6.4.3 標準常態隨機變數的機率值之計算

對於標準常態隨機變數 $Z \sim N(0,1)$, 給定 $a > 0$, 我們可以透過查表計算 $\Phi(a) = P(Z \leq a)$ 的機率值。以下常態分配的對稱性質可以幫助我們查表:

1. $P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0.5$
2. $P(Z \leq -a) = P(Z \geq a)$
3. $P(-a \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq a)$

例 11. 給定 $X \sim N(5, 64)$, 試求機率值 $P(X \geq 17)$。

根據定義 44, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 則

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

因此,

$$\begin{aligned}
P(X \geq 17) &= P(X - 5 \geq 12) \\
&= P(\frac{X-5}{8} \geq 1.5) \\
&= P(Z \geq 1.5) \\
&= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\
&= 0.5 - 0.4332 = 0.0668
\end{aligned}$$

6.5 二元常態分配

若 X, Y 爲兩隨機變數, 且其聯合機率密度函數爲

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{W}{2}},$$

其中

$$W = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right],$$

我們稱 (X,Y) 爲二元常態隨機變數 (bivariate normal random variables) 並以

$$(X,Y) \sim BVN(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \sigma_{XY})$$

表示之。

最後, 我們介紹一個與二元常態分配有關的重要性質, 證明已超出本書範圍, 故省略之。

性質 42. 若 X, Y 爲二元常態隨機變數, 則 X, Y 爲獨立的充分且必要條件爲

$$Cov(X,Y) = 0.$$

亦即, 一般而言, X, Y 獨立隱含 X, Y 零相關, 反之卻不然。然而, 若 X, Y 爲二元常態隨機變數, 則 X, Y 零相關隱含 X, Y 獨立。

6.6 附錄

6.6.1 證明 $W \sim \exp(1)$, $E(W) = Var(W) = 1$

若 $W \sim \exp(1)$, 則 $f(w) = e^{-w}$.

根據分部積分 (integration by parts): $\int u dv = uv - \int v du$, 令 $v = -e^{-w}$, $u = w$, 則 $dv = -e^{-w}(-1) = e^{-w}$。

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_0^\infty w e^{-w} dw \\ &= w(-e^{-w})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-w} dw \\ &= (0-0) - e^{-w}\Big]_0^\infty = 0 - (0-1) = 1 \end{aligned}$$

令 $v = -e^{-w}$, $u = w^2$.

$$\begin{aligned} E(W^2) &= \int_0^\infty w^2 e^{-w} dw \\ &= w^2(-e^{-w})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-w} 2w dw \\ &= (0-0) + 2\int_0^\infty w e^{-w} dw \\ &= 2E(W) \end{aligned}$$