{x}{R}$ sei als reduzierte Koordinate X genannt, V ist die Geschwindigkeit, mit der die parallele Strömung nach rechts fließt, bez. der Zylinder nach links bewegt wird.

Im stationären Fall tritt nach II(7) die Ablösung ein bei $x_{\text{Abl}} = 0,65 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$, das Maximum der Geschwindigkeit liegt bei:

$$x_{\text{Max}} = 0,577 \sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$$

wobei:

$$\bar{u} = q_0 x - q_1 x^3.$$

Nimmt man die gewöhnliche Potenzentwicklung des Sinus, so wird $q_0 = \frac{2V}{R}$, $q_1 = \frac{2V}{6R^3}$

$$x_{\text{Abl}} = 1,59 \cdot R, \quad X_{\text{Abl}} = 91^{1/4}{}^{\circ}; \quad x_{\text{Max}} = 1,41 \cdot R, \quad X_{\text{Max}} = 81^{\circ}.$$

Nähert man dagegen den Sinus im Intervall $0 - \pi$ nach der Methode der kleinsten Quadrate an, so wird:

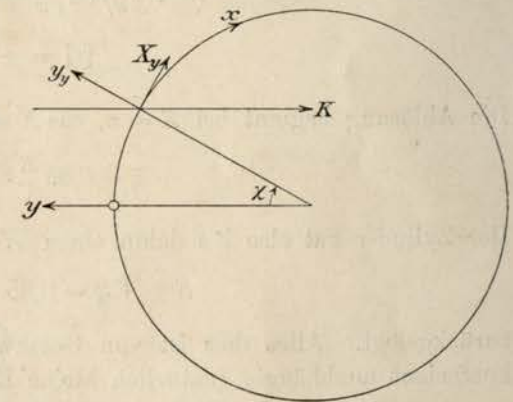
$$q_0 = \frac{2V}{R} \cdot 0,856, \quad q_1 = \frac{2V}{R^3} \cdot 0,093$$

$$x_{\text{Abl}} = 1,97 \cdot R, \quad X_{\text{Abl}} = 113^{\circ}$$

$$x_{\text{Max}} = 1,75 \cdot R, \quad X_{\text{Max}} = 101^{\circ}.$$

Jedenfalls liegt der Ablösungspunkt nach unserer Rechnung um 11—12% des ganzen Weges der Grenzschicht hinter dem Maximum der Geschwindigkeit. Auf Genauigkeit macht diese Angabe freilich keinen Anspruch, da nur die beiden ersten Potenzen von x berücksichtigt sind. Außerdem zeigen experimentelle Aufnahmen des Druckgefälles, daß der Zustand in der Nähe der Ablösung überhaupt schwerlich durch

Fig. 11.



Entwicklung vom Anfangspunkt der Grenzschicht aus erreichbar ist, da er zu stark durch die Druckverteilung der Wirbelkörper hinter dem Zylinder beeinflusst ist. Vorstehende Rechnungen haben daher lediglich den Zweck, zu zeigen, daß tatsächlich durch die hydrodynamischen Gleichungen Ablösung geliefert wird. Die weitere Ausbildung der Rechenmethoden, insbesondere für die wichtigeren Probleme der Rotationskörper, verspricht daher Erfolg.

2. Wird der Zylinder mit konstanter Geschwindigkeit plötzlich in Bewegung gesetzt, so ist:

$$\bar{u} = 2V \sin X \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{2V}{R} \cos X.$$

Die Ablösungszeit $[t]$ ist nach III (6) gegeben durch:

$$\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) [t] \frac{\partial u}{\partial x} = -1$$

$$[t] = -0,35 \frac{R}{V \cos X}.$$

Die Ablösung beginnt bei $X = \pi$, $\cos X = -1$ zur Zeit:

$$t_0 = 0,35 \frac{R}{V}.$$

Der Zylinder hat also bis dahin einen Weg

$$S = V t_0 = 0,35 \cdot R$$

zurückgelegt. Alles dies ist von Geschwindigkeit, Dichte, Reibungskoeffizient unabhängig (natürlich kleine Reibung vorausgesetzt).

3. Bei konstanter Beschleunigung ist:

$$\bar{u} = t w(x) = 2Vt \sin \frac{x}{R}$$

wo jetzt V die Beschleunigung des Zylinders in der Strömung ist. Die Ablösungszeit ist (IV 7) für den Beginn der Ablösung:

$$[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = -2,34 \quad \text{bez.} \quad = -2,08$$

oder:

$$[t]^2 = -1,17 \frac{R}{V \cos X} \quad \text{bez.} \quad = -1,04 \frac{R}{V \cos X}.$$

Vom Zylinder zurückgelegter Weg:

$$S = \frac{1}{2} V t^2$$

beim Beginn der Ablösung ($X = \pi$)

$$S = 0,59 \cdot R \quad \text{bez.} \quad = 0,52 \cdot R.$$

4. Wir berechnen noch den Widerstand, den bei konstanter Beschleunigung der Zylinder erfährt. — Die Spannungskomponenten sind:

$$Y_y = -p + 2k \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$X_y = k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Infolge der Kleinheit der Reibung fallen $\frac{\partial w}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ gegen $\frac{\partial u}{\partial y}$ fort, und es bleibt als Kraft in Richtung der äußeren Strömung:

$$K = 2 \cdot B \int_0^\pi \left(p \cos X + k \frac{\partial u}{\partial y} \sin X \right) \cdot R dX$$

wobei B die Breite der Schicht (Höhe des eingetauchten Zylinder-teiles) ist.

Den Anteil des Druckes berechnen wir so:

$$K_{\text{Druck}} = 2BR \int_0^\pi p \cos X dX = -2BR^2 \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial x} \sin X dX.$$

Nun ist:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \quad \bar{u} = t w$$

$$= \rho \left(w + t^2 w \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad w = 2V \sin X.$$

Das zweite Glied fällt bei der Integration fort, das erste liefert:

$$K_{\text{Druck}} = 2\pi \rho B R^2 V$$

also eine Vermehrung der Trägheit um den doppelten Betrag der verdrängten Flüssigkeit. Der Anteil der Reibung ist,

$$K_{\text{Reibung}} = \frac{2kBR}{2\sqrt{\pi}t} \int_0^\pi \left(t w \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2} + t^3 w \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \eta^2} \right) \sin X dX.$$

Hierbei war $\alpha = k/\rho$. Auch hier fällt das zweite Glied fort, denn $\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \eta^2}$ und $\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \eta^2}$ sind ja nur Konstanten, und wir erhalten:

$$K_{\text{Reibung}} = 4\sqrt{\pi \rho k t} \cdot B R V.$$

5. Um ein Bild von den Strömungsverhältnissen zu geben, die unseren Formeln entsprechen, sollen zum Schluß für ein bestimmtes

Bewegungsstadium des gleichförmig beschleunigten Zylinders die Stromkurven gezeichnet werden. Die Parameter R, V, κ sind willkürlich, wir müssen daher für x, y, t, ψ, u reduzierte Größen einführen, so daß R, V, κ aus unseren Formeln herausfallen. Dies geschieht durch:

$$x = RX, \quad t = \sqrt{\frac{R}{V}} T, \quad y = \sqrt{\frac{R\kappa^2}{V}} Y,$$

$$\psi = \sqrt[4]{R^3 \kappa^2 V} \Psi, \quad u = \sqrt{RV} U,$$

wodurch aus den Formeln (vergl. IV 2 und V 3):

$$\psi = 2\sqrt{\kappa} t^{3/2} w \left(\xi_1 + t^2 \frac{\partial w}{\partial x} \xi_3 \right),$$

$$u = tw \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} + t^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} \right),$$

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa} t},$$

$$w = 2V \sin \frac{x}{R},$$

$$t^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \frac{Vt^2}{R} \cos \frac{x}{R}$$

folgende reduzierte Gleichungen entstehen:

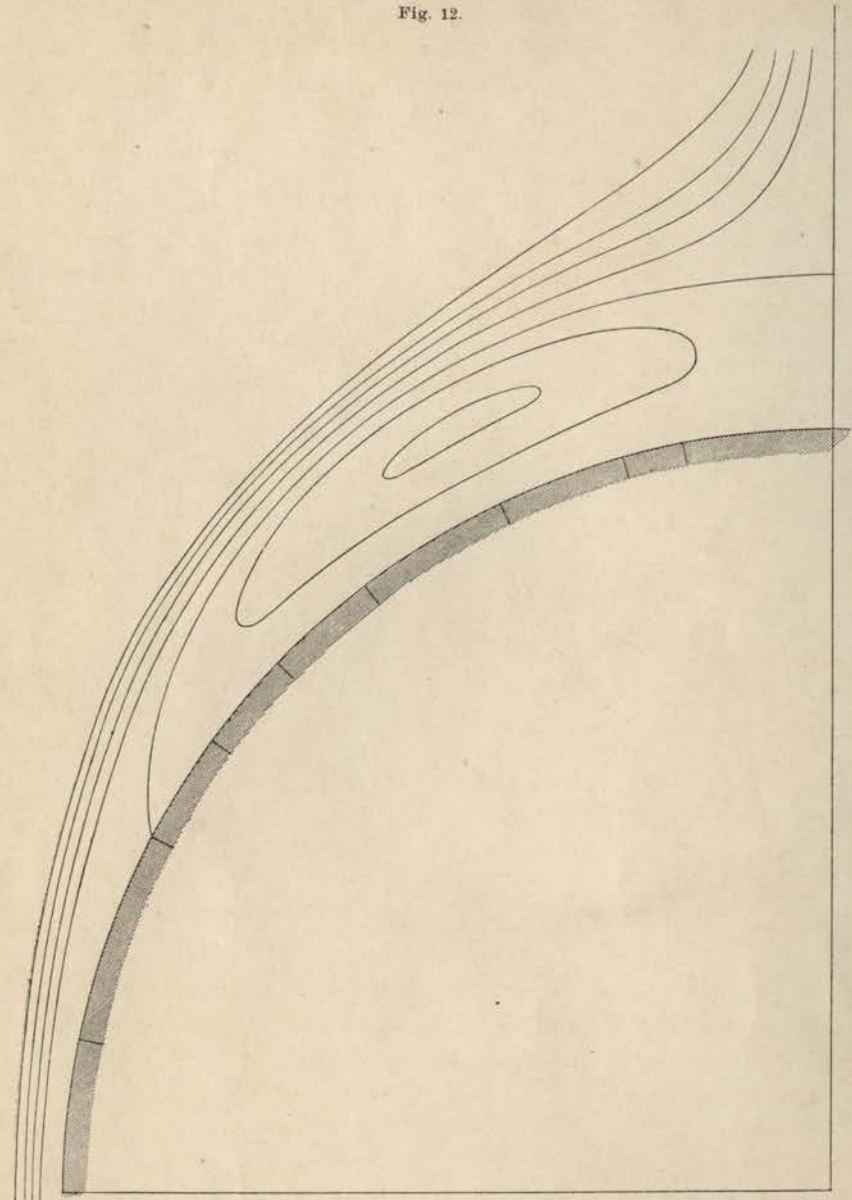
$$\Psi = 4T^{3/2} \sin X \cdot (\xi_1 + 2T^2 \cos X \cdot \xi_3)$$

$$U = 2T \sin X \cdot \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} + 2T^2 \cos X \cdot \frac{\partial \xi_3}{\partial \eta} \right),$$

$$\eta = \frac{Y}{2\sqrt{T}},$$

aus denen wir zunächst für eine feste Zeit T für eine Reihe von Koordinatenwerten X die Kurve Ψ als Funktion von $Y = 2\sqrt{T} \cdot \eta$ konstruieren müssen, um dann die Lage der Werte $\Psi = \text{const}$ aus diesen Kurven ablesen zu können. In Fig. 12 ist der Zylinder von $X = \pi/2$ bis $X = \pi$ gezeichnet. Die Ablösungszeit ist gegeben durch $2T^2 \cos X = -2,34$, also der Beginn der Ablösung durch $T = 1,08$. In nebenstehender Figur ist $2T^2 = 5$, also $T = 1,58$ gewählt. Für die gewählte Zeit ist der Ablösungspunkt bereits bis über 60° am Zylinder fortgeschritten, trotzdem ist die Grenzschicht noch ziemlich dünn, die Größenverhältnisse entsprechen den Werten $R = 10 \text{ cm}$, $\kappa = 0,01 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}^2}$ (Wasser), $V = 0,1 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$, also einer sehr kleinen Beschleunigung. Hiernach ist dann: $t = 15,8 \text{ sek}$.

Fig. 12.



Für $V = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$ erhalte man nach obigen Reduktionsformeln vorstehendes Bild nach 1,58 sek. Die Dicke der Grenzschicht wäre im Verhältnis $1 : \sqrt{10}$ verkleinert.