Statistics

Quiz 2 (2017/3/28)

DEPARTMENT: ________________ ID NUMBER: ________________ NAME: ________________

1 (18pt) 設 X_1, X_2, ..., X_n 為「獨立同態」(亦即 iid) 的隨機變數, 並令 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

(1)(8pt) 關於 X_1, X_2, ..., X_n, 試敘述「弱大數法則」(Weak Law of Large Number) 為何. 除了「獨立同態」之外, 成立「弱大數法則」需滿足 哪些條件?(弱大數法則有幾種版本, 你只要寫其中一個即可)

(2)(10pt) 試證 你於(1)所述的「弱大數法則」. 提示:Chevyshev's inequality $Pr(|X-\mu| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$.

2 (27pt) 令 $Z_1, Z_2, ..., Z_n, ... \sim^{iid} N(0, 1)$.

(1)(4pt) 試利用 $\{Z_j\}_{j=1,2,..}$ 定義一個服從自由度 n 之 卡方分 佈的隨機變數.

(2)(4pt) 試利用 $\{Z_j\}_{j=1,2,..}$ 定義一個服從自由度 n 之 t 分 佈的隨機變數.

(3)(4pt) 試利用 $\{Z_j\}_{j=1,2,..}$ 定義一個服從自由度 m, n 之 F 分 佈的隨機變數.

(4)(15pt) 試證 $\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j$ 與 $\sum_{j=1}^{n}(Z_j - \bar{Z})^2$ 相互獨立. 提示:考慮 $(\bar{Z}, Z_1 - \bar{Z}, Z_2 - \bar{Z}, ..., Z_n - \bar{Z})$ 之聯合動差母函數. 提示 2:多變量時的聯合動差母函數 $= M_{\vec{X}}(\vec{a}) = E[\exp(\vec{a}^{\,t}\vec{X})]$)

❸ (25pt) 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為獨立同態的隨機變數。已知其分 佈之變異數 $\sigma^2 = V[X_j] = 25$，你欲估計其分佈的期望值$\mu = E[X_j]$. 若希望 $Pr(|\bar{X} - \mu| < 1) \geqq 0.95$，換言之 你所觀測到的 $\bar{X}$ 與真正的 μ 之誤差小於 1 的機率要達到 0.95 以上，你應收集多少樣本？(求最低的 n)

(1)(15pt) 試利用中央極限定理 (Central Limit Theorem) 來估計最低的 n.（你可以用 $\Phi^{-1}(x)$ 來表示.$\Phi(x) = \int_{t=-\infty}^{t=x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-t^2}{2})dt$）

(2)(10pt) 試利用 Chebyshev's inequality 來估計最低的 n. 請 說明為何 你得到的 n 比 (1) 更大.

❹ (30pt) 考慮大小為 N 的有限母體. 我們從母體中以「取後不放回」的方式 (sampling without replacement) 抽出 n 個樣本 ($X_1, X_2, \ldots, X_n; n < N$). 已知其平均與變異數分別為 μ, σ^2. 令 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

(1)(12pt) 試證 $COV[X_1, X_2] = \frac{-\sigma^2}{N-1}$

(2)(6pt) 試求 $E[\bar{X}]$.

(3)(12pt) 試求 $V[\bar{X}]$.

Statistics

Quiz 2 (2017/3/28)

DEPARTMENT: ________________ ID NUMBER: ________________ NAME: ________________

計算紙 ☺