定理 11. 若 $\{X_i\}_{i=1}^n \sim^{i.i.d.} N(\mu, \sigma^2)$, 則 $\bar{X}_n$ 與 S^2 相互獨立。

欲證明 $\bar{X}_n$ 與 S^2 相互獨立, 我們先證明 $\bar{X}_n$ 與 $X_i - \bar{X}_n$ 相互獨立。首先注意到

$$
\begin{aligned}
X_i - \bar{X}_n &= X_i - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \\
&= X_i - \frac{X_i}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} X_j, \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) X_i - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} X_j,
\end{aligned}
$$

亦即 $X_i - \bar{X}_n$ 爲常態隨機變數之線性函數, 是故 $\bar{X}_n$ 與 $X_i - \bar{X}_n$ 均爲常態隨機變數且爲二元常態。然而, 根據性質 42, 二元常態隨機變數若不相關, 則兩隨機變數爲獨立。[2] 因此, 在附錄中我們證明 $Cov(\bar{X}_n, X_i - \bar{X}_n) = 0$, 即証明了 $\bar{X}_n$ 與 $X_i - \bar{X}_n$ 相互獨立。從而 $\bar{X}_n$ 與 $(X_i - \bar{X}_n)^2$ 相互獨立, 進而推知 $\bar{X}_n$ 與 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ 相互獨立。是故, $\bar{X}_n$ 與 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}$ 相互獨立。

定理 12. 若 $\{X_i\}_{i=1}^n \sim^{i.i.d.} N(\mu, \sigma^2)$, 則

$$\frac{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Proof. 證明參見附錄。 □

定理 13. 若 $\{X_i\}_{i=1}^n \sim^{i.i.d.} N(\mu, \sigma^2)$, 且定義

$$S^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1},$$

則

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Proof. 根據 S^2 之定義與前一定理即可得證。 □

[2] 注意! 一般而言, 兩隨機變數爲獨立隱含它們無相關, 反之則不然。一個特例爲, 若兩隨機變數爲多元常態隨機變數, 則無相關隱含獨立。