時間序列分析
–總體經濟與財務金融之應用–

緒論: 經濟理論與實證

陳旭昇

2013.12

時間序列資料

- 時間序列資料與我們的生活息息相關, 舉凡股票價格, 實質國內生產毛額 (real GDP), 物價指數, 通貨膨脹率, 利率, 匯率等等, 都是我們在日常總體經濟或是財金議題中, 時時刻刻都會接觸到的資料。

時間序列資料

- 橫斷面資料: 同一時間點橫跨不同個體所取得, 譬如 2007 年各國的國內生產毛額。
- 時間序列資料: 在不同時間點所記錄的資料, 譬如 1972 年到 2007 年的股票價格資料。

時間序列資料

- 低頻資料: 年資料, 季資料, 月資料。
- 高頻資料: 週資料, 日資料, 日内逐筆成交資料。

時間序列資料

我們通常以

$$y_t : t \in \mathbb{T}$$

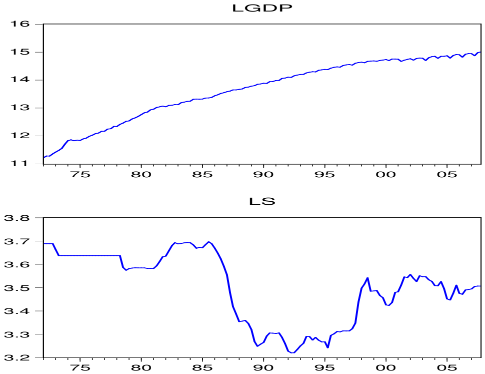
來代表時間序列資料, $\{y_t\}$ 又稱做隨機過程 (stochastic process)。

- $y_t \in \mathbb{S}$ 為一定義在時間域的隨機變數, $\mathbb{S}$ 為狀態空間 (state space), 可以是間斷 (discrete), 也可以是連續 (continuous)。
- $\mathbb{T}$ 稱為一個指標集合 (index set), $\mathbb{T}$ 可以是間斷: $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 也可以是連續: $\mathbb{T} = [0, \infty)$。

時間序列資料

- 有的時間序列看來似乎具有一固定趨勢 (deterministic trend), 如台灣 GDP; 有的則無, 如新台幣兌美元匯率。
- 時間序列資料具有序列相關 (serial correlation), 也就是說, 本期的資料與之前或是之後的資料具相關性。

圖 : 台灣實質 GDP (取自然對數) 以及新台幣兌美元匯率 (取自然對數), 季資料, 1972Q1–2007Q4



時間序列資料

有一種混合時間序列資料與橫斷面資料的資料特別值得一提, 我們稱之為追蹤資料 (panel data), 以

$$y_{it}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

表示之, 其中 i 代表國家, t 代表時間。譬如說, 七大工業國家 2000–2009 以 PPP 衡量之每人實質 GDP 資料。

基本概念

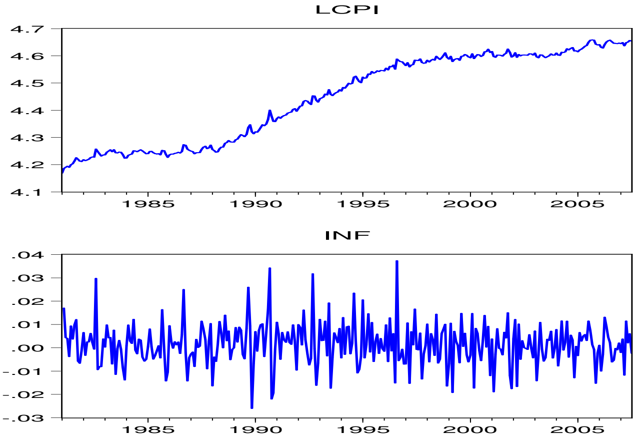
- 若 y_t 代表第 t 期的資料, 則我們稱 y_{t-1} 為 y_t 的落後一期資料。
- y_{t-k} 為 y_t 的落後 k 期資料。
- y_t 與 y_{t-1} 之間的差異稱作 y_t 的一階差分, 以 $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ 表示。
- 如果我們先將變數取自然對數後再取一階差分, 就會得到變數成長率的近似值:

$$\Delta \ln y_t = \ln y_t - \ln y_{t-1} = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}}$$

- 舉例來說, 若 y_t 代表台灣的消費者物價指數, 則 $\Delta \ln y_t$ 就是台灣的物價膨脹率。

基本概念

圖 : 台灣 CPI 與台灣物價膨脹率, 1981M1–2007M7



落後運算元

- 落後運算元 (lag operator) 是一個時間序列分析中常用的線性運算元, 也稱落後運算子或是落後運算因子。

定義 (落後運算元)

L 為一落後運算元使得

$$L^k y_t \equiv y_{t-k}.$$

落後運算元

1. 給定常數 c, $Lc = c$.
2. $(L^k + L^j)y_t = L^k y_t + L^j y_t = y_{t-k} + y_{t-j}$.
3. $L^k L^j y_t = L^k(L^j y_t) = L^k y_{t-j} = y_{t-j-k}$.
4. $L^0 y_t = y_t$.
5. $L^{-k} y_t = y_{t+k}$.
6. 對於 $|\phi| < 1$,

$$\left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots\right) y_t = \frac{1}{1 - \phi L} y_t.$$

落後運算元

- 利用落後運算元, 時間序列 y_t 的一階差分可以表示為:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = y_t - Ly_t = (1 - L)y_t,$$

- k 階差分為:

$$\Delta^k y_t = y_t - y_{t-k} = y_t - L^k y_t = (1 - L^k)y_t.$$

落後運算元

我們還能定義落後運算多項式 (polynomial in the lag operator)。

定義 (p 階落後運算多項式)

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p = \sum_{j=0}^{p} \phi_j L^j,$$

其中 $\phi_0 = 1$.

因此,

$$\begin{aligned}\phi(L) y_t &= (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p) y_t \\ &= y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p}\end{aligned}$$

落後運算元

當 $p \to \infty$, 我們也可以定義無窮期落後運算多項式:

定義 (無窮期落後運算多項式)

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j L^j,$$

其中 $\phi_0 = 1$.

弱定態時間序列

定義 (弱定態時間序列)

如果對於所有 t 及 $t-k$ 而言, 一個時間序列 $\{\ldots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots\}$ 符合以下條件:

1. $E(y_t) = E(y_{t-k}) = \mu$.
2. $Var(y_t) < \infty$.
3. $Cov(y_t, y_{t-k}) = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu) = \gamma(k)$.

則我們稱 y_t 為弱定態 (weak stationary), 又稱共變異定態 (covariance stationary), 或是簡單地稱之為定態 (stationary)。

弱定態時間序列

簡單地說,一個時間序列為弱定態的條件為

1. 該時間序列的均數為常數,不隨時間變動而改變。
2. 該時間序列的變異數為有限。
3. 該時間序列的自我共變異數為 k 的函數,與 t 無關。

嚴格定態時間序列

定義 (嚴格定態時間序列)

如果對於任何 k, 以及 $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$,

$$(y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_n})' \overset{d}{=} (y_{t_1+k}, y_{t_2+k}, \ldots, y_{t_n+k})'$$

則稱時間序列 y_t 為嚴格定態。

換句話說, 若時間序列 y_t 為嚴格定態, 則其聯合機率分配不會因為時點改變而改變 (invariant under time shift)。

性質 (嚴格定態與弱定態)

如果時間序列 y_t 為嚴格定態且 $E(y_t^2) < \infty$, 則 y_t 必為弱定態。

嚴格定態時間序列

定義 (白雜訊)

給定時間序列 $\{\varepsilon_t\}$ 具有以下性質

1. $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall\ t$
2. $\mathrm{E}({\varepsilon_t}^2) = \sigma^2 \quad \forall\ t$
3. $\mathrm{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = 0 \quad \forall\ k, t$

則稱 ε_t 為白雜訊, 且以

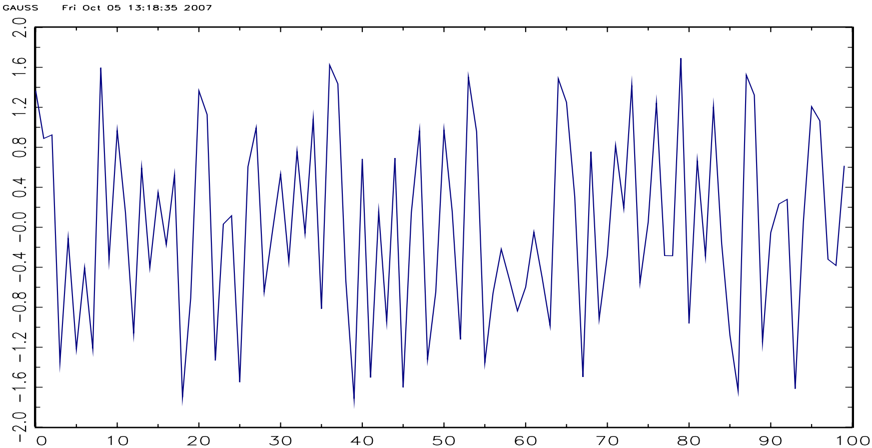
$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

表示之。

- 不難發現白雜訊就是一個定態的時間序列。

嚴格定態時間序列

圖 : 一個電腦模擬出來的白雜訊 $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$



樣本動差

定義 (樣本自我共變異數與樣本自我相關係數)

1. 樣本自我共變異數

$$\hat{\gamma}(k) = \widehat{Cov(y_t, y_{t-k})} = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}).$$

2. 樣本自我相關係數

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\widehat{Cov(y_t, y_{t-k})}}{\widehat{Var(y_t)}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2.$$

其中 $\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ 為樣本均數。

樣本動差

- 一個時間序列的自我相關係數越高, 我們就稱此序列的持續性越大 (persistent)。
- 通常我們以一階自我相關係數來檢視一個時間序列的持續性。

樣本一階自我相關係數

變數	$\hat{\rho}_1$
國內生產毛額	0.976
匯率	0.983
消費者物價指數	0.992
物價膨脹率 (月增率)	-0.098
物價膨脹率 (年增率)	0.817

國內生產毛額, 匯率, 以及消費者物價指數均為對數值。

固定趨勢

- 一個簡單的時間序列模型就是固定趨勢模型:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \text{Time}_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim^{i.i.d.} (0, \sigma^2).$$

其中 Time_t 為時間的虛擬變數, 第 1 期時 $\text{Time}_1 = 1$, 第 2 期時 $\text{Time}_2 = 2$,... 依此類推, 則 $\text{Time}_t = t$。

- 因此, 若我們有時間序列資料 $\{y_t\}_{t=1}^T$, 則固定趨勢模型可寫成:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t.$$

固定趨勢

固定趨勢未必是線性, 也可能存在二次式:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t,$$

甚至是更高階次均有可能:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots + \beta_k t^k + \varepsilon_t.$$

以上的模型都可以用最小平方法予以估計, 此時我們的解釋變數為時間的虛擬變數: $t = \{1, 2, \ldots, T\}$。

固定趨勢

我們以國內生產毛額為例, 估計出來的線性固定趨勢模型為

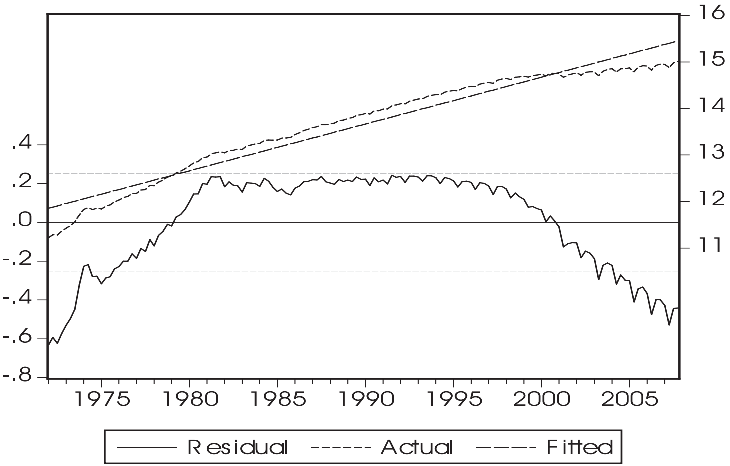
$$\begin{aligned}\hat{y}_t = \quad & \underset{(0.041673)}{11.85583} + \underset{(0.000504)}{0.025129}\ t,\end{aligned}$$

二次式固定趨勢模型為

$$\hat{y}_t = \underset{(0.013957)}{11.32318} + \underset{(0.000451)}{0.047635}\ t + \underset{(0.00000)}{-0.000157}\ t^2.$$

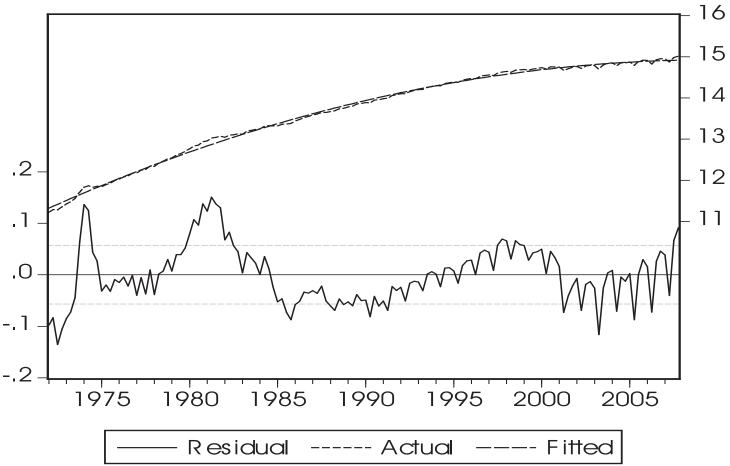
固定趨勢

圖 : GDP 的固定趨勢—一次式模型



固定趨勢

圖：GDP 的固定趨勢二次式模型



固定趨勢

利用固定趨勢模型所得到的殘差項:

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$$

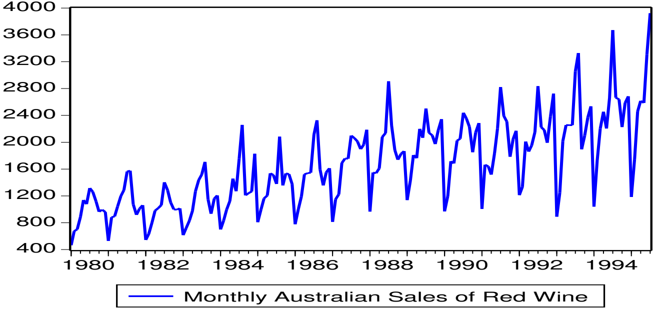
就是去除固定趨勢後之資料 (detrended data)。

季節性

- 有時我們的時間序列資料會因「一年之間」季節或是曆日更替而存在一個規律的循環, 我們稱為時間序列資料的季節性。
- 四季變化當然是重要的季節性因素, 然而, 所謂的季節性並不侷限於氣候變化。舉例來說, 夏季對於電力需求較高, 農產品的生產因氣候變化而增減, 以及零售業銷售量因假日 (如美國的感恩節與聖誕節假期) 而增高。
- 此外, 季節性是定義在「一年之間」的規律循環, 如果時間序列資料為年資料或是其資料頻率低於一年, 則沒有季節性的問題。

季節性

圖 : 澳洲紅酒的月銷售量 (1980:1–1995:7)



銷售量的高峰期在 7 月與 8 月, 而在每年的 1 月達到最低。

季節性

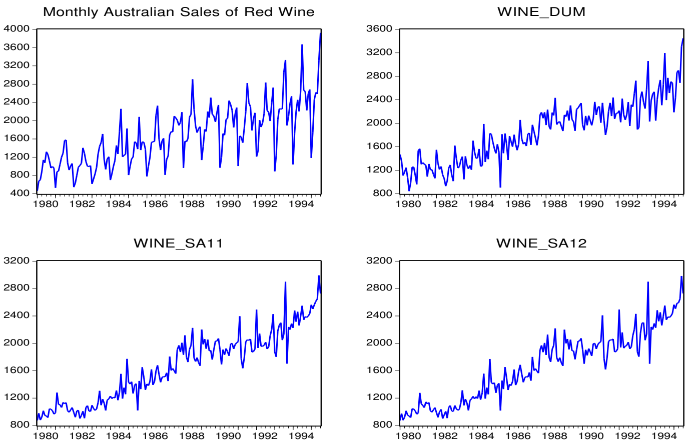
- 一般而言, 除非季節性因素是研究的重點, 季節調整 (seasonal adjustment) 是我們對於季節性時間序列最簡單的處理方式。
- 許多時間序列資料在公布時已經做過季節調整, 如美國普查局 (the U.S. Census Bereau) 發展並使用 X-11 與 X-12 調整法。
- EViews 提供我們許多不同季節調整選項, 此外, 你也可以利用虛擬變數 (dummy variables) 以迴歸模型將季節性去除。

季節性

季節	D_1	D_2	D_3
春季	1	0	0
夏季	0	1	0
秋季	0	0	1
冬季	0	0	0

季節性

圖：澳洲紅酒的月銷售量與三種不同方法下的季節調整後數列



季節性

表：三個不同方法下的季節調整後數列之間的相關係數

	WINE_DUM	WINE_SA11	WINE_SA12
WINE_DUM	1	0.9607	0.9606
WINE_SA11		1	0.9999
WINE_SA12			1