Statistics

Quiz 4 (2017/6/15)

DEPARTMENT: ________________ ID NUMBER: ________________ NAME: ________________

1 (30pt) 設 $\{X_j\}_{j=1,2\ldots n}$ 為獨立同態 (iid) 的隨機樣本，且其累計分 佈函數 (cdf) 為 $F(x)$。令 $\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_j)$。$I_A(x)$ 為指示函數。$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$.

(1)(5pt) $\hat{F}(x)$ 這種統計量被稱為何？

(2)(10pt) $\hat{F}(x)$ 的分 佈為何？ hint: 先考慮 $I_{(-\infty,x]}(X_1)$ 的分 佈。

(3)(15pt) 試求 $COV[\hat{F}(u), \hat{F}(v)]$。hint: $COV[\sum_{i=1}^{n} U_i, \sum_{j=1}^{n} V_j] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} COV[U_i, V_j]$。

2 (20pt) 設 $\{X_j\}_{j=1,2\ldots m} \sim^{iid} N(\mu_x, {\sigma_x}^2)$, $\{Y_j\}_{j=1,2\ldots n} \sim^{iid} N(\mu_y, {\sigma_y}^2)$，且 X_i 與 Y_j 亦為相互獨立 $(\forall i, j)$。在此，$\mu_x, {\sigma_x}^2, \mu_y, {\sigma_y}^2$ 皆為未知參數。

(1)(10pt) 試求 $Pr(X_1 < Y_1)$。(用 $\mu_x, \mu_y, {\sigma_x}^2, {\sigma_y}^2, \Phi(\ldots)$ 來表示) hint: 考慮 $X_1 - Y_1$ 的分 佈。

(2)(10pt) 試求 $\frac{{\sigma_x}^2}{{\sigma_y}^2}$ 之 $100(1-\alpha)\%$(雙尾) 信 賴區間。hint:F-distribution. $\sum_{j=1}^{m}(X_j - \bar{X})^2/{\sigma_x}^2 \sim \chi^2_{m-1}$

❸ (30pt) $X_i, Y_i (i=1, 2, ..., n)$ 分別表示第 i 個學生補習前後的成績。令 $Z_i = Y_i - X_i$(補習前後的成績差值)，並假設 $\{Z_j\}_{j=1,2,...n}$ 相互獨立。我們欲檢定 $\{Z_i\}$ 是否服從對稱於 0 的機率分 佈。H_0 : $\{Z_i\}$ follow(s) a symmetric distribution around zero. vs H_1 : $\{Z_i\}$ does not follow a symmetric distribution around zero. 令 $R_i =$ rank of $|Z_i|$。(換言之，我們將 $\{|Z_1|, |Z_2|, ..., |Z_n|\}$ 由小至大排序，並令 R_i 為 $|Z_i|$ 之等級。若 $|Z_1|$ 最小，則 $R_1 = 1$，或若 $|Z_1|$ 最大，則 $R_1 = n$。) 但假設 $\{|Z_1|, |Z_2|, ..., |Z_n|\}$ 中不會重複出現相同的數值，且 $\{Z_i\}$ 服從連續型的分 佈。另外，令 $I_j = I(Z_j > 0) (j=1, 2, ..., n)$。($I(\cdot)$ 為指示函數。若 () 中的條件成立，則取 1，否則取 0。)

(1)(5pt) 於 虛無假設下，I_j 的分 佈為何？

(2)(10pt) 令 $W^+ = \sum_{j=1}^{n} I_j R_j$。試求 $E[W^+|H_0]$。hint: R_j 與 I_j 相互獨立。

(3)(15pt) 試求 $V[W^+|H_0]$。

❹ (20pt) 設 $X_1, X_2, ..., X_n$ 為獨立同態 (iid) 的連續型隨機樣本。給定 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$ 下，隨機變數 X 的機率密度函數為 $\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} K(\frac{x - x_j}{h}) (h > 0)$。函數 K 滿足 $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x)dx = {\sigma_K}^2$。

(1)(10pt) 試求 $E[X|X_1, X_2, ..., X_n]$。

(2)(10pt) 試求 $V[X|X_1, X_2, ..., X_n]$。