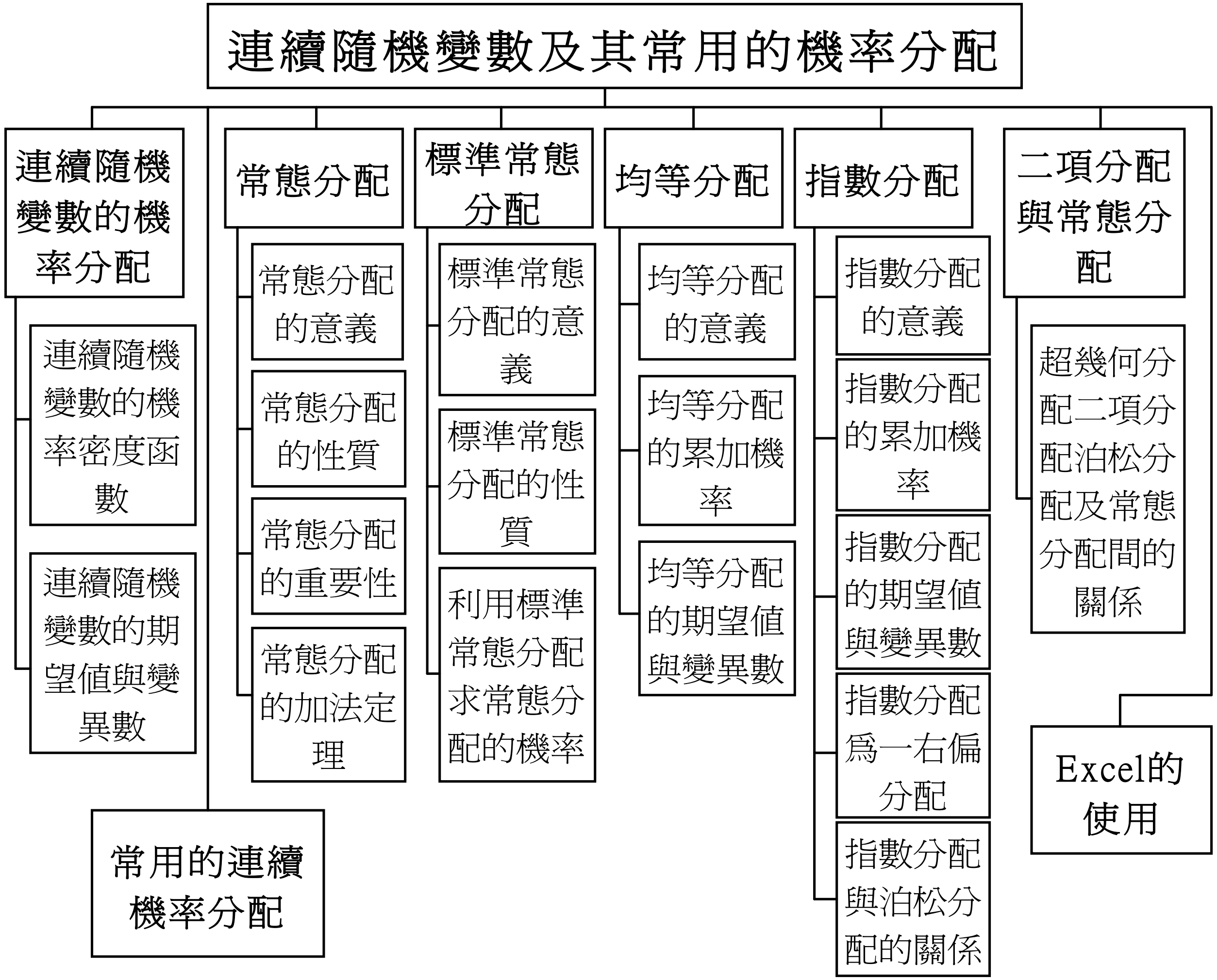
第7章 連續隨機變數及其
常用的機率分配

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

學習目的

1. 熟悉並計算連續機率分配機率函數的期望值與變異數。
2. 了解常態分配的意義、特質與重要性。
3. 了解標準常態分配的意義、性質與利用標準常態分配求算機率。
4. 了解均等分配、指數分配的意義及性質並計算其期望值與變異數。
5. 比較超幾何分配、二項分配、波瓦松分配與常態分配。
6. 利用Excel求算各個連續機率分配並繪製圖形。

本章結構


連續隨機變數及其常用的機率分配
連續隨機變數的機率分配
連續隨機變數的機率密度函數
連續隨機變數的期望值與變異數
常用的連續機率分配
常態分配
常態分配的意義
常態分配的性質
常態分配的重要性
常態分配的加法定理
標準常態分配
標準常態分配的意義
標準常態分配的性質
利用標準常態分配求常態分配的機率
均等分配
均等分配的意義
均等分配的累加機率
均等分配的期望值與變異數
指數分配
指數分配的意義
指數分配的累加機率
指數分配的期望值與變異數
指數分配爲一右偏分配
指數分配與泊松分配的關係
二項分配與常態分配
超幾何分配二項分配泊松分配及常態分配間的關係
Excel的使用

7.1 連續隨機變數的機率分配

Concept: 很多的隨機變數是不可數的: 薪資,銷貨收入, 飲料容量…

→ 數值介於某一區間, 但區間內的數值是無限的, 不可數的

→ 無法像間斷隨機變數, 列出每一個隨機變量及其對應的機率

→ 任一點的機率為零

→ 機率以區間面積來表示

→ 連續隨機變數的機率可由相對次數直方圖的概念導出

→ 下圖為5,500個電算機的使用壽命的相對次數分配表

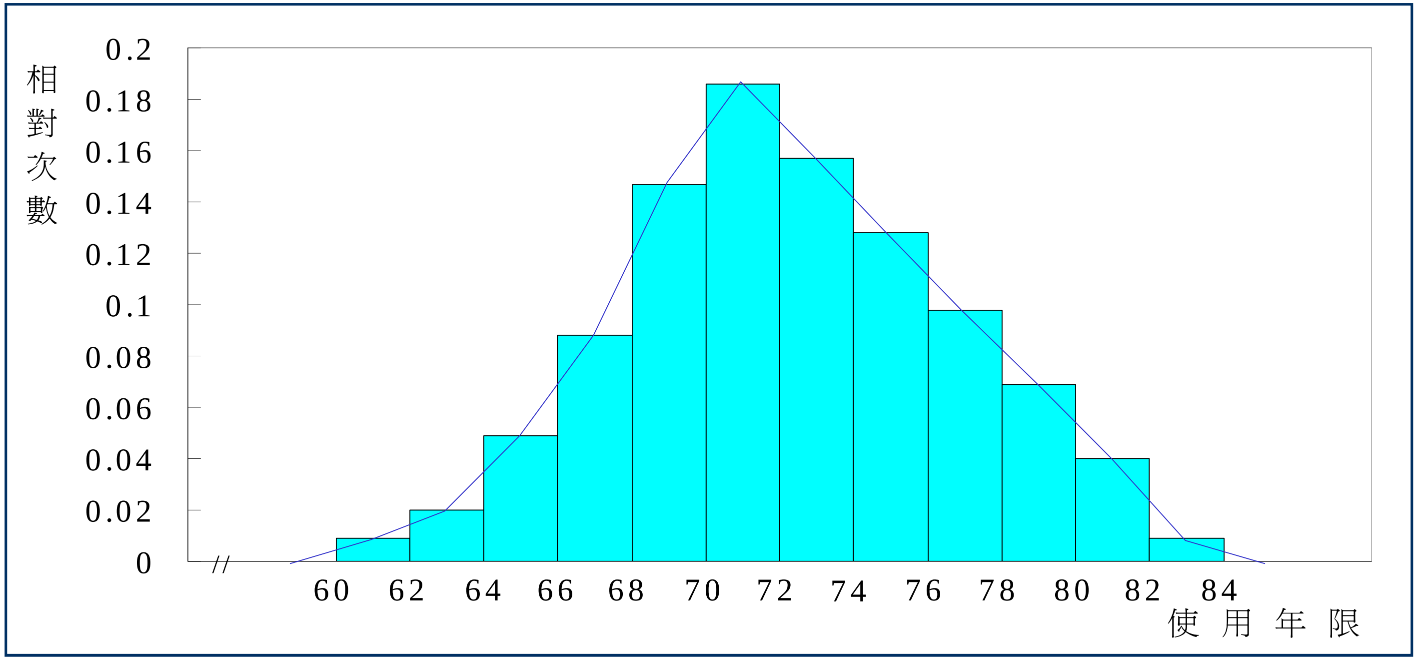
表7.1 計算機使用壽命的機率分配

單位：月

使用壽命 x	單位組距	次數 f	相對次數
60~62	1	48	0.009
62~64	1	108	0.020
64~66	1	270	0.049
66~68	1	486	0.088
68~70	1	810	0.147
70~72	1	1,026	0.186
72~74	1	864	0.157
74~76	1	702	0.128
76~78	1	540	0.098
78~80	1	378	0.069
80~82	1	216	0.040
82~84	1	52	0.009
		$\sum f = 5{,}500$	1.000

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.1 相對次數多邊圖



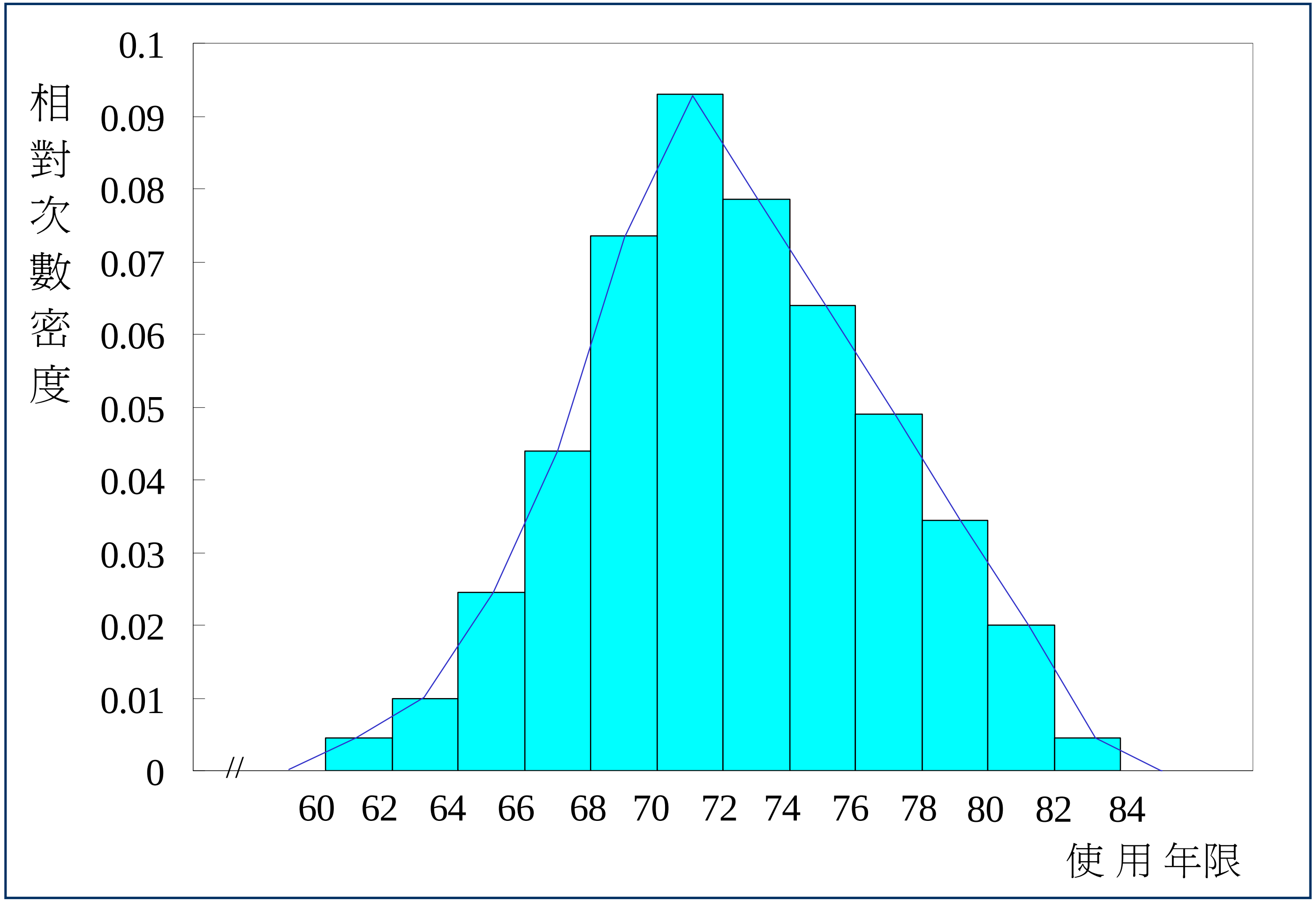
該直方圖各組的面積等於相對次數 (總面積等於1),
直方圖的高度等於相對次數密度
相對次數密度 = 面積 ÷ 組距

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表7.2 計算機使用壽命的機率分配

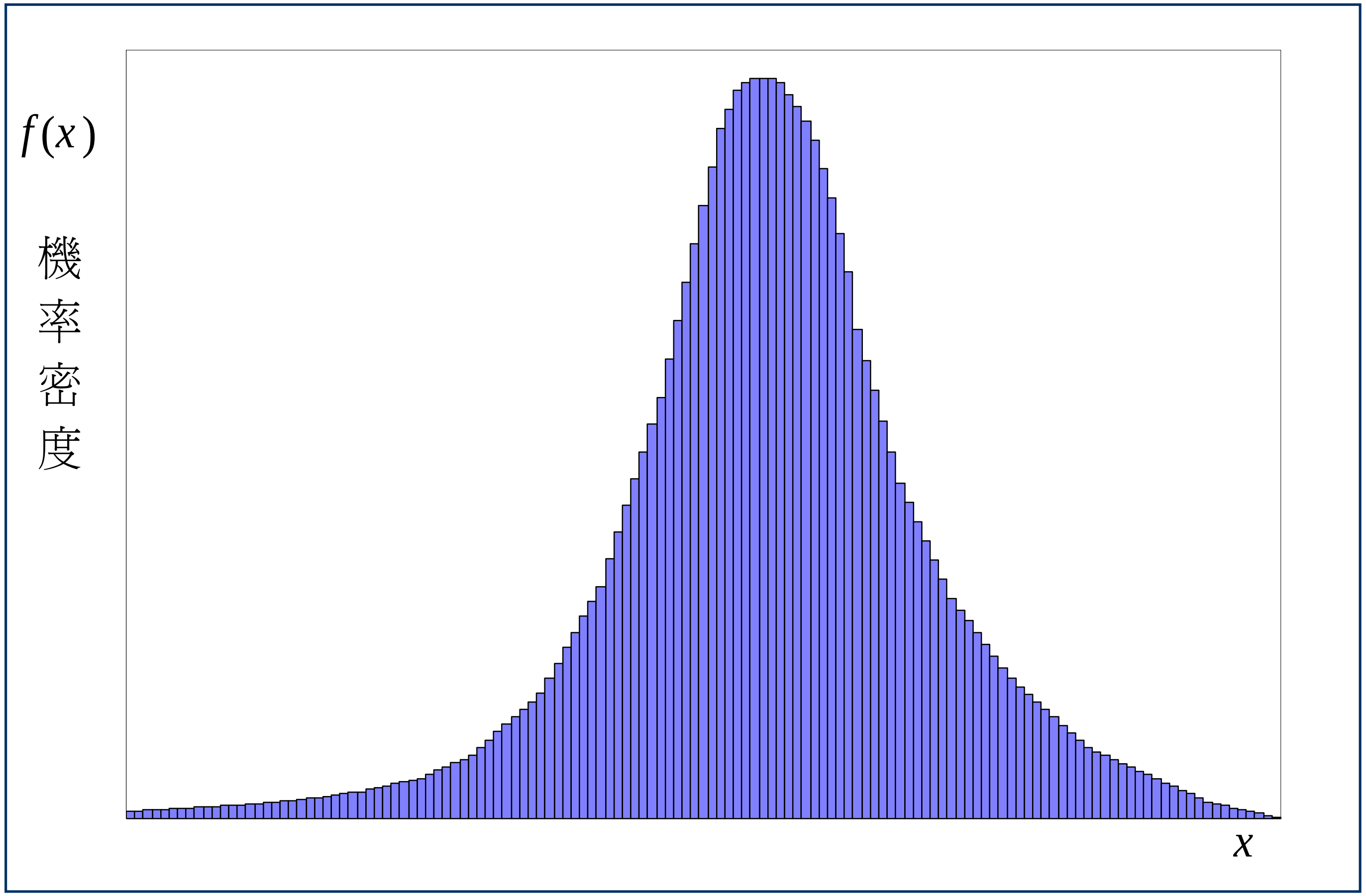
使用壽命x（1）	組距（2）	相對次數密度（3）	相對次數 (4) = (2) × (3)
60~62	2	0.0045	0.009
62~64	2	0.0100	0.020
64~66	2	0.0245	0.049
66~68	2	0.0440	0.088
68~70	2	0.0735	0.147
70~72	2	0.0930	0.186
72~74	2	0.0785	0.157
74~76	2	0.0640	0.128
76~78	2	0.0490	0.098
78~80	2	0.0345	0.069
80~82	2	0.0200	0.040
82~84	2	0.0045	0.009
			1.000

圖7.2 相對次數直方圖


相對次數密度
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80 82 84
使 用 年限

當電算機台數一直增加至無窮大

圖7.3 機率曲線



7.1.1 連續隨機變數的機率密度函數

設X為連續隨機變數, 其值為 a≦X ≦b, 若 *f*(x)滿足下列二條件

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

則 f(x)為X的機率密度函數 (probability density function), 簡稱pdf

說明:

1. 在連續隨機變數的機率分配曲線下, 任兩點之間的機率大於等於0小於等於1.

2.連續隨機變數的機率分配的機率總和等於1.

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex 7.1 到台北動物園看國王企鵝可搭乘遊園車, 已知非假日時每10分鐘一班, 問等待遊園列車不超過3分鐘的機率爲何?

Solution:

等車時間以X表示, 則X爲一連續隨機變數, 其機率密度函數爲

$f(x)= 1/10 \quad 0 \leq x \leq 10$

$f(x)=0$ 其他

等車時間不超過 3分鐘

$\rightarrow P(0 \leq x \leq 3)$

$\rightarrow 3^* (1/10)=0.3$ #

見下圖

圖7.4 機率密度函數

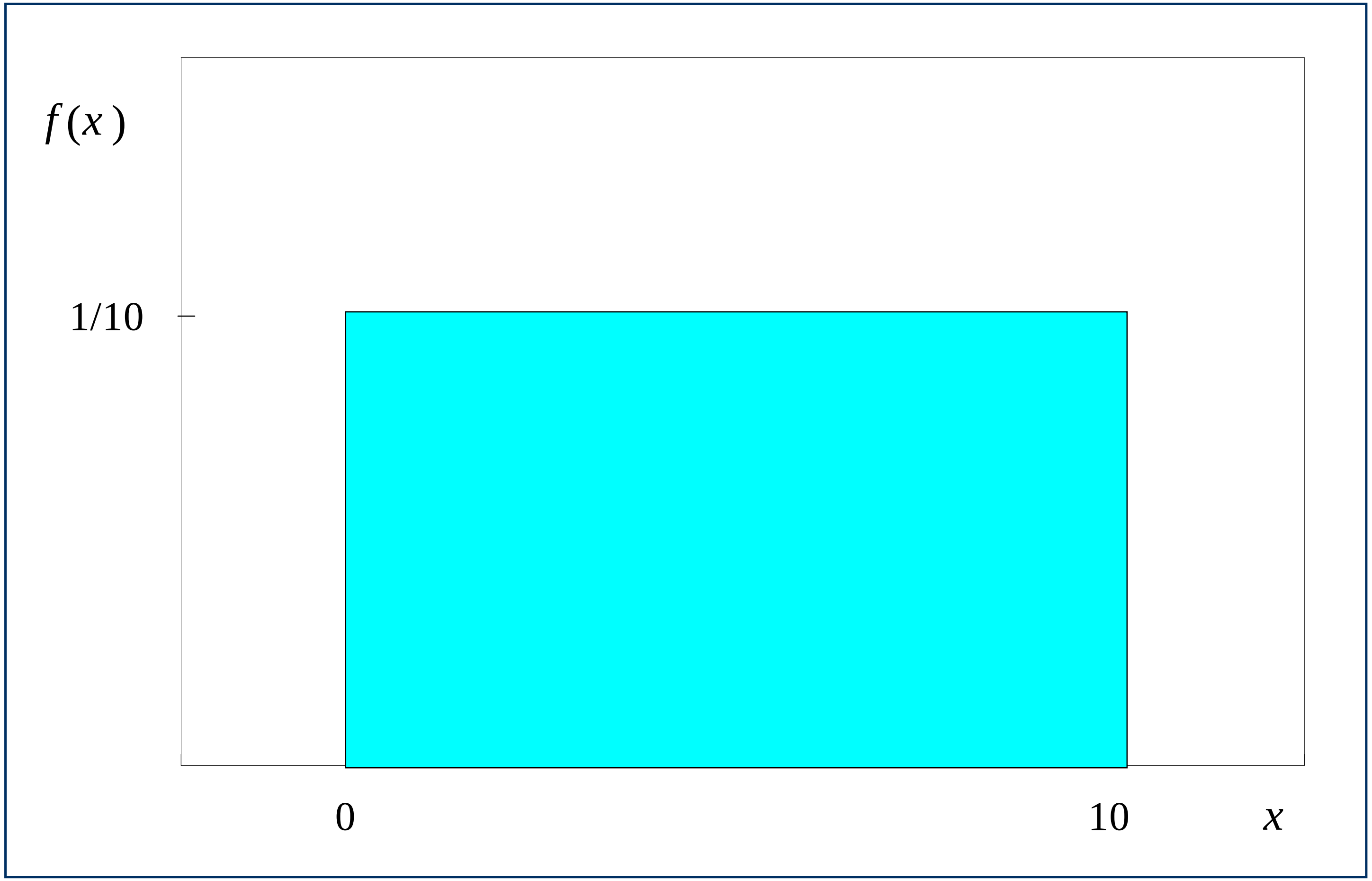
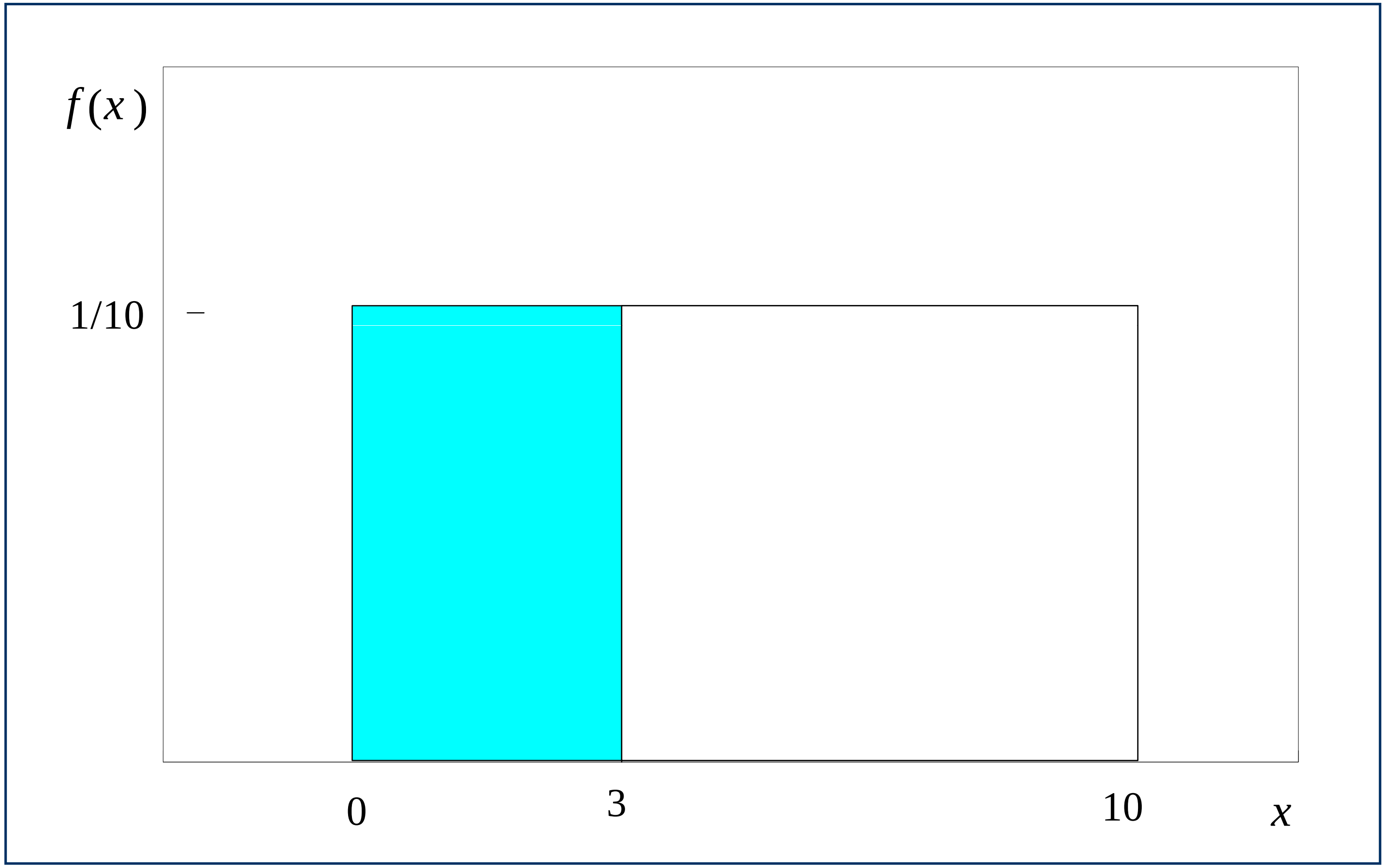


圖7.5 等待3分鐘內的機率



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex7.2 某品牌的電腦電源供應器的使用壽命, 以隨機變數X表示其壽命, 其機率分配如下表
問該機率分配f(x)是否為一機率密度函數? 並請繪圖

表7.3 電源供應器壽命的機率分配

x	$f(x)$
1年以下	0.40
1~3年	0.15
3~5年	0.10
5~7年	0.05

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Solution:

1. $f(x) \geq 0$

由表知f(x)的值分別爲0.40, 0.15, 0.10, 0.05, 均大於0

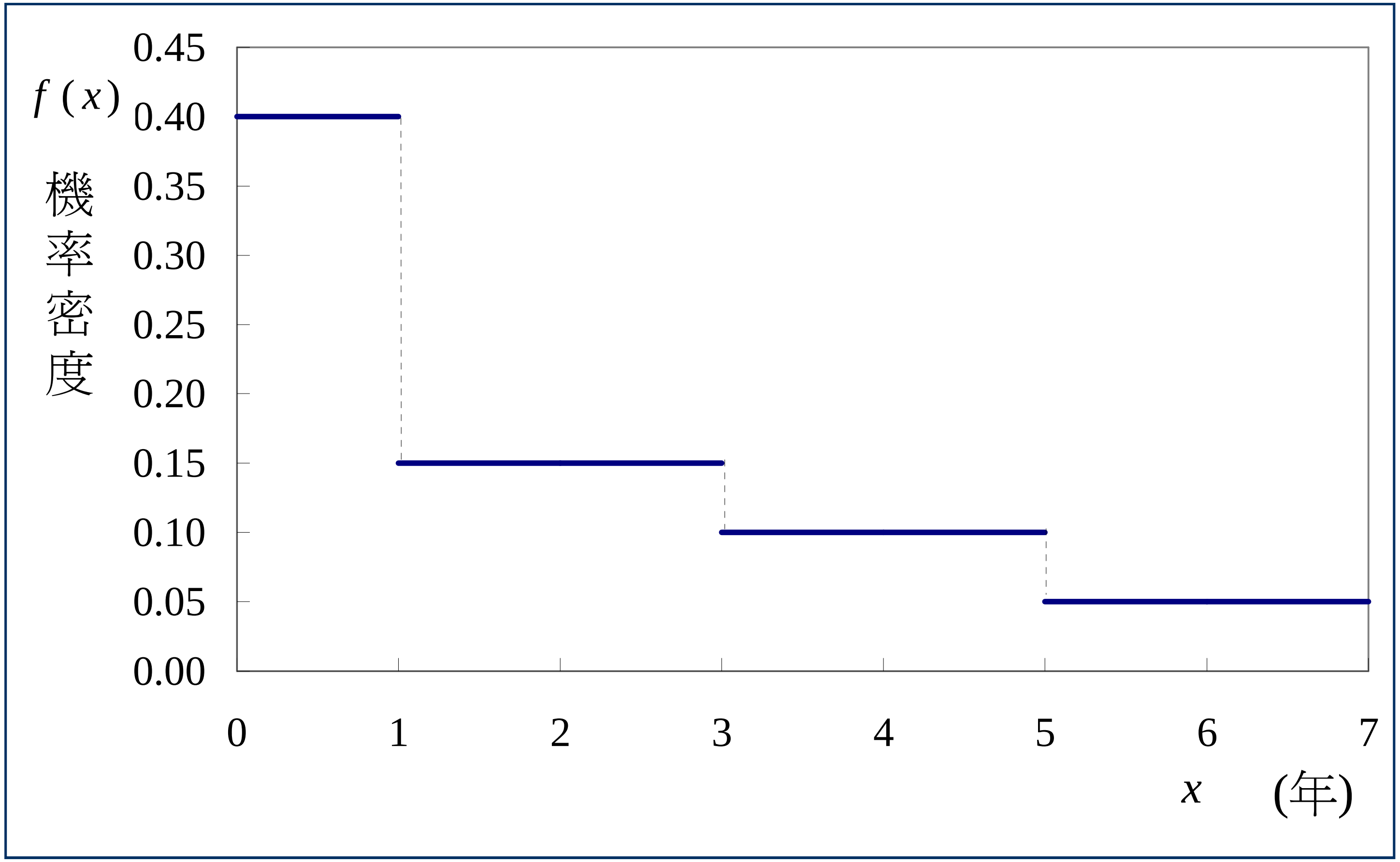
2. $$\int_0^7 f(x)dx = \int_0^1 0.40dx + \int_1^3 0.15dx + \int_3^5 0.10dx + \int_5^7 0.05dx$$

$$= 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1$$

因此f(x)爲一機率密度函數

如下圖

圖7.6 電源供應器壽命的機率分配



◎ 連續隨機變數的累加機率函數 (cumulative probability function) F(x)

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x f(t)dt$$

◎ 累加機率函數的特性

1. F(a)=0 起始點a點的累加機率爲0
2. F(b)=1 累加到最高值b點時的機率等於1
3. 如果 c < d, 則 F(c≦X ≦d)= F(d) – F(c)
4. f(x) = d F(x)/dx 表示對F(x)微分可得X之機率密度函數

Ex 7.3 等遊園車超過4分鐘的機率爲何?

Solution:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_a^x \frac{1}{10}dt=\frac{1}{10}f\,|_0^x=\frac{x}{10}\quad 0\le x\le 10$$

P(X≧4)=1-P(X≦4)=1-F(4)=1-(4/10)=6/10=0.6

EX 7.4 請求算電源供應器使用壽命超過3年的機率?

Hint: P(P(X≧3)=1-P(X≦3)=1-F(3)

分段

$$F(x)=\int_0^x 0.4dt=0.4x\quad 0\le x\le 1$$

$$F(x)=\int_0^1 0.4dt+\int_1^x 0.15t=(0.4-0)+(0.15x-0.15)=0.25+0.15x\quad 1\le x\le 3$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

7.1.2 連續隨機變數的期望值與變異數

◎ 連續隨機變數的期望值 E(X)

$$E(X)=\int_a^b xf(x)dx=\mu \quad (a\le X\le b)$$

◎ 連續隨機變數的變異數與標準差

變異數

$$V(X)=\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2\cdot f(x)dx$$

標準差

$$\sigma=\sqrt{V(X)}$$

Note: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

EX 7.5 &7.6 請計算等待遊園專車的平均時間與變異數

Solution:

1. 等待平均時間

$$E(X)=\int_0^{10} xf(x)dx=\int_0^{10} x\frac{1}{10}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}x^2\Big|_0^{10}=\frac{100}{20}=5$$

2. 變異數

$$V(X)=\int_0^{10}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx=\int_0^{10}(x^2-10x+25)\frac{1}{10}dx$$

$$=(\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{2}x^2+2.5x)\Big|_0^{10}=\frac{1000}{30}-\frac{100}{2}+25=8.33$$

！！課本的解法較為容易！！

EX7.7 設連續隨機變數爲 f(x)=2x, 0≦X ≦1, 問期望值與變異數爲何?

Solution:

1. 期望值

$$E(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x(2x)dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

2. 變異數

$$V(X)=\int_0^1 x^2\cdot f(x)dx-\mu^2=\int_0^1 x^2 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{4}x^4\Big|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

◎ 連續隨機變數的偏度與峰度

偏態係數

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{(\sqrt{M_2})^3} = \frac{E(X-\mu)^3}{(\sqrt{E(X-\mu)^2})^3}$$

峰態係數

$$\alpha_4 = \frac{M_4}{(\sqrt{M_2})^4} = \frac{E(X-\mu)^4}{(\sqrt{E(X-\mu)^2})^4}$$

EX7.8 已知連續隨機變數爲 f(x)=2x, 0≦X ≦1, 求其偏度與峰度係數

Solution:

先求算E(X), E(X^2), E(X^3)及E(X^4)

E(X)=μ=2/3

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2 2xdx=\frac{1}{2} \qquad E(X^3)=\int_0^1 x^3 2xdx=\frac{2}{5}x^5 \Big|_0^1=\frac{2}{5}$$

$$E(X^4)=\int_0^1 x^4 2xdx=\frac{2}{6}x^6 \Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

再求 $$M_2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = 1/18$$

$$M_3 = E(X-\mu)^3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

$$= 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{-1}{135}$$

$$M_4 = E(X-\mu)^4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$

$$= \frac{1}{3} - 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{270}$$

偏態 $$\alpha_3 = \frac{M_3}{(\sqrt{M_2})^3} = \frac{\frac{-1}{135}}{(\sqrt{\frac{1}{18}})^3} = \frac{-0.0074}{0.0031} = -0.5654$$

峰態 $$\alpha_4 = \frac{M_4}{(\sqrt{M_2})^4} = \frac{\frac{2}{270}}{(\sqrt{\frac{1}{18}})^4} = 2.4$$

7.2 常用的連續隨機變數

1. 常態分配 (normal distribution)
2. 標準常態分配 (standard normal distribution)
3. 均等分配 (uniform distribution)
4. 指數分配 (exponential distribution)

1 and 2 特別重要, 微積分算法繁雜, 要查表

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.7A 常態分配

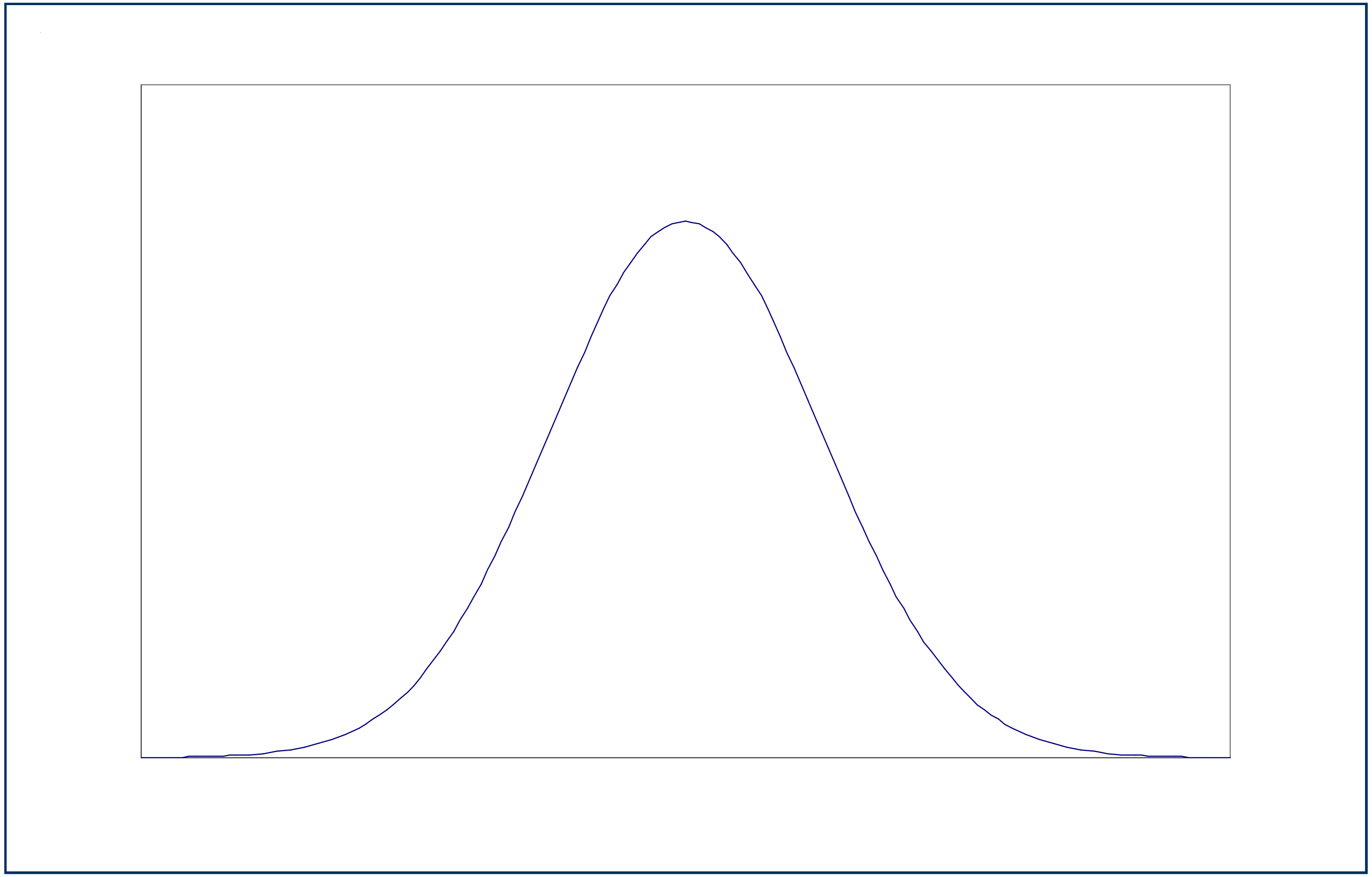


圖7.7B 右偏分配

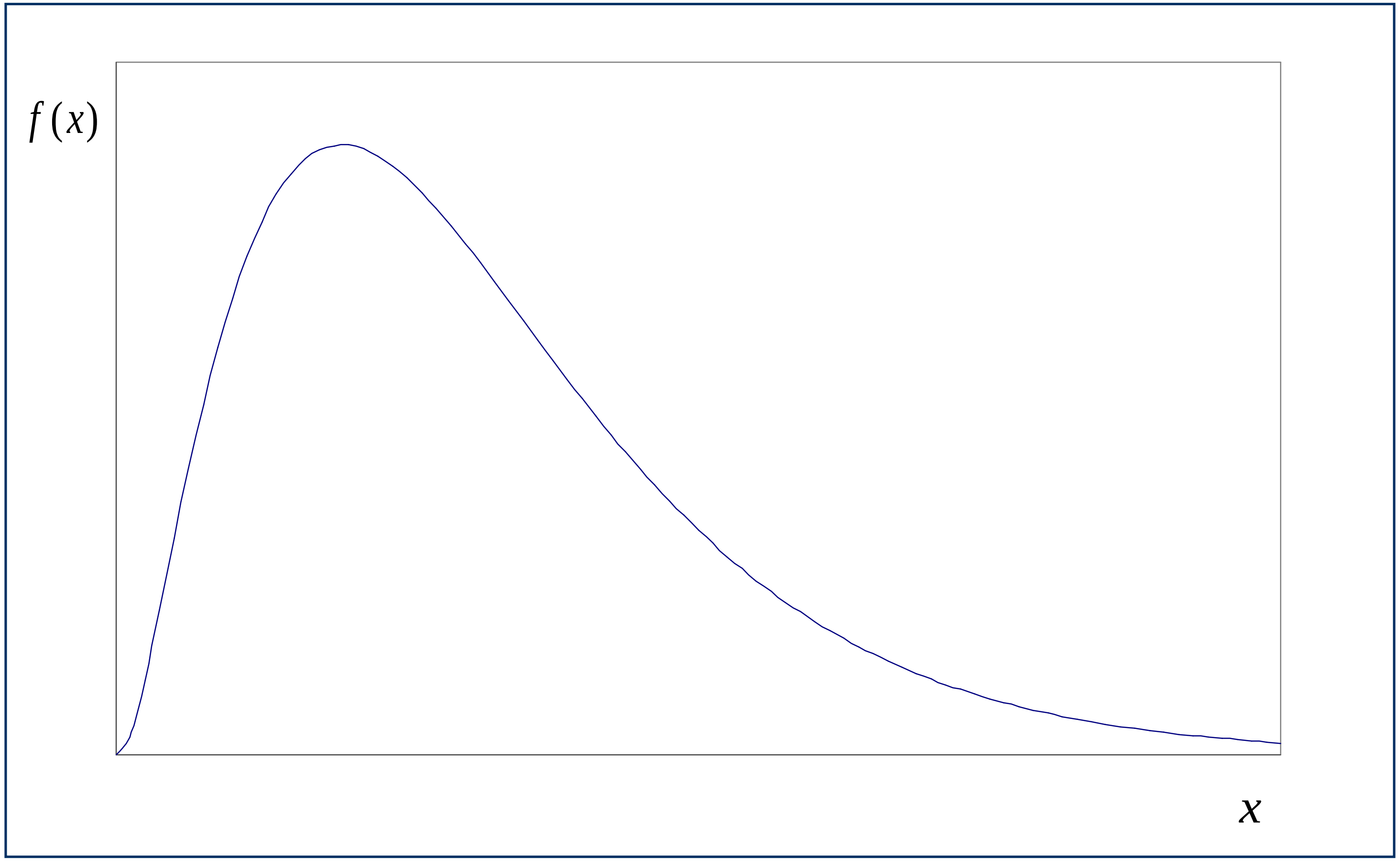


圖7.7C 左偏分配

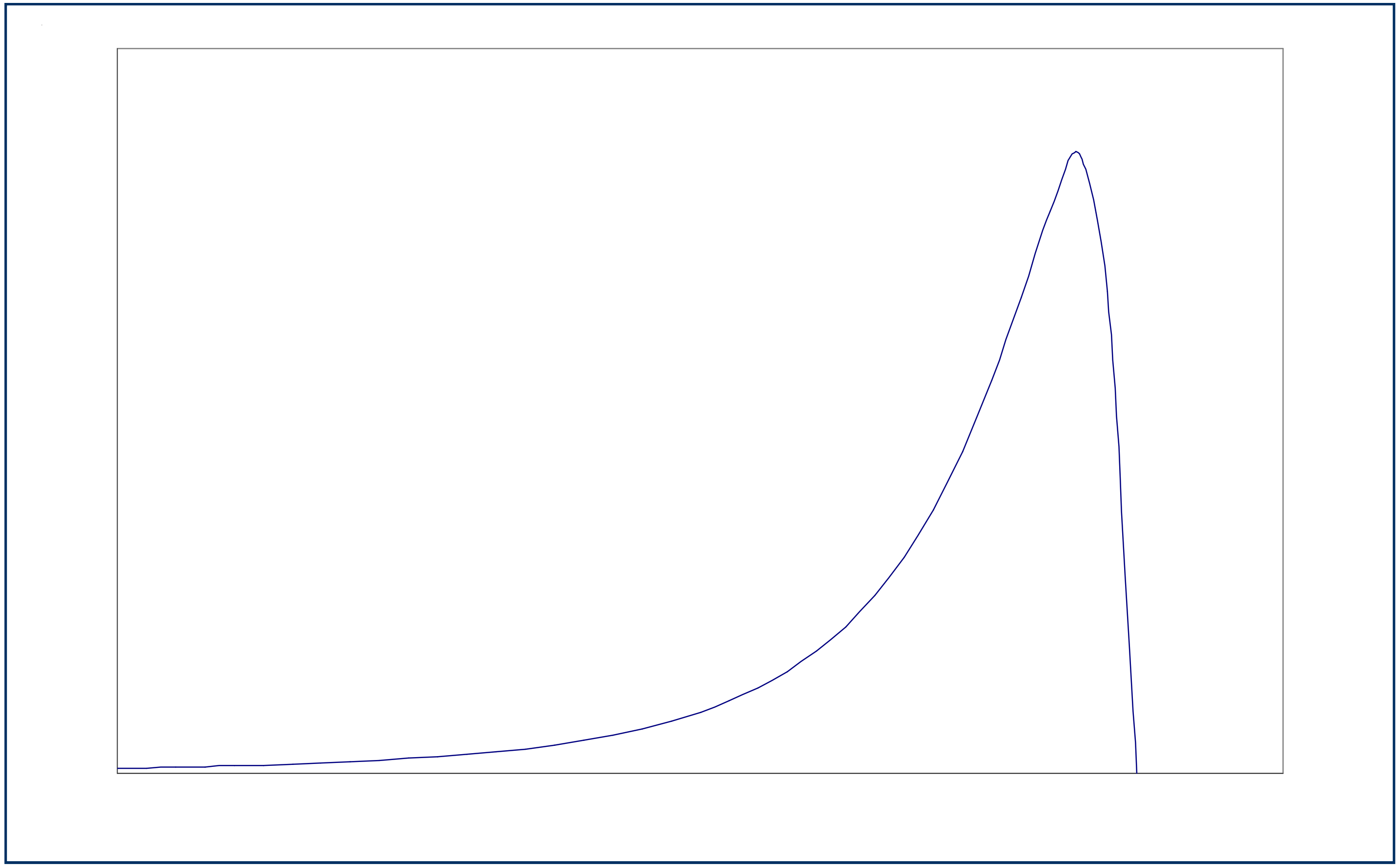
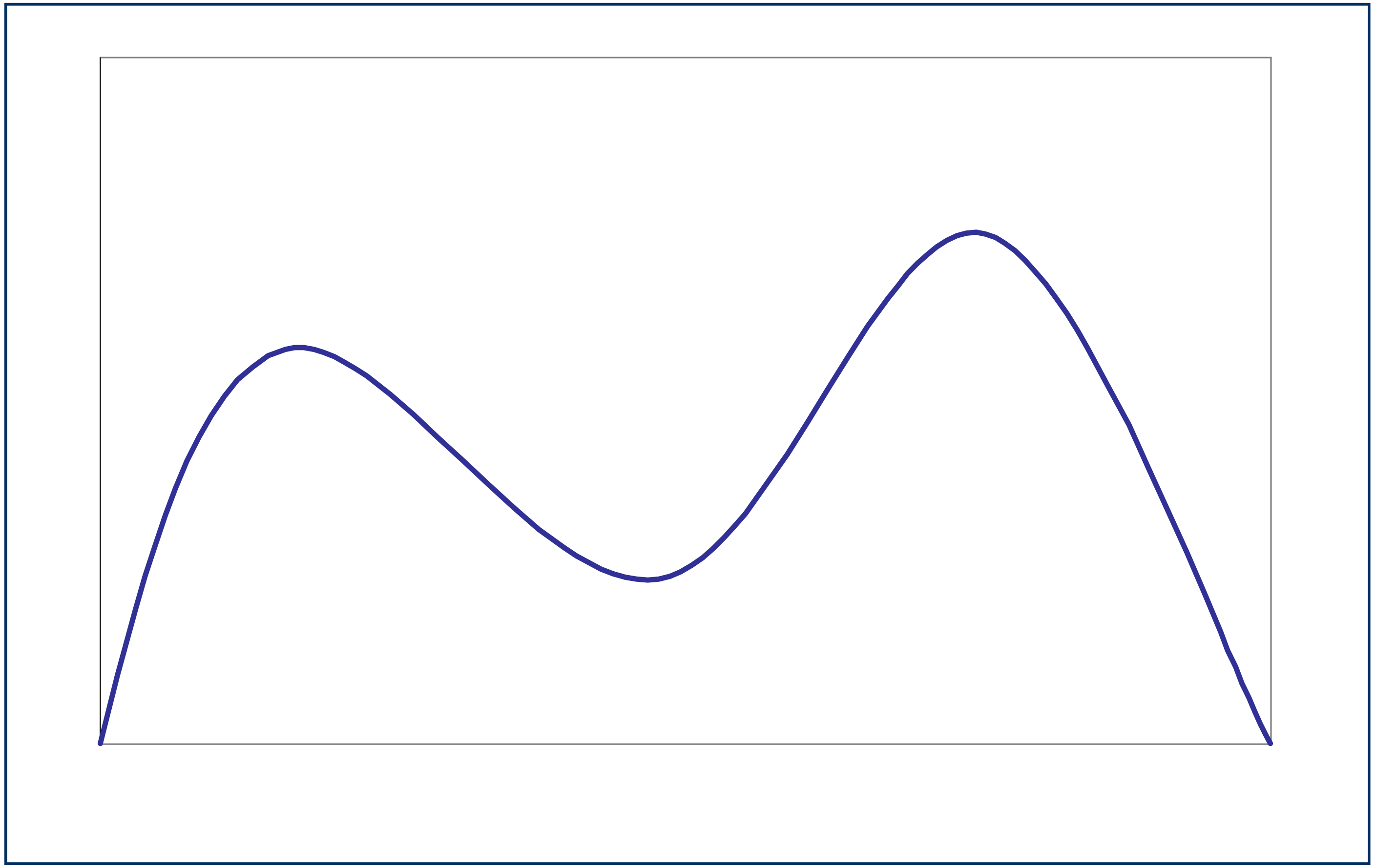


圖7.7D 雙峰分配



7.3 常態分配

資料特性:

1. 大多集中於平均數附近, 特別大和特別小的數值不多, 且對稱分布於平均數的兩邊.
2. 次數分配曲線像鐘型 (bell-shaped)
3. 數值絕大部分集中於離平均數3個標準差之內.

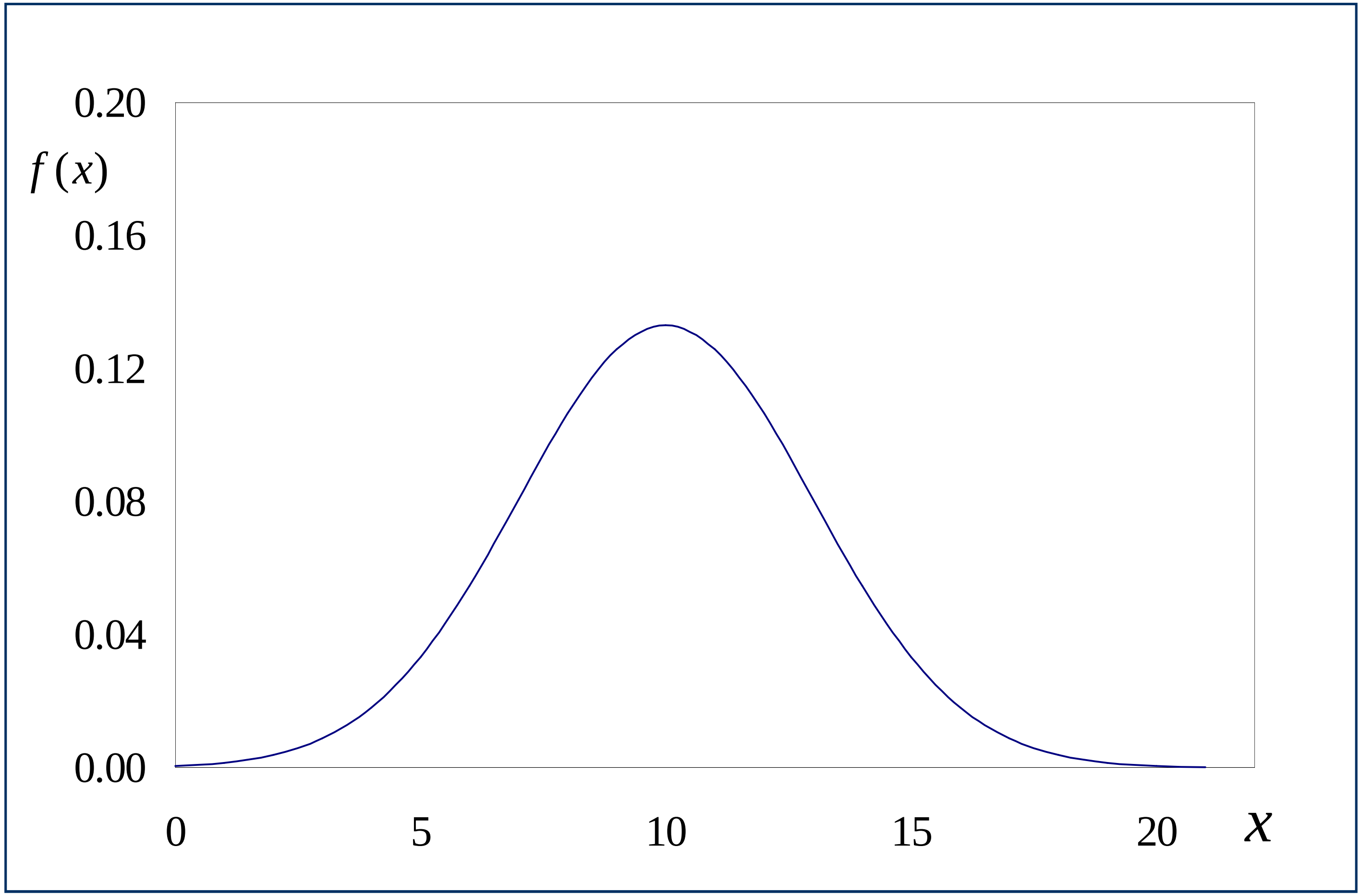
→ 常態分配 (normal distribution)

→德國人Gauss提出

→ 高斯分配 (Gauss distribution)

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.8 常態分配



Q: 身高幾公分屬於異常 (特別高或特別矮?)

表7.4 國小四年級學生的身高

x 身高	$P(x)$
110~120	0.0299
120~130	0.2332
130~140	0.4714
140~150	0.2332
150~160	0.0299

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

7.3.1 常態分配的意義

常態分配的定義

設X爲連續隨機變數，若其機率密度函數爲：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<\infty$$

式中： $-\infty<\mu<\infty\ ,\sigma>0$ ， $\pi=3.1416$ ，

$e=2.7183$ 。

則稱此 $f(x)$ 爲常態分配。

常態分配一般習慣以 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$來表示

常態曲線為一個對稱, 單峰及中型的曲線

→ 平均數 μ與標準差 σ決定常態分配的位置與形狀

EX: 已知學生身高為常態分配, 平均數為135公分, 標準差為8公分

→ $X \sim N(135, 8^2)$

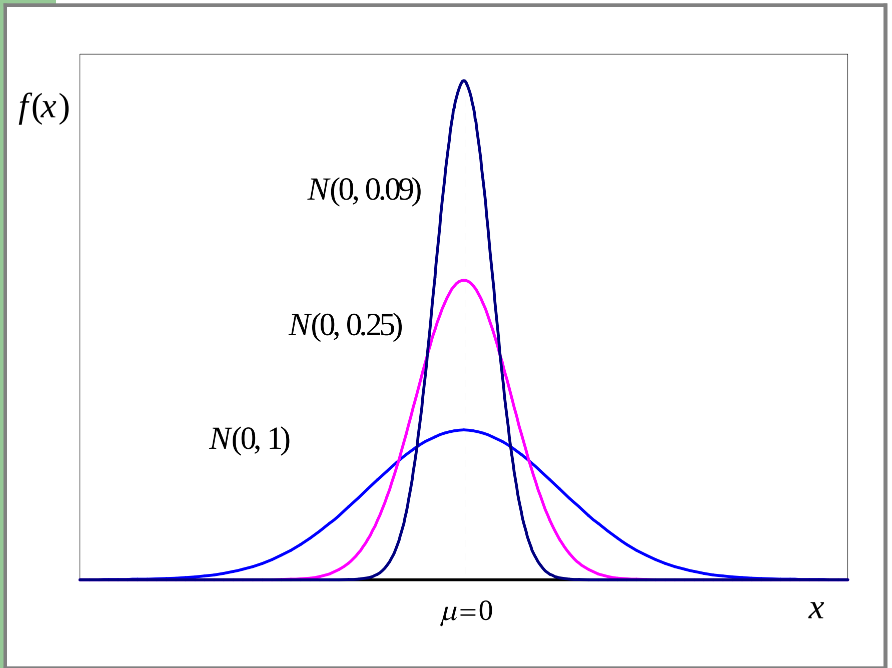
想知道某一區間的機率如 P(125<X<145)

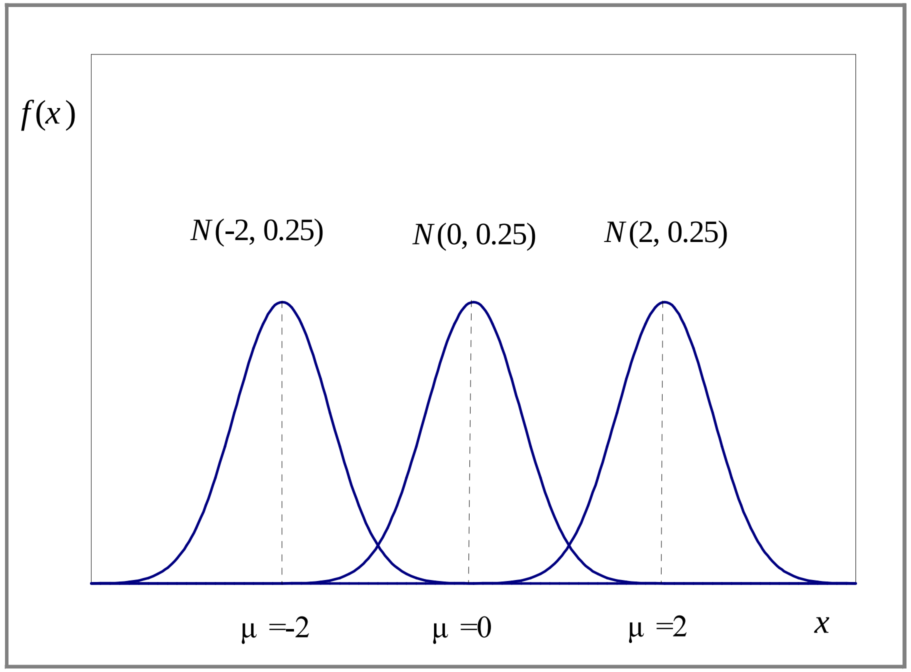
$$f(x) = \int_{125}^{145} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,8} e^{-\frac{(x-135)^2}{2\times 8^2}} dx$$ 利用標準常態機率值表

常態分配的形狀隨其參數(平均數 μ與標準差 σ)而異

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.9　平均數相同標準差不同　　圖7.10　平均數不同標準差相同





Q: 常態分配滿足機率的二條件嗎?

1. f(x) ≧0

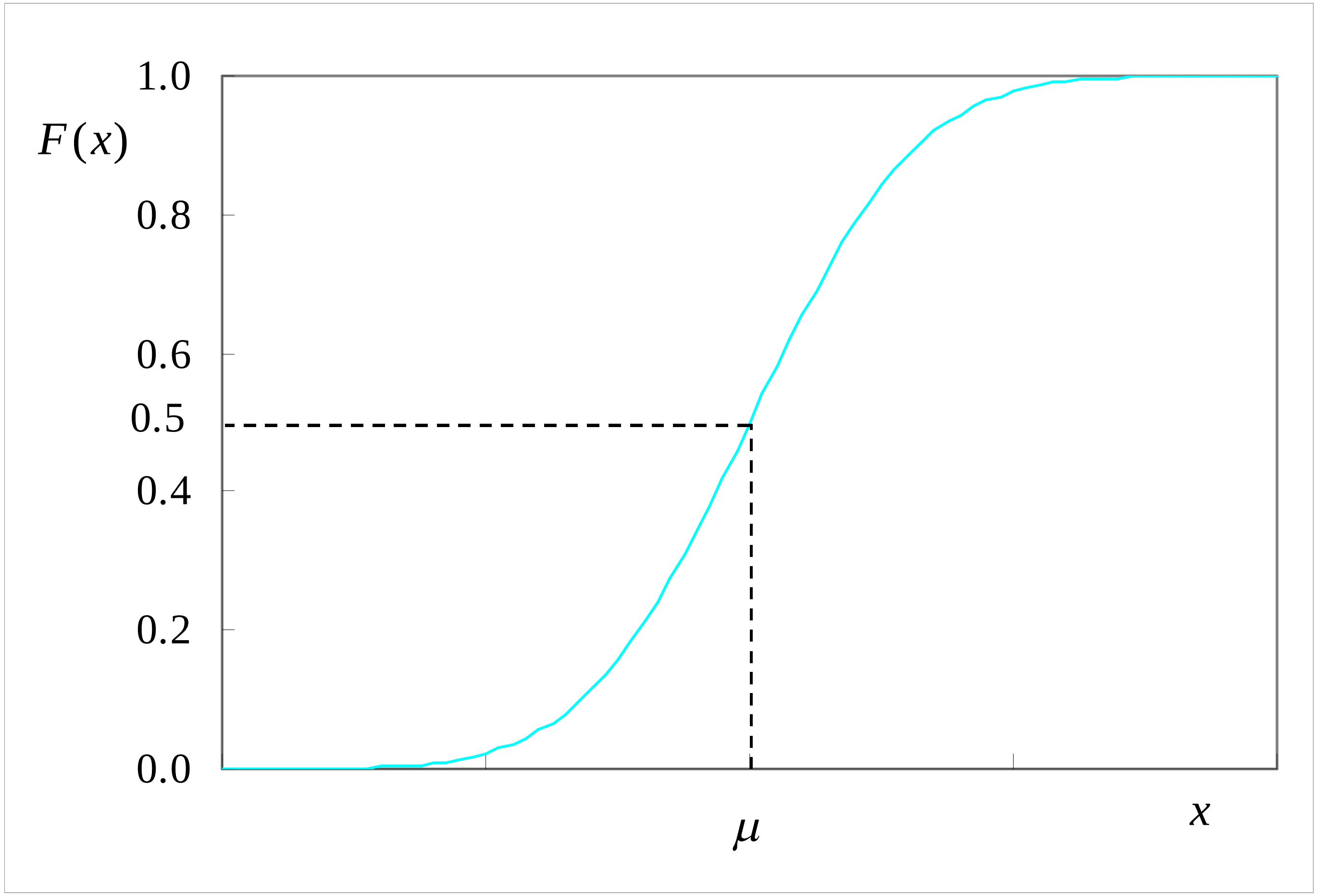
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

◎ 常態分配的累加機率函數

$$F(X) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.11 常態分配的累加機率圖



7.3.2 常態分配的性質 (談3點)

1. 常態分配的平均數與變異數

平均數

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\mu$$

變異數

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2$$

證明不會沒關係 (數學系可以練習看看)

2. 常態分配的形狀

常態分配的形狀隨其參數(平均數 μ與標準差 σ)而異

❍常態分配的特質

①常態分配 $f(x)$ 爲以 μ 爲中心的對稱分配。

②常態分配曲線下面的面積總和等於1。

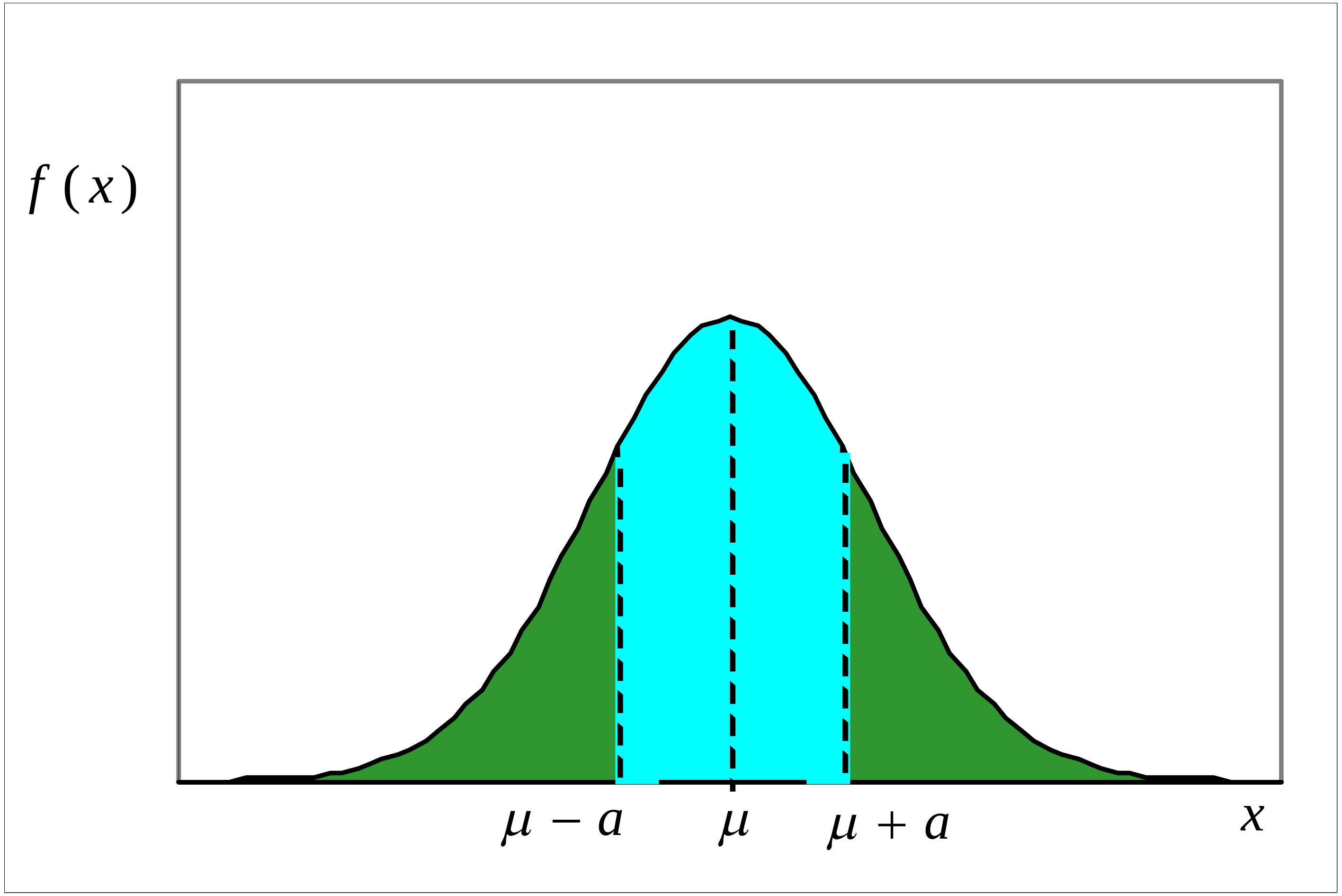
③常態分配 $f(x)$ 在 $X=\mu\pm\sigma$ 時有一轉折點。

④常態分配曲線的兩尾無限延伸。

⑤常態分配的偏態係數爲0，峰態係數等於3，常態峰。

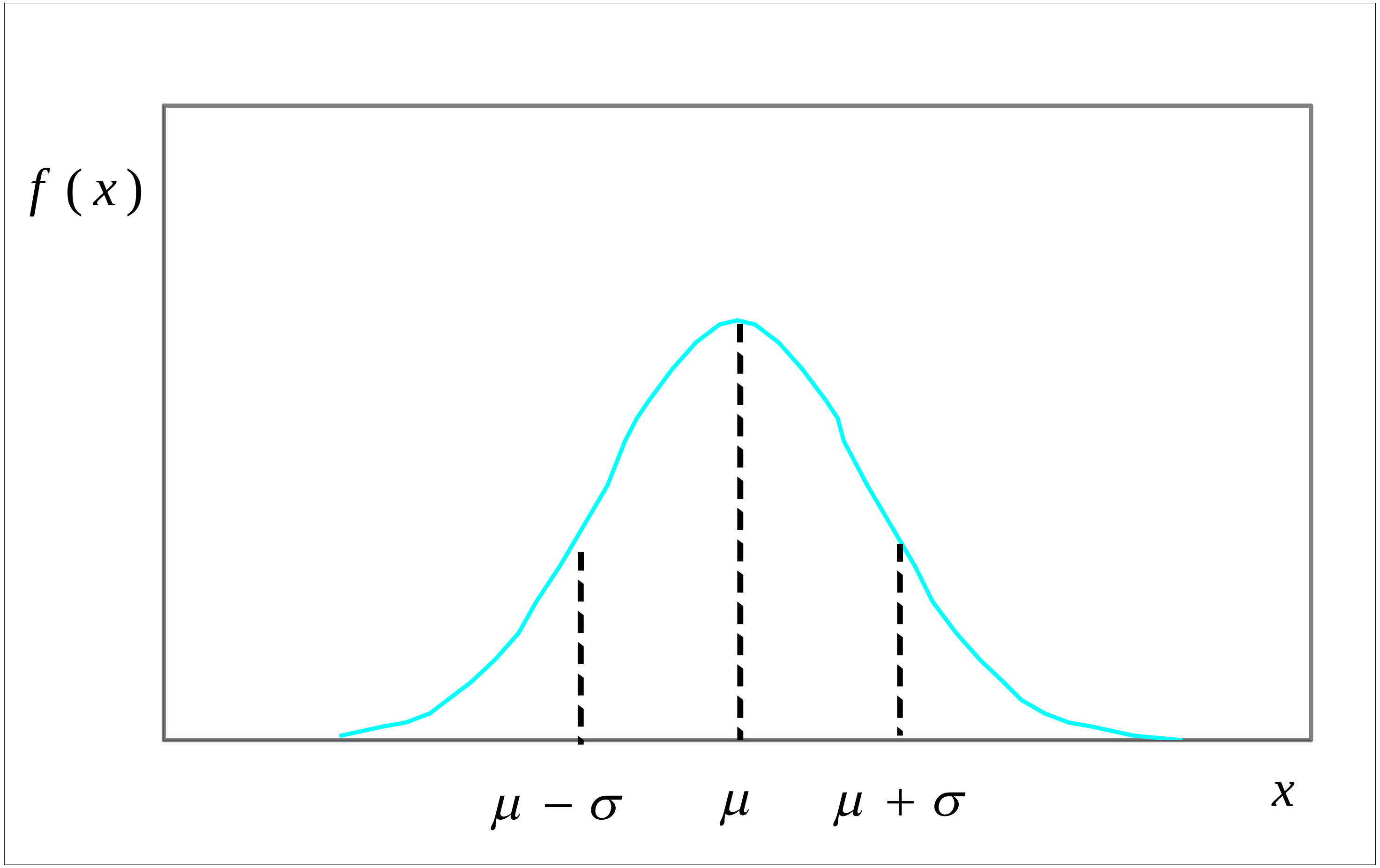
林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.12 常態分配的對稱性



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.13 常態分配的轉折點



3. 常態分配的機率範圍

常態分配無論其平均術語標準差為何, 機率範圍常用的有三種

❍ 常態分配的機率範圍

① 常態隨機變數的值落在離開平均數1個標準差等距的範圍(即$\mu \pm \sigma$)之機率爲：

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$$

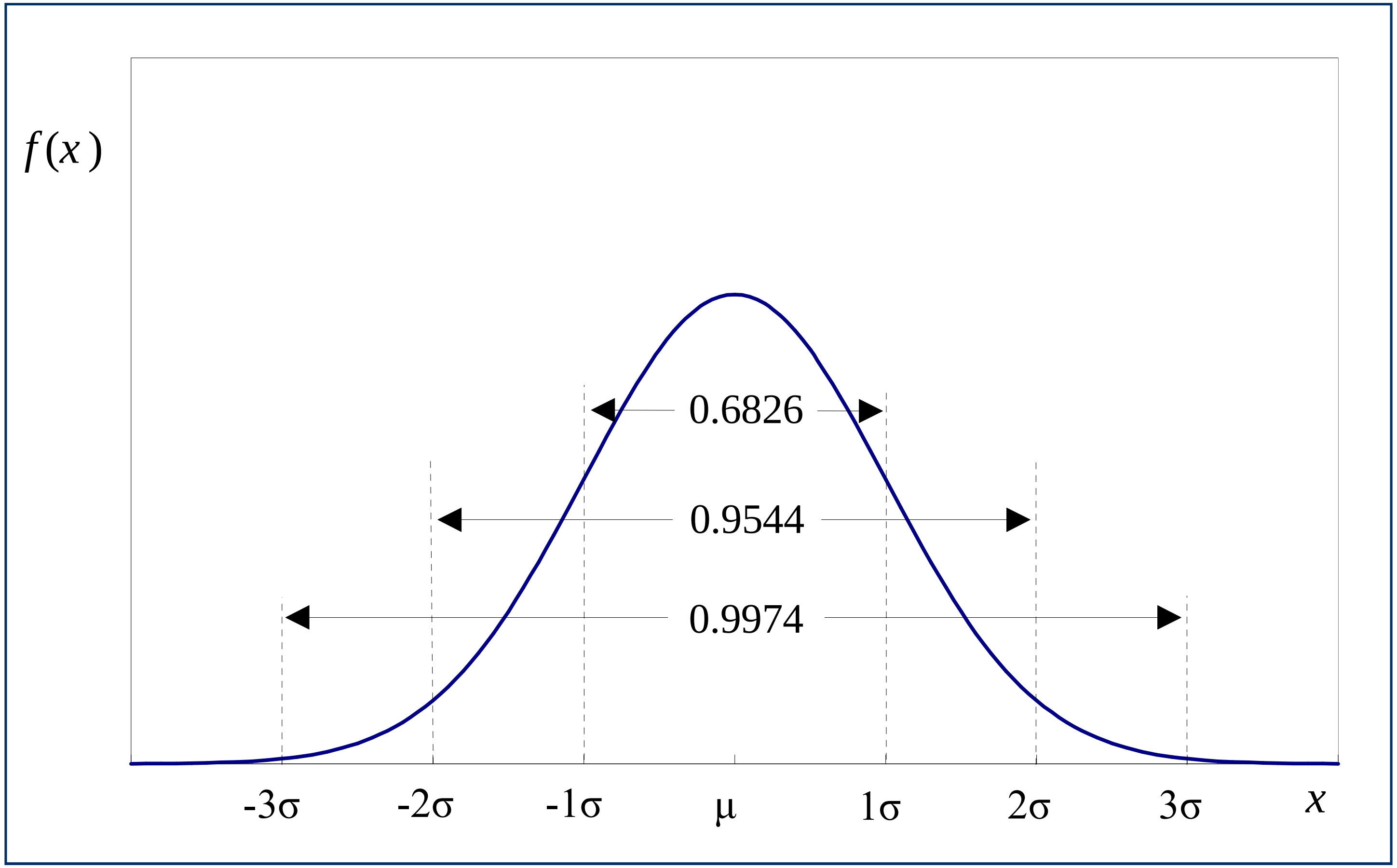
② 常態隨機變數的值落在離開平均數2個標準差等距的範圍(即$\mu \pm 2\sigma$)之機率爲：

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

③ 常態隨機變數的值落在離開平均數3個標準差等距的範圍(即$\mu \pm 3\sigma$)之機率爲：

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$$

圖7.14 常態分配的機率範圍



7.3.3 常態分配的重要性

❍ 常態分配的重要性

①常態分配可做爲在統計推論程序中的基本模式

②常態分配可進行許多統計推論

③常態分配構成大樣本推論統計的基礎

④間斷機率分配在某些條件下可利用常態分配求其近似值

EX7.9 三合一咖啡上面標示淨重爲12公克, 假設標準差爲0.5公克. 現取一包三合一咖啡, 問淨重在11公克到13公克之間的機率爲何?

Solution:

1. 柴比式定理

$$P(11 \le X \le 13) = P(|X - 12| \le 1)$$

$$= P(|X - 12| \le 2\sigma) \ge 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$$

2. 若常態

2個標準差以內, 0.954

7.3.4 常態分配的加法定理

常態分配的加法定理

定理1 設 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $W=a+bX$ 則

$$W\sim N(a+b\mu,b^2\sigma^2)$$

定理2 設 $X\sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$，$Y\sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ 且 X、Y 獨立，若

$$W=aX+bY$$

則

$$W\sim N(a\mu_X+b\mu_Y,a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2)$$

EX7.10&11 若三合一咖啡每包成本Y為重量X的函數

$Y=0.5+0.45X$

問; (1) 每包成本的平均數為何? 變異數為何? 為何種分配?

(2) 現假設售價為一常態分配, 平均售價10元, 標準差1元, 批發給零售店的價格為75折, 問每包利潤的平均數與變異數為何? 又每包利潤成何種分配?

Solution;

1. $E(Y)=a+b\mu=0.5+0.45*12=5.9$

$V(Y)=b^2\sigma^2= (0.45)^2(0.5)^2= 0.05$

每包成本爲平均數**5.9**元, 變異數**0.05**, 爲常態分配

2. 設每包售價為隨機變數P, 則 $P \sim N(10,1)$

每包利潤π可表為 $\pi=0.75P-Y$

Y為每包成本, 因P與Y均為常態分配,且P與Y獨立

$$E(\pi)=E(0.75P-Y)=0.75E(P)-E(Y)$$
$$=7.5-5.9=\mathbf{1.6}$$

$$V(\pi)=V(0.75P-Y)$$
$$=(0.75)^2V(P)+V(Y)$$
$$=0.5625+0.05=\mathbf{0.6125}$$

每包利潤為平均數**1.6**元, 變異數**0.6125,** 為常態分配

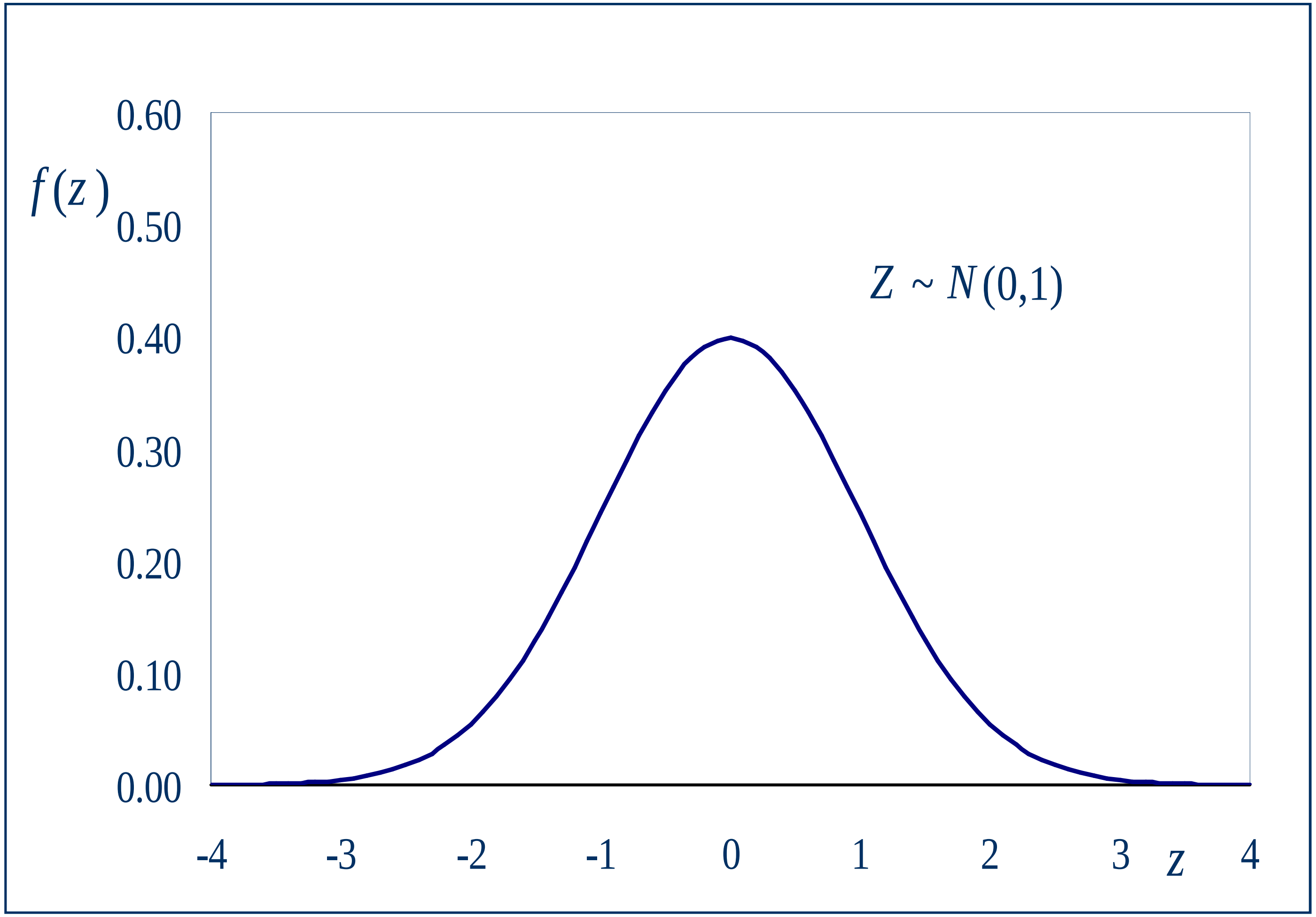
7.4 標準常態分配 (Standard normal distribution)

❍ 標準常態分配

$$f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

式中 $Z=(X-\mu)/\sigma$ 標準常態變數。標準常態分配其平均數爲0，變異數爲1。一般以 $Z \sim N(0,1)$ 來表示。

圖7.15 標準常態分配



7.4.2 標準常態分配的性質

1. 標準常態分配具有常態分配的性質, 惟其平均數 $\mu_Z=0$ 標準差 $\sigma_Z=1$, 是標準常態分配的特殊例子

2. 標準常態分配的任何值域的機率可查標準常態機率值表而獲得.

Q: 如何查表? 如求Z落在(a,b)間的機率P(a≦Z≦b)可查表而獲得.

See next page

圖7.16　標準常態分配機率(0與z_0間)

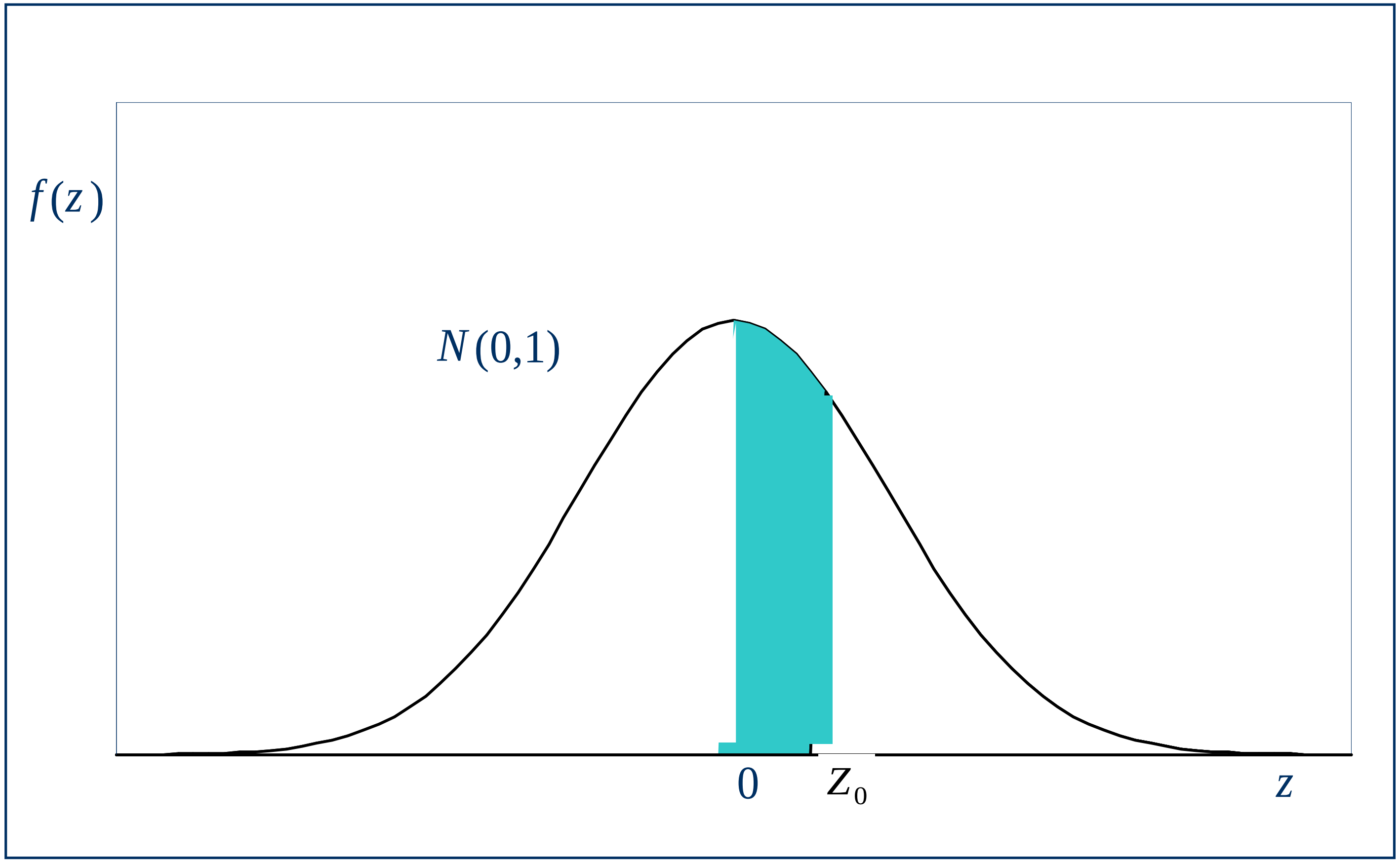


表7.5 標準常態機率分配表

	Z 的第二位小數									
z	**.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	$\boxed{0.4495}$	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

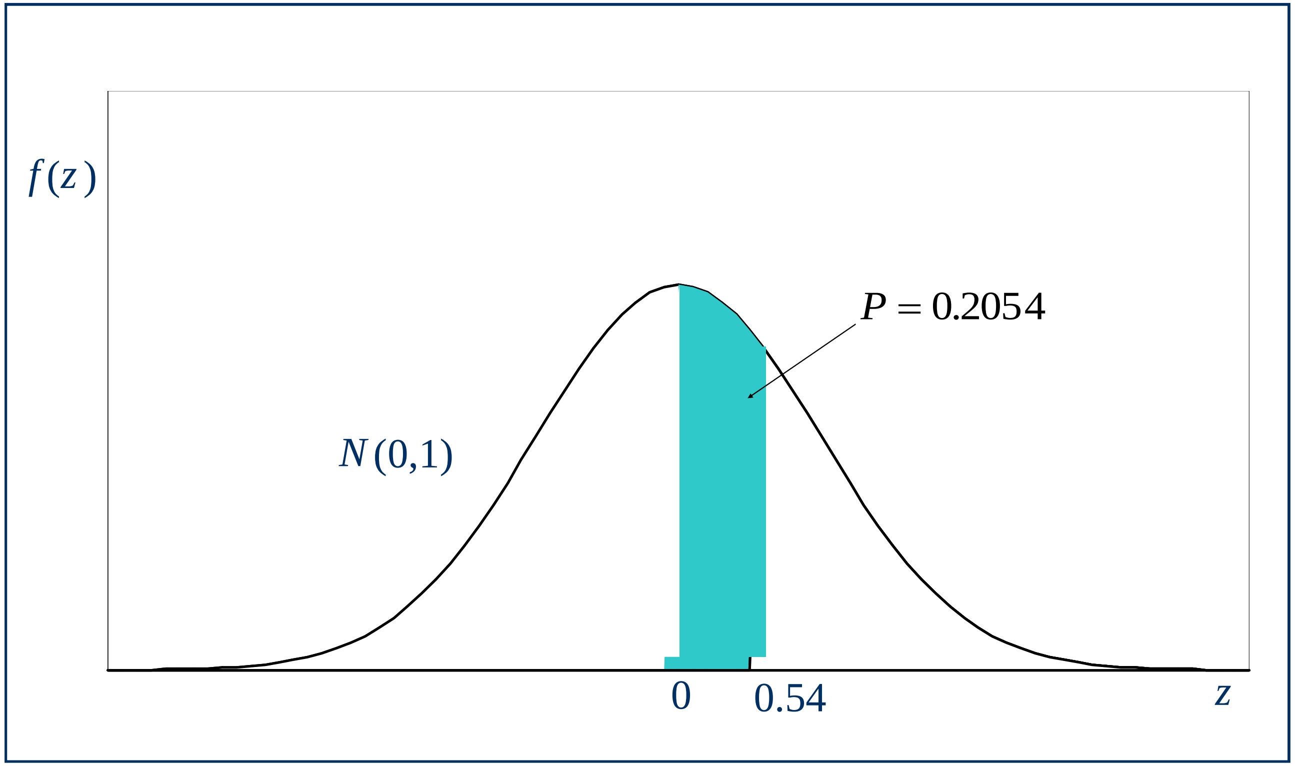
EX7.12 標準常態分配P(Z>0.54)的機率值

$P(Z>0.54)=P(Z>0)-P(0<Z<0.54)$

因為$P(Z>0)=0.5$, 查表$P(0<Z<0.54)=0.2054$

$P(Z>0.54)=0.5-0.2054=$**0.2946**

圖7.17 Z在0與0.54間的機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.18 標準常態機率對話方塊

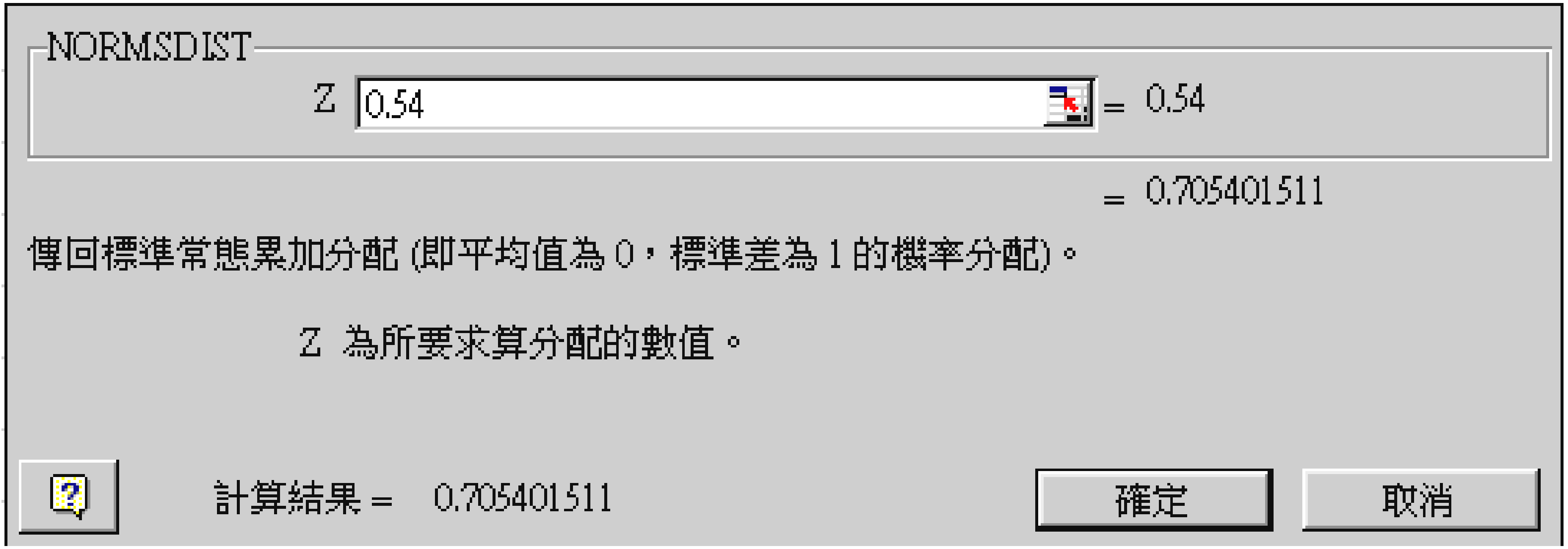
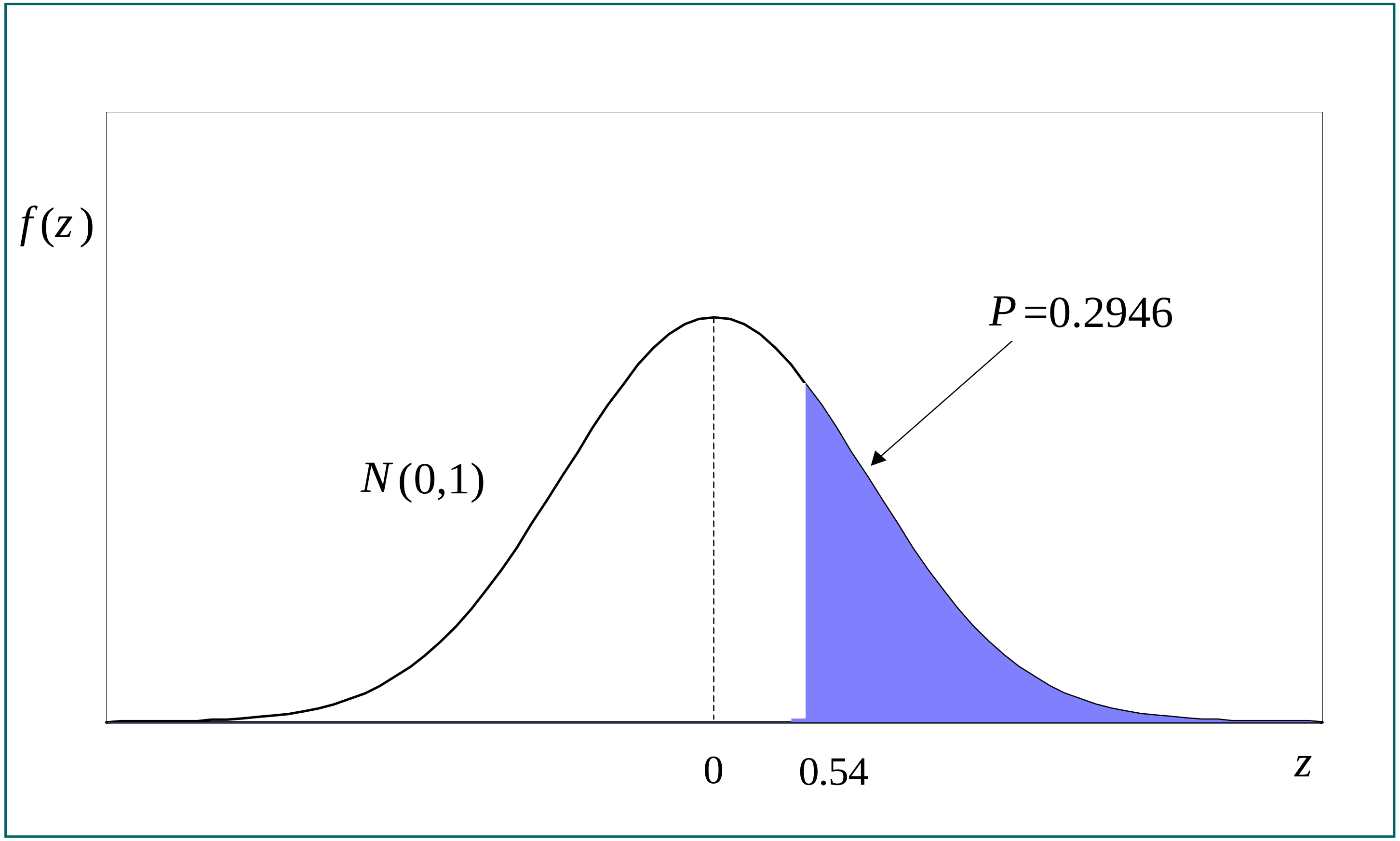


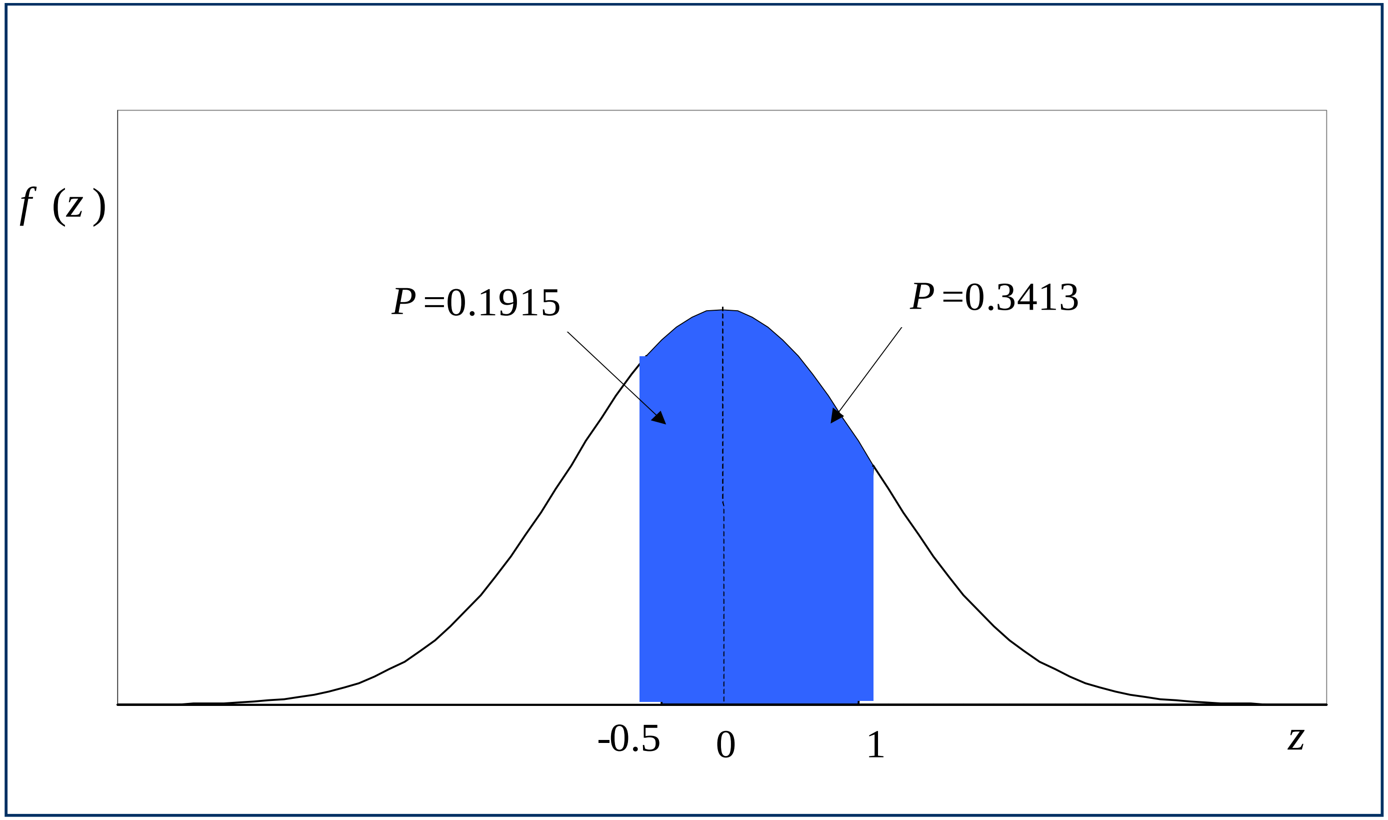
圖7.19 Z > 0.54的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX7.13 標準常態分配 P(-0.5<Z<1)的機率值
P(-0.5<Z<1)=P(-0.5<Z<0)+P(0<Z<1)
P **0.5328**

圖7.20 -0.5 < Z < 1的標準常態機率值



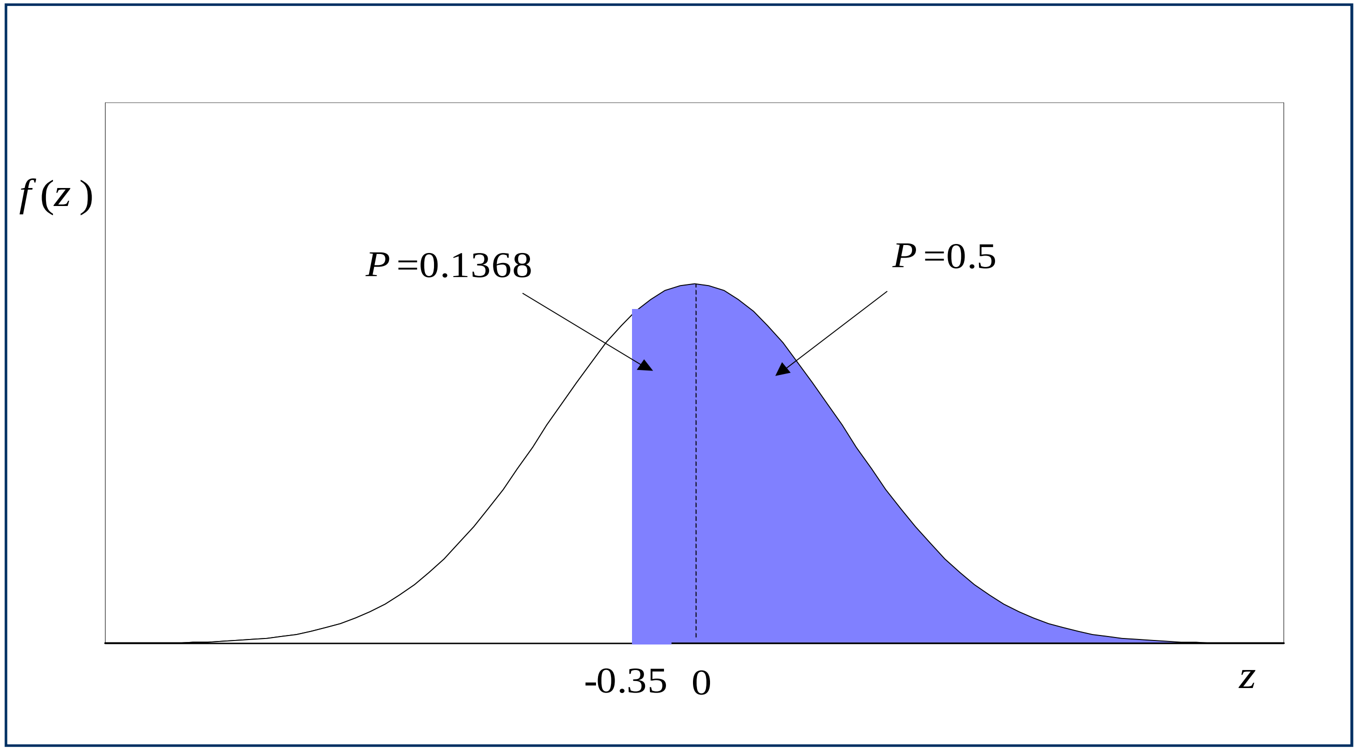
林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX7.14 標準常態分配P(Z>-0.35)的機率值

P(Z>-0.35)=P(-0.35<Z<0)+P(Z>0)

= P(0<Z<0.35)+P(Z>0)=0.1368+0.5=**0.6368**

圖7.21 Z > -0.35的標準常態機率值

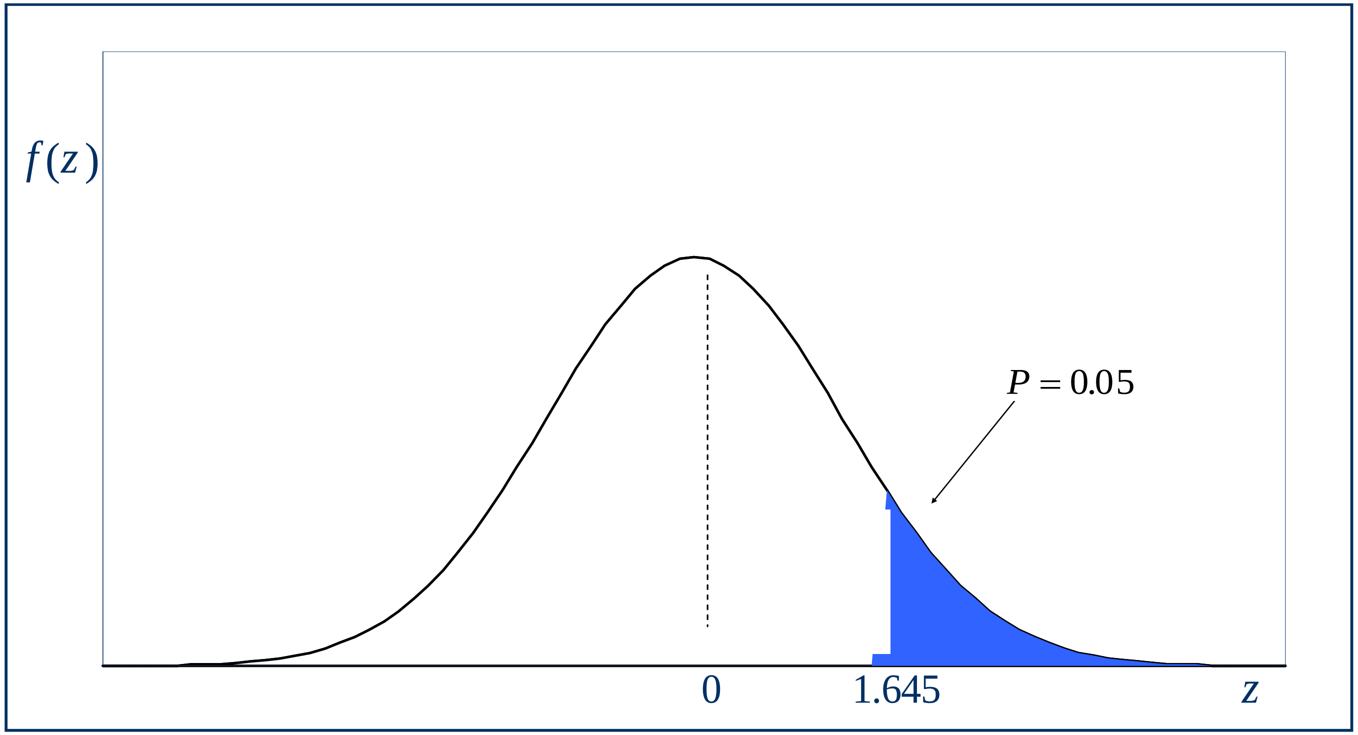


林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX7.15 求P(Z>z)=0.05的z值

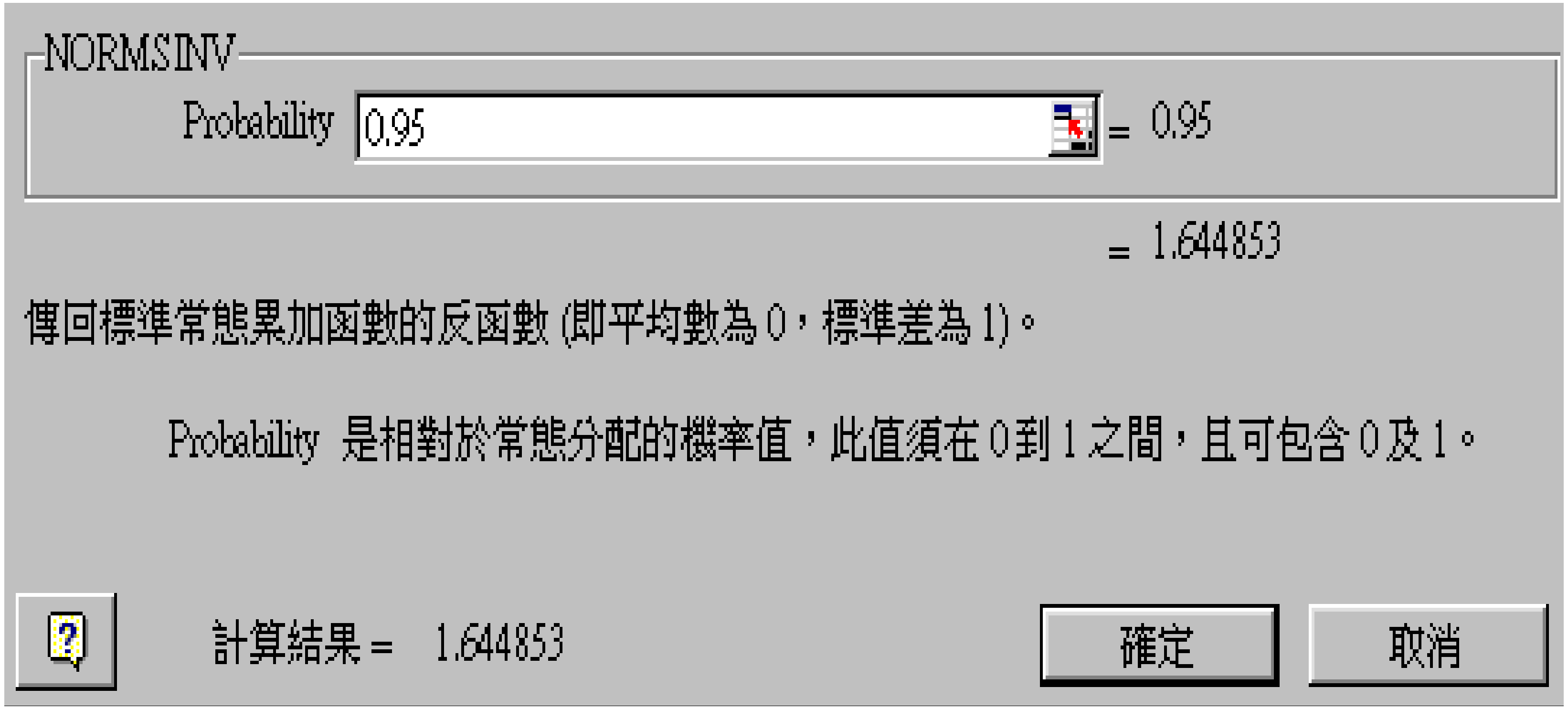
看標準常態表, let's go

圖7.22 Z > z的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.23　標準常態Z值對話方塊



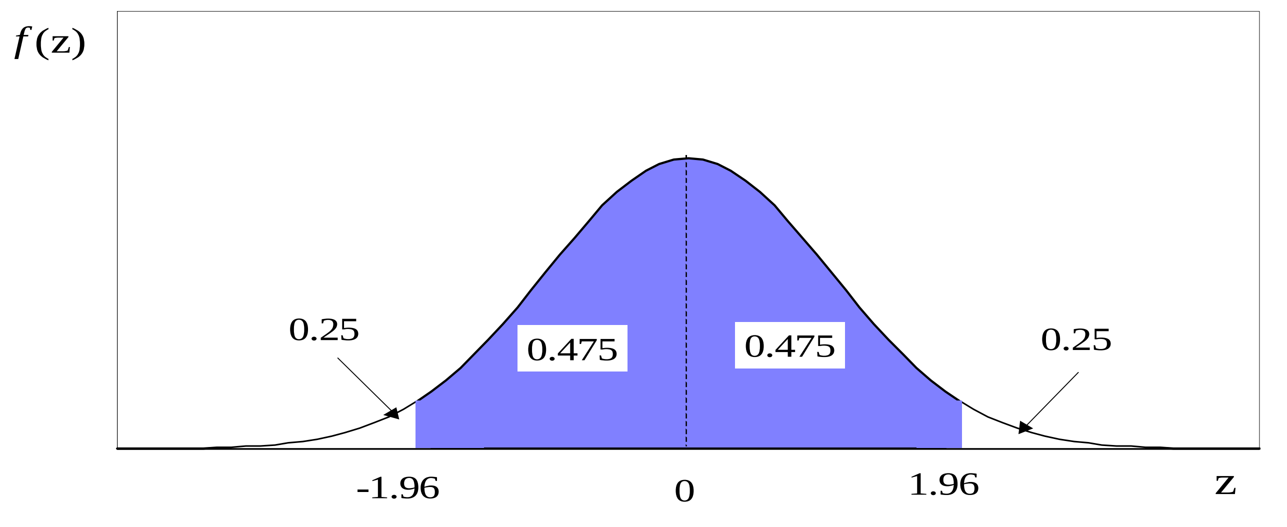
EX7.16 求$P(-z<Z<z)=0.95$之z值

$P(-z<Z<z)=P(-z<Z<0)+P(0<Z<z)$

$P(-z<Z<0)=P(0<Z<z)=0.95/2=0.475$

查表可得$P(0<Z<z)=0.475$之z值為 **1.96**

圖7.24 $-z < Z < z$的標準常態機率值



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

7.4.3 利用標準常態分配來求常態分配的機率

❍利用常態分配求常態分配機率

①將隨機變數 X 化為標準隨機變數 Z。同時將 a 值與 b 值標準化：

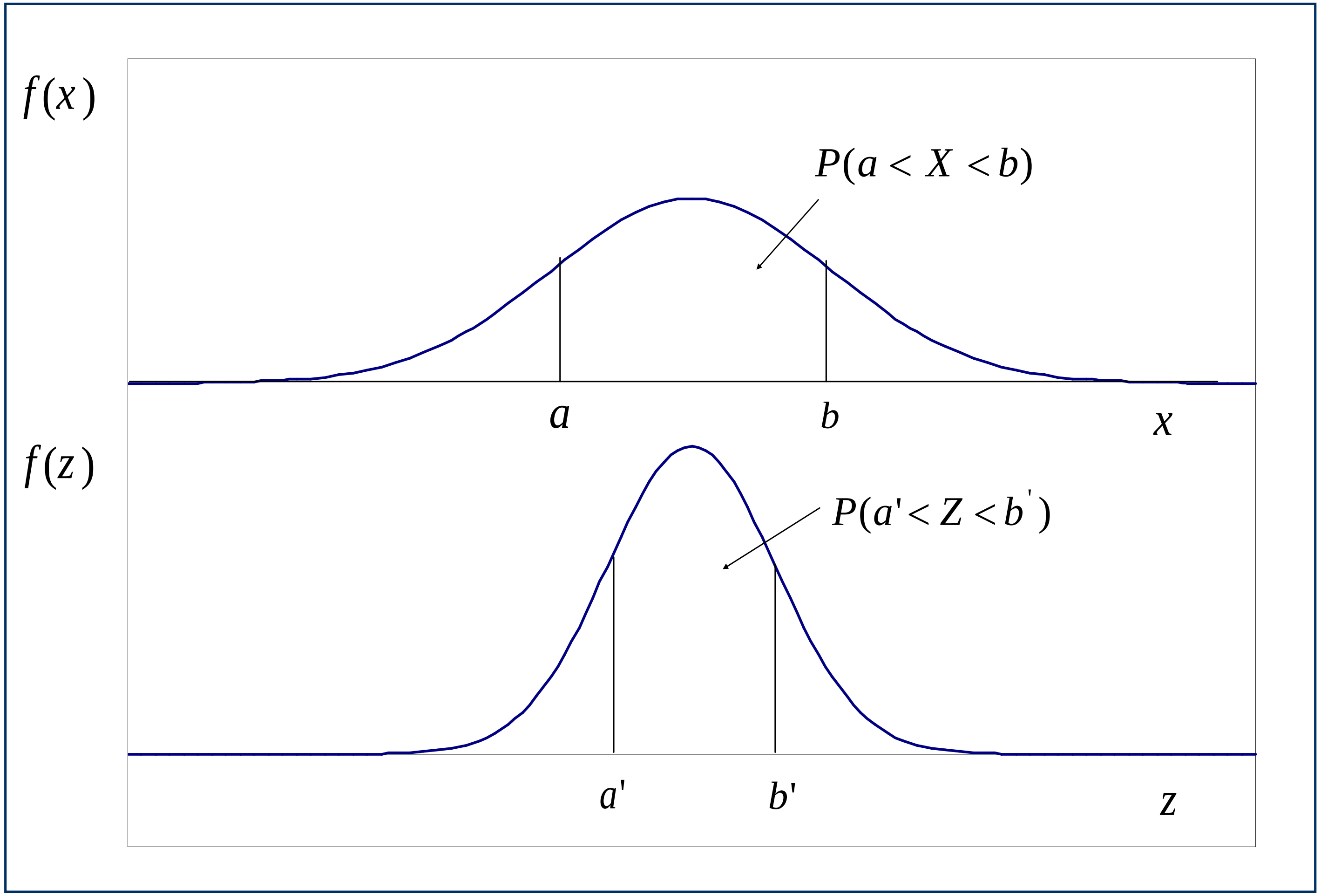
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\ ,\ a'=\frac{a-\mu}{\sigma}\ ,\ b'=\frac{b-\mu}{\sigma}$$

②其次，將 Z，a'，b' 代入 $P(a<X<b)$，即

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=P(a'<Z<b')$$

③依照查標準常態分配機率值表的方法查表，即可求得機率值。

圖7.25 常態分配與標準常態分配



EX7.17 台閩地區18歲男, 女同學的平均身高爲171.49公分和159.45公分, 標準差分別爲5.61公分及5.21公分. 假設身高爲常態分配, 試問:

1. 18歲時多少比例的男同學身高在175公分以上?
2. 18歲時多少比例的女同學身高在160~155公分之間

Solution: (文字說明不要漏掉)

1.
$$P(X \geq 175) = P(Z \geq \frac{175-171.49}{5.61}) = P(Z \geq 0.63) = 0.2643$$

2.
$$P(160 \leq Y \leq 165) = P(Z \leq \frac{160-159.45}{5.21} \leq Z \leq \frac{165-159.45}{5.21})$$
$$= P(0.11 \leq Z \leq 1.07) = 0.3139$$

EX7.19 宵夜街炸雞攤每月營業額少於50萬或大於110萬的機率均不超過0.1. 假設營業額爲一常態分配, 試求該炸雞攤每月營業額的平均數與變異數

Solution:

已知 P(X<50)=0.1　P(X>110)=0.1

由標準常態分配知

$$P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le -1.28)=0.1 \quad \text{thatis} \quad P(X\le \mu-1.28\sigma)=0.1$$

$$P(\frac{X-\mu}{\sigma}\ge 1.28)=0.1 \quad \text{that is} \quad P(X > \mu-1.28\sigma)=0.1$$

μ-1.28σ=50　→ μ=80萬 σ=23.4萬

μ+1.28σ=110　此生意OK嗎??

EX 7.20 台灣地區失業者每月希望待遇的平均值爲27,961元, 標準差爲8,806元. 假設失業者希望的待遇爲常態分配

1. 現有職缺的月薪多在2萬元以下, 此職缺可以滿足多少失業者?
2. 若希望解決75%失業者的失業, 則新職缺的月薪至少爲多少?

Solution:

1. $$P(Y<20000)=P(Z<\frac{20{,}000-27{,}961}{8{,}806})=P(Z<-0.9)=0.184$$

2. 查表可得P(Z≦0.6745) ≒0.75

$$P(X\le x)=0.75=P(Z<0.6745)=P(Z\le\frac{x-27{,}961}{8{,}806})$$

x=33,901

圖7.26 咖啡的常態分配

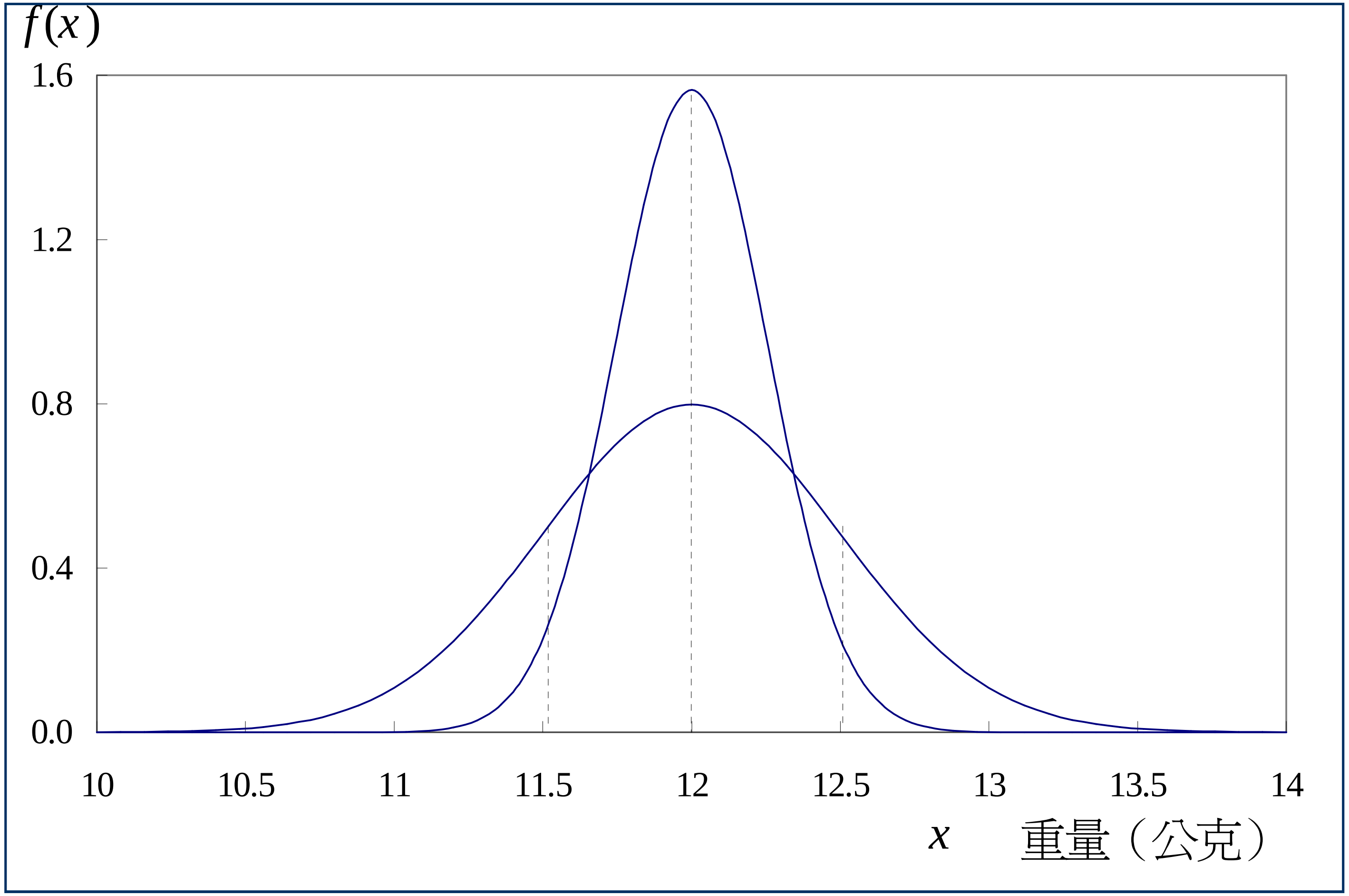
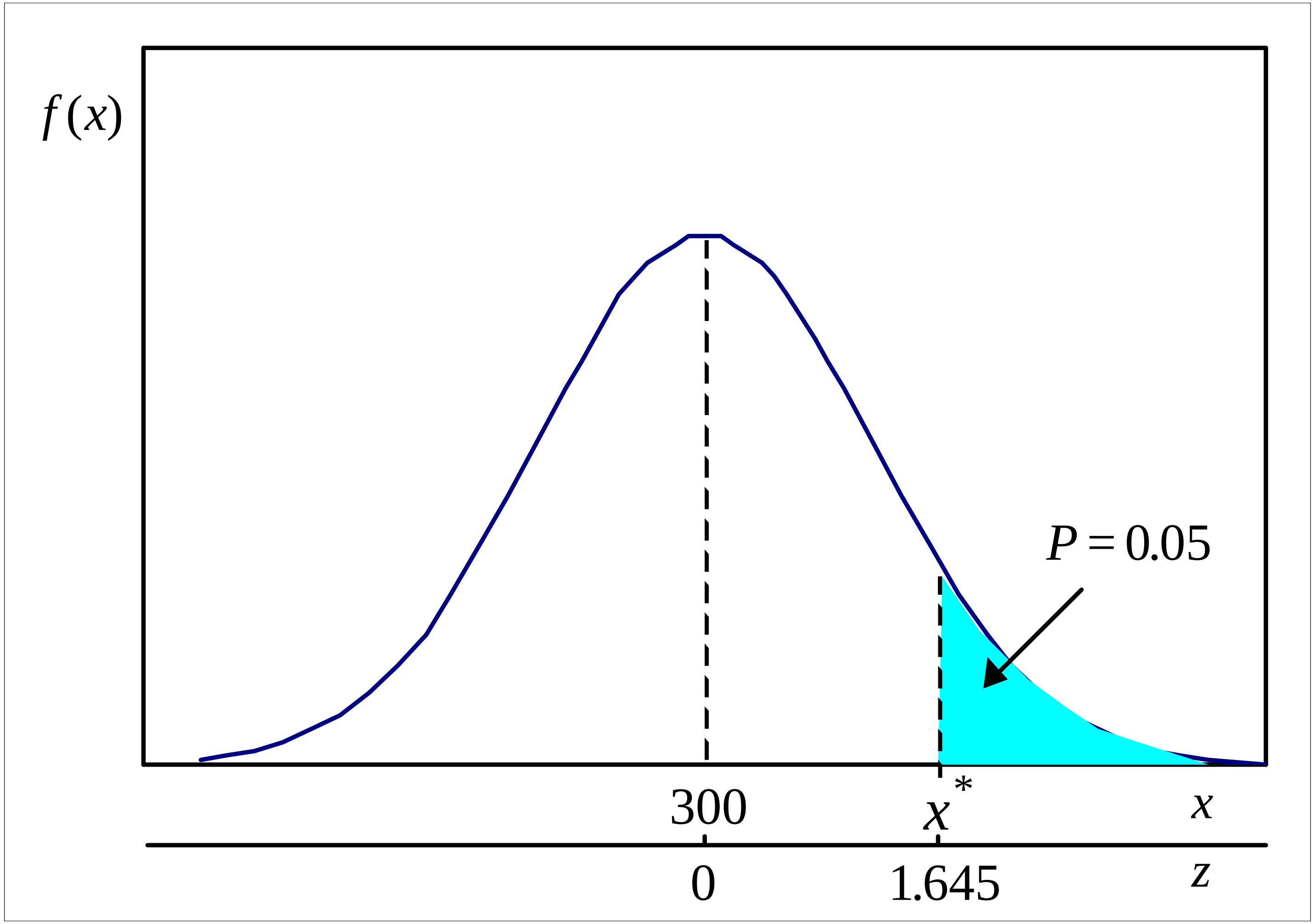


圖7.27 大巧便當的標準常態分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.28 產品上下限與標準差

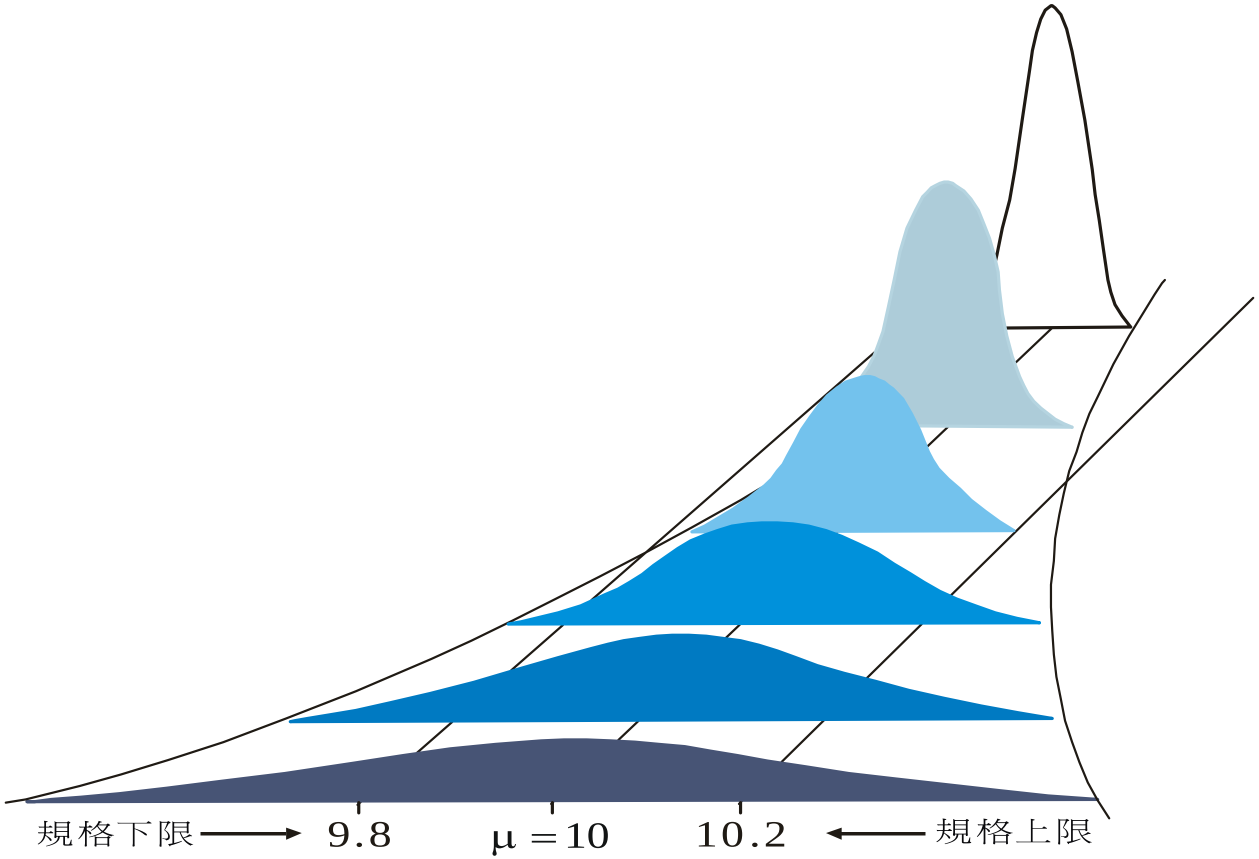


表7.6 常態分佈曲線之標準差區域及機率

	$\overline{X}$ 在此區域內之機率	$\overline{X}$ 在此區域外之機率
$\mu \pm 1\sigma$	68.27%	31.73% （317,300ppm）
$\mu \pm 2\sigma$	95.45%	4.55% （45,500ppm）
$\mu \pm 3\sigma$	99.73%	0.27% （2,700ppm）
$\mu \pm 4\sigma$	99.9937%	0.0063% （63ppm）
$\mu \pm 5\sigma$	99.999943%	0.000057% （0.57ppm）
$\mu \pm 6\sigma$	99.9999998%	0.0000002% （0.002ppm）

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

7.5 均等分配 (uniform distribution)

- 機率密度函數

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le X \le b$$
$$= 0 \qquad \text{其他}$$

- 累加機率函數

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}t\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

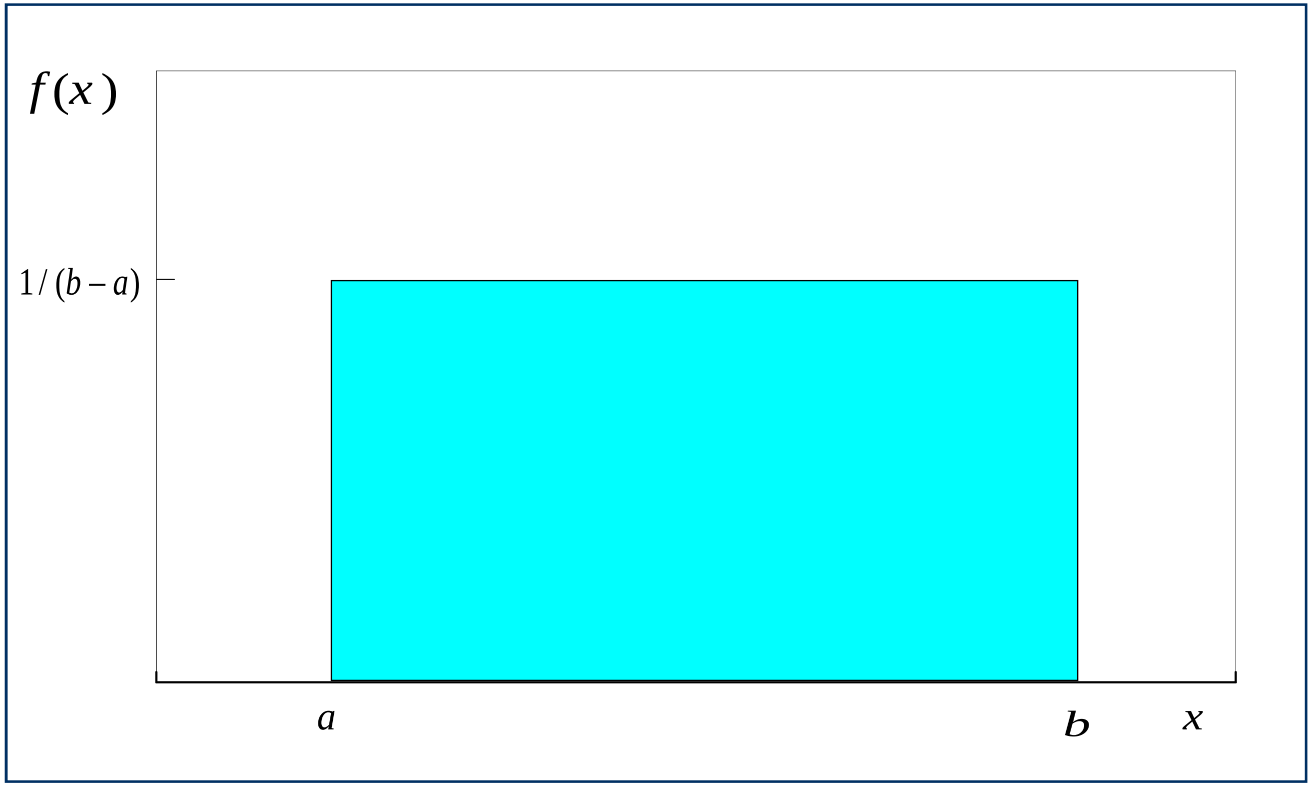
- 期望值

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

- 變異數

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

矩形面積=寬度*高度
因矩形寬度為(b-a), 面積等於1
故 高度= 1/ (b-a)
因此, 均等分配的機率密度等於 高度=1/(b-a)



EX7.21 華納威秀影城西洋片每二小時放映一次, 間隔入場的時間爲25分鐘. 若觀眾到達電影院時已錯過入場時間, 必須等待

1. 等待的期望值與標準差
2. 等待時間超過45分鐘的機率
3. 等待時間介於半小時和45分鐘的機率

Solution:

設X爲等待入場的分鐘數, 則X爲一 0~95 (=120-25)

1. E(X)=(0+95)/2=47.5

$$\sigma = \sqrt{\frac{(95-0)^2}{12}} = 27.4$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

2. 等待時間超過45分鐘的機率

$P(X \geq 45)=1-(45/95)=50/95=0.5263$

3. 等待時間介於30和45分鐘的機率

$$P(30 \leq X \leq 45)=\frac{45-30}{95-0}=\frac{15}{95}=0.1579$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

7.6 指數分配

概念

應用於任意兩個連續發生的事件之間隔或等待的時間

EX 倆個客戶提款的間隔時間

一個機器發生故障的相隔時間

排隊等候看病的時間

7.6 指數分配

7.6.1. 指數分配的意義

若X爲連續的隨機變數，其機率密度函數爲：

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad x\geq 0, \lambda>0$$

則 $f(x)$ 爲指數分配。式中：λ 爲單位時間事件發生的平均數。

7.6.2 指數分配的累加機率

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

7.6.3 指數分配的期望值與變異數

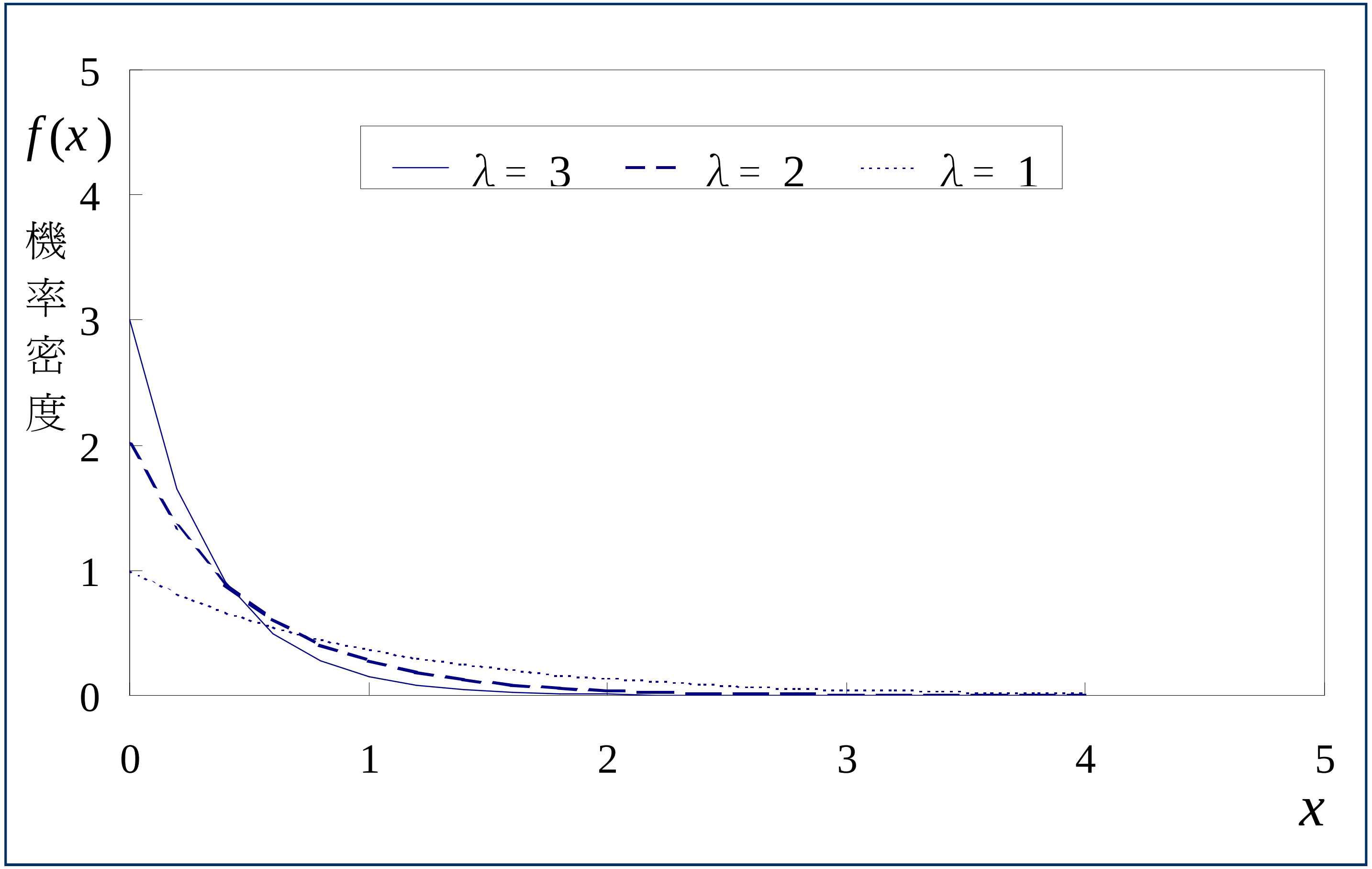
期望值

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

變異數

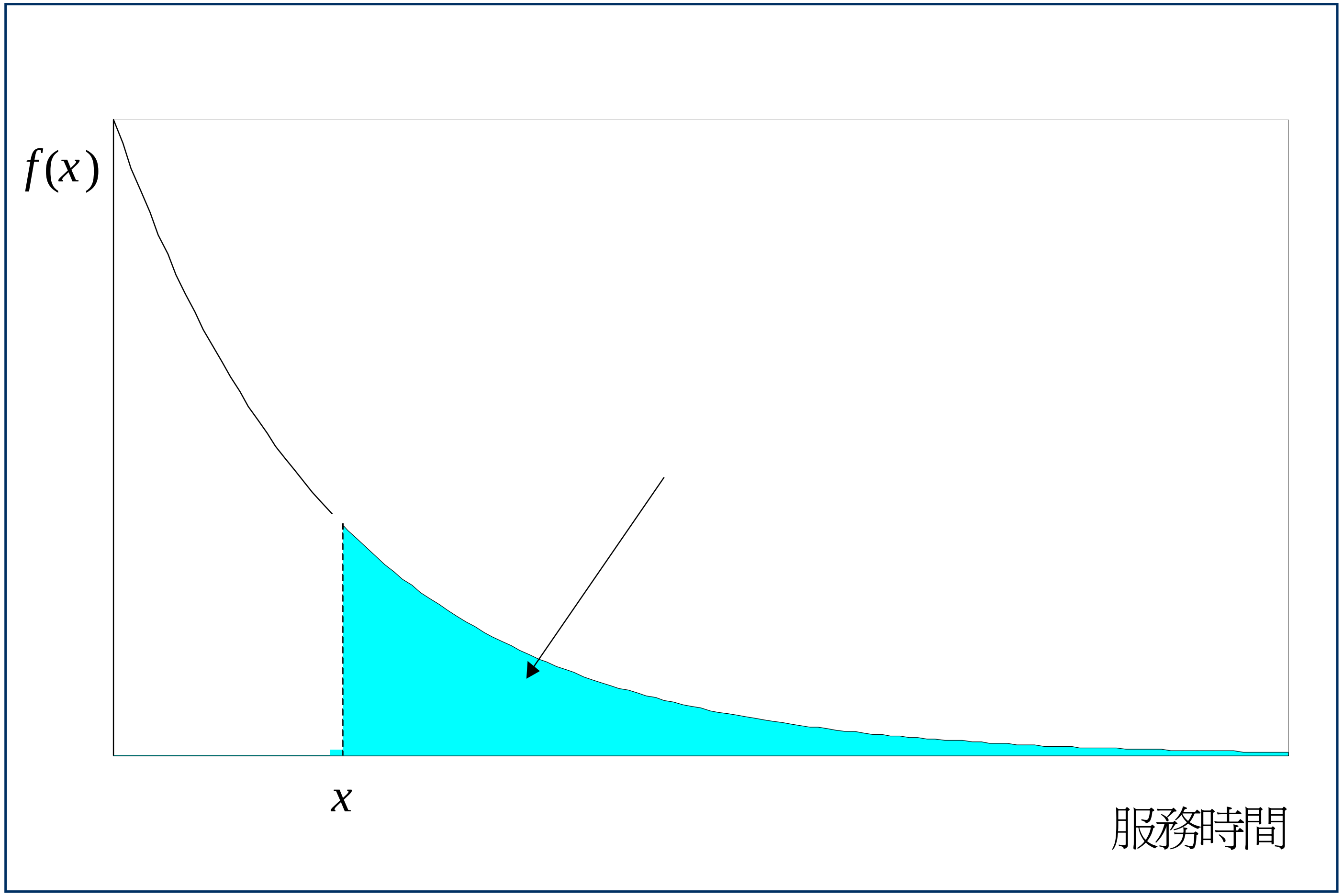
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

圖7.30 指數分配



林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖7.31 $P(X \geq x)$的機率



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX 台灣銀行城中分行許姓行員辦理存提款時間為一指數分配, 且每分鐘平均服務0.2個客戶

1. 該行員服務一個客戶的時間超過5分鐘的機率?
2. 該行員服務一個客戶少於2分鐘的機率?
3. 該行員平均服務一個客戶的時間?

Solution:

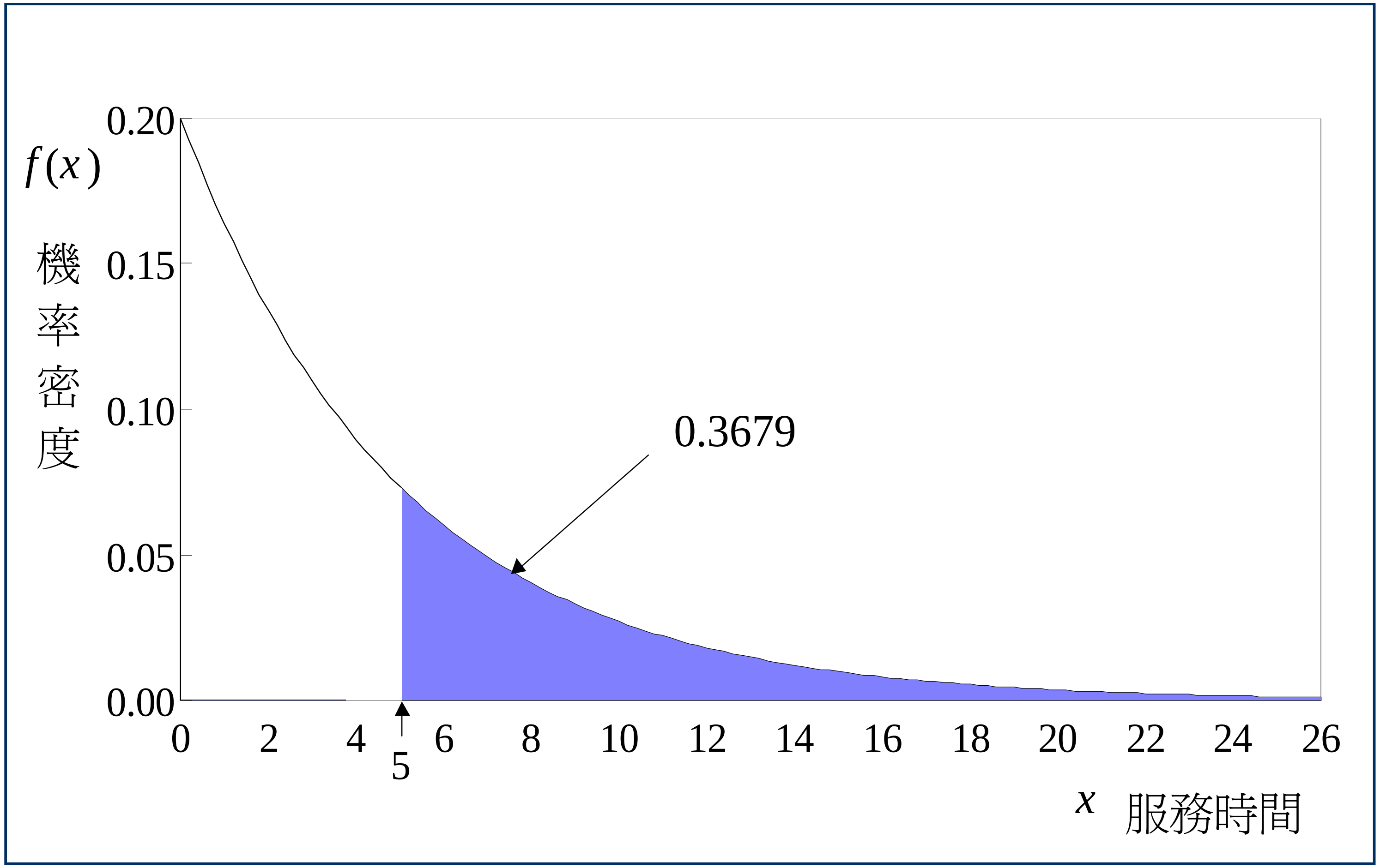
設X為該行員服務一個客戶的時間, 則X為λ=0.2的指數分配

$$f(x) = 0.2e^{-0.2x}$$

1. $$P(X > 5) = e^{-\lambda x} = e^{-0.2\times 5} = e^{-1} = 0.3679$$

查表, 0.3679

圖7.32 銀行行員的服務一個客戶的時間



2. λ=0.2, x=2 代入下式可得

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - e^{-0.2 \times 2} = 1 - e^{-0.4}$$

查附表四 λx=0.4 時, $e^{-\lambda x} = 0.670$

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - e^{-0.2 \times 2} = 1 - e^{-0.4} = 1 - 0.670 = 0.33$$

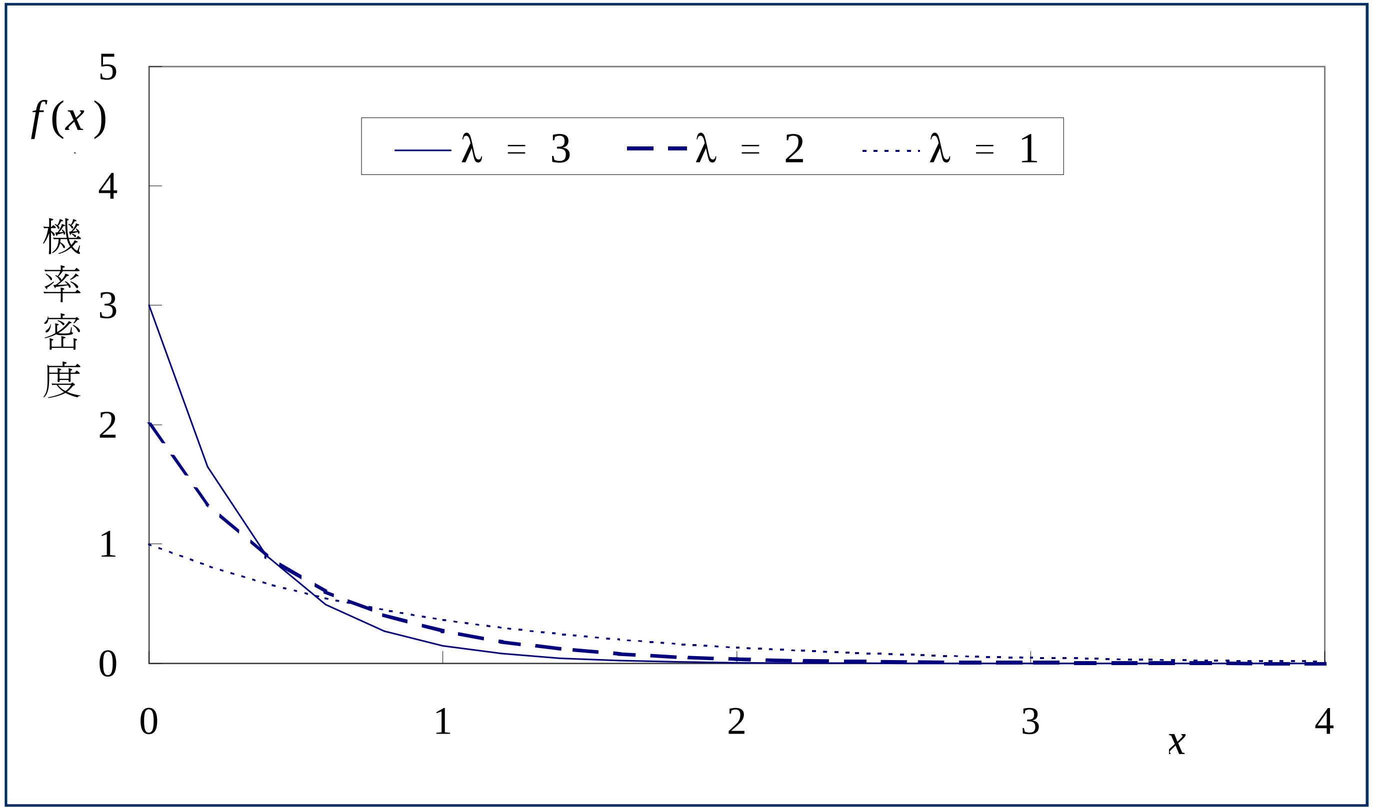
3. E(X)=1/λ = 5
   V(X)= 1/λ^2 = 25 分鐘

7.6.4 指數分配為一右偏分配

X=0, f(0)=λ, 機率密度最大. X增加時, 機率密度變小

λ越大, 分散度越小, 平均數越小, 越接近原點

圖7.33　不同λ值的指數分配



林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

7.6.5 指數分配與泊松分配的關係

泊松分配: 一連續的單位時間內發生此事件的次數

指數分配: 下一次發生事件的時間, 即兩事件的相隔時間

→兩者有密切的關係

EX: 某航空公司在一年中發生意外事件的平均次數爲0.2次

令X爲每年發生事件的次數

X爲λ=0.2的泊松分配

$$f(x)=\frac{e^{-0.2}\,0.2^{x}}{x!}$$

圖7.34 指數分配

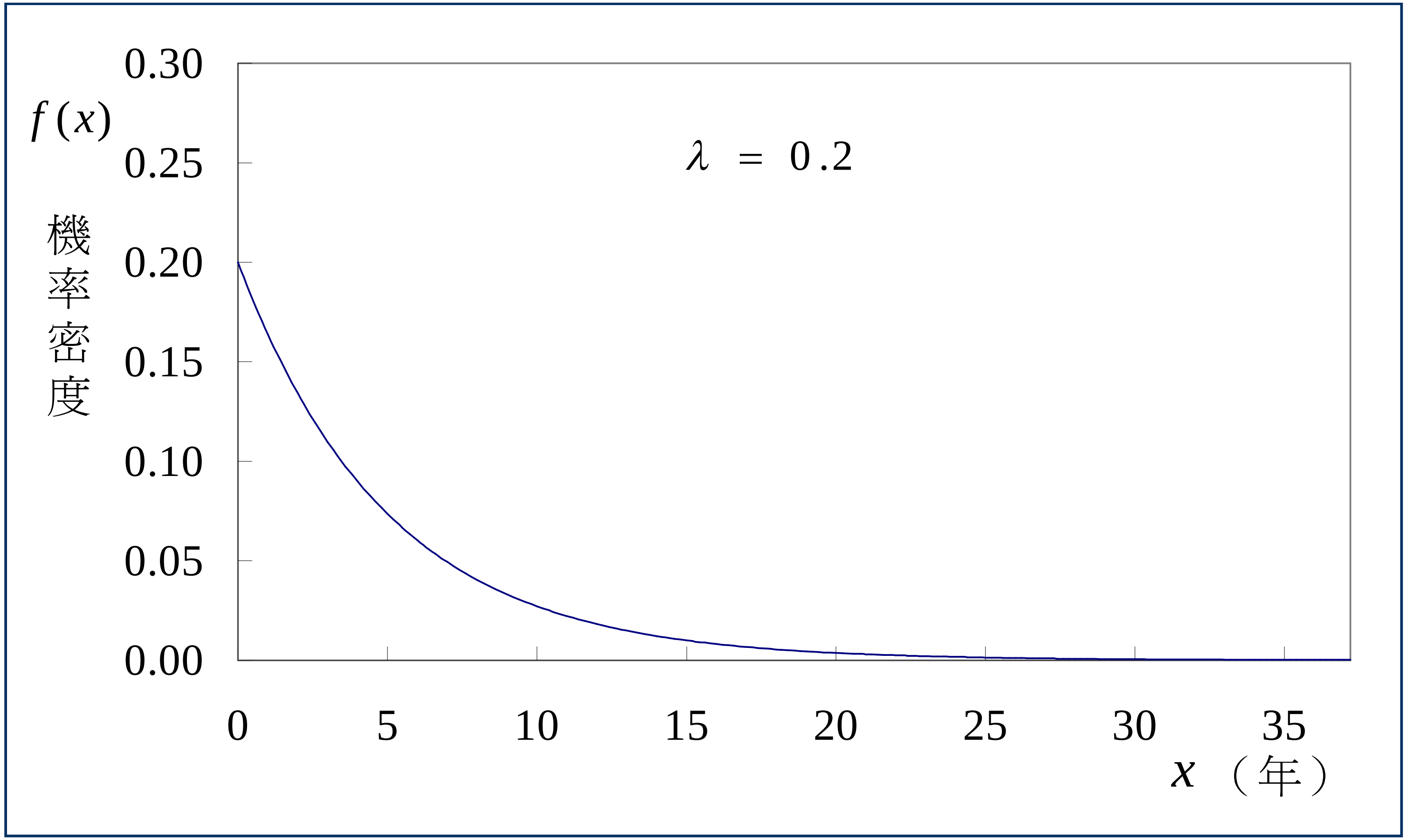
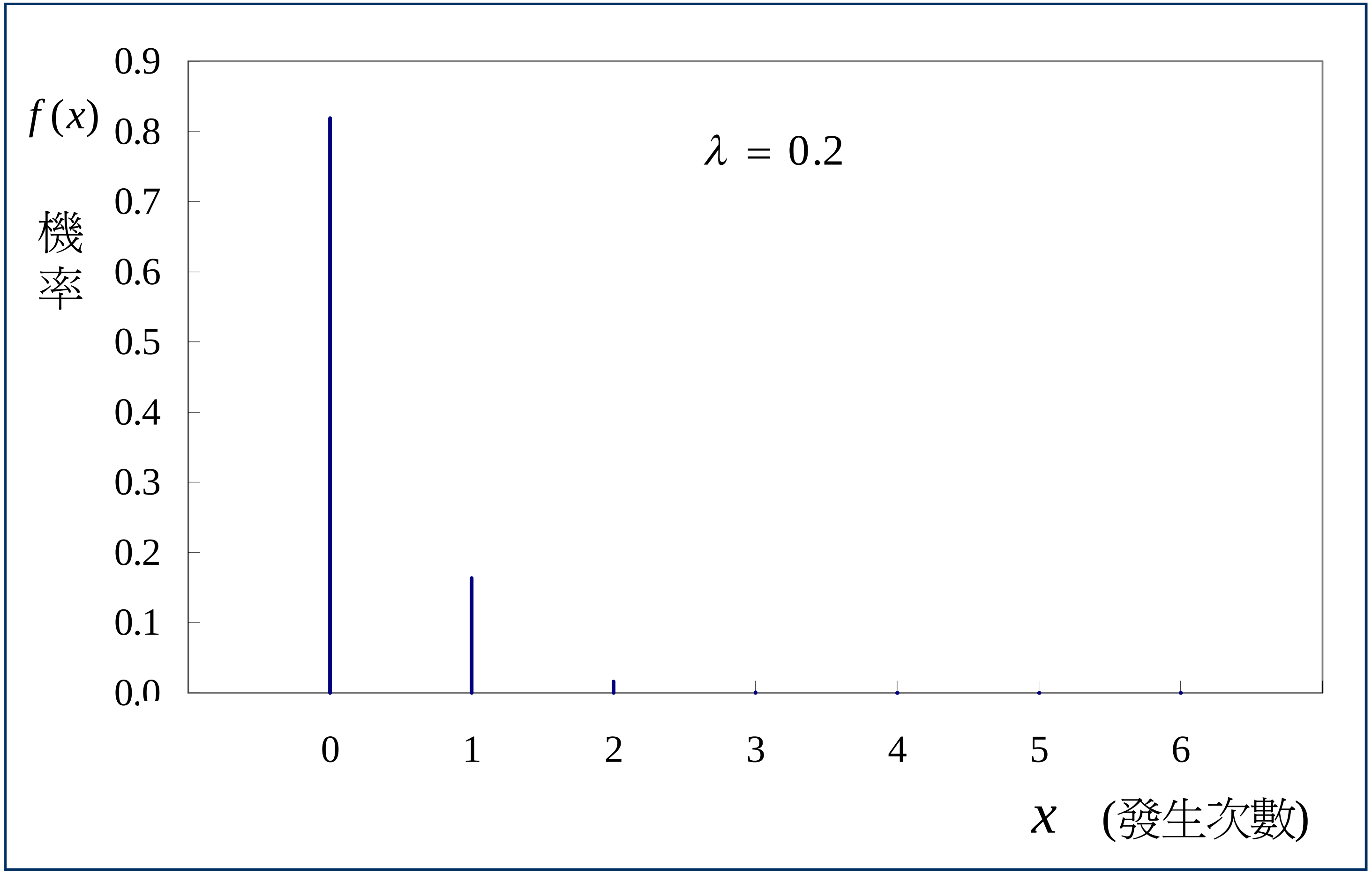


圖7.35　泊松分配



◎ 泊松分配與指數分配的關係

設X為λ的泊松分配

$$f(x) = \frac{e^{-x}\lambda^{x}}{x!}$$

若令T為二事件發生的相隔時間, 則T為一指數分配

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$ t>0

EX7.25 某銀行之ATM客戶利用的間隔時間爲λ=0.1的指數分配(單位爲分鐘)

1. ATM半小時內沒人來提款的機率爲何/
2. 求平均數與變異數. 並求間隔時間在 μ-2σ與μ+2σ之機率

Solution:

1.

$$P(X > 30) = e^{-\lambda(30)} = e^{-0.1(30)} = e^{-3} = 0.04978$$

2. 平均數爲 E(X)=1/λ = (1/0.1) =10

變異數 V(X)= 1/λ^2 = (1/0.01) =100

$$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= P(10 - 2\times 10 < X < 10 + 2\times 10) \\ &= P(0 < X < 30) = 1 - P(X > 30) \\ &= 1 - e^{-0.1(30)} = 1 - e^{-3} = 1 - 0.04978 = 0.95022 \end{aligned}$$

7.7 二項分配與常態分配

當n很大時二項分配的計算相當麻煩

Ch6 以泊松分配取代

但若n 很大, p不是很微小時, 二項分配不會趨近於泊松分配

→趨近於常態分配

實務上的判斷準則

1. $p \leqq 0.5$, $np \geqq 5$ 或 $p>0.5$ 與 $nq>5$
2. $np>5$ 及 $nq>5$

Q: 間斷變連續的問題

二項隨機變數之值加減1/2 **(連續性調整因子, continuity correction factor)**

二項 $P(a<X<b)$ → 常態 $P(a-(1/2) \leqq X \leqq b+(1/2))$

表7.7 二項分配與常態分配

	A	B	C
1	x	二項	常態
2	0	0.000244	0.000660
3	1	0.002930	0.003938
4	2	0.016113	0.016965
5	3	0.053711	0.052800
6	4	0.120850	0.118780
7	5	0.193359	0.193181
8	6	0.225586	0.227176
9	7	0.193359	0.193181
10	8	0.120850	0.118780
11	9	0.053711	0.052800
12	10	0.016113	0.016965
13	11	0.002930	0.003938
14	12	0.000244	0.000660

圖7.36 二項機率分配

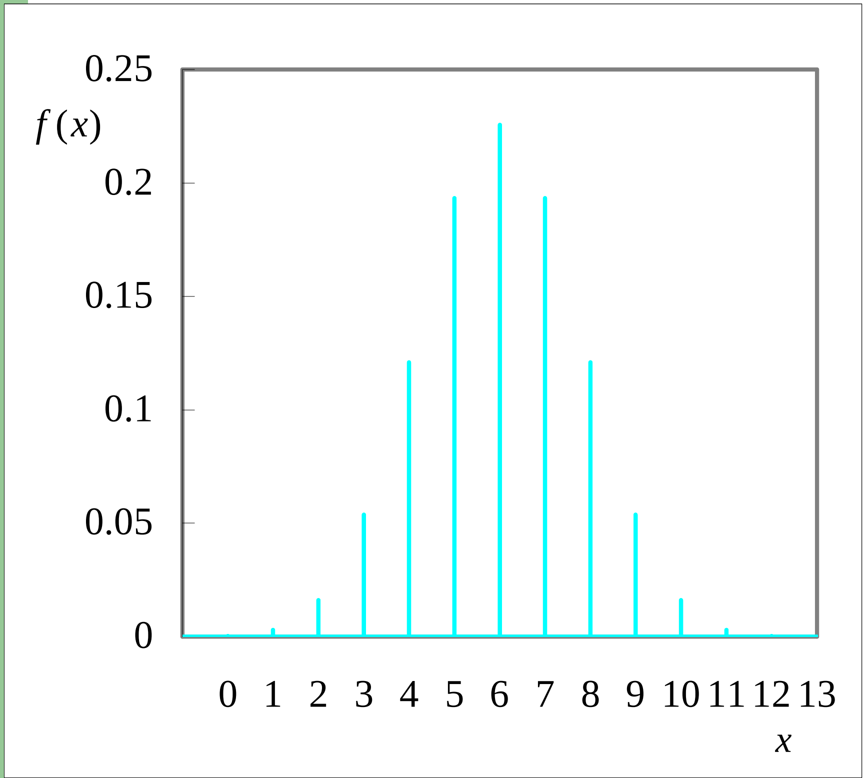


圖7.37 二項機率分配直方圖

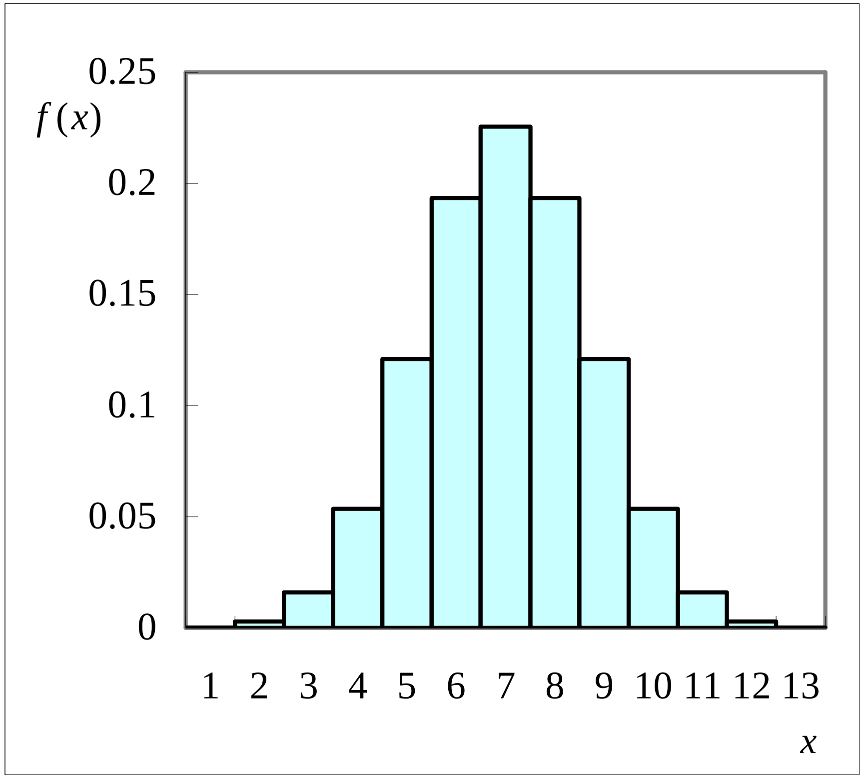
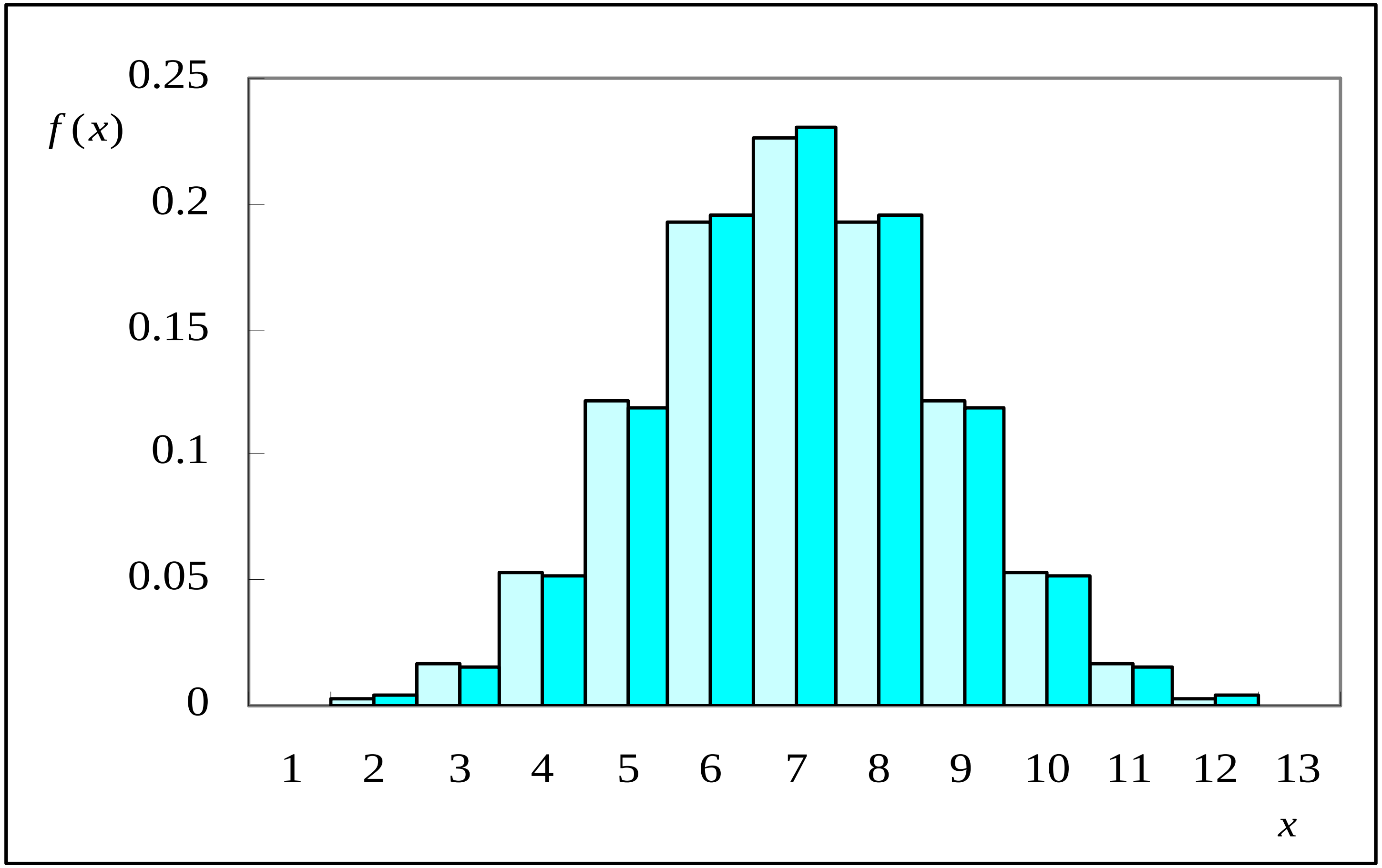


圖7.38 二項分配與常態分配



EX7.26 中壢某汽車旅館有房間80間, 平日的出租率爲75%,
現問: 1. 平日一天,租出去60間的機率爲何?

2. 至少64間房間租出去的機率爲何/

3. 至多租出去50間的機率爲何?

Solution:

房間租出去(成功)的機率75%, 租不出去(失敗)的機率25%, 爲一間斷的二項分配

平均數 np=80*(0.75)=60

變異數 npq=80*(0.75)*(0.25)=15

n=80 查表只到n=40

p=0.75很大, 用常態分配代替

1. 設X為租出去的房間數, 則二項分配P(X=60)即是以常態分配求

$$P(60-\frac{1}{2}<X<60+\frac{1}{2})=P(\frac{59.5-60}{\sqrt{15}}<Z<\frac{60.5-60}{\sqrt{15}})$$

$$=P(-0.13\le Z\le 0.13)=0.0517\times 2=0.1034$$

圖7.39 不連續的機率分配

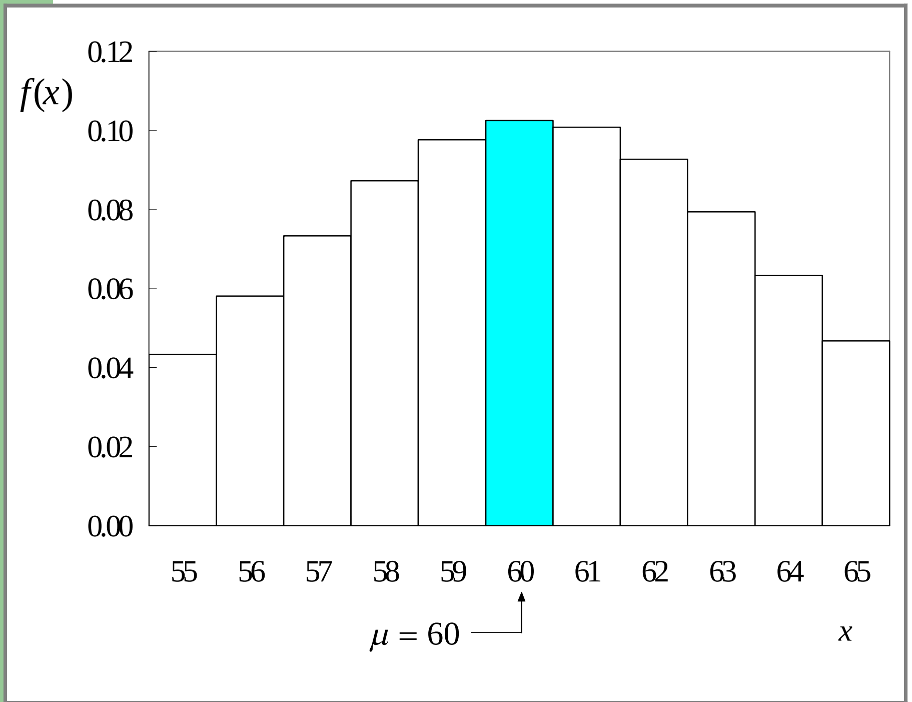
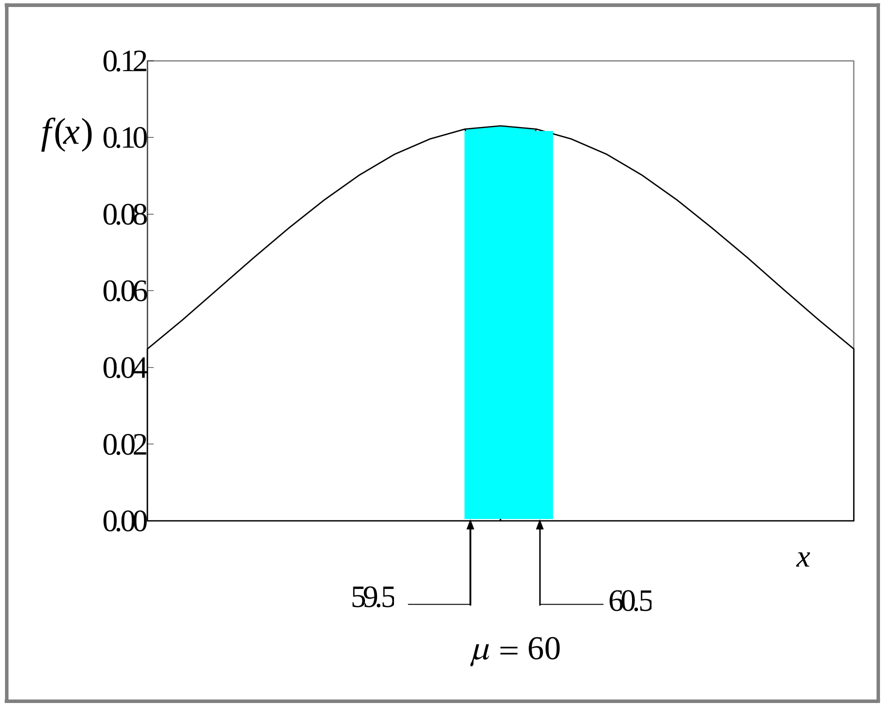


圖7.40 連續機率分配



2. 至少64間房間租出去

$$P(X \ge 64-\frac{1}{2}) = P(Z \ge \frac{63.5-60}{\sqrt{15}}) = P(Z \ge 0.904) = 0.1841$$

3. 至多租出去50間的機率

$$P(X \le 50+\frac{1}{2}) = P(Z \le \frac{50.5-60}{\sqrt{15}}) = P(Z \le -2.45) = 0.0071$$

圖7.41　至少64間房間租出去的機率

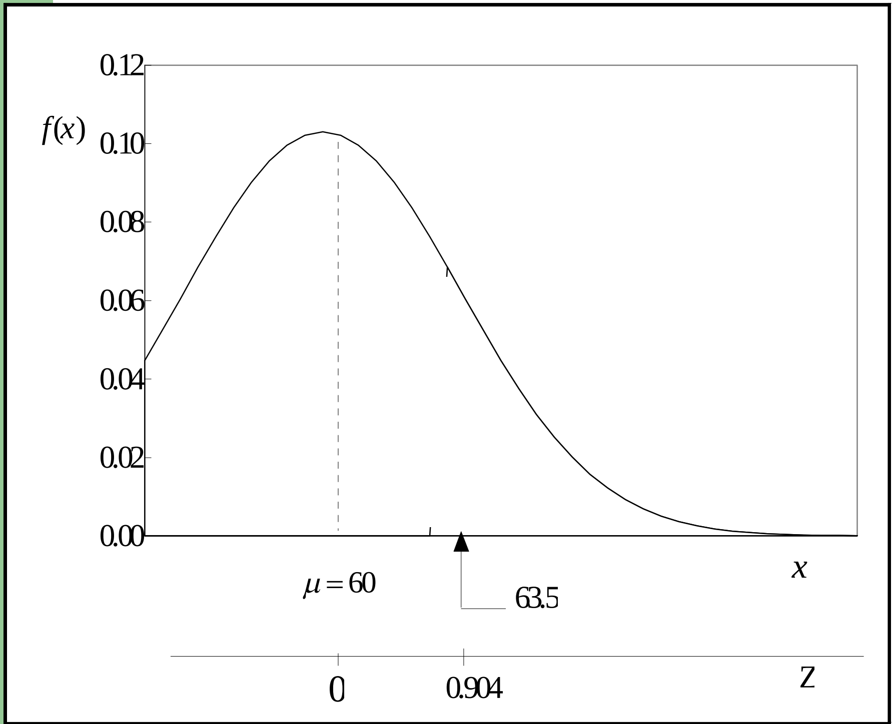
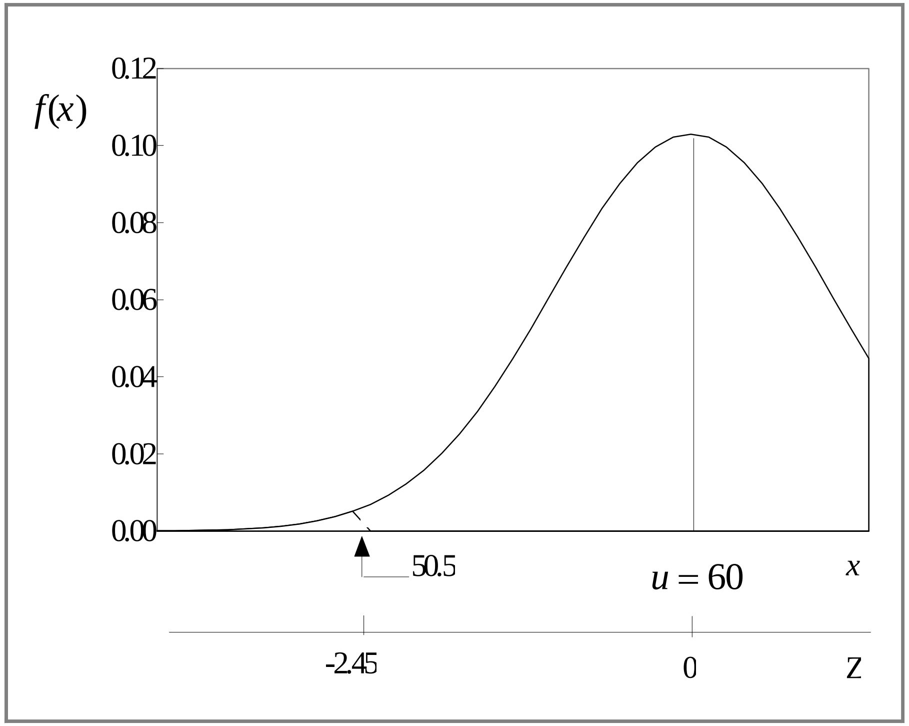


圖7.42　至多租出50間房間的機率



EX7.27 某老師當人很兇, 及格率40%, 但他去年以來變仁慈, 及格率提高到60%. 本學期該老師課程有學生72人, 現問有2/3(48個)以上學生會及格的機率? 分別以二項分配與常態分配求解

Solution:

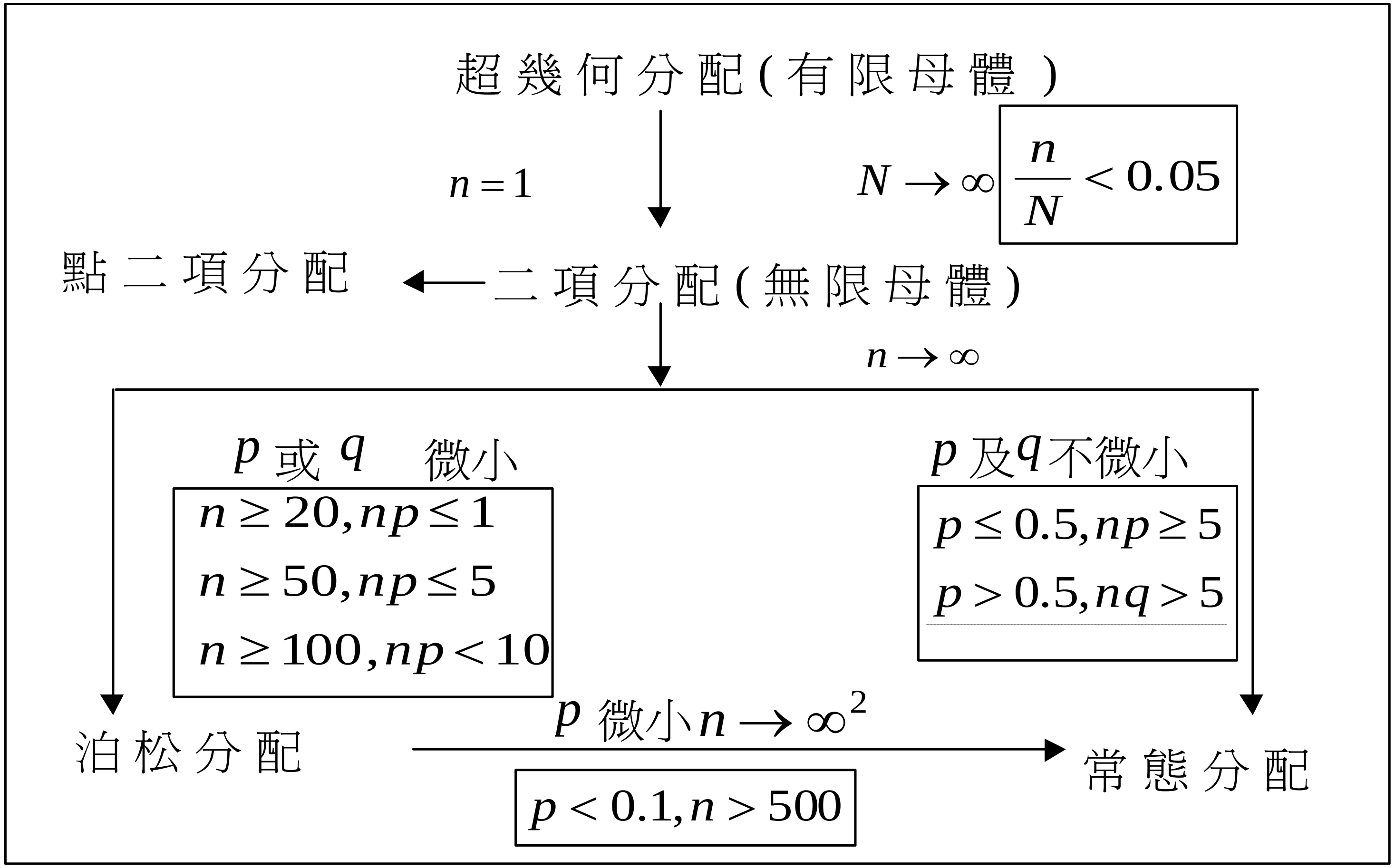
二項分配 n=72, p=0.6

$$P(X \geq 48) = \sum_{x=48}^{72} C_x^{72} (0.6)^x (0.4)^{72-x} = 0.1503$$

常態分配 μ=np=72*0.6=43.2 σ^2=npq=72*0.6*0.4=17.28

$$P(X \geq 48 - \frac{1}{2}) = P(Z \geq \frac{47.5 - 43.2}{\sqrt{17.28}}) = P(Z \geq 1.0344) = 0.1505$$

圖7.43 幾個分配間的關係



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表7.8 連續機率分配的函數形式、平均數與變異數

機率分配	機率函數	平均數	變異數
常態分配	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	μ	σ^2
標準常態分配	$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ $-\infty<z<\infty$	0	1
指數分配	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $x\geq 0,\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
均等分配	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $a\leq x\leq b$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004