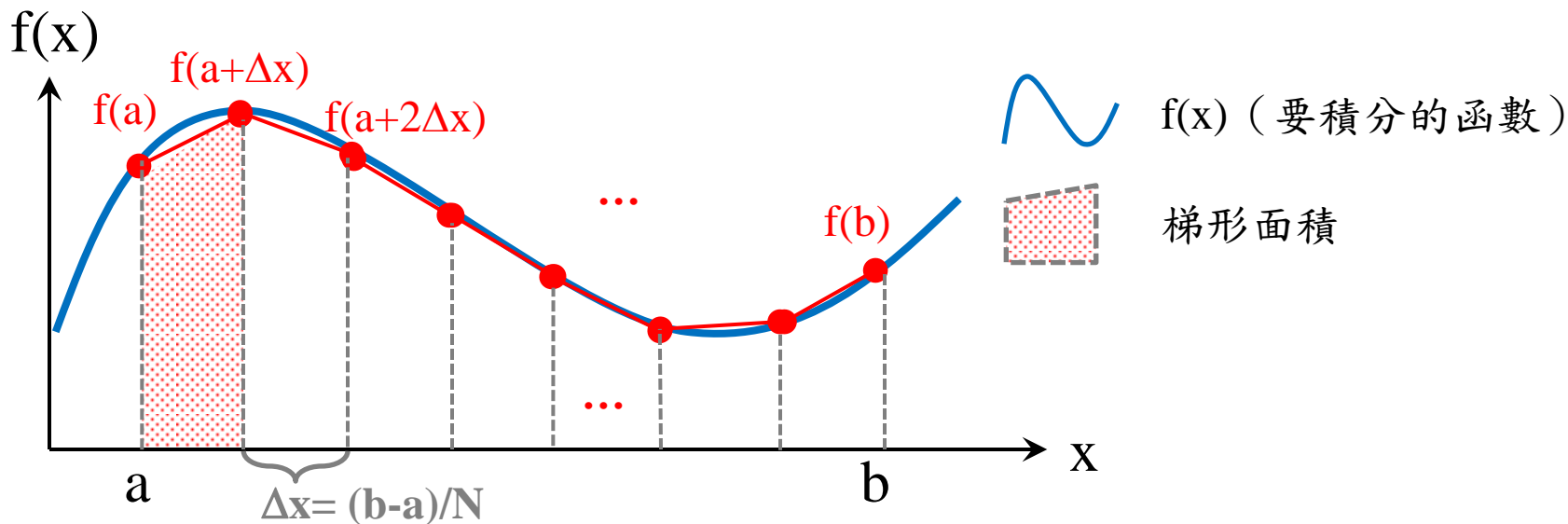


## Program Example: int\_x2

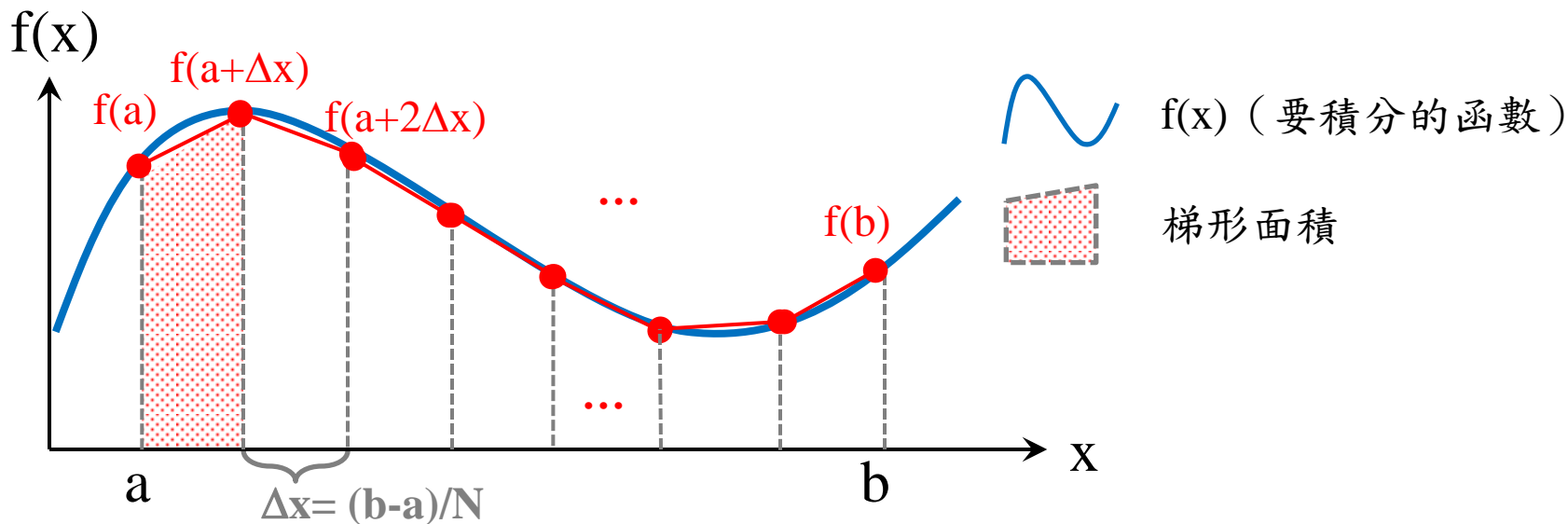
- 程式範例檔：`/home/teachers/weitingc/lecture_ex/int_x2.f95`
- 程式說明：
- 使用者由鍵盤輸入積分區間  $[a, b]$
- 將  $[a, b]$  區間等分成  $N$  個小區間，利用「梯形法」，求取  $x^2$  這個函數在  $[a, b]$  區間的定積分（數值解）
- 螢幕輸出積分結果（INTX2）

# 梯形法 (trapezoidal method)



- 將  $[a, b]$  區間等分成  $N$  個小區間 (每個區間寬度  $\Delta x = (b-a)/N$ )
- 將各區間端點 (共  $N+1$  個點) 在函數上的值相連, 可以得到  $N$  個梯形。
- 將梯形面積加總, 其值會近似於  $f(x)$  在  $[a, b]$  的定積分結果
- 切割的區間數越多 ( $N$  越大), 數值解會越接近解析解

# 梯形法 (trapezoidal method)



$$\int_a^b f(x) dx \approx \left[ \frac{\Delta x}{2} (f(a) + f(a + \Delta x)) \right] + \left[ \frac{\Delta x}{2} (f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x)) \right] + \dots$$

$$\approx \frac{(b-a)}{2N} [f(a) + 2f(a + \Delta x) + 2f(a + 2\Delta x) + \dots + f(b)]$$

```
PROGRAM INT_X2
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
!*****
```

```
! Program to approximate the integral of  $x^2$  over the  
! Interval  $[a,b]$  using the trapezoidal method.
```

```
! Variables used are:
```

```
!     a, b : the endpoints of the interval of integration
```

```
!     N     : the number of subintervals used
```

```
!     I     : counter
```

```
!     Dx    : the length of the subintervals
```

```
!     x     : a point of subdivision
```

```
!     F     :  $x^2$  at each point of subdivision
```

```
!     INT   : the approximating integral
```

```
!
```

```
! Input:  a, b
```

```
! Output: INT (Approximation to integral of  $x^2$  on  $[A,B]$ )
```

```
!*****
```

```
INTEGER, PARAMETER :: N=200
```

```
INTEGER :: I
```

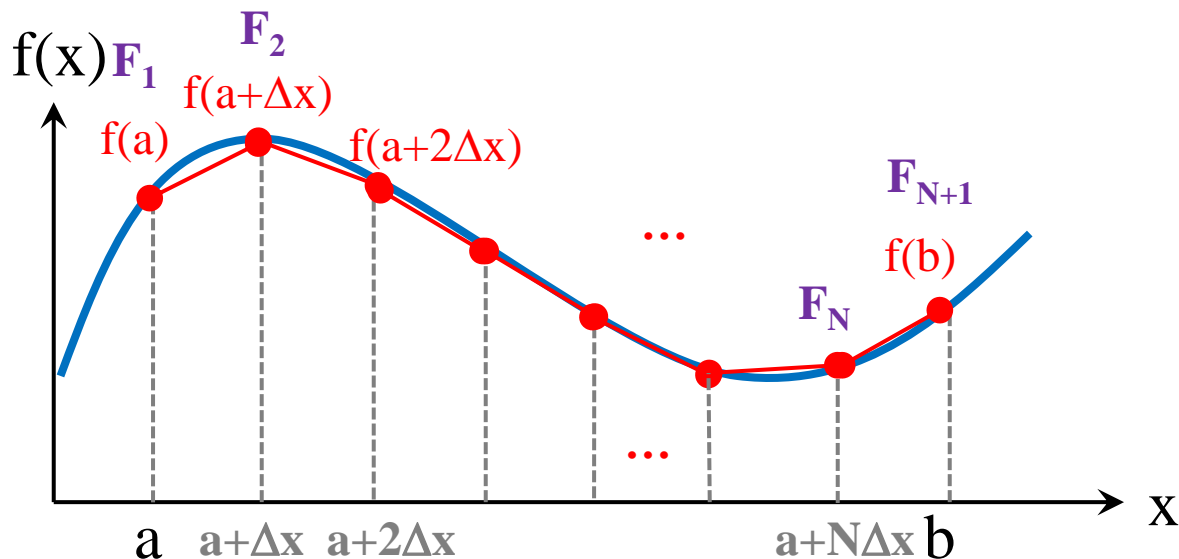
```
REAL :: a=0.0, b=0.0, Dx=0.0, x=0.0, INT=0.0
```

```
REAL, DIMENSION(1:N+1) :: F=0.0
```

```
WRITE(*,*) 'ENTER THE INTERVAL ENDPOINTS [a,b]:'  
READ(*,*) a, b
```

```
! Calculate subinterval length and initialize X  
Dx = (b-a) / REAL(N)
```

```
! Now calculate the Y=F(X) at each subdivision point  
DO I = 1, N+1  
  x = a + (REAL(I) - 1) * Dx  
  F(I) = x**2  
ENDDO
```



! Now calculate the integral of f(X) over [a,b]

! using trapezoidal method

```
DO I= 2, N
```

```
    INT = INT + 2*F(I)
```

```
ENDDO
```

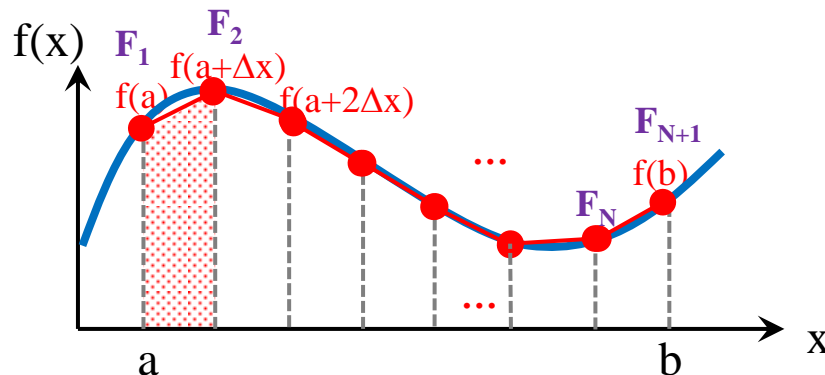
```
INT = (Dx/2) * (F(1) + INT + F(N+1))
```

! Output result on screen

```
WRITE(*,*) 'integral of x^2 over [a,b]=' , INT
```

```
END PROGRAM INT_X2
```

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2N} [f(a) + 2f(a + \Delta x) + 2f(a + 2\Delta x) + \dots + f(b)]$$



# 比較數值解與解析解的結果

[a,b]	數值解 (int_x2.f95) N=200	解析解 $\frac{1}{3}x^3 \Big _a^b$
[0,3]	9.000113	9.000000
[1,5]	41.33360	41.33333...
[10,20]	2333.338	2333.333...

- 可以嘗試增加或減少程式中的N值，看看數值解與解析解的差距隨N值如何變化。
- 可以改寫程式，計算其他函數（如  $x^3$ ,  $\text{sqrt}(x)$ ,  $\text{exp}(x)$ ）的數值積分結果（只要更改F(I)=...這一行）。

（更動後記得要重新編譯，產生新的執行檔）

大二的數值分析課，會介紹更多數值積分、微分的方法