

線性規劃在森林經營之應用

台灣大學森林環境暨源資學系 鄭欽龍教授

線性規劃(linear programming; LP)是數學規劃(mathematical programming)的多種方法中最基本而且使用最廣的方法，其目的在於規劃(programming)出如何將有限的資源在設定的目標下以最適當的數量及方式配置到多個彼此競用此資源的活動上。線性規劃的發展始自第二次大戰，用於軍事活動的人員、武器裝備等的調度規劃，它的影響從 1950 年代逐漸擴大，之後隨著電腦的普及使得包括森林、自然資源與工商管理的許多領域能在合理的成本內應用此方法進行相關的規劃。現在線性規劃是許多行業進行計畫所使用的標準方法。

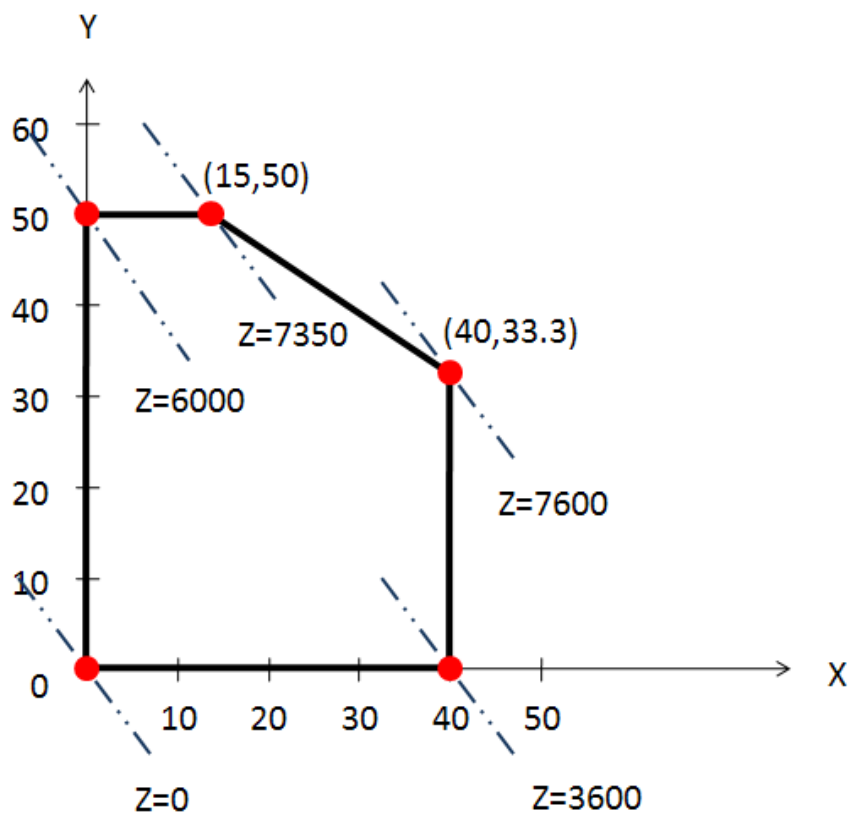
由於時間的限制，本課程對於線性規劃的探討在於森林經營上的應用，而非理論。若對這個被認為是 20 世紀中葉最重要的科學發展想更加了解，可參閱相關教科書。以下先透過兩個簡單案例，先用圖解法和 lingo 程式來說明如何應用線性規劃進行森林計劃(forest planning)，及線性規劃的基本概念。

案例 1: 某甲有 40 英畝的闊葉林，50 英畝的針葉林。若已知經營每一英畝闊葉林需 2 個工作天，收益 90 元，針葉林需 3 個工作天，收益 120 元。某甲期望森林經營的收益最大化，但每年可在林地工作時間最多 180 天。某甲要如何分配在闊葉林及針葉林的工作天數而使收益最大？

實際的經營問題在應用線性規劃時，可循以下步驟進行：(1)設定前述實際經營規劃問題的決策變數、(2)設定目標（及其與決策變數的關係）、(3)設定經營的要求或限制的條件（及其與決策變數的關係）、(4)將以上目標、條件轉化成線性函數式，再利用線性規劃軟體程式求解。以案例 1 為例，設決策變數 X, Y 是某甲可以自行決定分配在闊葉林與針葉林的工作面積數，所以經營目標和經營限制條件可以轉換成線性函數式如下表。在數學形式上，線性規劃包含一項目標函數式和一組若干項的限制條件函數式。

數學函數式	實際意義
目標函數： $Z=90X+120Y$	分配在闊、針葉林工作的面積而使收益最大
限制條件：	
(1) $X \leq 40$	可在闊葉林工作的面積 ≤ 40
(2) $Y \leq 50$	可在針葉林工作的面積 ≤ 50
(3) $2X+3Y \leq 180$	可在闊、針葉林工作天數的總和 ≤ 180
(4) $X \geq 0; Y \geq 0$	非負數條件；工作面積均 ≥ 0

此外，若將上述問題的決策變數設定為分配在闊、針葉林工作的天數，線性規劃的函數式會改變，但求出的解意義相同。上表的函數式可用下圖解釋之。



首先，以上 4 項限制條件式構成一個可行區(feasible region)，而可行區具備凸性(convexity)即連接區內任何兩點的線皆不會踰越過此區。此可行區有 5 個角點(corner point)，線性規劃的理論證明最適點會在 5 個角點的其中之一，或其中兩個角點的連線上，至於哪一點，則視何點可使目標函數式值 Z 最大化。線性規劃的基本運算法—簡捷法(simplex method)即在多個角點解(corner solutions)中快速找到最適解(optimal solution)。從圖上得知，將各角點對應的 X, Y 帶入目標函數式後，以 $(40, 33.3)$ 所得到的 Z 值 7600 最大，因此最適解為分配在闊、針葉林工作的面積分別是 40 英畝與 33.3 英畝，最大收益為 7600 元。

案例 1 的 lingo 語法如下：(請至 <http://www.lindo.com> 下載 lingo 13.0 軟體)

$\max=90*X+120*Y;$	(注意：1. 係數和變數 X, Y 間加*； 2. 式子最後加；表示結束
$X \leq 40;$	3. 非負數條件可省略不列)
$Y \leq 50;$	
$2*X+3*Y \leq 180;$	

案例 1 用 lingo 求得的最適解為：X=40,Y=33.33,objective value=7600，所代表的意義與圖解結果相同。另外，以下用比較複雜的異林齡的經營為例，說明如何設定決策變數、目標與限制條件函數式，再應用線性規劃的步驟。

案例 2: 某德達松造林地面積 500 英畝，內含兩個林齡級(I,II)，一為 21 至 25 年生，面積 300 英畝，另一為 41 至 45 年生，面積 200 英畝。德達松在 30 年生時的年平均生長量最大，故輪伐期一般設為 30 年。此林地的兩個林齡級林分在未來 3 期（5 年為 1 期）15 年估計每英畝的蓄積量如下表。

林齡級	材積(千立方英尺/英畝)		
	第一期	第二期	第三期
I	1.2	2.3	2.5
II	3.1	3.2	3.5

在未來 3 期(15 年)的經營期內，此林地的經營目標是材積收穫最大化，但須滿足以下 3 項經營條件。(1)各林齡級伐採面積：各林齡級三期全部伐採面積最多為該林齡級的面積；(2)總伐採面積：三期總伐採面積不得超過全林地面積的 1/2；(3)穩定木材收穫：當期的材積收穫量不得少於前期，但也不超過前期 10% 以上。

首先將決策變數設為 $X_{ij}(i=I,II \text{ 林齡級}; j=1,2,3 \text{ 期})$ 代表 i 林齡級在 j 期的伐採面積，然後按以上所述可設定目標函數以及限制條件如下：

目標函數 $\max Z = 1.2X_{11} + 2.3X_{12} + 2.5X_{13} + 3.1X_{21} + 3.2X_{22} + 3.5X_{23}$

（表示各林齡級在各期的伐採材積（=材積係數×面積）的總和）

限制條件

(1) 各林齡級伐採面積控制

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 300$ （林齡級 I 每期伐採面積最多為此林齡級的面積）

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 200$ （林齡級 II 每期伐採面積最多為此林齡級的面積）

(2) 總伐採面積控制

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 250$ （三期總伐採面積不超過全林地面積 1/2）

(3) 穩定木材收穫

$2.3X_{12} + 3.2X_{22} \geq 1.2X_{11} + 3.1X_{21}$ （第二期材積收穫不少於第一期）

$2.3X_{12} + 3.2X_{22} \leq 1.1(1.2X_{11} + 3.1X_{21})$ （第二期材積收穫不超過第一期 10% 以上）

$2.5X_{13} + 3.5X_{23} \geq 2.3X_{12} + 3.2X_{22}$ （第三期材積收穫不少於第二期）

$2.5X_{13} + 3.5X_{23} \leq 1.1(2.3X_{12} + 3.2X_{22})$ （第三期材積收穫不超過第二期 10% 以上）

由於穩定木材收穫的 4 項限制式，lingo 難以判讀，因此要展開和移項如下：

案例 2 的 lingo 語法:

```

max = 1.2*X11+2.3*X12+2.5*X13+3.1*X21+3.2*X22+3.5*X23;
X11+X12+X13<=300;
X21+X22+X23<=200;
X11+X12+X13+X21+X22+X23<=250;
1.2*X11-2.3*X12+3.1*X21-3.2*X22<=0;
-1.32*X11+2.3*X12-3.41*X21+3.2*X22<=0;
2.3*X12-2.5*X13+3.2*X22-3.5*X23<=0;
-2.53 *X12+2.5*X13-3.52 *X22+3.5*X23<=0;

```

案例 2 用 lingo 求得的最適解為：X11=0, X12=50, X13=0, X21=75.2, X22=44.2, X23=80.6, objective value=771.66。表示在案例 2 所述的限制下，要使德達松異林齡在 3 期內有 777.65 千立方英呎的最大材積收穫，則要在第 1 期伐採林齡級 2 的林地(X21)75.2 英畝，在第 2 期伐採林齡級 1 的林地(X12)50 英畝及林齡級 2 的林地(X22)44.2 英畝，在第 3 期伐採林齡級 2 的林地(X23)80.6 英畝。

從以上最適解可知：(1)3 期內共伐採林齡級 1 的林地 50 英畝，林齡級 2 的林地 200 英畝，合計總伐採面積 250 英畝等於全林面積的 1/2，滿足面積控制條件；(2)第 1 期材積收穫 233.12(3.1×75.2)千立方英呎，第 2 期 256.44(2.3×50+3.2×44.2)千立方英呎，第 3 期 282.1(3.5×80.6)千立方英呎，材積收穫第 2 期較第 1 期多 10%，第 3 期較第 2 期也多 10%，滿足穩定木材收穫的條件，3 期內共計收穫 777.65 千立方英呎。