2015/10/29 個體研討會導讀

Chun-Hsien Yeh (2015), The egalitarian solution versus the nucleolus: a strategic comparison

by **d00323001 林正峰**

1. What is the question?

設備的建造或維持成本該如何公平地均分？本文透過策略性的觀點 (strategic viewpoint) 比較分別由 Nucleolus 和 Egalitarian solution 兩個不同的公平概念所產生的分配結果之異同。

2. Why should we care about it?

成本分攤問題[1]常見於實際生活。一般性的問題描述為：一群使用者對設備的需求不盡相同，當需求較大的使用者能滿足於此設備時，需求較低的使用者也能在不增加任何成本之下獲得滿足。此外，此設備亦必須使得需求最大的使用者能夠滿足。那麼其建造或維持成本該如何在這群使用者當中分攤呢？文獻上已從公設性的觀點 (axiomatic viewpoint) [2] 比較分別由 Nucleolus 和 Egalitarian solution 兩種公平概念產生的成本分攤結果之異同。本文欲填補文獻的缺口，從策略性的觀點 (strategic viewpoint) 對應於不同的公平概念，設計一非合作賽局，使所有使用者能依其自身利益而產生對應的分配結果 [3]，並比較這兩種分配結果的異同。

3. What is your answer?

本文比較由 Nucleolus 和 Egalitarian solution 概念所設計的有限期兩階段的成本分攤賽局之 SPE (subgame perfect equilibrium) ，亦即全體使用者的成本分攤向量。本文證明兩個 SPE 皆存在且唯一。並說明當成本最大的使用者扮演的角色不同會影響其分配結果。若比較其數學式會發現在 Nucleolus 相較於在 Egalitarian solution 時，其成本分攤向量所對應的各項分母都多 1，表示在 Nucleolus 的概念下，成本最大的人在賽局的每一個回合的第二階段都是扮演 helper 的角色。

4. How did you get there

簡述本論文所設計的兩個有限期兩階段成本分攤的賽局如下：
每個人都有一個成本 (Stand-alone cost)，並決定要貢獻多少來建造或維持設備。

Egalitarian solution　第一階段：假設現為第 t 回合。隊長 agent p 在仍留在賽局中的人 N^t 中選定他的隊伍成員 S (包含隊長)，並提出一組和隊伍成員人數一樣多的數字為建造設備的成本貢獻量的候選名單 $X_S = \{x_1, ..., x_{|S|}\}$ 供隊員們在第二階段選擇。而這些數字的總和要恰好等於隊伍成員中最大的成本。

第二階段：除了隊長以外的隊員回應此候選名單的順序 $\{i_{\Pi(1)}, ..., i_{\Pi(|S|-1)}\}$ 根據某個方式作排列。當輪到 agent $i_{\Pi(l)}$ ，他可以接受隊長的提議 X_S 並且從剩下的候選成本貢獻量選出一個數字，然後輪到 agent $i_{\Pi(l)+1}$ 作決定。或者他可以拒絕隊長的提議 X_S ，並反向隊長提出一個隊長的成本貢獻量 $a_{i_{\Pi(l)}} \in [0, \max X_S]$。如果隊長同意 $a_{i_{\Pi(l)}}$ 則隊長就貢獻這個量，然後離開賽局，剩下的隊員繼續玩相同的賽局。如果隊長反對 $a_{i_{\Pi(l)}}$ 則被逐出賽局並被迫支付他自己的成本 c_p，剩下的隊員繼續玩相同的賽局。假若所有隊員都接受隊長提議的 X_S 時，每個隊員就依照所選的候選成本貢獻量支付，隊長則是挑最後的候選數字作為他的貢獻量。因此剩下所有使用者該分攤的成本就下修 $\sum_{i=1}^{|S|} x_i$，然後在剔除 S 這些人後繼續玩一樣的賽局。

Nucleolus　與 Egalitarian solution 的不同之處在於：每回合的第一階段，成本最大的那個人都不當隊長。每回合的第二階段，成本最大的那個人扮演 helper 的角色。所以當大家的貢獻量都確定之後，成本最大的人再補足應有的貢獻量使其能滿足於設備。

另外，由 Aadland and Kolpin (1998) 可知道 Egalitarian solution 的貢獻向量如下：
$E_1(N,c) \equiv min_{1 \le k \le n}\left\{\frac{c_k}{k}\right\}$， $E_i(N,c) \equiv min_{i \le k \le n}\left\{\frac{c_k - \sum_{p=1}^{i-1} E_p(N,c)}{k-i+1}\right\}$, where $2 \le i \le n-1$ 與 $E_n(N,c) \equiv c_n - \sum_{p=1}^{n-1} E_p(N,c)$。

[1] 作者提出此類問題相關的實際應用，例如：計程車費用分攤 (Taxi-Fare Sharing)、飛機跑道建造成本分攤 (Airport Problem)、大衆運輸票價制定 (Public Transportation Ticketing Problem)、高速公路過路費訂定 (Highway Toll-Fee Problem)、灌溉溝渠建造成本分攤 (Irrigation Ditch Problem) 和電梯使用費用 (Elevator User-fee Problem) 等等。

[2] 直接説服使用者這樣的分配概念是公平正義的。即一集權式的系統 (centralized system)。

[3] 是故，此為分權式的系統 (decentralized system)

由 Sönmez (1994) 的公式可定義 Nucleolus 的貢獻向量如下：$Nu_1(N,c) \equiv min_{1 \leq k \leq n-1}\left\{\frac{c_k}{k+1}\right\}$，$Nu_i(N,c) \equiv min_{i \leq k \leq n-1}\left\{\frac{c_k - \sum_{p=1}^{i-1} Nu_p(N,c)}{k-i+2}\right\}$, where $2 \leq i \leq n-1$ 與 $Nu_n(N,c) \equiv c_n - \sum_{p=1}^{n-1} Nu_p(N,c)$。