中央銀行經濟研究處課程：SVAR 與反事實模擬

何泰寬

清華大學計量財務金融學系教授

2016 年 8 月 9 日

【引言】

反事實模擬(Counterfactual Simulation)屬於經濟學家的實證方法。它是一種思想的實驗(Thought Experiment)，涉及到「若是如此，會是如何」(What Ifs)的問題。換句話說，反事實模擬讓我們得以想像，假若現有的某些條件變得跟既有的事實不一樣，那麼經濟歷史的表現會變得如何。Robert W. Fogel 在 1964 年的專書使用反事實模擬方法，探討如果不存在鐵路的話，美國的運輸系統將會變得如何。Fogel 的論文開啟反事實模擬在經濟史的廣泛應用。關於反事實模擬方法的簡短說明，敬請參見 McCloskey (1987)。

反事實模擬通常用來作為政策評估，或是分析政策影響的傳遞機制。在進行反事實模擬時，我們需要一個描述經濟體運作的模型。它可以是結構經濟模型，或是時間序列模型，取決於問題的本質與資料的品質。例如，Ho and Lai (2013)利用屬於時間序列模型的 SVAR 進行反事實模擬，來分析銀本位如何將國際銀價的波動傳遞至中國在 1930s 年代的物價；Ho and Lai (2016)則是利用動態隨機一般均衡(DSGE)模型，分析銀本位制度如何隔絕中國在 1929 年至 1931 年免受到全球大蕭條(Great Depression)的影響；Ho (2016)則是利用一般均衡模型，分析中國若是在二十世紀初期採取金本位制度，對於中國與全球物價的影響為何。

這門課程介紹如何使用 SVAR 進行反事實模擬。課程將以中央銀行委託研究計劃(102cbc-經 1)「資本流入對於資產價格的影響－台灣的實證分析」作為實例說明。課程安排如下：

- SVAR(結構向量自我回歸模型)
- SVAR 進行反事實模擬的理論推導
- SVAR 估計
- RATS 程式的操作與說明

【傳遞機制】

由於以下的 SVAR 課程是以央行委託計畫作為範例，因此在介紹 SVAR 的模型設定之前，必須先說明具體的研究議題。在這個例子，我們是透過基於 SVAR 的反事實模擬，來量化(澄清)資本流入如何影響國內資產價格。或者是說，去驗證各項傳遞機制的相對重要性。

理論上，資本流入可能透過三種管道造成資產價格上漲。首先，資本流入（尤其是外人證券投資）直接影響到資產的需求並因此造成資產價格上漲。其次，如果沒有被央行的政策完全沖銷，資本流入將會導致貨幣供與流動性增加，進而刺激資產價格上揚。第三，資本流入通常導致資金接受國的景氣繁榮因而造成資產價格上漲。我們將上述的傳遞機制表示如下：

1. 資本流入→資產需求上升→資產價格上漲
2. 資本流入→貨幣供給與流動性增加→資產價格上漲
3. 資本流入→景氣活絡→資產價格上漲

在上述三個管道當中，我們將第一個管道視為資本流入的直接作用，第二與第三個管道的則是屬於間接作用，必須透過傳遞變數的中介起作用。針對第二個傳遞管道，我們選取了兩個可能的傳遞變數。第一個傳遞變數是廣義貨幣供給 M2。

第二個傳遞變數是全體貨幣機構放款。針對第三個傳遞管道，我們則是選取了經建會發布的景氣指標作為傳遞變數。

【SVAR(結構向量自我回歸模型)】

為了探討資本流入對於資產價格的影響，SVAR 模型包含 8 個內生變數：1 個資本流入變數、1 個資產價格變數、3 個傳遞變數、以及 3 個控制變數。我們將資本流入變數置於第 1 個位置，其次是傳遞變數與控制變數，最後則是資產價格。SVAR 模型的落後期數是 4 期。

我們將資本流入變數置於 SVAR 模型的第 1 個位置。這樣的變數排序假設資本流入會在衝擊當期影響到模型的其他內生變數，但是模型內生變數的衝擊則是不會在當期影響到資本流入。結案報告中曾經檢視這個假設是否合理。得到的結論是，將資本流入排序在模型第 1 個位置應該是一個合理的假設。

假設 FL_t 代表資本流入，M_t 代表傳遞變數，X_t 代表控制變數，PA_t 代表資產價格。假設一個落後期數為 *p* 的 SVAR 模型：

$$A_0 \cdot Y_t = A_1 \cdot Y_{t-1} + A_2 \cdot Y_{t-2} + \cdots + A_p \cdot Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

其中 $Y_t = \left(FL_t \quad M_t \quad X_t \quad PA_t\right)'$ 是一個 $K \times 1$ 向量；*K* 是內生變數的數目(在範例中為 8)；A_0 是一個 $K \times K$ 的下三角矩陣，且其對角線數值皆為 1；ε_t 是一個 $K \times 1$ 大小的結構性衝擊向量。按照定義，結構性衝擊是 Mutually Uncorrelated，也因此 ε_t 的共變異矩陣是一個對角矩陣。

A_0 又稱為 Impact Matrix。透過對於 A_0 矩陣的元素加入不同的數值限制，就會讓我們得到不同的 SVAR 模型。如同上述，Y_t 中變數的排序假設傳遞變數、控制變

數、與資產價格會受到當期資本流入衝擊的影響，然而反過來卻不成立。多數實證研究發現國際資本流動通常是受到國際因素的影響，與跟國內因素較無關聯。台灣是國際資本流入的接受者，因此上述的假設堪稱合理。

在範例中，我們用以認定 SVAR 的限制條件，是令 A_0 為一個下三角矩陣，且其對角線數值皆為 1。這樣的認定條件導致兩個結果。首先，模型的認定條件跟常見的 Cholesky Decomposition 相同。也就是說，若以 Σ_u 表示縮減式 VAR 的共變異矩陣，而且 $u_t = A_0^{-1}\varepsilon_t$ 。使用 Cholesky Decomposition 到 Σ_u 即可獲得 SVAR 模型。其次，在上述 SVAR 模型中，唯一被認定的結構性衝擊是資本流入衝擊，也就是 ε_t 的第一個元素。模型中的其他結構性衝擊沒有被認定。其他的結構性衝擊跟議題主旨無關，所以也不需要去認定這些衝擊。同時，其他內生變數的排序(包含傳遞變數、控制變數、與資產價格)，都不會影響到內生變數(包含資產價格)的衝擊反應函數(Christiano, et al., 1999)。

為了讓問題更為具體，我們將 SVAR 的全貌表示如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 1 & 0 & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & 1 & 0 \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FL_t \\ M1_t \\ M2_t \\ M3_t \\ X1_t \\ X2_t \\ X3_t \\ PA_t \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} A_j \begin{pmatrix} FL_{t-j} \\ M1_{t-j} \\ M2_{t-j} \\ M3_{t-j} \\ X1_{t-j} \\ X2_{t-j} \\ X3_{t-j} \\ PA_{t-j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{FL,t} \\ \varepsilon_{M1,t} \\ \varepsilon_{M2,t} \\ \varepsilon_{M3,t} \\ \varepsilon_{X1,t} \\ \varepsilon_{X2,t} \\ \varepsilon_{X3,t} \\ \varepsilon_{PA,t} \end{pmatrix}$$

資本流入對於資產價格的衝擊作用(Impact Effect，也就是在資產流入衝擊發生當期的影響)，分為直接與間接的衝擊作用。資本流入對於資產價格的直接衝擊作用，其大小就是 a_{81} 。資本流入對於資產價格的間接衝擊影響，則是透過傳遞變

數(Transmission Variables)。以傳遞變數$M1$為例。資本流入對於傳遞變數$M1$的衝擊作用為a_{21}，同時傳遞變數在當下對於資產價格的影響為a_{82}。因此，資本流入對於資產價格的間接衝擊影響，則是$a_{21} \times a_{82}$。

除了衝擊作用，傳遞變數也可以在後續各期持續將資本流入衝擊傳播到整個 VAR 模型，我們稱為 Propagation Mechanism。如果在後續各期，資本流入持續作用於傳遞變數，同時傳遞變數持續作用於資產價格，那麼資本流入對於傳遞變數的動態作用，也會導致資本流入對於傳遞變數具有動態作用。以落後一期為例，只要$A_1(2,1)$與$A_1(8,2)$兩個係數都不為 0，資本流入就會在落後一期(透過傳遞變數)繼續影響資產價格，其作用大小就是兩個係數的相乘。

我們的目的(澄清傳遞機制)，就是要理解資本流入衝擊是如何透過傳遞變數被傳播到整個(以 VAR 模型表示的)經濟體系。統計上而言，就是要區分資本流入對於資產價格的直接作用以及資本流入透過傳遞變數對於資產價格的間接作用。後者包含間接的衝擊作用以及上述的傳播機制 Propagation Mechanism。為此，我們消除資本流入衝擊在各期對於傳遞變數的影響，然後建構一個反事實的資產價格(對於資本流入衝擊的)衝擊反應函數。藉由比較實際的衝擊反應函數以及反事實的(設想的，Hypothetical)衝擊反應函數，就可以得知傳遞變數的重要性。

如同上述，我們對於衝擊矩陣A_0的限制，等於是以 Cholesky Decomposition 來認定 VAR 模型。一旦獲得(Recover)矩陣A_0之後，接著可以將 VAR 模型改寫為：

$$Y_t = A_0^{-1}A_1 \cdot Y_{t-1} + A_0^{-1}A_2 \cdot Y_{t-2} + \cdots + A_0^{-1}A_p \cdot Y_{t-p} + A_0^{-1} \cdot \varepsilon_t$$

或是進一步將 VAR 模型表達為更為簡潔的 Companion Form：

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^{-1}A_1 & A_0^{-1}A_2 & \cdots & A_0^{-1}A_{p-1} & A_0^{-1}A_p \\ I_K & 0_{K\times K} & 0_{K\times K} & \cdots & 0_{K\times K} \\ 0_{K\times K} & I_K & 0_{K\times K} & \cdots & 0_{K\times K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{K\times K} & \cdots & \cdots & I_K & 0_{K\times K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0^{-1}\varepsilon_t \\ 0_{K\times 1} \\ 0_{K\times 1} \\ \vdots \\ 0_{K\times 1} \end{pmatrix}$$

進一步定義：

$$Z_t = \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix}, Z_{t-1} = \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{pmatrix},\ \Xi_t = \begin{pmatrix} A_0^{-1}\varepsilon_t \\ 0_{K\times 1} \\ 0_{K\times 1} \\ \vdots \\ 0_{K\times 1} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_0^{-1}A_1 & A_0^{-1}A_2 & \cdots & A_0^{-1}A_{p-1} & A_0^{-1}A_p \\ I_K & 0_{K\times K} & 0_{K\times K} & \cdots & 0_{K\times K} \\ 0_{K\times K} & I_K & 0_{K\times K} & \cdots & 0_{K\times K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{K\times K} & \cdots & \cdots & I_K & 0_{K\times K} \end{pmatrix}$$

上述的 VAR 模型的 Companion Form 因此是：

$$Z_t = \Lambda Z_{t-1} + \Xi_t$$

令矩陣$J \equiv (I_K\ \ 0_{K\times K}\ \ 0_{K\times K}\ \ \cdots\ \ 0_{K\times K})$，其大小為$K \times (K \cdot p)$。令下三角矩陣$P$，使得$PP' = \Sigma_u$以及$\Phi_i = J\Lambda^i J'$。衝擊反應函數的係數矩陣(Impulse Response Coefficient Matrix)可以表示如下(證明請參見 Lütkephol, 2005，頁 46)：

$$\Theta_i = \Phi_i P$$

衝擊反應函數係數矩陣Θ_i的第(j,k)個元素，代表第k個內生變數的衝擊(One Standard Deviation Innovation，一個標準差大小的衝擊)對於第j個內生變數在衝擊發生i期之後的作用。【注意：這裡的i表示落後期數】

為了方便以下的反事實模擬的計算，我們繼續將 VAR 模型改寫如下：

$$Y_t = C \cdot Y_t + A_1 \cdot Y_{t-1} + A_2 \cdot Y_{t-2} + \cdots + A_p \cdot Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

其中，$C \equiv (I_K - A_0)$是一個$K \times K$大小的下三角矩陣，同時對角線的元素皆為 0。將上述方程式右手邊所有的矩陣放在一起，定義一個$K \times \big(K \cdot (1+p)\big)$大小的矩陣$B$如下：

$$B \equiv (C \quad A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_p)$$

【SVAR 進行反事實模擬的理論推導】

在介紹以下的計算之前，再次簡單回顧一下我們的策略。資本流入衝擊會在衝擊發生當期以及後續各期，透過傳遞變數持續影響資產價格。反事實模擬的目的，就是要「關閉」傳遞變數的影響。如何關閉呢？就是讓資本流入衝擊在當期以及後續各期不會影響傳遞變數。在 VAR 模型中，傳遞變數除了受到資本流入影響之外，也會同時受到其他變數的影響。反事實模擬僅僅關閉資本流入的影響。至於其他變數對於傳遞變數的影響(當期以及後續各期)，則是保持不變。

也因此，反事實模擬的第一個步驟，就是要分解(Decompose)傳遞變數的衝擊反應函數。分解的具體意義，就是計算各個內生變數對於傳遞變數的作用，這樣才能將資本流入的作用獨立出來。完成第一個步驟之後，接下來，我們假設一個虛擬的傳遞變數的衝擊(A Hypothetical Sequence of Innovation to the Transmission Variable)。這個虛擬衝擊的大小，剛剛好抵銷資本流入對於傳遞變數的影響。在給定上述的虛擬衝擊之後，我們重新計算反事實的衝擊反應函數。最後，透過比較原本的衝擊反應函數以及反事實的衝擊反應函數，就可以幫助我們理解一旦傳遞機制不存在，VAR 模型的動態過程會是如何。換句話說，實際的與反事實的衝擊反應函數之間的差距，正好可以量化傳遞機制的大小。

上述以 SVAR 進行反事實模擬的方法，是由 Bernanke et al. (1997)、Sims and Zha (2006)、Bachman and Sims (2011)、Kilian and Lewis (2011)等作者提出。然而，真正把整個方法詳細描述出來的，是 Kilian and Lewis (2011)。該篇文章的方程式有許多的 Typos，也沒有說明方程式的推導過程。同時，該篇文章僅僅考慮一次處理一個傳遞變數。在以下的附件，我們詳細推導出整個方法的過程，並且將該方法延伸到同時考慮多個傳遞變數。請讀者自行參閱附件。

附件：METHODOLOGY.CBC.PDF

現在回到如何計算反事實模擬。我們先考慮單一傳遞變數的情況。同樣以傳遞變數 $M1$ 為例，該變數在 VAR 模型中的順序為第 2 個位置。假設資本流入衝擊發生在第零期。

首先，我們可以將傳遞變數在第 *h* 期的衝擊反應分解為各個內生變數的貢獻：

$$d_{M,i,h} = \sum_{m=0}^{\min(p,h)} B_{2,mK+i} \cdot \theta_{i,1,h-m}, \quad h = 0,1,2,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,K$$

其中 $B_{2,mK+i}$ 指稱的是矩陣 *B* 的第 $(2, mK+i)$ 個元素，$\theta_{i,1,h-m}$ 指稱的是第 *h-m* 期的衝擊反應矩陣的第 $(i,1)$ 個元素。關於第 *h-m* 期的衝擊反應矩陣的定義，也就是上述的衝擊反應函數係數矩陣Θ，請參見 Lütkepohl（2005，頁 46）。【注意：這裡的 i 表示內生變數】

接著，為了衡量傳遞機制的作用，我們建構一個假想的（傳遞變數的）衝擊序列，藉以抵消資本流入衝擊對於傳遞變數在當期與落後期的影響：

$$\varepsilon_{M,h} = -B_{2,1} \cdot x_{1,h} - \sum_{m=1}^{\min(p,h)} B_{2,mK+1} \cdot z_{1,h-m}, \quad h = 0,1,2,\ldots$$

其中 $x_{i,0}, i=1,2,\ldots,K$ 代表在不存在設想的衝擊序列時，內生變數 i 對於資本流入衝擊在第零期的反應。給定設想的衝擊序列，內生變數 i 對於資本流入衝擊的反事實衝擊反應函數在第零期為：

$$z_{i,0} = x_{i,0} + \frac{\theta_{i,2,0} \cdot \varepsilon_{M,0}}{\sigma_2}$$

其中 σ_2 代表傳遞變數衝擊的標準差。以下各期 $(h=1,2,\ldots)$ 的衝擊反應函數可以依序計算得出：

$$x_{i,h} = \sum_{m=1}^{\min(p,h)} \sum_{j=1}^{K} B_{i,mK+j} \cdot z_{j,h-m} + \sum_{j<i} B_{i,j} \cdot x_{j,h}$$

$$z_{i,h} = x_{i,h} + \frac{\theta_{i,2,0} \cdot \varepsilon_{M,h}}{\sigma_2}$$

上述計算的反事實衝擊反應函數，等於是假設在沒有傳導機制作用下，觀察各個內生變數遭遇資本流入衝擊時的反應。它可以被視為衡量資本流入的直接效果。比較實際的與反事實的衝擊反應函數，即可看出傳遞機制在整個系統之中所扮演的角色輕重。

在評估個別傳遞變數的影響時，只要調整上述公式中傳遞變數的排序數字。在實際估計上，傳遞變數的數目不只一個。假設傳遞變數的數目為 3，在 SVAR 模型的排序分別是 2、3 與 4。若是想要評估所有傳遞變數的總和影響，只要將以上的公式修改為：

$$\varepsilon_{M2,h} = -B_{2,1} \cdot x_{1,h} - \sum_{m=1}^{\min(p,h)} B_{2,mK+1} \cdot z_{1,h-m}, \quad h=0,1,2,\ldots$$

$$\varepsilon_{M3,h} = -B_{3,1} \cdot x_{1,h} - \sum_{m=1}^{\min(p,h)} B_{3,mK+1} \cdot z_{1,h-m}, \quad h=0,1,2,\ldots$$

$$\varepsilon_{M4,h} = -B_{4,1} \cdot x_{1,h} - \sum_{m=1}^{\min(p,h)} B_{4,mK+1} \cdot z_{1,h-m}, \quad h=0,1,2,\ldots$$

$$z_{i,h} = x_{i,h} + \frac{\theta_{i,2,0} \cdot \varepsilon_{M2,h}}{\sigma_2} + \frac{\theta_{i,3,0} \cdot \varepsilon_{M3,h}}{\sigma_3} + \frac{\theta_{i,4,0} \cdot \varepsilon_{M4,h}}{\sigma_4}$$

【RATS 程式的操作與說明】

為了說明如何上述反事實模擬的應用，接著我們將以委託計畫的結案報告第 25 至 27 頁的部分內容作為說明。結案報告的實證結果，皆是使用本人自行撰寫的 RATS 程式估計而得。我們先說明實證結果，再來介紹程式細節。

先前在 6.2 節【衝擊反應函數】，我們發現外人資本流入總額對於股價指數有顯著的影響。我們的目的是要進一步區分，外人資本流入是直接或是間接作用於股價指數。如果是間接作用，有可能是透過以下三個傳遞變數：廣義貨幣供給、全體貨幣機構放款、景氣指標。

圖 1 討論影響股價指數的傳遞機制。第 1 列是以廣義貨幣供給作為傳遞變數。圖形中實線表示實際的衝擊反應函數，虛線表示反事實的衝擊反應函數。同一列最左圖是外人資本流入總額，中間是廣義貨幣供給，最右圖則是股價指數。如果傳遞變數真的是有作用，那麼股價指數的反事實衝擊反應會偏離實際的衝擊反應，而且偏離方向會是與理論預期方向一致。例如，外人資本流入總額若是透過廣義貨幣供給的增加而導致股價指數上漲，我們應該預期股價指數的反事實衝擊反應函數，應該低於實際的衝擊反應函數。若是上述的情況沒有發生，我們就可以判斷外人資本流入是直接影響到股價指數，而不是透過傳遞變數。同樣地，圖 1 第 2 列是以全體貨幣機構放款作為傳遞變數，第 3 列則是以景氣指標作為傳遞變數。

以圖 1 第 3 列為例，外人資本流入的反事實衝擊反應跟實際的衝擊反應幾乎重疊，顯示外人資本流入相對於其他內生變數是外生的，也合理化我們將外人資本流入放置在 SVAR 模型的第 1 個位置。景氣指標的反事實衝擊反應明顯地比實際的衝擊反應來得平緩，顯示若是不受資本流入的影響，景氣指標應該不會出現大

幅的波動。景氣指標的變動會進一步傳遞至股價指數。最右圖顯示若是景氣指標的波動變得較為和緩，股價指數的衝擊反應也會變得緩和。以同樣的方式檢視圖1 的第 1 列至第 3 列，我們發現就股價指數而言，廣義貨幣供給與全體貨幣機構放款都不是傳遞變數，因為在這兩個例子，股價指數的反事實衝擊反應函數與實際的衝擊反應函數幾乎雷同。景氣指標是一個傳遞變數，但是它的效果並不大。

圖 1 是考慮單一傳遞變數的影響。在圖 2 中，我們進一步考慮三個傳遞變數對於資產價格的總和影響。最左圖就是股價指數(中圖與最右圖分別是信義房價指數與名目匯率，然而與此的討論無關)。圖中的虛線與實線的差別，代表所有傳遞變數的總和效果。圖 2 顯示外人資本流入的確會透過傳遞變數影響到股價指數，但是，它們的效果在規模上是很小的。我們得到的結論因此是：外人資本流入對於股價指數有顯著的影響。而其影響的方式絕大多是直接的，只有極小的部份是間接地透過傳遞變數起作用。在 3 個傳遞變數當中，只有景氣指標可以稱為是傳遞變數。

====================【SVAR 估計】====================

附件：SVAR.COUNTERFACTUAL.01.PRG

附件：SVAR.COUNTERFACTUAL.01.SUM.PRG

附件：RATS01.XLS

要得到上述的實證結果，必須執行上述兩個 RATS 程式。

圖 1(僅僅考慮單一傳遞變數)：SVAR.COUNTERFACTUAL.01.PRG

圖 2(同時考慮三個傳遞變數)：SVAR.COUNTERFACTUAL.01.SUM.PRG

RATS01.XLS 屬於資料檔案，我們需要的變數都包含在該檔案。

圖 1 跟圖 2 的程式大同小異。我們以圖 1 的程式(SVAR.COUNTERFACTUAL.01.PRG)進行說明。

關於估計 SVAR 一個有用的說明，就是 Walter Enders 撰寫的 RATS Programming Manual。特別是其中的第 75 至 79 頁。假設u表示估計縮減式 VAR(透過 OLS)得到的殘差數值。VAR 模型的認定問題，就是要找出一個G矩陣，使得：

$$GG' = \Sigma_u$$

為了讓模型得以認定，我們起碼要加入$\frac{n(n-1)}{2}$項限制條件。換句話說，起碼要限制(賦予)G矩陣元素$\frac{n(n-1)}{2}$項係數值。常見的 Cholesky Decomposition，假設G矩陣為一下三角矩陣，也就是G矩陣對角線以上，正好有$\frac{n(n-1)}{2}$項係數值皆為 0。

然而，Cholesky Decomposition 不是唯一的認定方法。如果經濟理論隱含對於G矩陣元素數值的限定，同時限定條件起碼是$\frac{n(n-1)}{2}$項，這樣認定方法得到的 VAR 模型，我們稱為 SVAR。

RATS 程式能夠幫助我們估計上述的G矩陣並且滿足$GG' = \Sigma_u$。G矩陣的第(i,i)個元素，就是第i個內生變數的結構性衝擊的標準差。我們可以將G矩陣標準化，也就是將G矩陣的第j欄除上第j個結構性衝擊的標準差。標準化過後的G矩陣，其對角線的數值皆為 1。

我們可以證明，標準化的G矩陣，剛好等於上述 SVAR 模型中的A_0^{-1}。因此在估計策略上，我們可以直接使用 RATS 內建的方法估計出G矩陣，將之標準化，就可以得到A_0矩陣，因而認定出整個 SVAR 模型。

在實際操作上，RATS 提供更為簡便的方法。請大家回想一下我們的 SVAR 如下：

$$A_0 Y_t = A_1 \cdot Y_{t-1} + A_2 \cdot Y_{t-2} + \cdots + A_p \cdot Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

事實上，這類的 SVAR 模型在文獻上被稱為 A-Model。RATS 程式提供簡便的方法估計 A-Model。只要將A_0矩陣的元素輸入方程式，也就是說，對角線元素為 1，對角線以上元素為 0，對角線以下為未知係數。輸入Σ_u，RATS 的指令，cvmodel，會將A_0矩陣未知係數估計出來，同時也會產生G矩陣，$GG' = \Sigma_u$。程式中使用的就是這個方法。

Remark：根據表達方式的不同，SVAR 還有 B-Model 與 A-B Model，敬請參見 Lütkepohl (2005)，第 9.1 節。

如同上述，我們假設A_0矩陣是一個對角線元素為 1 的下三角矩陣，這樣的認定方式等同於 Cholesky Decomposition。我們在程式中也會驗證這項等式，說明上述 SVAR 與 Cholesky Decomposition 得到的衝擊反應函數是相同的。

===================【SVAR 估計】===================

現在回到程式 SVAR.COUNTERFACTUAL.01.PRG。

第 1 行到第 10 行：表示程式名稱、功能、與作者。Benutzung auf Eigene Gefahr = At Your Own Risk。

第 11 行到第 14 行：說明資料頻率(季資料)、資料起始日期、輸入資料檔案名稱與位址、輸入變數與名稱。

第 16 行到第 23 行：VAR 模型設定。包含 VAR 模型名稱、內生變數(8 個)、VAR 落後期數(4 期)、常數項設定、OLS 估計縮減式 VAR，並將估計殘差數值的共變異矩陣Σ_u標示為 msigma。

第 25 行到第 48 行：估計 SVAR 模型。請注意，這裡輸入是A_0矩陣。我們令A_0矩陣為一對角線為 1 的下三角矩陣。對角線以下的係數，則由 RATS 估計而得。在進行估計時，必須先給予係數初始數值。我們假設所有係數的初始數值都是 0。估計同時得到G矩陣，命名之為 afactor。

第 51 行到第 105 行：這個部分跟計算無關。它只是在驗證上述G矩陣與A_0矩陣之間的關係，同時驗證上述 SVAR 等同於 Cholesky Decomposition。程式中的 AMatrix 指的就是A_0矩陣。

第 108 行到第 142 行：計算B矩陣，$B \equiv (C \quad A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_p)$。程式中的 BM 指的就是B矩陣。有了B矩陣，就可以計算後續的反事實模擬。

第 149 行到第 158 行：賦予變數名稱。

以下的程式都很簡單，僅僅是輸入反事實模擬的數學方程式。因為輸入的方式力求詳盡而不是簡潔(方便後續檢查)，所以程式碼才會很多頁。

第 165 行到第 243 行：反事實模擬的第一個步驟，就是分解(Decompose)傳遞變數的衝擊反應函數。宣告第 4 個變數為傳遞變數：vn=4。衝擊反應函數係數矩陣Θ是由 impulse 指令產生。在 impulse 指令中必須告知電腦 VAR 模型(varmodel)、

衝擊反應期數(horizon)、G矩陣(afactor)、並將衝擊反應函數儲存於 IRFSVAR。第 171 行到第 208 行是輸入數學以便計算分解(Decompose)的結果。

$$d_{M,i,h} = \sum_{m=0}^{\min(p,h)} B_{2,mK+i} \cdot \theta_{i,1,h-m}, \quad h = 0,1,2,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,K$$

第 211 行到第 243 行則將計算結果以圖形劃出。

第 265 行到第 495 行：反事實模擬的第二個步驟，也就是設定一個虛擬的傳遞變數衝擊，並且重新計算反事實的衝擊反應函數。一開始宣告第 2 個變數為傳遞變數：vn=2。第 272 行到第 440 行都是輸入方程式。

$$\varepsilon_{M,h} = -B_{2,1} \cdot x_{1,h} - \sum_{m=1}^{\min(p,h)} B_{2,mK+1} \cdot z_{1,h-m}, \quad h = 0,1,2,\ldots$$

$$z_{i,0} = x_{i,0} + \frac{\theta_{i,2,0} \cdot \varepsilon_{M,0}}{\sigma_2}$$

$$x_{i,h} = \sum_{m=1}^{\min(p,h)} \sum_{j=1}^{K} B_{i,mK+j} \cdot z_{j,h-m} + \sum_{j<i} B_{i,j} \cdot x_{j,h}$$

$$z_{i,h} = x_{i,h} + \frac{\theta_{i,2,0} \cdot \varepsilon_{M,h}}{\sigma_2}$$

第 443 行到第 493 行則是將計算結果(反事實模擬)劃出。

講義中若有錯誤，敬請不吝賜教(tkho@mx.nthu.edu.tw)。謝謝大家聆聽。

【参考文獻】

Bachmann, Rüdiger and Eric R. Sims (2011), "Confidence and the Transmission of Government Spending Shocks," NBER Working Paper Series No. 17063.

Bernanke, Ben S., Mark Gertler, and Mark Watson (1997), "Systematic Monetary Policy and the Effect of Oil Price Shocks," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 91-157.

Christiano, Lawrence, Martin Eichenbaum, and Charles Evans (1999), "Monetary policy shocks: what have we learned and to what end?" *In Handbook of Macroeconomics*, M. Woodford and J.B. Taylor (eds.), North-Holland, Amsterdam, pp. 65-148.

Fogel, Robert W. (1964), *Railroads and American Economic Growth: Essays in Econometric History*, Baltimore: Johns Hopkins Press.

Ho, Tai-kuang (2016, forthcoming), "Money doctors and their reform proposals for China reconsidered, 1903–29," *Oxford Economics Papers*.

Ho, Tai-kuang and Cheng-chung Lai (2013), "Silver Fetters? The Rise and Fall of Chinese Price Level 1928-34," *Explorations in Economic History*, 50, pp. 446-462.

Ho, Tai-kuang and Cheng-chung Lai (2016), "A silver lifeboat, not silver fetters: Why and how the silver standard insulated China from the 1929 Great Depression," *Journal of Applied Econometrics*, 31, pp. 403-419.

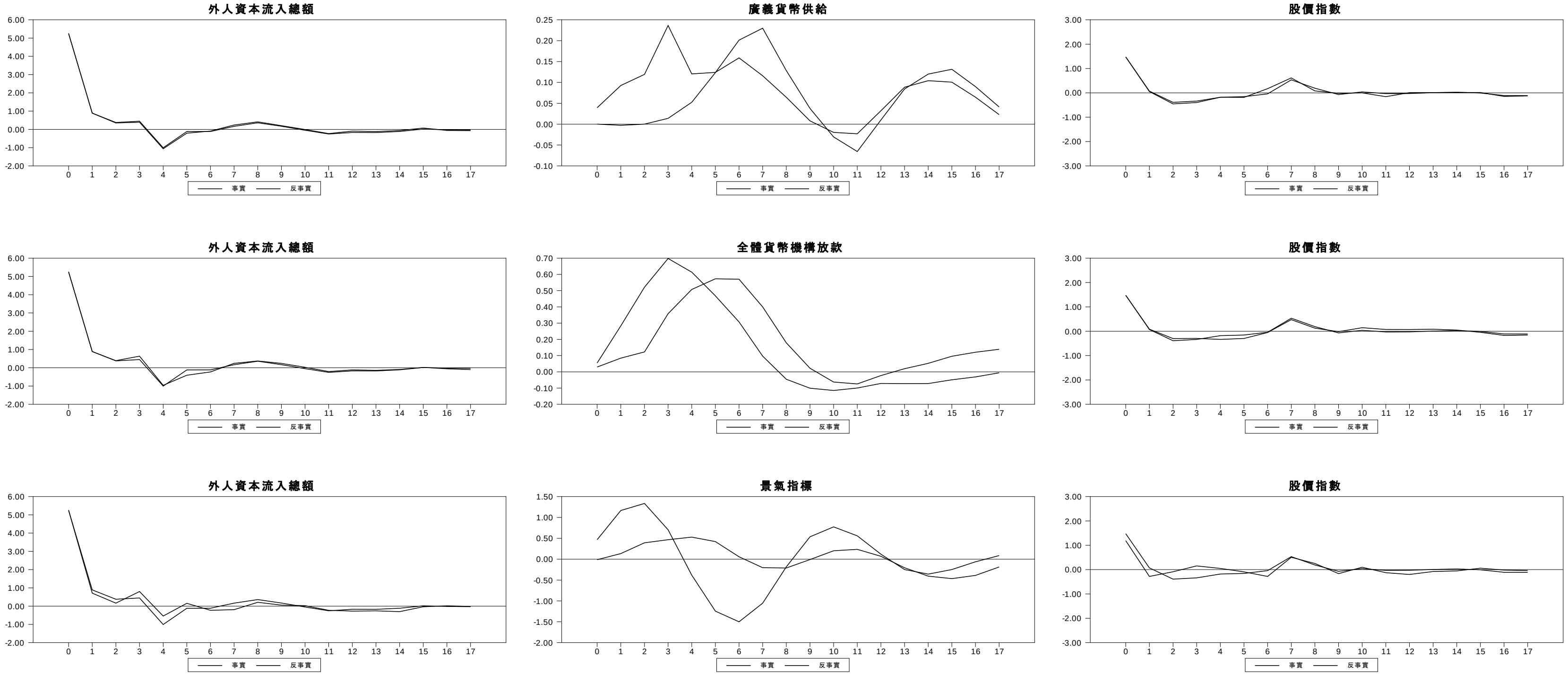
Kilian, Lutz and Logan T. Lewis (2011), “Does the Fed respond to Oil Price Shocks?” *Economic Journal*, 121, pp. 1047-72.

Lütkepohl, Helmut (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer.

McCloskey, Deirdre (1987), “Counterfactuals,” The New Palgrave.

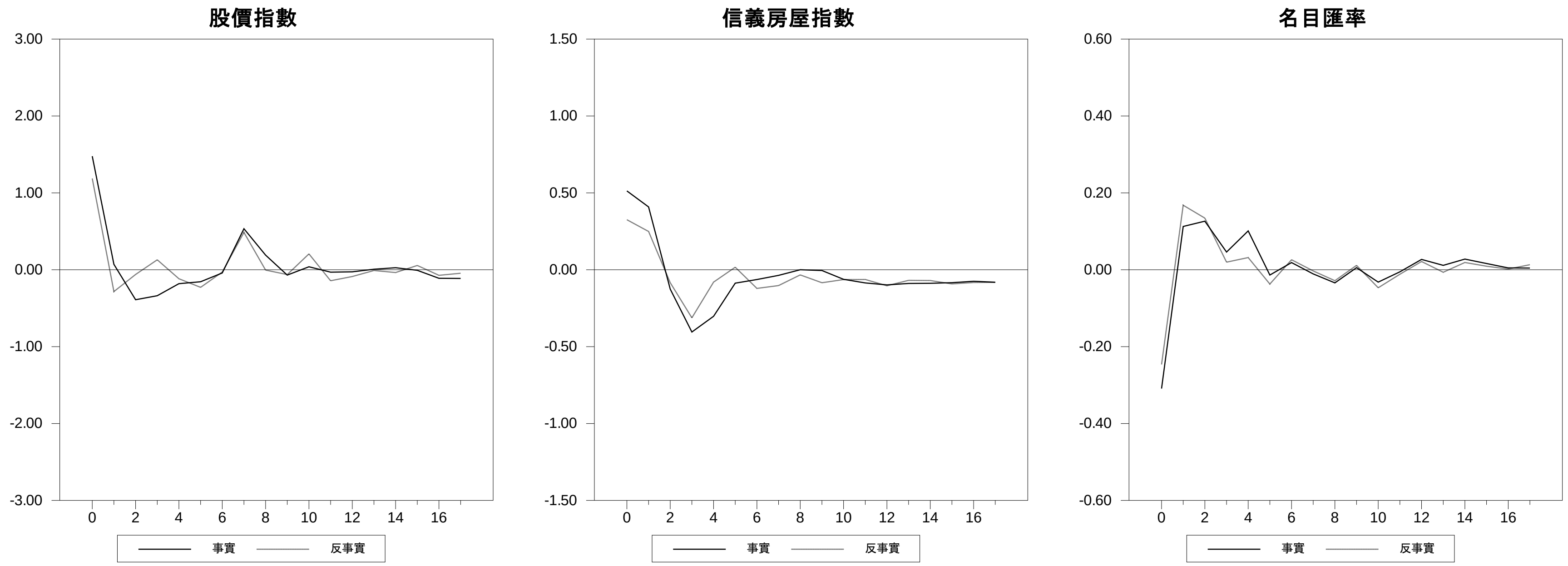
Sims, Christopher A. and Tao Zha (2006), “Does Monetary Policy Generate Recessions?” *Macroeconomic Dynamics*, 10, pp. 231-272.

圖 1：反事實模擬，股價指數



註：第 1-3 列的傳遞變數分別是：廣義貨幣供給、全體貨幣機構放款、與景氣指標。第 1-3 行分別是以下變數的反事實模擬：外人資本流入總額、傳遞變數、與股價指數。

圖 2：反事實模擬，考慮所有的傳遞機制



註：第 1-3 行分別是以下變數的反事實模擬：股價指數、信義房價指數、與名目匯率。圖中的反事實模擬考慮 3 個傳遞變數：廣義貨幣供給、全體貨幣機構放款、與景氣指標。