

中尺度大氣動力學基礎 (碩士班補充講義)

(賀海晏, 2005 修改稿, NCU)

§1 引論

一 中尺度氣象學的研究物件

中尺度氣象學主要研究兩類中尺度現象：

- (1) 雷暴、暴雨、冰雹、大風和下擊暴流等對流性天氣過程
- (2) 局地低雲、濃霧等穩定性天氣

這類天氣現象生命史短，空間範圍小，但變化劇烈，往往會造成人們生命財產損失重的災害。

二 研究中尺度氣象學的意義

世界上，頻數最高的自然災害是氣象災害（有人估計約占自然災害的 70%），其中，由中尺度天氣造成的重大災害佔有很大的比例。

中國是一個多暴雨的國家，洪澇災害頻繁，主要集中在江淮流域、黃河流域和華南地區。例如，

“75.8”（1975 年 8 月 5-7 日）河南特大暴雨，三天累計雨量達 1605mm，經濟損失數億元(RMB)，幾萬人喪生。

1991 年 5-7 月江淮大暴雨，直接經濟損失 600 億元 (RMB)，死亡 1163 人。

1994 年華南特大暴雨洪澇災害，廣東直接經濟損失 286 億元 (RMB)，死亡 312 人。

1998 年 6-8 月長江中下游洪澇災害，直接經濟損失 1666 億元(RMB)，死亡 3004 人。

美國是一個多龍捲風的國家，據統計，1950-1997 年間，
787 個龍捲風/年，死亡 88 人/年。

可見，中尺度氣象學的研究對減災防災有十分重要的意義。深圳市投入了 2700 萬元，建設颱風暴雨預警系統。2000 年 10 月 4 日已通過專家驗收鑒定，處於國內同類系統的領先水平。（據聞，上海市將投資 6000 萬元，建設類似的預警系統，志在達到國際領先水平。）

三 中尺度運動的定義

在大氣動力學中，通常是根據無量綱參數 Rossby 數(R_o)的大小對大氣運動進行分類：

$<$	大尺度運動	(氣壓梯度力~科氏力)
$R_o = 1$	中尺度運動	(梯度力~科氏力~慣性力)
$>$	小尺度運動	(科氏力~慣性力)

這種分類具有明確的物理意義，但是，在實際工作中，很難準確確定理論判斷依據中的參數的數量界限。所以，在實際工作中，有許多不同的半經驗半理論的分類方法提出來，其中，

比較流行的一種是 Orlandi(1975)提出的分類 (表 1)。

表 1 Orlandi 大氣運動水平尺度分類表

大尺度		中尺度			小尺度		
大 α 尺度	大 β 尺度	中 α 尺度	中 β 尺度	中 γ 尺度	小 α 尺度	小 β 尺度	小 γ 尺度
Macro- α	Macro- β	Meso- α	Meso- β	Meso- γ	Micro- α	Micro- β	Micro- γ
$> 10^4$ km	$2-10 \cdot 10^3$ km	200-2000km	20-200 km	2-20 km	200m-2km	20-200 m	< 20 m

四 中尺度運動的基本特徵

(一) 空間尺度小，生命期短

以中- β 尺度為例， $L \sim 20-200$ (km)， $H \sim 10$ (km)，

$$\delta \equiv H/L \sim 10^{-1} - 10^0, \quad (\text{大尺度: } \delta \ll 1)$$

$$\tau \sim 10^0-10^1(\text{小時}), \quad (\text{大尺度: } \tau > 24\text{hr.})$$

(二) 氣象要素的空間梯度大，時間變化迅速，天氣現象激烈。

大尺度鋒面附近：

$$|\nabla p| \sim 1-10 \text{ (hPa/100km)}, \quad |\nabla T| \sim 1-10 \text{ (}^\circ\text{C/100km)}$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| \sim 1-2 \text{ (hPa/hr.)}, \quad U \sim 10-20 \text{ (m/s).}$$

中尺度天氣系統：

$$|\nabla p| \sim 1-3 \text{ (hPa/10km)}, \quad |\nabla T| \geq 3 \text{ (}^\circ\text{C/10km)}$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| \sim 6 \text{ (hPa /15min)}, \quad \left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| \sim 10 \text{ (}^\circ\text{C/15min)}$$

$$U \sim 10-100 \text{ (m/s)} \quad (\text{颱風中最大風速, 飈線陣風}).$$

$$\sim 100 - 200 \text{ (m/s)} \quad (\text{龍捲風})$$

(三) 非地轉和非靜力平衡特徵明顯

$$O(\nabla_h \cdot \vec{V}) \sim O(\zeta) \sim 10^{-4} (S^{-1}),$$

$$O(w) \sim 0.1-1 \text{ (m/s)},$$

§2 層結效應

一 層結內力

密度隨高度變化的流體稱為層結 (或分層) 流體。大氣和海洋 (由於鹽分變化) 都是層結流體。在層結流體中，空氣微團在鉛直方向上同時受到重力 (向下) 和浮力 (向上) 的作用，這兩種力的合力稱為層結內力 (或淨浮力)。定性地說，一個受擾而垂直位移的空氣微團的運動趨勢有三種可能：

返回平衡位置——則稱大氣層結是穩定的。

隨遇平衡——則稱大氣層結是中性的。

加速遠離平衡位置——則稱大氣層結是不穩定的。

爲了定量地表達上述定性概念，考慮如圖 1 所示的受擾垂直位移到達高度 z 處的單位品質氣塊，其體積爲 α ，密度爲 ρ ($= 1 / \alpha$)，環境空氣的密度爲 $\bar{\rho}$ ；則該氣塊在鉛直方向上受力爲：

$$\text{浮力(向上，與 } \vec{k} \text{ 方向一致)} = \alpha \bar{\rho} g \vec{k} \equiv \vec{F}_B, \quad (1)$$

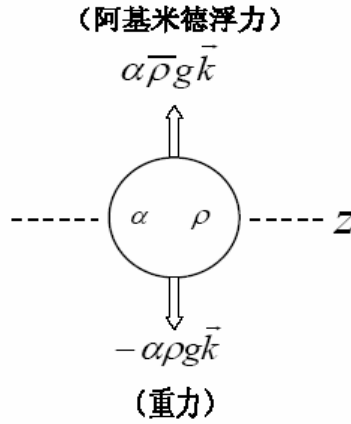


圖 1 層結內力

$$\text{重力(向下，與 } \vec{k} \text{ 方向相反)} = -\alpha \rho g \vec{k} \equiv \vec{F}_g \quad (2)$$

該氣塊所受合力(淨浮力)爲

$$\vec{B} \equiv \vec{F}_B + \vec{F}_g = \alpha g (\bar{\rho} - \rho) \vec{k} \quad (3)$$

$$\text{若令 } \rho' \equiv \rho - \bar{\rho} \quad (\text{氣塊密度與環境密度之差}), \quad (4)$$

則淨浮力可表爲

$$\vec{B} = -\frac{g}{\rho} (\rho - \bar{\rho}) \vec{k} = -g \frac{\rho'}{\rho} \vec{k} \equiv B \vec{k}, \quad (5)$$

$$B \equiv -g \frac{\rho'}{\rho}, \quad (6)$$

顯然，

>	<	向下，	重力大於浮力，
當 $\rho' = 0$	時，有 $B = -g \frac{\rho'}{\rho} = 0$ ，	層結內力	爲零，
<	>	向上，	浮力大於重力，

二 浮力振盪與對流

根據垂直運動方程，層結內力所驅動的運動應滿足

$$\frac{dw}{dt} = -g \frac{\rho'}{\rho}, \quad (7)$$

上式中的 ρ' 與氣層的靜力穩定度有關，爲了顯著地表達這種關係，考慮一個氣塊 A，從 $z=0$ 的高度鉛直位移到達 $z=z$ 的高度（圖 2）的情形。假定在起始高度（ $z=0$ ）上，氣塊的密度（ ρ ）等於環境空氣的密度（ $\bar{\rho}_0$ ），即有

$$\rho = \bar{\rho}_0, \quad \text{在 } z=0, \quad (8)$$

當該氣塊到達 $z=z$ 高度上時，有

$$\text{環境： } \bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} z, \quad (9)$$

$$\text{氣塊： } \rho = \bar{\rho}_0 + \frac{d\rho}{dz} z, \quad (10)$$

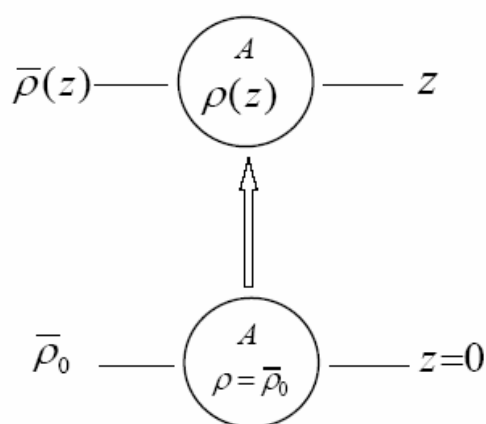


圖 2 垂直位移氣塊的密度擾動

其中， $\partial \bar{\rho} / \partial z$ 爲環境空氣密度的垂直變化率； $d\rho / dz$ 爲氣塊在垂直位移中自身密度隨高度的變化率。於是，可得

$$\rho' \equiv \rho - \bar{\rho} = \left(\frac{d\rho}{dz} - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right) z, \quad (11)$$

$$B \equiv -g \frac{\rho'}{\rho} = -\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right) z \equiv -N^2 z, \quad (12)$$

$$\text{式中， } N^2 \equiv \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right) \approx \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\frac{d\rho}{dz} - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right), \quad (13)$$

是一個靜力穩定度參數。利用（12）式，（7）式可改寫爲

$$\frac{dw}{dt} = -N^2 z, \quad (14)$$

$$\text{或 } \frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0, \quad (15)$$

這是一個含參數 N^2 的二階微分方程，其解的特徵取決於 N^2 的數值特徵：

(i) 當 $N^2 > 0$ 時，方程的特徵根為複數： $\lambda_{1,2} = \pm iN$ ， $i \equiv \sqrt{-1}$ 。方程具有如下形式的解：

$$z = A \cos Nt + B \sin Nt, \quad (16)$$

其中，A 和 B 為待定任意常數。這是振動型解，振盪頻率為 N 。這種振盪稱為浮力振動，或稱為 **Brunt-Väsälä 振動**，而由式 (13) 定義的 N 稱為 **Brunt-Väsälä 頻率**。在這種情況下，受擾氣塊將會繞著平衡位置振動，這種振動的傳播便形成了一種波動，稱為**重力內波**。這時，對應的大氣層結屬於靜力穩定層結。

(ii) 當 $N^2 < 0$ 時，方程的特徵根為實數： $\lambda_{1,2} = \pm \tilde{N}$ ， $\tilde{N} \equiv |N| > 0$ ，對應的解是隨時間 t 呈指數變化的解：

$$z = A \exp(\tilde{N}t) + B \exp(-\tilde{N}t) \quad (17)$$

其中，A 和 B 為待定任意常數。顯然，這時，該空氣微團的位移 (Z) 將隨時間呈指數增長，即它將加速遠離其平衡位置，層結屬於不穩定層結。這種解屬對流型解。

(iii) $N^2 = 0$ ，這時，有

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad (18)$$

氣塊沒有加速度，屬隨遇平衡的情形，層結為中性層結。

概括起來說：

$$\begin{array}{ccc} > & \text{穩 定} & \\ \text{當 } N^2 = 0, & \text{分別對應} & \text{中 性 層 結。} \\ < & & \text{不 穩 定} \end{array} \quad (19)$$

對於大氣和海洋，靜力穩定度參數 N^2 還可有不同的運算式。

1 對於大氣，假定：過程是絕熱的，過程是準靜力過程 ($p = \bar{p}$)

$$\text{位溫公式爲：} \quad \theta = T \left(\frac{P_0}{p} \right)^\pi, \quad (20 \text{ a})$$

其中， $\pi \equiv R/C_p \approx 0.286$ ， $P_0 = 1000 \text{ hPa}$ 。利用狀態方程，上式可改寫爲

$$\theta = \frac{p}{\rho R} P_0^\pi p^{-\pi} = \rho^{-1} p^{1-\pi} (P_0^\pi / R), \quad (20 \text{ b})$$

由此可知，對於環境大氣，有

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + (1-\pi) \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}, \quad (21)$$

對於絕熱垂直位移的空氣塊，有

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + (1-\pi) \frac{1}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dz} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + (1-\pi) \frac{1}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dz}, \quad (22)$$

對於絕熱運動， $d\theta/dz = 0$ ，於是，有

$$N^2 \equiv \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\frac{d\rho}{dz} - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right) \approx \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{g}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma) , \quad (23)$$

其中，

$$\gamma_d \equiv \frac{g}{C_p} , \quad \text{乾絕熱減溫率} , \quad (24)$$

$$\gamma \equiv -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} , \quad \text{大氣層結減溫率} , \quad (25)$$

2 對於海洋。流體微團在移動過程中的密度變化可略而不計，即近似有

$$\frac{d\rho}{dz} \approx 0 , \quad (26)$$

所以有

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} , \quad (27)$$

§3 中尺度運動的控制方程組

大氣運動的基本方程組可表為

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\vec{k} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{D} , \end{array} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 , \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{C_p} \frac{Q}{T} , \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \rho R T , \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = T \left(\frac{P_0}{p} \right)^\pi , \end{array} \right. \quad (32)$$

其中，

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} , \quad (33)$$

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} , \quad (34)$$

$\vec{V}(u, v, w)$ 為空氣運動的速度矢； p, ρ, T, θ 分別為氣壓、空氣密度、氣溫和位溫； $\vec{\Omega}$ 為地

球旋轉角速度矢； g, R 和 C_p 分別為重力加速度、空氣的比氣體常數和定壓比熱； Q 和 \bar{D} 分別為單位品質空氣的非絕熱加熱率和摩擦力。

方程組 (28) - (32) 描述大氣中各種時、空尺度的運動，要研究中尺度運動，需根據中尺度運動的主要特徵對它進行簡化，以建立適合中尺度運動的控制方程組。

一 熱力學變數的尺度分析

設熱力學變數（如 p, ρ, T, θ 等）可以表為（以氣壓為例）

$$p(x, y, z, t) = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t), \quad (35)$$

其中， $\bar{p}(z)$ 為水平分佈均勻的參考狀態或基本狀態（例如靜力狀態 $\bar{V} = 0$ ）下的氣壓。

$p'(x, y, z, t)$ 為氣壓對基本狀態的偏差或擾動量。根據經驗事實，我們可以假定：

$$\frac{p'}{\bar{p}} \ll 1, \quad \text{或} \quad p' \ll \bar{p}, \quad (36)$$

例如，即使是在熱帶風暴條件下，地面氣壓變化一般也很少超過 40hPa，因此，近似地有

$$p' \sim 40 \text{ hPa}, \quad \bar{p} \sim 10^3 \text{ hPa}, \quad \frac{p'}{\bar{p}} \sim \frac{4}{100} \ll 1$$

類似地，我們可假定

$$\rho' \ll \bar{\rho}, \quad T' \ll \bar{T}, \quad \theta' \ll \bar{\theta}, \quad (37)$$

此外，基本場的熱力學變數在垂直方向上的改變量可以達到其本身的大小（尺度）。以氣壓為例，有

$$O\left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right) \sim \frac{1}{\bar{P}} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta z} \sim \frac{1}{H}, \quad (\Delta \bar{p} \sim \bar{p}), \quad (38)$$

其中， H 和 \bar{P} 分別為運動的垂直尺度和基本氣壓的特徵尺度。由靜力學方程，應有

$$\frac{1}{H} \sim O\left(\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right) \sim \frac{1}{\bar{p}} (\bar{\rho} g) = \frac{g}{R\bar{T}}, \quad (39)$$

即

$$H = \frac{R\bar{T}}{g}, \quad \text{稱為標高 (scale height)}, \quad (40)$$

類似式 (38)，有

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \sim \frac{1}{H}, \quad \frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \sim \frac{1}{H}, \quad \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \sim \frac{1}{H}, \quad (42)$$

二 運動方程的簡化與對流近似

運動方程式 (28) 爲

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\vec{k} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{D}$$

右邊第一、二項可近似爲

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\vec{k} &= -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \nabla(\bar{p} + P') - g\vec{k} \\ &\approx \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \vec{k} + \nabla P'\right) - g\vec{k} \\ &= \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g\right) \vec{k} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P' - \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \vec{k} + \nabla P'\right) \\ &\approx -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P' - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \vec{k}, \quad \left(\text{略去了 } -\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \nabla P'\right), \end{aligned} \quad (43)$$

於是，運動方程 (28) 就簡化爲

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P' - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \vec{k} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{D}, \quad (44)$$

式中右邊第二項就是前面討論過的層結內力或淨浮力。概括說來，在求得上式的過程中，我們採用了所謂的“對流近似”，即假定了：

- (1) 氣壓梯度力項中略去了密度擾動的影響，
- (2) 在與重力相聯繫的項中，保留密度擾動的影響。即保留熱膨脹（浮力）效應。

三 連續方程的簡化

質量連續方程可表爲

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \quad (45)$$

注意到， $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'$ ，並利用近似 $\rho' \ll \bar{\rho}$ ，上式可近似地表爲

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \rho'}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0, \quad (46)$$

取時間尺度爲平流時間尺度： $\tau = L/U$ ，

假定運動的形態比爲小量： $\delta \equiv D/L \ll 1$ ，

垂直速度的尺度爲： $W \equiv O(w) \sim \frac{D}{L} U = \delta U < U$

U 和 W 分別爲運動的特徵水平速度和垂直速度； L 和 D 分別爲運動的水平尺度和垂直尺度。(46) 式左邊各項的大小可估計爲：

$$O\left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\rho'}{dt}\right) \sim \frac{U}{L} \left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \ll \frac{U}{L},$$

$$O\left(\frac{w}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\right) \sim \frac{W}{H} \sim \left(\frac{D}{H}\right) \frac{U}{L}, \quad (H \text{ 爲大氣的標高})$$

$$O\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \leq \frac{U}{L},$$

$$O\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \sim \frac{W}{D} \sim \frac{U}{L},$$

考慮如下兩種典型情況：

(一) $D/H \sim 1$ (深厚系統)。這時，作為第一近似，(46)式可簡化為

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{U}{L}} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0, \quad (47)$$

$$\frac{U}{L} \quad \frac{W}{D} \quad \frac{W}{H}$$

這是非彈性 (Anelastic) 近似連續方程。它保留了基本場密度垂直變化的影響，大氣被視為準不可壓縮的，或者說，部分地考慮了大氣的壓縮性。

(二) $D/H < 1$ (淺薄系統)。這時，方程(46)可進一步簡化為

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (48a)$$

或 $\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (48b)$

這就是所謂的鮑辛尼斯克 (Boussinesq) 近似下的連續方程。它完全略去了大氣的可壓縮性。

四 狀態方程

對於大氣，狀態 (物態) 方程可表為

$$p = \rho RT, \quad (49)$$

上式取對數微分，有

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}, \quad (50)$$

注意， $\frac{1}{p} = \frac{1}{\bar{p} + p'} = \frac{1}{\bar{p}(1 + p'/\bar{p})} \approx \frac{1}{\bar{p}},$

類似地，有

$$\frac{1}{T} \approx \frac{1}{\bar{T}}, \quad \text{及} \quad \frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{\bar{\rho}},$$

(50) 式可表為

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{T'}{\bar{T}}, \quad (51)$$

利用位元溫公式，狀態方程還可表為其他形式。位溫定義為：

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{p} \right)^\pi, \quad (\pi \equiv R/C_p, \quad P_0 = 1000hPa) \quad (52)$$

上式取對數，並將 $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ ， $T = \bar{T} + T'$ 和 $p = \bar{p} + p'$ 代入，得

$$\ln[\bar{\theta}(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}})] = \ln[\bar{T}(1 + \frac{T'}{\bar{T}})] - \pi \ln[\bar{p}(1 + \frac{p'}{\bar{p}})] + \pi \ln P_0, \quad (53)$$

由於

i) 平均量滿足

$$\ln \bar{\theta} = \ln \bar{T} - \pi \ln \bar{p} + \pi \ln P_0, \quad (54)$$

$$\text{ii) } \ln(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}}) \approx \frac{\theta'}{\bar{\theta}}, \quad \ln(1 + \frac{T'}{\bar{T}}) \approx \frac{T'}{\bar{T}}, \quad \ln(1 + \frac{p'}{\bar{p}}) \approx \frac{p'}{\bar{p}}, \quad (55)$$

式(53)可簡化為

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} = \frac{T'}{\bar{T}} - \pi \frac{p'}{\bar{p}}, \quad (56)$$

若利用(51)式，消除上式中的 T'/\bar{T} ，得

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}}, \quad (57)$$

$$\gamma \equiv (1 - \pi)^{-1} = \frac{C_p}{C_v} \approx 1.4, \quad (58)$$

式中， C_v 和 C_p 分別為定容比熱和定壓比熱。這樣，我們就有了三種不同形式的狀態方程，

分別由(51)、(56)和(57)式表述。

若運動系統是淺薄的，狀態方程還可進一步簡化。對於浮力所驅動的運動，浮力項當然是重要的，故

$$O(g \frac{\rho'}{\bar{\rho}}) \geq O(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p') \sim O(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z}) \sim \frac{1}{D} O(\frac{p'}{\bar{p}}) \sim \frac{gH}{D} O(\frac{p'}{\bar{p}}), \quad (59)$$

上式最後一步用了關係： $\bar{\rho} = \bar{p} / R\bar{T} = \bar{p} / gH$ [參見(39)或(40)式]。上式相當於

$$O(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}) \geq \frac{H}{D} O(\frac{p'}{\bar{p}}), \quad (60)$$

由此可得

$$O\left[\frac{p' / (\gamma \bar{p})}{\rho' / \bar{\rho}}\right] \leq \frac{D}{\gamma H} < 1, \quad (61)$$

所以，對於淺薄系統，(51) 式中的最後一項是一個相對小項，可以略去，於是，狀態方程可進一步簡化為

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}}, \quad (62)$$

這表明，對於淺薄系統，密度的變化只由溫度變化決定，氣壓變化的影響可略而不計。所以，對於淺薄系統，運動方程可表為

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \vec{k} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{D}, \quad (63)$$

五 熱力學方程

熱力學方程一般可表為

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{Q}{C_p T}, \quad (64)$$

因為

$$\ln \theta = \ln\left[\bar{\theta}\left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right)\right] \approx \ln \bar{\theta} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}}, \quad (65)$$

代入上式，得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right) + w \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{Q}{C_p \bar{T}}, \quad (66)$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right) + \frac{N^2}{g} w = \frac{Q}{C_p \bar{T}}, \quad (67)$$

其中，

$$N^2 \equiv \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z}, \quad (68)$$

N 為 Brunt-Väsälä 頻率。

六 閉合方程組

至此，我們得到了兩套動力方程組：

(一) anelastic(非彈性)近似基本方程組

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \vec{k} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{D} \\ \nabla \cdot \bar{\rho} \vec{V} = 0, \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad (69)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \frac{N^2}{g} w = \frac{Q}{C_p \bar{T}},$$

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}},$$

(二) Boussinesq 近似基本方程組

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \vec{k} - 2\bar{\Omega} \times \vec{V} + \vec{D}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \frac{N^2}{g} w = \frac{Q}{C_p \bar{T}}, \\ \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}}, \end{array} \right. \quad (70)$$

在本節最後，我們將 anelastic 近似和 Boussinesq 近似的要點概括如下：

- i) 兩種近似都採用“對流近似”。即在氣壓梯度力項中，忽略密度擾動的影響，但是在與重力相聯繫的項中，保留密度擾動的作用，即保留在中尺度運動中起重要作用的層結（浮力）效應。
- ii) 在質量連續方程中，部分或完全忽略彈性的影響，濾掉了高頻聲波。在數學上，簡化了方程組，在物理上，突出了中尺度運動的主要特徵（如層結效應）。
- iii) anelastic 近似考慮了基本場密度的垂直變化，部分考慮了彈性的影響，可用於深厚系統；Boussinesq 近似完全忽略彈性，只適應於淺薄系統。

§4 非均勻層結大氣中的慣性重力內波

假定：i) 基本氣流為零，

ii) N^2 是時間和空間上的緩變函數。

Boussinesq 近似下的線性化擾動基本方程組可表為（略去了表示擾動的撇號）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\bar{\rho}} \right), \quad (71) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\bar{\rho}} \right), \quad (72) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\bar{\rho}} \right) + g \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right), \quad (73) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta}{\bar{\rho}} \right) + \frac{N^2}{g} w = 0, \quad (74)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (75)$$

這是一個關於五個未知函數 $(p/\bar{\rho})$, $(\theta/\bar{\rho})$, u , v , w 的閉合方程組。消除其他變數，可得如下關於 w 的微分方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \nabla_h^2 w + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -2 \left(\frac{\partial N^2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N^2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - w \nabla_h^2 N^2, \quad (76)$$

其中，

$$\nabla_h \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (77)$$

$$\nabla_h^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (78)$$

方程 (76) 即本節討論慣性重力內波的支配方程。方程右邊的項可視為是代表靜力穩定度參數 N^2 的非均勻水平分佈與擾動垂直速度非均勻水平分佈的偶合作用的強迫項。由於介質（層結）的非均勻性，使得 (76) 成爲一個變係數的偏微分方程。通常只能用近似方法求解。我們可用多重尺度方法求解之。

引入緩變數：

$$X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y, \quad Z = \varepsilon z, \quad T = \varepsilon t, \quad (79)$$

這裏 $\varepsilon < 1$ 是一個小參數。設 (76) 式的解可表爲如下的緩變波包：

$$w = W(X, Y, Z, T) \exp[i\theta(x, y, z, t)], \quad (80)$$

$$\theta = kx + ly + mz - \sigma t + \phi, \quad (81)$$

k, l, m, σ 和 ϕ 分別爲小， x, y, z 方向上的波數、圓頻率和初相角 ($t = 0$, 原點的相位)。假

定： k, l, m, σ 等也是緩變函數，且由於

$$k \equiv \frac{\partial \theta}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad l \equiv \frac{\partial \theta}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial Y}, \quad (82)$$

故有

$$\frac{\partial k}{\partial Y} = \frac{\partial l}{\partial X}, \quad (83)$$

且類似地有

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial X}, \quad \frac{\partial l}{\partial Z} = \frac{\partial m}{\partial Y}, \quad (84)$$

及

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} = -\frac{\partial k}{\partial T}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Y} = -\frac{\partial l}{\partial T}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Z} = -\frac{\partial m}{\partial T}, \quad (85)$$

將解式中的振幅函數表示為如下的漸近展式：

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots, \quad (86)$$

並將解式代入支配方程 (76)，按 ε 次幕歸併同類項，令 ε 同次幕項的係數之和為零，則可得各階近似方程。

一 零階[$O(\varepsilon^0)$ 階]近似波的頻率方程

取方程的 $O(\varepsilon^0)$ 階近似，得如下頻率方程：

$$\sigma^2 = \frac{K_h^2 N^2 + m^2 f^2}{K^2}, \quad (87)$$

其中，

$$K^2 \equiv K_h^2 + m^2, \quad K \equiv (K_h^2 + m^2)^{1/2} \text{ 為全波數}, \quad (88)$$

$$K_h^2 \equiv k^2 + l^2, \quad K_h \equiv (k^2 + l^2)^{1/2} \text{ 水平波數}, \quad (89)$$

K 和 K_h 分別為全波數和水平波數。以 (87) 式為頻率方程或頻散關係的波動在地球旋轉

($f \neq 0$) 與非中性層結 ($N^2 \neq 0$) 的共同作用下產生的波動，稱為“慣性重力內波”。

可有兩種特殊情形：

(一) 重力內波。

當 $f = 0$ (無旋轉效應) 時，(87) 式可簡化為

$$\sigma^2 = \left(\frac{K_h}{K}\right)^2 N^2, \quad (90)$$

這是純重力內波的頻率方程。其頻率的上限為 $|N|$ ，即 $|\sigma| \leq |N|$ 。

當 $N^2 > 0$ ，層結穩定， σ 為實數，波動穩定。

$N^2 = 0$ ，層結中性， $\sigma = 0$ ，對應定常解，不存在傳播的重力波。

$N^2 < 0$ ，層結不穩定， σ 為虛數，波動不穩定。

可見，只有當層結穩定時，才可能存在穩定的純重力內波。

重力內波是在穩定層結條件下，垂直受擾氣塊將會繞其平衡位置振動(浮力振動)及與

之相伴隨的水平輻散輻合傳播出去的結果。如圖 3 所示，當 A 點出現上升運動($w' > 0$)時，其上空將出現 $\partial w'/\partial z < 0$ 伴隨水平輻散 ($D > 0$)，低層將出現 $\partial w'/\partial z > 0$ 伴隨水平輻合 ($D < 0$) 的情形；而在鄰近的 B 點和 C 點的高、低空將分別出現水平輻合 ($D < 0$) 和輻散 ($D > 0$)，使 B 點和 C 點出現下沉運動。如此，A 點的浮力振動逐漸向外傳播出去，便形成了重力內波。

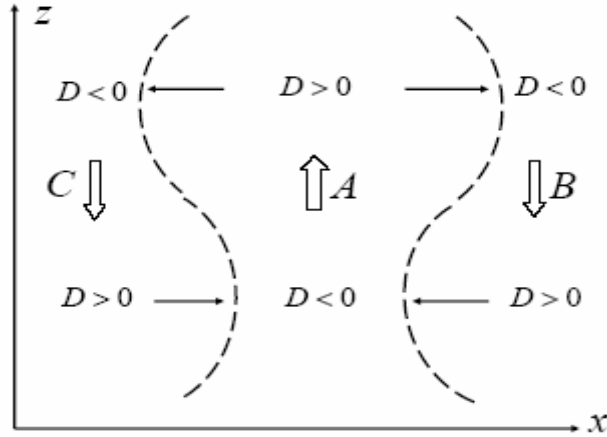


圖 3 重力內波形成與傳播機制

根據重力內波的形成條件和傳播機制可知，若假定：

- (i) 大氣層結為中性，或
 - (ii) 運動是水平無輻散的（如地轉運動），或
 - (iii) 運動是純水平運動（不存在浮力振動），
- 則可排除重力內波。

（二）慣性內波

當 $N^2 = 0$ （中性層結）時，(87) 是變為

$$\sigma^2 = \frac{m^2 f^2}{K^2}, \quad (91)$$

這是純慣性內波。它是純慣性振動通過水平輻散輻合的傳播所形成的波動。

當重力與旋轉效應共同作用時，波動稱為慣性重力內波，可視為受旋轉影響的重力內波。波動不穩定（ σ 為虛數）的必要條件為

$$K_h^2 N^2 + m^2 f^2 < 0, \quad (92)$$

可見，地球的旋轉（ $f \neq 0$ ）對重力內波起穩定作用。臨界靜力穩定度可表為

$$(N^2)_c = -\left(\frac{m}{K_h}\right)^2 f^2 = -\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_z}\right) f^2, \quad (93)$$

λ_h 和 λ_z 分別為慣性重力內波的水平 and 垂直波長。若取

$$\lambda_h \sim 400\text{km} = 4 \times 10^5 \text{m}, \quad \lambda_z = H/2 = 0.5 \times 10^4 \text{m},$$

$$f = 2\Omega = 1.58 \times 10^{-4} \text{S}^{-1},$$

$$\text{則 } (N^2)_c = -1.36 \times 10^{-4} \text{S}^{-2},$$

可見，在旋轉效應的作用下，即使層結是不穩定的，只要不穩定層結不超越上述臨界值，則仍可有穩定的慣性重力內波。平均而言，大氣是靜力穩定的，一般， $N \sim 10^{-2} - 10^{-3} \text{S}^{-1}$ 。

二 慣性重力內波的相位傳播與能量傳播

由頻率方程（87）可求得慣性重力內波的群速度分量分別為：

$$C_{gx} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{km^2(N^2 - f^2)}{\sigma K^4}, \quad (94)$$

$$C_{gy} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial l} = \frac{lm^2(N^2 - f^2)}{\sigma K^4}, \quad (95)$$

$$C_{gz} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial m} = -\frac{mK_h^2(N^2 - f^2)}{\sigma K^4}, \quad (96)$$

相速度則可一般地表為

$$\vec{C} = \frac{\sigma}{K} \left(\frac{\vec{K}}{K} \right) = \frac{\sigma}{K^2} (k\vec{i} + l\vec{j} + m\vec{k}), \quad (97)$$

於是，用直接驗算的方法不難證明，對於慣性重力內波，有如下關係成立：

$$\vec{C} \cdot \vec{C}_g = C_x C_{gx} + C_y C_{gy} + C_z C_{gz} = 0, \quad (98)$$

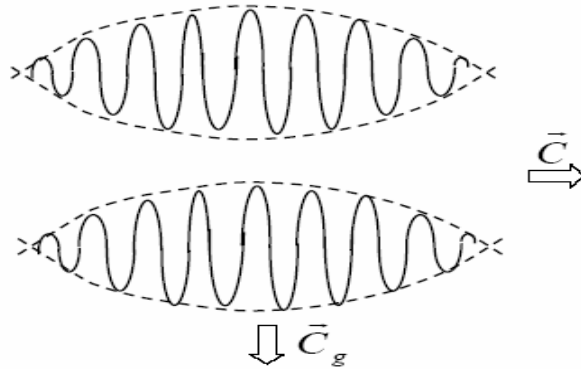


圖 4 慣性重力內波的相位傳播與能量傳播

$$\text{即 } \vec{C} \perp \vec{C}_g, \quad (99)$$

這表明，慣性重力內波的能量傳播方向與相位傳播方向垂直（圖 4）。

三 層結變化對重力波的頻率和波長變化的影響

根據非均勻介質中波動的頻率與波數變化的基本方程，有

$$\frac{1}{\sigma} \frac{D_g \sigma}{DT} = \frac{K_h^2}{2\sigma^2 K^2} \frac{\partial N^2}{\partial T}, \quad (100)$$

$$\frac{D_g K_h^2}{DT} = -\frac{K_h^2}{\sigma^2} \bar{C}_h \cdot \nabla_h N^2, \quad (101)$$

$$\frac{D_g m^2}{DT} = -\frac{K_h^2}{\sigma^2} C_z \frac{\partial N^2}{\partial z}, \quad (102)$$

其中，

$$\bar{C}_h \equiv \frac{\sigma}{K^2} \bar{K}_h, \quad \text{水平全相速}, \quad (103)$$

$$C_z \equiv \frac{\sigma}{K^2} m, \quad \text{全相速的 } z \text{ 分量}, \quad (104)$$

由 (100) - (102) 式，可將層結的非均勻與非定常性對重力波頻率與波長變化的影響可概述如下：

(i) 靜力穩定度變化對慣性重力內波頻率變化的影響：

若大氣層結穩定度隨時間增大， $\partial N^2 / \partial T > 0$ ，則波的頻率趨於增大， $\frac{1}{\sigma} \frac{D_g \sigma}{DT} > 0$ ；

若大氣層結穩定度隨時間減小， $\partial N^2 / \partial T < 0$ ，則波的頻率趨於減小， $\frac{1}{\sigma} \frac{D_g \sigma}{DT} < 0$ ；

(ii) 靜力穩定度水平變化對慣性重力內波水平波長變化的影響：

$$\text{當 } \bar{C}_h \cdot \nabla_h N^2 \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}, \text{ 波動向 } \begin{matrix} \text{較穩定} \\ \text{不穩定} \end{matrix} \text{ 地區傳播時，波的水平波長趨於 } \begin{matrix} \text{伸長} \left(\frac{D_g K_h^2}{DT} < 0 \right) \\ \text{縮短} \left(\frac{D_g K_h^2}{DT} > 0 \right) \end{matrix},$$

(iii) 靜力穩定度的垂直變化對慣性重力內波的垂直波長變化的影響：

$$\text{當 } C_z \frac{\partial N^2}{\partial z} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}, \text{ 波動向 } \begin{matrix} \text{較穩定} \\ \text{不穩定} \end{matrix} \text{ 地區傳播時，波的垂直波長趨於 } \begin{matrix} \text{伸長} \left(\frac{D_g m^2}{DT} < 0 \right) \\ \text{縮短} \left(\frac{D_g m^2}{DT} > 0 \right) \end{matrix},$$

對於定常介質，在現在的情形，即層結不隨時間變化，則波在傳播過程中，其頻率不會發生改變；如果介質是空間分佈均勻的，在現在的情形，即層結在空間上沒有變化，則慣性重力內波在傳播過程中，其波長也將不隨時間變化。

四 一階近似與重力波波包的發展

方程 (76) 式得 $O(\varepsilon^1)$ 階近似可表為

$$\frac{\partial W_0^2}{\partial T} = -\nabla \cdot (\vec{C}_g W_0^2) - \frac{W_0^2}{\sigma} \frac{D_g \sigma}{DT} + \frac{m^2 W_0^2}{K^2 K_h^2} \frac{D_g K_h^2}{DT} - \frac{W_0^2}{K^2} \frac{D_g m^2}{DT}, \quad (105)$$

注意，在得到上式時，利用了如下關係

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{C}_g = & \frac{1}{\sigma K^2} [(N^2 - \sigma^2) \left(\frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\partial l}{\partial Y} \right) + (f^2 - \sigma^2) \frac{\partial m}{\partial Z} \\ & + \vec{K}_h \cdot \nabla_h N^2 - \vec{K} \cdot \nabla \sigma^2 - \vec{C}_g \cdot \nabla (\sigma K^2)], \end{aligned} \quad (106)$$

及

$$\vec{K} \cdot \nabla \sigma^2 = -\sigma \frac{\partial K^2}{\partial T}, \quad (107)$$

借助 (100) - (102) 式，(105) 式可進一步改寫為

$$\frac{\partial W_0^2}{\partial T} = -\nabla \cdot (\vec{C}_g W_0^2) - \alpha^2 \frac{\partial N^2}{\partial T} - \beta^2 \vec{C}_h \cdot \nabla_h N^2 + \gamma^2 C_z \frac{\partial N^2}{\partial z}, \quad (108)$$

式中，

$$\alpha^2 \equiv \frac{W_0^2 K_h^2}{2\sigma^2 K^2} > 0, \quad (109)$$

$$\beta^2 \equiv \frac{W_0^2 m^2}{\sigma^2 K^2} > 0, \quad (110)$$

$$\gamma^2 \equiv \frac{W_0^2 K_h^2}{\sigma^2 K^2} > 0, \quad (111)$$

在擾動所在的區域 (τ) 上積分 (108) 式，並假定，在區域邊界上，擾動為零，可得

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{\tau} W_0^2 d\tau = -\int_{\tau} \alpha^2 \frac{\partial N^2}{\partial T} d\tau - \int_{\tau} \beta^2 \vec{C}_h \cdot \nabla_h N^2 d\tau + \int_{\tau} \gamma^2 C_z \frac{\partial N^2}{\partial z} d\tau, \quad (112)$$

重力波包發展的判斷依據為

$$\text{當 } \frac{\partial}{\partial T} \int_{\tau} W_0^2 d\tau = 0 \text{ 時，} \quad \begin{array}{l} > & \text{發展} \\ & \text{稱慣性重力內波波包} \\ < & \text{中性，} \\ & \text{衰減} \end{array} \quad (113)$$

於是，由 (112) 式可見，

- (1) 當 $\frac{\partial N^2}{\partial T} < 0$ ，對應穩定度隨時間 減小
增大，慣性重力內波波包將趨於 發展
衰減，
- (2) 當 $\vec{C}_h \cdot \nabla_h N^2 < 0$ 時，波在 水平方向 上向穩定度較 小
大 區傳播，波趨於 發展
衰減，
- (3) 當 $C_z \frac{\partial N^2}{\partial z} < 0$ 時，波在 垂直方向 上向穩定度較 小
大 區傳播，波趨於 發展
衰減，

五 重力波發展-破碎-激發對流的機制
 頻散關係 (87) 可改寫為

$$\sigma^2 = \frac{m^2}{K^2}(\delta^2 N^2 + f^2) \quad , \quad (114)$$

$$\delta^2 \equiv \frac{K_h^2}{m^2} = \frac{D^2}{L^2} \quad , \quad (115)$$

D, L 分別為重力波的水平波長和垂直波長。令 $\mu = (\delta^2 N^2 + f^2)$ ，則當 $\mu > 0$ 時，對應於穩定的重力波解；若 $\mu < 0$ ，則解的振幅隨時間呈指數增長，即屬於局地對流型解。

$\mu = \mu_c = 0$ 則是區分重力波與局地對流的臨界狀態，相應的臨界水平波長為

$$L_c = D \frac{|N|}{f} \quad , \quad (116)$$

只有水平波長大於臨界波長 ($L > L_c$) 的時候，才能繼續維持波動形式。當水平波長小於臨界波長時，只會有局地對流解，即

即 當 $L > L_c$ 時，對應 波 型 解 (穩定的重力波)，
 當 $L < L_c$ 時，對應 時間指數型解 (局地對流型解)

前面的討論已說明，當重力波在水平方向上從穩定度較大的地區向穩定較小的地區傳播時，

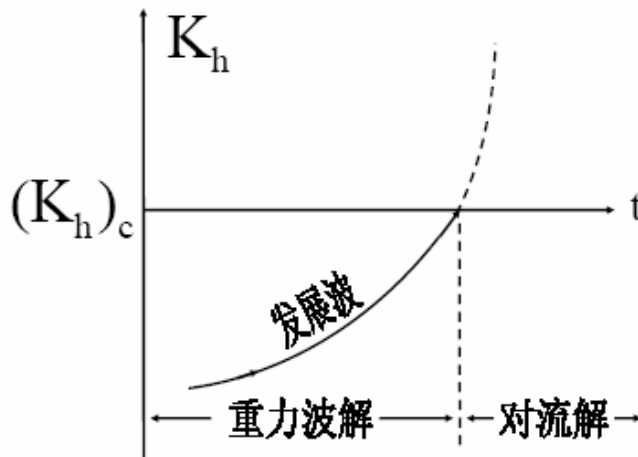


圖 5 重力波發展、水平波長減小 (波數增大)、破碎示意圖

其水平波長趨於減小，當波長減小到小於臨界波長時，波動不能繼續維持，而是要趨於破碎，轉化為局地對流 (圖 5)。若取

$$D \sim 10\text{km} \quad , \quad f = 10^4 \text{S}^{-1} \quad ,$$

則 當 $|N| = 10^{-2} \text{S}^{-1}$ 時， $L_c \approx 10^3 \text{km}$ ，

$$|N| = 10^{-3} \text{S}^{-1} \text{時， } L_c \approx 10^2 \text{ km} \text{，}$$

概括起來，非均勻層結大氣中慣性重力內波發展、破碎、激發對流的可能機制可用如下示意圖表示：

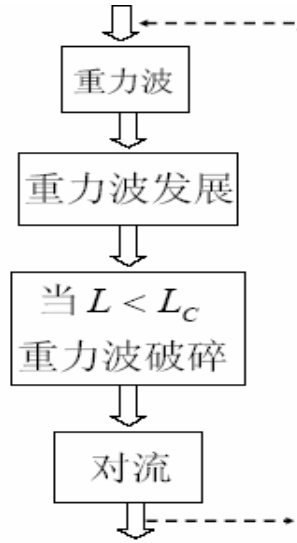


圖 6 慣性重力內波發展-破碎-激發對流的概念模型

§5 切變流場中的慣性重力波

一 支配方程組與頻率方程

不計摩擦和非絕熱加熱，Boussinesq 近似下的基本方程組可表為

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho_s} \right) \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho_s} \right) \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_s} \right) + g \frac{\theta}{\theta_s} \text{ ,} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta}{\theta_s} \right) + \frac{N^2}{g} w = 0 \text{ ,} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ ,} \end{array} \right. \quad (117)$$

其中，下標 “S” 表示靜力狀態下的值， N 為 Brunt Väsälä 頻率。令

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \bar{u}(y, z) + u'(y, z, t) \text{ ,} \\ v = v' \quad w = w' \text{ ,} \end{array} \right. \quad (118)$$

$$p^* = \bar{p} + p', \quad \theta^* = \bar{\theta} + \theta',$$

並為簡單起見，假定擾動與 y 無關，則線性化的擾動方程組可表為(略去表示擾動量的撇號)：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \bar{\zeta}_a v + \bar{u}_z w = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho_s} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_s} \right) + g \frac{\theta}{\theta_s}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta}{\theta_s} \right) - \left(f \frac{\bar{u}_z}{g} \right) v + \left(\frac{N^2}{g} \right) w = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad (120)$$

其中， $\bar{\zeta}_a \equiv f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ ，背景流場的絕對渦度， (121)

$$f \bar{u}_z = -g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_s} \right)，背景場的熱力風平衡， \quad (122)$$

引入緩變數：

$$Y = \varepsilon y, \quad Z = \varepsilon z, \quad T = \varepsilon t, \quad (123)$$

ε 為小參數。設方程組 (120) 的解為：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p / \rho_s \\ \theta / \theta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ \Theta \end{bmatrix} \exp(i\hat{\theta}), \quad (124)$$

$$\hat{\theta} \equiv ly + mz - \sigma t, \quad (125)$$

假定 (124) 式右邊的振幅函數都是時間和空間上的緩變函數，並可按小參數 ε 漸近展開為(以 U 為例)：

$$U(Y, Z, T, \varepsilon) = U_0(Y, Z, T) + \varepsilon U_1(Y, Z, T) + \varepsilon^2 U_2(Y, Z, T) + \dots, \quad (126)$$

將其他振幅函數也作類似展開，並將解式代入 (120) 式，可得各階近似方程。首階 (零階) 近似給出如下頻率方程：

$$\sigma^2 = \frac{N^2 l^2 + f m^2 \bar{\zeta}_a + 2 f m l \bar{u}_z}{K^2}, \quad (127)$$

其中， $K^2 = l^2 + m^2$ 是全波數平方。由 (127) 式，可求得群速度分量分別為

$$C_{gy} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial l} = \frac{l(N^2 - \sigma^2) + 2fm\bar{u}_z}{K^2}, \quad (128)$$

$$C_{gz} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial m} = \frac{m(\sigma^2 - f\bar{\zeta}_a) - fl\bar{u}_z}{K^2}, \quad (129)$$

由頻率方程和群速度運算式，不難驗證下式成立：

$$\vec{K} \cdot \vec{C}_g = lC_{gy} + mC_{gz} = 0, \quad (130)$$

即也是相位傳播與波群傳播方向垂直。

二 重力波的發展方程

對於緩變背景場，我們亦假定波參數 σ, l, m 等也是時空緩變函數，且有下列關係成立：

$$\frac{\partial l}{\partial Z} = \frac{\partial m}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Y} = -\frac{\partial l}{\partial T}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Z} = -\frac{\partial m}{\partial T}, \quad (131)$$

一階[$O(\varepsilon^1)$]近似給出波振幅函數 W_0 變化的支配方程為：

$$\begin{aligned} & 2\sigma K^2 \frac{\partial W_0}{\partial T} + W_0 \frac{\partial \sigma K^2}{\partial T} - \sigma K^2 C_{gz} \left[\frac{m}{l} \frac{\partial W_0}{\partial Y} + W_0 \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{m}{l} \right) - \frac{\partial W_0}{\partial Z} \right] \\ & - \sigma K^2 \frac{l}{m} \frac{\partial}{\partial Z} (C_{gy} W_0) - l^2 \sigma W_0 C_{gy} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{K^2}{lm} \right) + \sigma K^2 \frac{\partial}{\partial Y} (C_{gy} W_0) \\ & + lm \sigma W_0 C_{gy} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{K^2}{lm} \right) - \frac{W_0}{\sigma l} (\sigma^2 K^2 + N^2 l^2 + flm\bar{u}_z + \sigma^2 m^2) \frac{\partial l}{\partial T} \\ & - \frac{W_0}{\sigma} [f(\bar{u}_z l + \bar{\zeta}_a m) - \sigma^2 m] \frac{\partial m}{\partial T} = 0, \end{aligned} \quad (132)$$

用 W_0 / σ 乘上式，並利用 (130) 和 (131)，可得

$$\frac{\partial E_0}{\partial T} + \nabla_2 \cdot (\vec{C}_g E_0) = 0, \quad (133)$$

$$E_0 \equiv \sigma \frac{AK^2}{l^2}, \quad (134)$$

其中， $A \equiv |W_0|$ ， (135)

$$\nabla_2 \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial Y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad (136)$$

E_0 可稱為廣義波作用量，(133) 式即是廣義波作用量守恆原理。

令 $\sigma \equiv \Omega(\vec{K}, N^2 \bar{\zeta}_a, \bar{u}_z)$

$$= \pm \left(\frac{N^2 l^2 + fm^2 \bar{\zeta}_a + 2fm\bar{u}_z}{K^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (137)$$

由波的射線理論，有

$$\frac{D_g \sigma}{DT} = \frac{\partial \Omega}{\partial N^2} \frac{\partial N^2}{\partial T} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_a} \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial T} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{u}_z} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial T}, \quad (138)$$

$$\frac{D_g l}{DT} = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial N^2} \frac{\partial N^2}{\partial Y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_a} \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial Y} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{u}_z} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial Y} \right), \quad (139)$$

$$\frac{D_g m}{DT} = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial N^2} \frac{\partial N^2}{\partial Z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_a} \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial Z} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{u}_z} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial Z} \right)$$

其中， $\frac{D_g}{DT} \equiv \frac{\partial}{\partial T} + \vec{C}_g \cdot \nabla_2$, (140)

利用頻率方程 (127) 或 (137)，可由 (139) 和 (140) 式求得：

$$\frac{D_g l^2}{DT} = -(l^2 C_y \frac{\partial N^2}{\partial Y} + fm^2 C_y \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial Y} - 2fl^2 C_z \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial Z}) / \sigma^2, \quad (141)$$

$$\frac{D_g m^2}{DT} = -(l^2 C_z \frac{\partial N^2}{\partial Z} - 2m^2 C_y \frac{\partial \tilde{N}^2}{\partial Y} + fm^2 C_z \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial Z}) / \sigma^2, \quad (142)$$

其中， $C_y \equiv (l^2 / K^2)(\sigma / l)$ 和 $C_z \equiv (m^2 / K^2)(\sigma / m)$ ，分別為全相速 $\vec{C} \equiv (\sigma / K^2)\vec{K}$ 的 y 和 z 方向的分量。在 (142) 式右邊第三項中，利用了熱力風關係 (122) 式求得的如下等式：

$$f \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial Z} = - \frac{\partial}{\partial Y} \left[g \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_s} \right) \right] \equiv - \frac{\partial \tilde{N}^2}{\partial Y}, \quad (143)$$

$$\tilde{N}^2 \equiv g \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_s} \right), \quad (144)$$

在波動所在區域上積分上式，並利用 (141) 和 (142) 式可得重力波的發展方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \iint_s A^2 ds &= 3 \iint_s \left(\frac{Am}{\sigma K} \right)^2 f C_z \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial Z} dS - 2 \iint_s \left(\frac{Am}{\sigma K} \right)^2 C_y \frac{\partial \tilde{N}^2}{\partial Y} dS \\ &\quad - \iint_s \left(\frac{Am^2}{\sigma Kl} \right)^2 f C_y \frac{\partial \bar{\zeta}_a}{\partial Y} dS - \iint_s \left(\frac{Am}{\sigma K} \right)^2 C_y \frac{\partial N^2}{\partial Y} dS + \iint_s \left(\frac{Al}{\sigma K} \right)^2 C_z \frac{\partial N^2}{\partial Z} dS, \quad (145) \end{aligned}$$

三 背景流場的非均性對慣性重力內波發展的影響

(一) 背景場渦度的垂直變化

方程 (145) 式右邊第一項是背景流場絕對渦度隨高度的變化，即熱力風渦度對重力波發

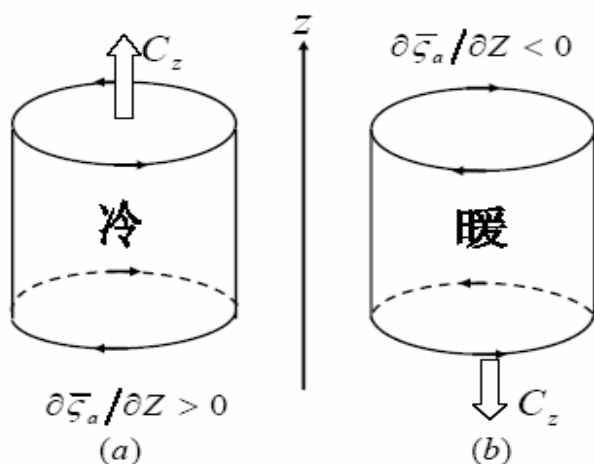


圖 7 冷、暖中心發展重力波的垂直傳播方向

展的影響。當 z 方向上，若波前進方向上背景渦度增大，則有 $C_z \partial \bar{\zeta}_a / \partial z > 0$ ，這一項的貢獻是促進重力波的發展。在熱力風平衡的條件下，流場上的正（負）熱力風渦度該是對應於溫度場上為冷（暖）中心。在溫度場的冷（暖）中心區，分別有利於向上（下）傳播的重力波發展（圖 7）。

(二) 熱力風垂直切變的影響

(145) 式右邊第二項代表背景流場垂直變化（熱力風）的垂直變化（ $\partial \bar{u}_z / \partial Z$ ）對重

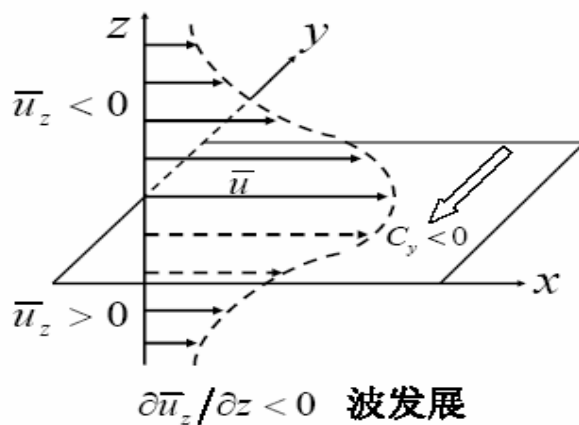


圖 8 熱力風垂直切變對重力波發展的影響

力波發展的影響。由於熱力風關係 (143)，熱力風的垂直切變可視為是一種“層結”的水平變化。一般說來， y 方向上，凡當波傳播方向上正熱力風隨高度增大時，有 $C_y \partial \bar{u}_z / \partial Z > 0$ ，有利於重力波發展。這一項不為零，要求背景流場在垂直方向上具有急流結構。在入圖 8 所示的急流區，有 $\partial \bar{u}_z / \partial Z < 0$ （或 $\partial \tilde{N}^2 / \partial Y > 0$ ），有利於向急流右側傳播的重力波發展。

(三) 流場水平急流結構的影響

(145) 式右邊第三項代表背景流場絕對渦度的水平梯度的影響。凡在 y 方向上，沿波傳播方向絕對渦度減小時，有 $C_y \partial \bar{\zeta}_a / \partial Y < 0$ ，有利於重力波發展。如圖 9 所示的水平流場，平均說來，有 $\partial \bar{\zeta}_a / \partial Y > 0$ ，因此，有利於向急流右側傳播的波發展。

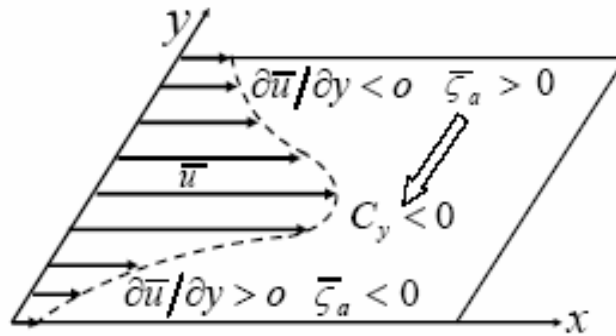


圖 9 水平急流對重力波發展的影響

(四) 觀測實例

Marwitz(1972)統計了 9 個多單體風暴的移動方向和地面至 10 公里的平均風向風速，結果表明，所有這些個例中，風暴的移動方向都是偏向於平均風向的右側。

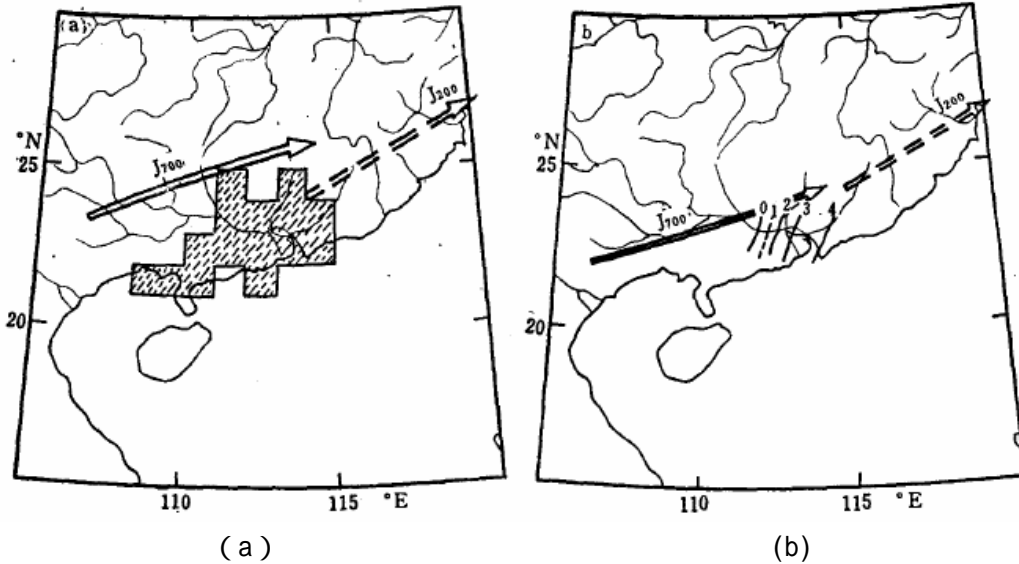


圖 10 1983 年 3 月 1 日珠江三角洲局地強對流天氣落區

圖 10 給出的是 1983 年 3 月 1 日發生在珠江三角洲的一次強風暴過程。這次過程造成了罕見的內河客輪翻沉水難事故。圖 10 (a) 是 2 月 28 日 20 時 (北京時) 700hPa (雙實線箭頭) 和 200hPa (雙虛線箭頭) 急流位置與 28 日 20 時-3 月 1 日 20 時強對流天氣區 (陰影區) 的配置。圖 10(b) 是 3 月 1 日 08 時的急流位置及 00 時—04 時間的雷暴發生的等時線。右圖可見，高低層的急流的水平位置較接近，大致位於同一直線上，且位置變化不大，接近本文模式的條件，強對流天氣落區基本上是位於急流右側。

參考文獻

- [1] 賀海晏, 1989: 非均勻層結大氣中的重力慣性波及其激發對流的物理機制, 熱帶氣象, 5 (1), 8-17。
- [2] 賀海晏, 吳池勝, 漆小平, 1990: 切變流場中慣性重力內波的發展, 熱帶氣象, 6 (3), 203-209。
- [3] 賀海晏, 1991: 大氣中慣性重力波的傳播, 熱帶氣象, 7 (1), 1-7。
- [4] 賀海晏, 1993: 華南春季強風暴背景流場的若干特徵, 大氣科學, 17 (5), 532-539。
- [5] 陸漢城, 楊國祥編著, 《中尺度天氣原理和預報》, 氣象出版社。
- [6] 羅會邦, 賀海晏等, 1994: 《珠江三角洲局地強風暴》, 中山大學出版社。