Statistics

Quiz 3 (2017/5/16)

DEPARTMENT: ____________ ID NUMBER: ____________ NAME: ____________

1 (24pt) 令 $\{X_j\}_{j=1\sim 25}$ 為來自 $N(\mu, 100)$ 的隨機樣本。我們欲檢定 $H_0: \mu = 80$ vs $H_1: \mu > 80$。令棄卻域（拒絕域；rejection region）C 為 $\{(x_1, x_2, ..., x_{25}) | \bar{x} > 83\}$。$\bar{x}$ 表示觀測值$(x_1, x_2, ..., x_{25})$ 的平均。

（1）(8pt) 試求此檢定的檢定力函數 $\beta(\mu)$。hint: 檢定力函數為棄卻 虛無假設 H_0 的機率，亦即 你所觀測到的樣本落在棄卻域的機率。$= Pr((X_1, X_2, ..., X_{25}) \in C | X_1, X_2, ..., X_{25} \sim N(\mu, 100))$

（2）(8pt) 犯下型 I 錯誤（Type I Error）的機率為多少？ hint:「型 I 錯誤」... 於 H_0 為真的情況下，棄卻 H_0 的錯誤。

（3）(8pt) $\mu = 86$ 時，犯下型 II 誤差（Type II Error）的機率為多少？ hint:「型 II 錯誤」... 於 H_1 為真的情況下，不棄卻 H_0 的錯誤。

2 (28pt) 令 $\{X_j\}_{j=1..n}$ 為獨立同態的隨機樣本，且服從連續型分 佈，令 $f(x|\theta)(x \in R)$ 為其機率密度函數。其中 θ 為未知參數，我們欲檢定 $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$。令棄卻域 $C = \{(X_1, X_2, ..., X_n) | \frac{\Pi_{j=1}^n f(x_j|\theta_1)}{\Pi_{j=1}^n f(x_j|\theta_0)} > k\}$。令 $\phi_C(X_1, X_2, ..., X_n) = \begin{cases} 1; (X_1, X_2, ..., X_n) \in C \\ 0; (\text{otherwise}) \end{cases}$。設 k 使得 $E[\phi_C(X_1, X_2, ..., X_n)|H_0] = \alpha, (0 < \alpha < 1)$。此外，我們考慮任意的檢定，令其棄卻域為 C^*。同樣，令 $\phi_{C^*}(X_1, X_2, ..., X_n) = \begin{cases} 1; (X_1, X_2, ..., X_n) \in C^* \\ 0; (\text{otherwise}) \end{cases}$，且滿足 $E[\phi_{C^*}(X_1, X_2, ..., X_n)|H_0] = \alpha$。

（1）(4pt) 檢定 ϕ_C(and ϕ_{C^*}) 的顯著水準為多少？ hint:在簡單假設下，「顯著水準」與犯下型 I 錯誤的機率一致。

（2）(8pt) 令 $g = (\phi_C - \phi_{C^*})(\Pi_{j=1}^n f(X_j|\theta_1) - k\Pi_{j=1}^n f(X_j|\theta_0))$。試證 $g \geqq 0$。

（3）(8pt) 令 $\beta_{\phi_C}(\theta_1), \beta_{\phi_{C^*}}(\theta_1)$ 分別表示 ϕ_C 與 ϕ_{C^*} 的檢定力。試證 $\beta_{\phi_C}(\theta_1) \geqq \beta_{\phi_{C^*}}(\theta_1)$。hint: 考慮 g 的積分。

（4）(8pt) 試敘 Neyman Pearson's lemma 為何。hint:（1），（2），（3）

3 (20pt) 令 X 為一個離散型的隨機樣本，其分 佈包含一個未知參數 θ。$\theta \in \Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$。$X$ 的機率分佈如下：

X	0	1	2	3	4
$Pr(X\|\theta_1)$	0.00	0.05	0.05	0.80	0.10
$Pr(X\|\theta_2)$	0.05	0.05	0.80	0.10	0.00
$Pr(X\|\theta_3)$	0.90	0.08	0.02	0.00	0.00

我們欲檢定 $H_0 : \theta \in \{\theta_3\}$ vs $H_1 : \theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$。

(1)(4pt) 試求 $\Lambda(X) = \dfrac{\sup_{\theta \in \{\theta_3\}} Pr(X|\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} Pr(X|\theta)}$

(2)(8pt) 試導出顯著水準 $\alpha = 0.02$ 下的概似比檢定 (Likelihood Ratio Test)。hint: 求 k 使得 $Pr(\Lambda \leqq k|H_0) = 0.02$ 以及 C 使得 $X \in C \Leftrightarrow \Lambda(X) \leqq k$。

(3)(8pt) 試求 (2) 所求的檢定之檢定力函數 $\beta(\theta)(\theta \in \{\theta_1, \theta_2\})$。

4 (28pt) 令 $\{X_j\}_{j=1\sim n}$ 為來自 $N(\theta, \sigma^2)$ 的隨機樣本，其中 θ 為未知參數，σ^2 為已知的參數。我們欲檢定 $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1(\theta_0 < \theta_1)$。

(1)(10pt) 試利用 Neyman Pearson's lemma 來求顯著水準為 α 的最強力檢定 (Most Powerful Test)。

(2)(8pt) 試敘 (1) 所求的檢定是否為對於 $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ 的均 勻最強力檢定 (Uniformly Most Powerful Test)。

(3)(10pt) 試證均 勻最強力檢定為不偏檢定。(Unbiased Test) hint: 考慮隨機化檢定 $\phi^* = \begin{cases} 1; (\text{with probability } \alpha) \\ 0; (\text{with probability } 1-\alpha) \end{cases}$