第6章 間斷隨機變數及其常用的機率分配

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

學習目的

1. 定義或了解隨機變數的意義及其機率分配。
2. 區分間斷隨機變數與連續隨機變數。
3. 計算間斷隨機變數的期望值、變異數及標準差。
4. 熟悉二項分配意義與特性，及其在日常生活上的應用。
5. 了解泊松分配的意義與特性，及其在日常生活上的應用。
6. 比較泊松分配與二項分配。
8. 利用Excel求算各個分配並繪製圖形。

本章結構

間斷隨機變數及其常用的機率分配

- 隨機變數的意義與種類
  - 隨機變數的意義
  - 隨機變數的種類
- 單一間斷隨機變數的機率分配
  - 間斷隨機變數的機率函數
  - 間斷隨機變數的期望值與變異數
  - 標準化隨機變數
  - 間斷隨機變數函數的期望值與變異數
- 常用的間斷機率分配
- 二項機率分配
  - 二項隨機實驗與二項分配
  - 二項機率分配的性質
  - 點二項分配
  - 二項分配可延伸爲多項分配
- 超幾何分配
  - 超幾何分配的意義
  - 超幾何分配的特性
- Poisson (泊松分配)
  - 泊松分配的意義
  - 泊松分配的特性
  - 泊松分配與二項分配
- 幾何分配
  - 幾何分配的定義
- Excel的使用

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

6.1 隨機變數的意義與種類

- **隨機變數(random variable)的意義**

  隨機變數是隨機實驗中對應樣本點的實數值函數。

- **隨機變數的種類**

  間斷隨機變數(discrete random variable)

  隨機變數的變量其個數是有限的，或個數是無限但可數的稱為間斷或不連續隨機變數。

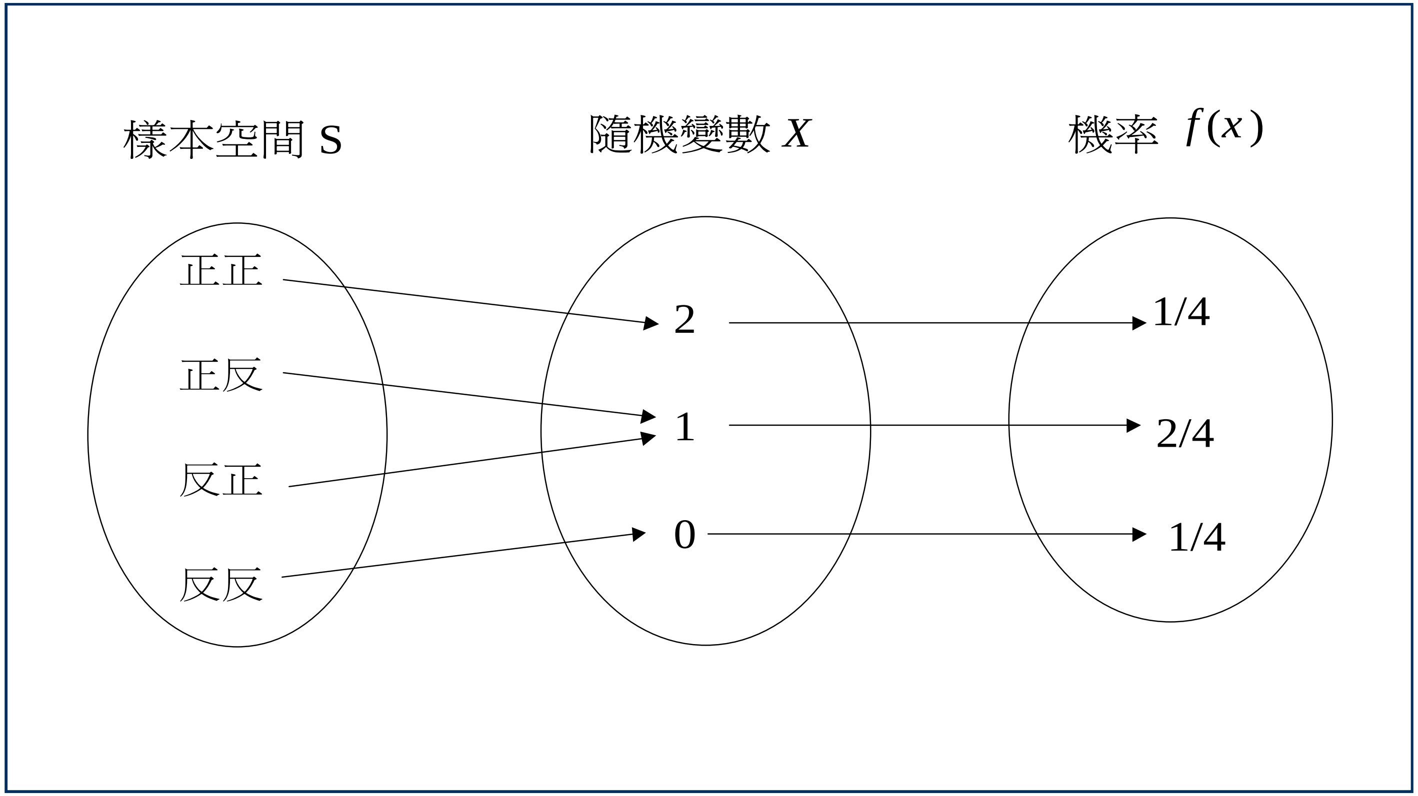
  連續隨機變數(continuous random variable)

  隨機變數的變量其個數為無限且不可數的稱為連續隨機變數。

表6.1投擲銅板的隨機實驗

樣本點	正面的個數（ x ）	相對次數（機率）
（反，反）	0	$1/4=0.25$
（正，反）（反，正）	1	$2/4=0.50$
（正，正）	2	$1/4=0.25$
$N=4$		1.00

隨機變數: 通常以X表示
隨機變量: 隨機變數的所有可能數值, 以x表示
令X為正面出現的次數, x=0,1,2
圖6.1　隨機變數



X:一車輛89年違規被舉發的次數

表6.2　89年全台灣自用小客車違規被舉發情形

被舉發次數	相對次數（%）
0	42.2
1	26.0
2	15.4
3	8.5
4及以上	6.9

資料來源：《89年台灣地區自用小客車使用狀況調查報告》，交通部統計處，2001年8月。

表6.3　間斷隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數 X 可能的值
1枚銅板擲2次	出現正面的次數	0,1,2
抽取 10 台印表機檢查品質	不良品的個數	$0,1,2,\cdots,10$
購買手機的顧客的性別	性別	0爲男性，1爲女性
咖啡廳1天的顧客	顧客人數	$0,1,2,\cdots$

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表6.4 連續隨機變數

隨機實驗	隨機變數	隨機變數可能的值
觀察病人候診時間	等候時間	$x \geq 0$
抽取1個廠商的年營業收入	營業收入	$x \geq 0$
抽取1,250ml瓶裝汽水	汽水容量ml	$0 \leq x \leq 1{,}250$

6.2 單一間斷隨機變數的機率分配(probability distribution)

❍ 意義

單一間斷隨機變數的機率分配是表示，間斷隨機變數的各個變量的發生機率(或相對次數)的分布情形，包括機率函數、期望值、變異數與標準差等。

Ex6.2 林先生雖然知道過去每個月所銷售汽車從0到6輛不等,然而,未來每月到底可賣多少輛汽車? 他要如何去估計未來每月預期的銷售量?

表6.5 林先生的汽車銷售量

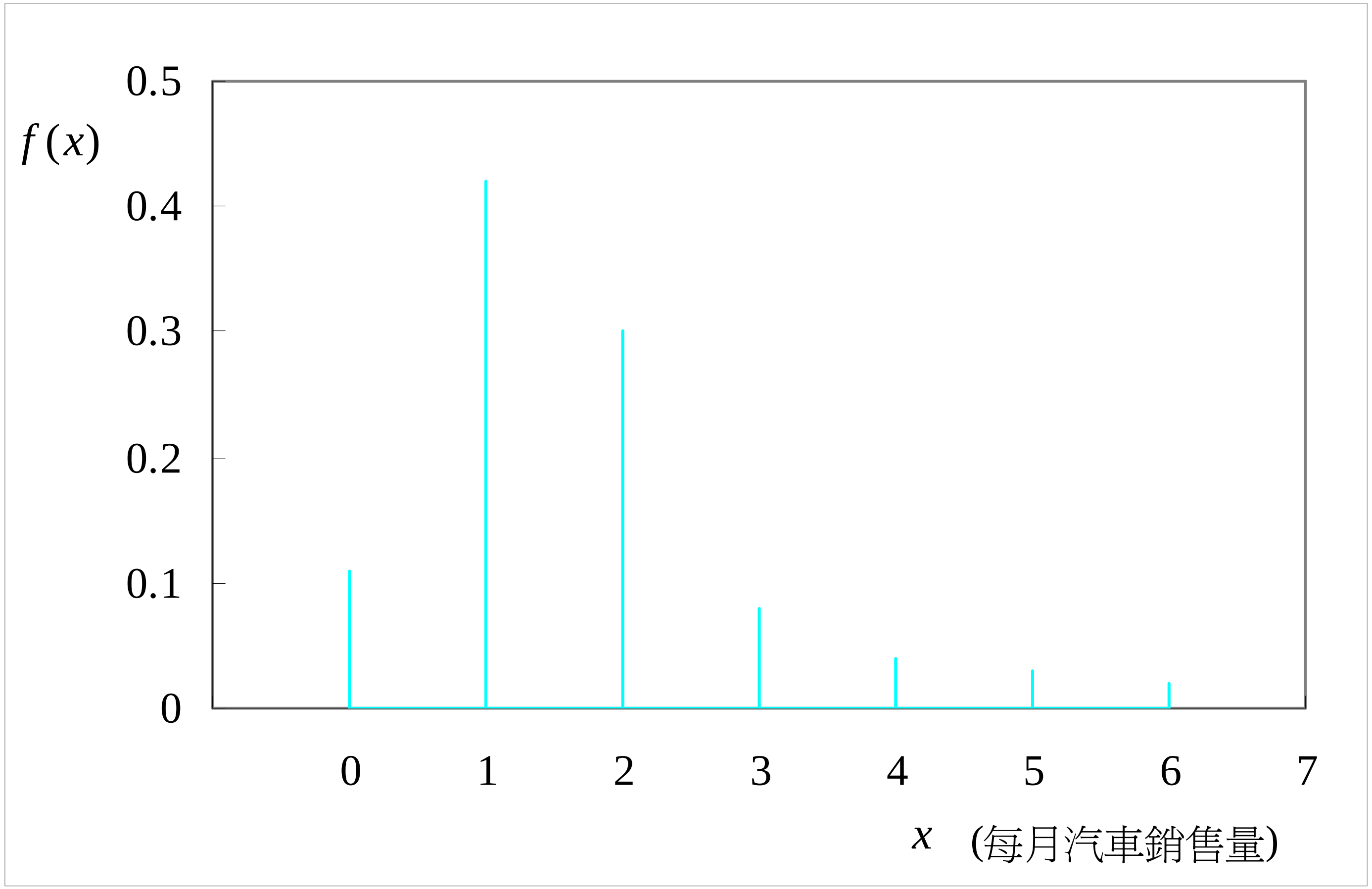
	A	B
1	每月銷售量	相對次數
2	0	0.11
3	1	0.42
4	2	0.30
5	3	0.08
6	4	0.04
7	5	0.03
8	6	0.02
9	合計	1.00

資料來源：龍門汽車業務部，資料為虛擬。

表6.6 汽車銷售量的機率分配

	A	B	C
1	隨機變量 x	相對次數	機率 $f(x)$
2	0	0.11	0.11
3	1	0.42	0.42
4	2	0.30	0.30
5	3	0.08	0.08
6	4	0.04	0.04
7	5	0.03	0.03
8	6	0.02	0.02
9	合計	$\sum = 1.00$	$\sum f(x) = 1.00$

圖6.2 汽車銷售量的機率分配



隨機變數的機率函數

設間斷隨機變數X，其變量爲 $x_1,\cdots,x_n$ ，對應X的每一數值有唯一機率與之對應，該機率值表爲 $f(X=x_i)$或 $f(x_i)$ ，並滿足下列兩個條件：

① $0\leq f(x_i)\leq 1$

② $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=1$

則 $f(x)$ 爲X之機率函數或稱機率分配。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表6.6的汽車銷售量的機率分配符合機率函數嗎?

1. 由表6.6可知

   X=0, 則有 f(0)=0.11

   X=1, 則有 f(1)=0.42 …

   每一機率均大於等於0, 小於等於1. 故滿足條件(1)

2.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) + .f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$$

$$= 0.11 + 0.42 + 0.30 + 0.08 + 0.04 + 0.03 + 0.02 = 1$$

   滿足條件(2)

   因此知其爲一機率函數

◎ 間斷隨機變數的累加機率函數(cumulative probability function)

$$F(X=x_i)=F(x_i)=P(X\le x_i)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_i)$$

◎ 累加機率函數F(x)的特性

1. $F(x_0)=0 \quad x_0<x_1$

2. $F(x_n)=1$

3. 如果 $x_j \ge x_i, \quad F(x_j)\ge F(x_i)$

4. $f(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$ x_{i-1}為 x_i 的前一個變量

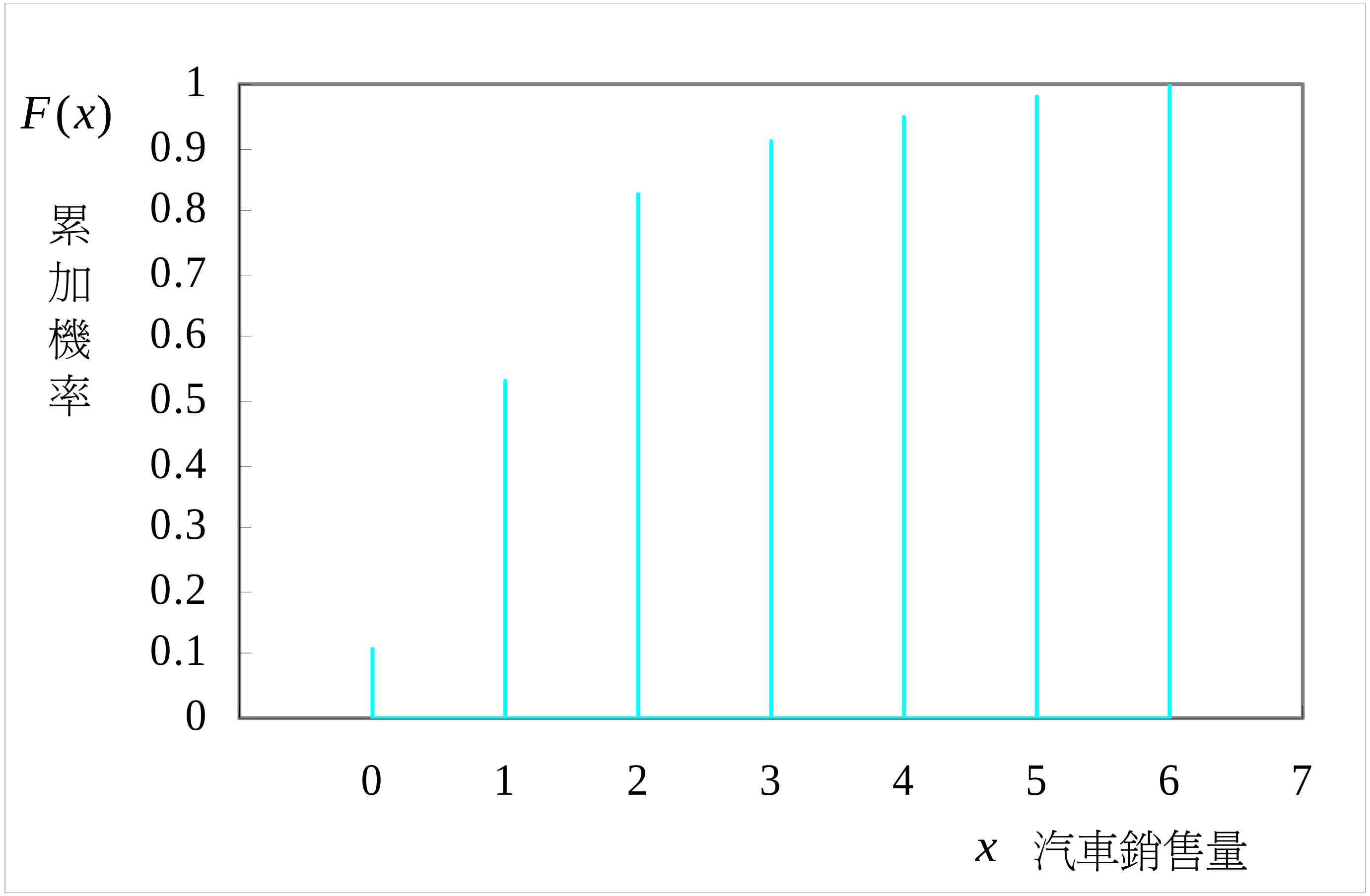
林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex6.3 每月汽車銷售量等於3輛或小於3輛的機率

F(3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0.11+0.42+0.30+0.08=0.91

	A	B	C
1	隨機變量 x	機率函數 $f(x)$	累加機率 $F(x)$
2	0	0.11	0.11
3	1	0.42	0.53
4	2	0.30	0.83
5	3	0.08	0.91
6	4	0.04	0.95
7	5	0.03	0.98
8	6	0.02	1.00
9	合計	1.00	

圖6.3 汽車銷售量的累加機率



6.2.2 間斷隨機變數的期望值與變異數

期望值: 期望值是指如果我們不斷的進行多次的實驗, 預期會發生或觀察得到的數值或結果.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \mu$$

式中X為間斷隨機變數, $f(x_i)$為機率函數

變異數

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 f(x_i) \quad \text{或} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

標準差

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . f(x_i)}$$

Ex6.4 林先生預期每個月可賣幾輛車

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$=0+0.42+0.60+0.24+0.16+0.15+0.12=1.69$$

表6.8 林先生每月汽車銷售量的機率分配

	A	B	C
1	隨機變量 x	機率函數 $f(x)$	$x\ f(x)$
2	0	0.11	0.00
3	1	0.42	0.42
4	2	0.30	0.60
5	3	0.08	0.24
6	4	0.04	0.16
7	5	0.03	0.15
8	6	0.02	0.12
9	合計	$\sum f(x)=1.00$	$\sum xf(x)=1.69$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$$

表6.9 銅板的機率分配

x	$f(x)$
0	1/4
1	2/4
2	1/4

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{f_i}{T} = \frac{0 \times 2 + 1 \times 4 + 2 \times 4}{10} = 1.2$$

表6.10 銅板的次數與相對次數分配

X	次數 f	相對次數 rf
0	2	0.2
1	4	0.4
2	4	0.4

$$\lim_{T \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{f_i}{T} = \sum x_i f(x_i) = E(X) = \mu$$

$$= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

表6.11　銅板的機率分配

X	$rf = f(x)$
0	1/4
1	2/4
2	1/4

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex 6.6 汽車銷售穩定嗎?

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = 1.5939$$

表6.13 每月汽車銷售量的變異數

	A	B	C	D	E
1	X	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$f(x)$	$(x-\mu)^2 f(x)$
2	0	-1.69	2.8561	0.11	0.3142
3	1	-0.69	0.4761	0.42	0.2000
4	2	0.31	0.0961	0.30	0.0288
5	3	1.31	1.7161	0.08	0.1373
6	4	2.31	5.3361	0.04	0.2134
7	5	3.31	10.9561	0.03	0.3287
8	6	4.31	18.5761	0.02	0.3715
9			40.0127	1.00	1.5939

表6.14 樂透彩的期望值

	A	B	C	D	E	F
1	獎項	中獎機率	預期中獎注數	獎金	每注獎金	每注期望值
2	頭獎	1.90629E-07	1.525033617	74633243	48938752	9.329155313
3	貳獎	1.14378E-05	91.50	23568392	257572	2.946049046
4	參獎	4.00322E-05	320.26	29460490	91990	3.682561308
5	肆獎	0.001801477	14411.82	68741144	4770	8.592643052
6	普獎	0.027247956	217983.65	43596730	200	5.449591281
7	合計			240000000		30

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

6.2.3 標準化隨機變數

◎ 概念

不同的隨機變數的中心位置與分散程度不一，如何比較?

→ 標準化

◎ **標準化隨機變數 (Z)變數**

設X爲一隨機變數，其平均數爲μ，變異數爲 σ^2，令

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

則Z爲一標準化變數。

EX6.8 請將表6.5的隨機變數(汽車銷售量)加以標準化

表6.15 標準化隨機變數表

隨機變數 X	標準化變數 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-1.69}{1.2625}$
0	−1.3386
1	−0.5465
2	0.2455
3	1.0376
4	1.8297
5	2.6218
6	3.4139

6.2.4 間斷隨機變數函數的期望值與變異數

❍隨機變數函數的期望值

設 x 為間斷隨機變數，其機率函數為 $f(x)$。令 $h(X)$ 為 x 的函數，則 $h(X)$ 的期望值表為 $E[h(X)]$ 或 $\mu_{h(x)}$：

$$E[h(X)] = \sum_{x} h(x) f(x)$$

❍隨機變數函數期望值的定理

設 C 為常數，$h(X)$ 為 X 的函數，則

① $E(C) = C$

② $E[C \cdot h(X)] = C \cdot E[h(X)]$

③ $E[h_1(X) + h_2(X) + \cdots + h_k(X)] = E[h_1(X)] + \cdots + E[h_k(X)]$

式中：$h_1(X), h_2(X), \cdots, h_k(X)$ 均為 X 的函數。

EX6.9

令X為正面出現的次數

令$Y=(X-1)^2$, 求E(Y)

$$E(Y)=E[(X-1)^2]=\sum(x-1)^2 f(x)$$

$$=(0-1)^2\times\frac{1}{4}+(1-1)^2\times\frac{1}{2}+(2-1)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

表6.16 銅板出現正面的機率函數

X	$f(x)$
0	1/4
1	2/4
2	1/4

表6.17 $Y=(X-1)^2$ 的機率函數

X	Y	$f(y)$
1	0	1/2
0，2	1	1/2

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

- Ex6.11 設X爲間斷隨機變數, 其平均數爲5, 變異數爲2, 試求 E(5), E(5X), $E(X^2+2X+1)$

Solution:

1. E(5)=5
2. $E(5X)=5E(X)=5\times5=25$
3. $E(X^2+2X+1)= E(X^2)+E(2X)+E(1)$

$$= (\sigma^2+\mu^2)+2\times5+1$$

$$= (2+5^2)+10+1=38$$

因 $\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$ See p.207 Ex6.10

❍隨機變數函數的變異數

設 X 爲間斷隨機變數，其機率函數爲 $f(x)$，令 $h(X)$ 爲 X 的函數，則 $h(X)$ 的變異數爲：

$$\sigma^2_{h(X)} = V[h(X)] = E\left[h(X) - E[h(X)]\right]^2$$

先只談線性函數(方便計算)

- **線性函數的期望值**

設$Y=a+bX$，則Y的期望值(平均數)爲：

$$E(Y)=E(a+bX)=a+bE(X)$$

- **線性函數的變異數**

設$Y=a+bX$，則Y的變異數爲：

$$V(Y)=V(a+bX)=V(bX)=b^2V(X)$$

EX6.12 假設龍門汽車銷售收入是銷售量的函數(單位萬元)

$Y=40+200X$

問每個月收益的期望值及標準差爲何?

Solution:

1. $Y=a+bX$ $E(Y)=E(40+200X)=40+200E(X)$

$=40+200\times1.69=378$(萬元)

2. 已知銷售量的變異數爲1.5939

$V(Y)=V(40+200X)$

$=(200)^2\times V(X)=40{,}000\times1.5939=63{,}756$

標準差爲

$\sigma=252.4995$萬元

6.3 常用的間斷機率分配

- 二項機率分配 (binominal probability distribution)
- 超幾何機率分配 (hypergeometric distribution)
- 普瓦松機率分配 (Poisson distribution)
- 幾何分配 (geometric distribution)

6.4 二項機率分配

6.4.1 二項隨機實驗與二項分配

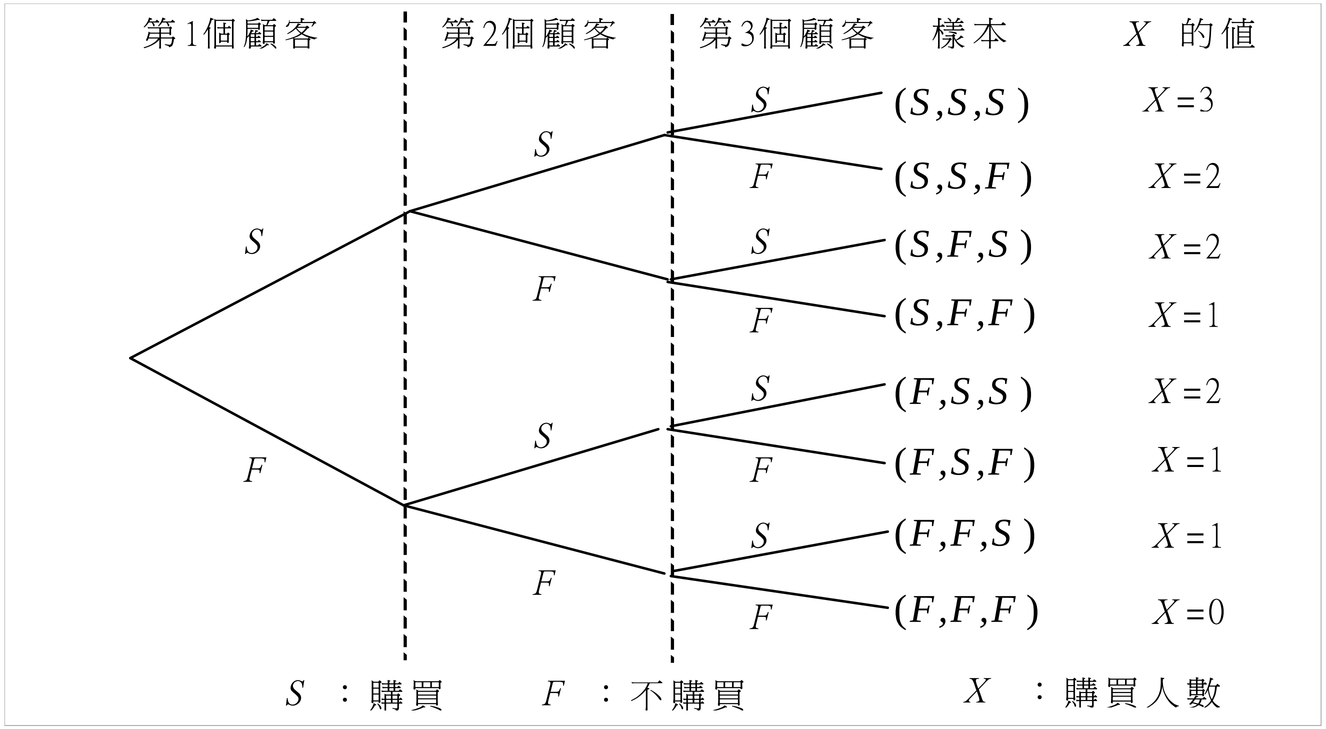
◎ 二項隨機實驗具備5個特性

1. 實驗中包含n次相同的試行
2. 每一次試行只有二種互斥的可能結果: 成功(S), 失敗(F)
3. 成功的機率爲 P(S)=p, 失敗的機率爲P(F)=1-p (或q)
4. 每一次試行是獨立的
5. 隨機變數定義爲n次試行中成功的次數

其中合乎2, 3者, 稱之爲伯努利試行(Bernoulli trial)

EX6.13 拉保險　拜訪3位客戶

1. 具有3次相同的試行
2. 對每一次拜訪而言,都有兩種可能結果: 買, 不買
3. 每次拜訪活動中, 客戶購買的機率P(S)=0.2, 不買P(F)=0.8
4. 每一位客戶買與不買的決定完全獨立, 不受其他客戶影響
5. 定一隨機變數X爲拜訪中客戶購買的次數



1. 三位都購買 P(S,S,S)=P(S)P(S)P(S)=$p^3=(0.2)^3=0.008$

$$f(X=3)=C_3^3 p^3 q^0 = 0.008$$

2. 二位購買 (S,S,F) (S,F,S) (F,S,S)

$$f(X=2)=C_2^3(0.2)^2(0.8)^1=\frac{3!}{2!1!}(0.2)^2(0.8)=0.096$$

2個顧客購買	機率
SSF	$p^2q=(0.2)^2(0.8)=0.032$
SFS	$pqp=(0.2)^2(0.8)=0.032$
FSS	$qpp=(0.2)^2(0.8)=0.032$

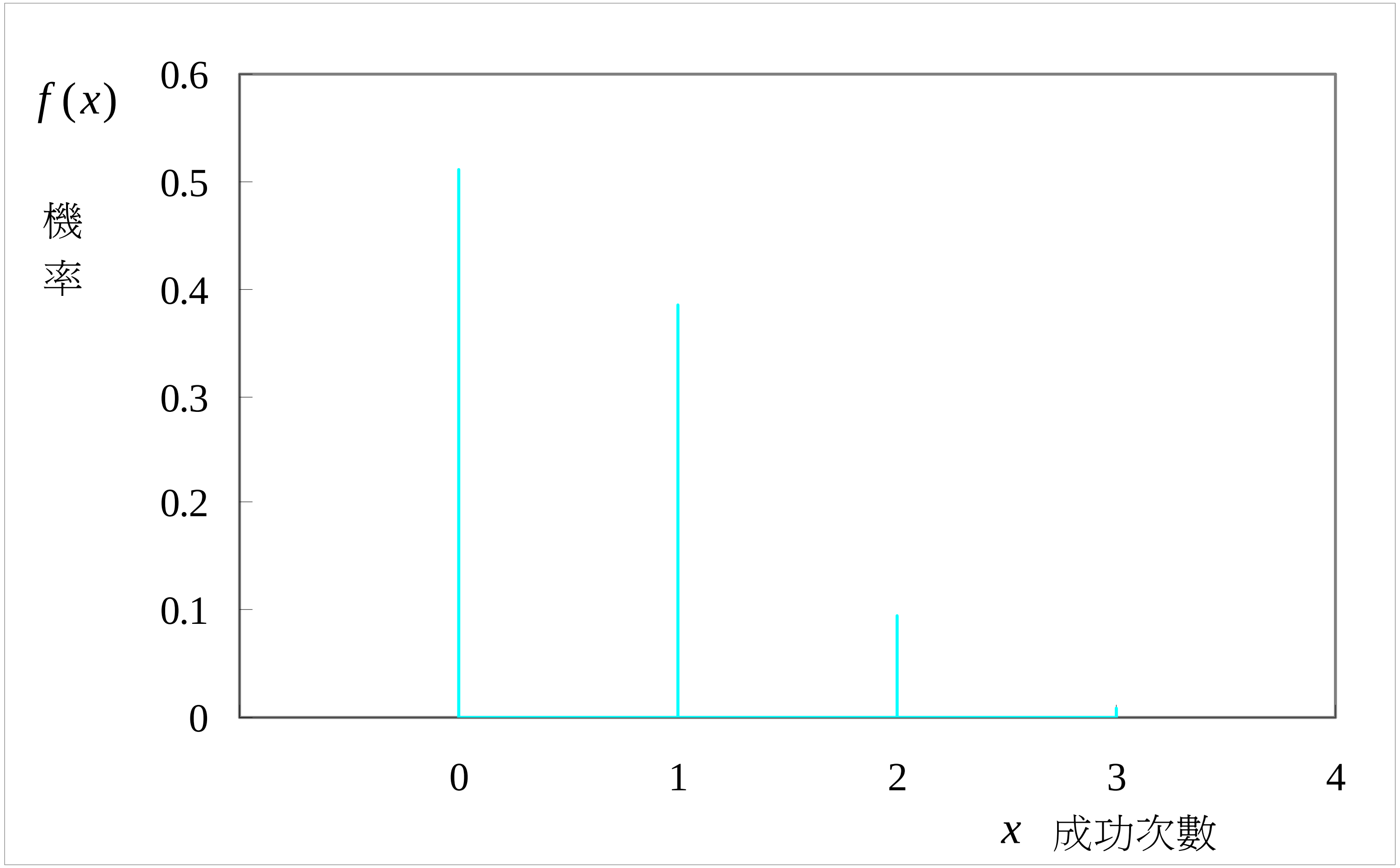
林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表6.19 二項分配機率值

	A	B
1	x	$f(x)$
2	0	0.512
3	1	0.384
4	2	0.096
5	3	0.008

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖6.5 二項分配機率圖



二項機率分配

意義

設X爲一間斷隨機變數，若 $f(x)$ 爲：

$$f(x)=C_x^n p^x q^{n-x} \qquad x=0,1,2,\cdots,n$$

則 $f(x)$ 爲一二項機率分配。式中：$C_x^n=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$，$n$：試行次數，$x$：成功的次數，$p$：成功的機率，$q$：失敗的機率 $=1-p$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

◎ 二項機率分配的條件

1. $0 \leq f(x) \leq 1$

2 $\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$

◎ 表示方法

B(X; n, p)

X:隨機變數 n: 試行次數 p:成功機率

根據 n,p, 查附表的表一(二項機率分配機率值表).

圖6.6 二項分配對話方塊圖

- 二項機率分配的累加機率函數

$$F(X) = p(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

EX 6.15 二個以上客戶願意投保的機率

$$\begin{aligned} P(x \ge 2) &= 1 - F(1) \\ &= 1 - (f(0) + f(1)) \\ &= 1 - C_0^3 (0.2)^0 (0.8)^3 - C_1^3 (0.2)^1 (0.8)^2 \\ &= 1 - 0.896 = 0.104 \end{aligned}$$

6.4.2 二項機率分配的性質 (談4點)

(1) 表示法

成功的機率 $f(x)=C_x^n p^x q^{n-x} \quad x=0,1,2,..$

(2) 平均數與變異數

設X爲一二項隨機函數, 即 X~ B (n, p)

平均數 E(X)=n p

變異數 V(X)=n p q

3.二項機率分配的偏態與峰態

偏態

$$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

峰態

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

4. 設X與Y均爲二項隨機變數且獨立,其成功機率均爲p

X~B(n1,p) Y~B(n2,p)

則

X+Y ~ B(n1+n2, p)

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX6.16 拜訪三次預期有幾次可成功拉保

Solution: 已知n=3, p=0.2

$$E(X)=n\,p = (3)\,(0.2)=0.6$$

$$V(X) = n\,p\,q = (3)\,(0.2)\,(0.8)=0.48$$

◎ 偏態與峰態之性質

1. 當p=0.5 無論n爲多少, 二項分配爲對稱分配
2. 當 p <0.5, 爲一右偏分配 ex p=0.2, 見下頁圖
3. 當 p >0.5, 爲左偏分配 ex p=0.8 見下頁圖

圖6.7 右偏分配

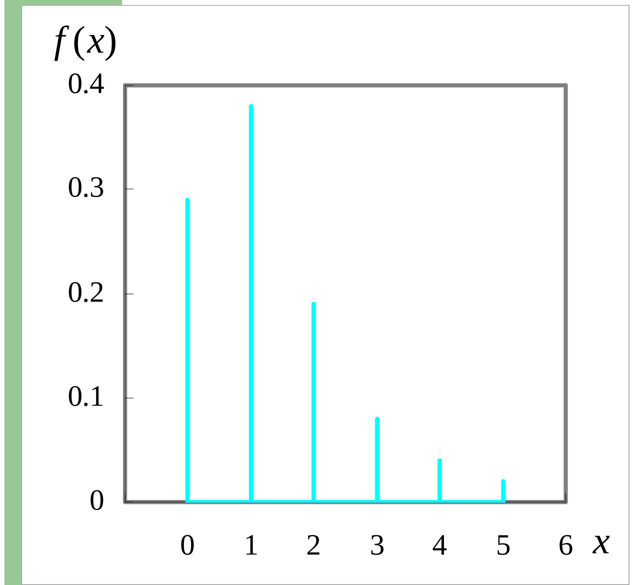


圖6.8 對稱分配

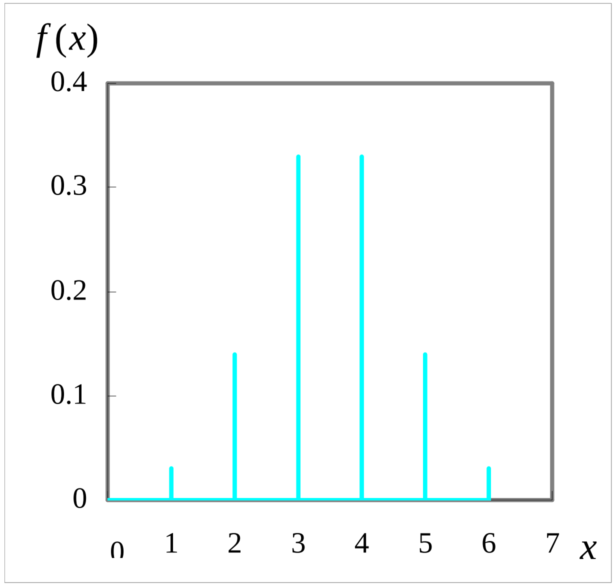
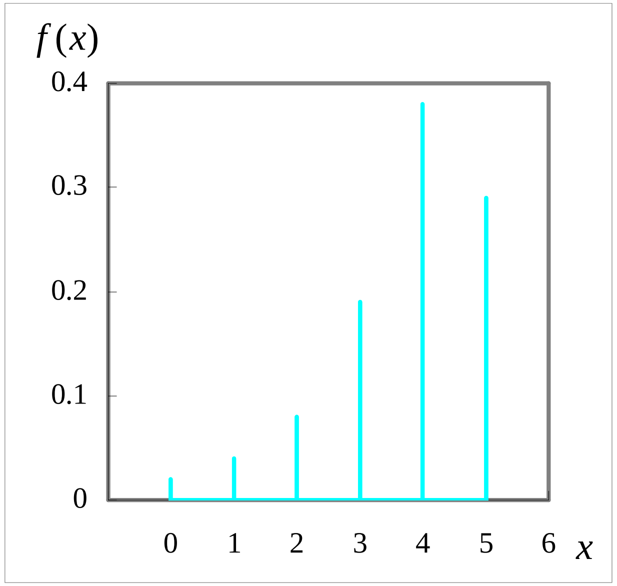


圖6.9 左偏分配



EX 6.17 保險業務的偏態與峰態係數各爲何?

Solution:

因 p=0.2, q=0.8, n=3, 可得偏態係數爲

$$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{0.8-0.2}{\sqrt{3\times 0.2\times 0.8}} = \frac{0.6}{0.6928} = 0.8660$$

稍微右偏

峰態係數

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq} = 3 + \frac{1-6\times 0.2\times 0.8}{3\times 0.2\times 0.8} = 3 + \frac{1-0.96}{0.48} = 3.083$$

高狹峰

Ex 6.18 甲工廠向A,B倆供應商買零件,倆供應商零件的不良率均爲0.1, 現自A, B供應商分別購買5件和10件. 那麼15件不良品中,不良品的平均數,變異數,偏態係數,峰態係數各爲何? 又15件中不良品超過1件的機率爲何?

Solution:

$X+Y \sim B(5+10, 0.1)$

期望值 $E(X+Y)=n\,p=(15)(0.1)=1.5$

變異數 $V(X+Y)= n\,p\,q = (15)(0.1)(0.9)=1.35$

偏態係數 $\alpha_3 = \dfrac{0.9-0.1}{\sqrt{15\times 0.1\times 0.9}} = \dfrac{0.8}{1.16} = 0.69$ 略爲右偏

峰態係數

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1 - 6 \times 0.1 \times 0.9}{1.35} = 3 + 0.341 = 3.341$$ 高狹峰

P(X+Y>1)=1-P(X+Y≦1)

$$= 1 - C_0^{15}(0.1)^0(0.9)^{15} - C_1^{15}(0.1)^1(0.9)^{14}$$

= 1-0.540 (查附表的表一)=0.451

6.4.3 點二項分配

當二項隨機實驗試行止有一次,即n=1, 稱爲點二項分配(point binomial distribution)或伯努利分配(Bernoulli distribution)

$$f(x) = C_x^1 p^x q^{1-x} = p^x q^{1-x}$$

x=0,1

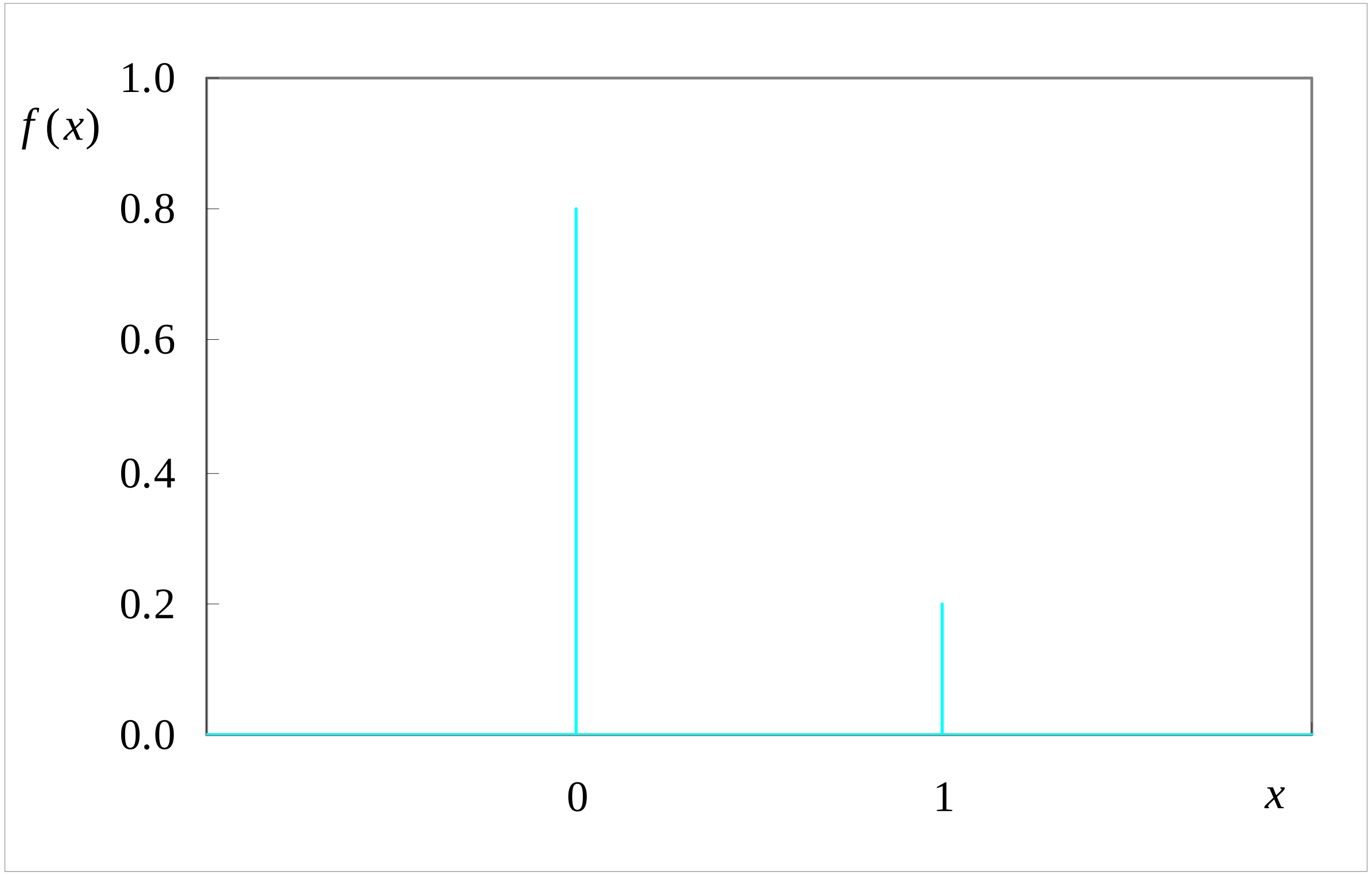
EX6.19 電話機的產品不良率爲0.2, 現隨機抽取一個,令隨機變數X=0表示良品, X=1表不良品,則X的機率分配爲何?其平均數與變異數各爲多少?

$$f(x) = 0.2^x 0.8^{1-x}$$

E(X)=0.2　　V(X)=0.2*0.8=0.16

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖6.10 點二項分配



6.4.4 二項分配可延伸爲多項分配

◎ 多項機率分配

設在一多項隨機實驗中, 有K種可能結果其出現的機率分別爲(p_1, p_2, …,p_k), n爲試行總次數, 並令(X_1,X_2,…X_k)爲K種結果出現的次數, 則

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots . x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

f(x_1,x_2,…x_k)爲一多項機率分配

其中 $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$, $p_1+p_2+\ldots,+p_k=1$, EX6.20 擲一個不偏骰子20次,問骰子各點出現的次數其機率分配為何?

Solution:

令 X_1: 出現1點之次數, X_2: 出現2點之次數
X_3: 出現3點之次數, X_4: 出現4點之次數
X_5: 出現5點之次數 X_6: 出現6點之次數

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_6!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_6^{x_k}$$

$p_1=p_2=\ldots=p_6=1/6$

$$E(X_1) = \sum x_1 f_1(x_1) = np_1 = 20 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$$

$$V(X_1) = \sum x_1^2 f_1(x_1) - [E(X_1)]^2$$
$$= np_1q_1 = 20 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{100}{36}$$

6.5 超幾何分配

6.5.1 超幾何分配的意義

有限母體的元素共有N個,且可分成二類,K爲一類,具有某種特質, N-K爲另一類, 不具某種特質. 現自母體隨機抽取n個不放回, 抽得具有某種特質爲成功,另一類爲失敗,令X爲成功的次數

→ 超幾何實驗

◎ 超幾何分配

$$f(x)=\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}$$

x=0,1,..,n, x≦K

x≧K+n-N

圖6.11 超幾何實驗

$N=$母體元素總數	隨機抽取	$n=$樣本數
$K=$成功的次數	$\rightarrow$	$x=$成功的次數
$N-K=$失敗的次數	抽出不放回	$n-x=$失敗的次數

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX6.22 10種新上市交易的股票中3種會上漲獲利,7種會下跌虧損, 現在隨機挑選4種股票買進 (1)3種會上漲之股票全被你選中的機率? (2) 3種會上漲之股票中至少2種被選中的機率? (3)繪製獲利股票的超幾何分配圖

Solution

(1)

$$f(3)=\frac{C_3^3C_{4-3}^{10-3}}{C_4^{10}}=\frac{\left(\frac{3!}{3!0!}\right)\left(\frac{7!}{1!6!}\right)}{\left(\frac{10!}{4!6!}\right)}=\frac{(1)(7)}{210}=\frac{1}{30}$$

(2) 至少2種被選上

P(x≧2)=f(2)+f(3)　　已知 f(3)=1/30

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

$$f(2)=\frac{C_2^3 C_{4-2}^{10-3}}{C_4^{10}}=\frac{\left(\frac{3!}{2!1!}\right)\left(\frac{7!}{2!5!}\right)}{\left(\frac{10!}{4!6!}\right)}=\frac{(3)(21)}{210}=\frac{3}{10}$$

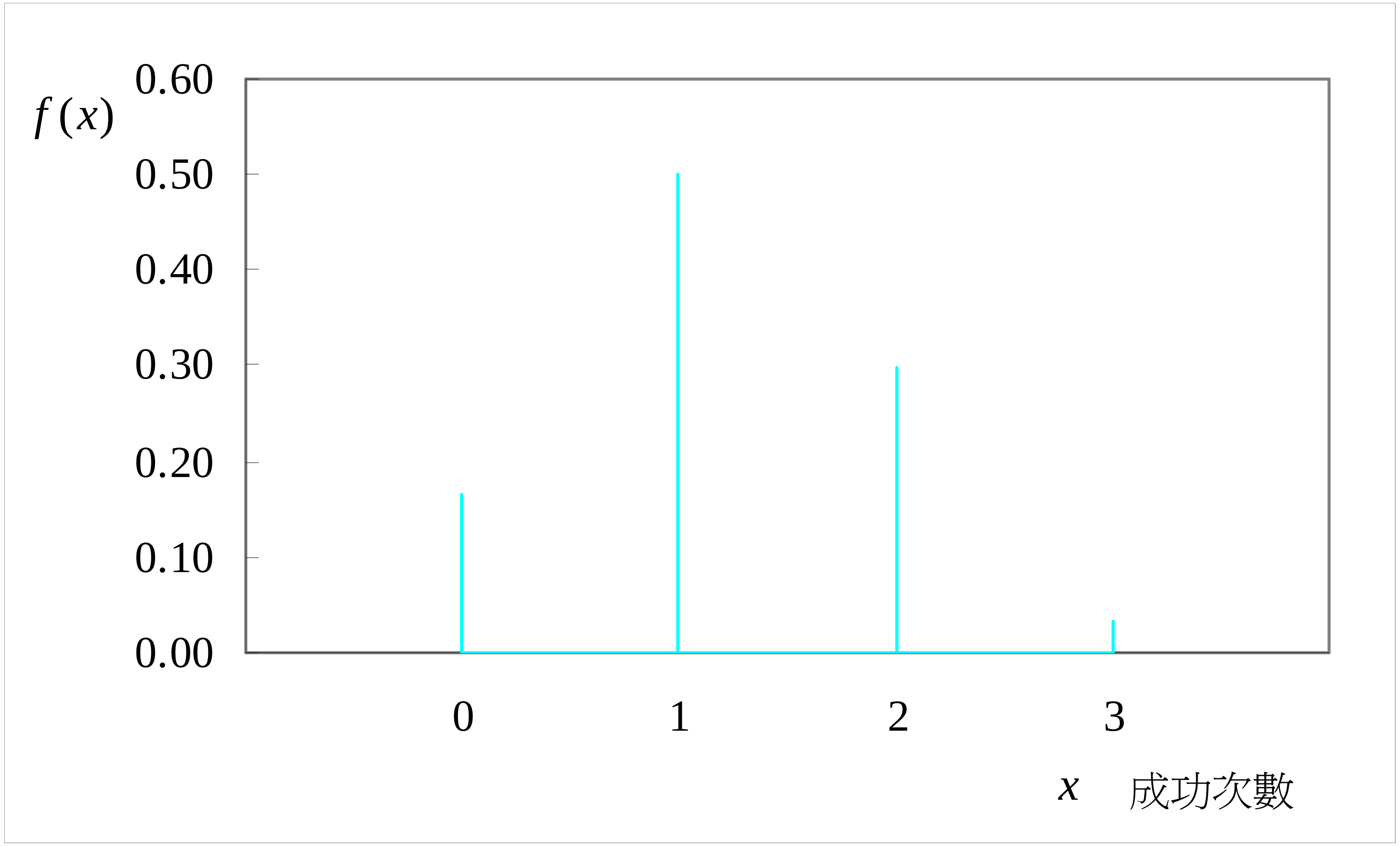
因此 P(x≧2)=(1/30)+(3/10)=1/3

(3) 又 f(1)=1/2

f(0)=1/6 計算而得

故超幾何分配圖如下表

圖6.12 超幾何分配



6.5.2 超幾何分配的特性

(1)平均數與變異數

平均數

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$$

變異數

$$V(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

(2) 與二項分配的關係

若令 (K/N)=p, (N-K)/N = 1-p=q

則超幾何分配的平均數爲 E(X)=np

變異數爲

$$V(X) = npq\frac{N-n}{N-1} \le npq$$

有限母體調整因素

若母體元素N趨近無窮大, 超幾何和二項分配變異數相同

$$\lim_{N \to \infty} \frac{C_x^K C_{N-x}^{N-k}}{C_n^N} = C_x^n p^x q^{n-x}$$

EX 6.23 若你買4種新上市股票,問平均可買得幾張可獲利的股票

Solution:

令X爲可獲利股票的張數

E(X)= n (K/N)= 4 (3/10) = 1.2

$$V(X)=n\cdot\frac{K}{N}\cdot\frac{N-K}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

$$=4\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{10-3}{10}\cdot\frac{10-4}{10-1}=0.56$$

6.6 Poisson(泊松)分配

◎ 問題型態

一定時間或空間內, 發生某些事件的可能性的問題

1. 一天內來店喝咖啡的人數
2. 一頁文件錯字的字數
3. 後門路口一年內車禍的次數

6.1 泊松分配的意義

◎ 泊松隨機實驗 (四個性質)

1. 在一連續區間發生事件的個數,與另一區間發生的個數是獨立的.
2. 在一個連續區間發生事件的期望值(平均數)與區間大小成比例
3. 在很短的區間內事件發生1個或不發生
4. 隨機變數X定義在一段連續區間內事件發生的次數

◎ 泊松分配

設已知在一定的區間發生事件A的期望值爲λ,令X爲該區間發生事件的次數

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x=1,2,\ldots,\infty$$

f(x)爲泊松分配, 其參數爲λ

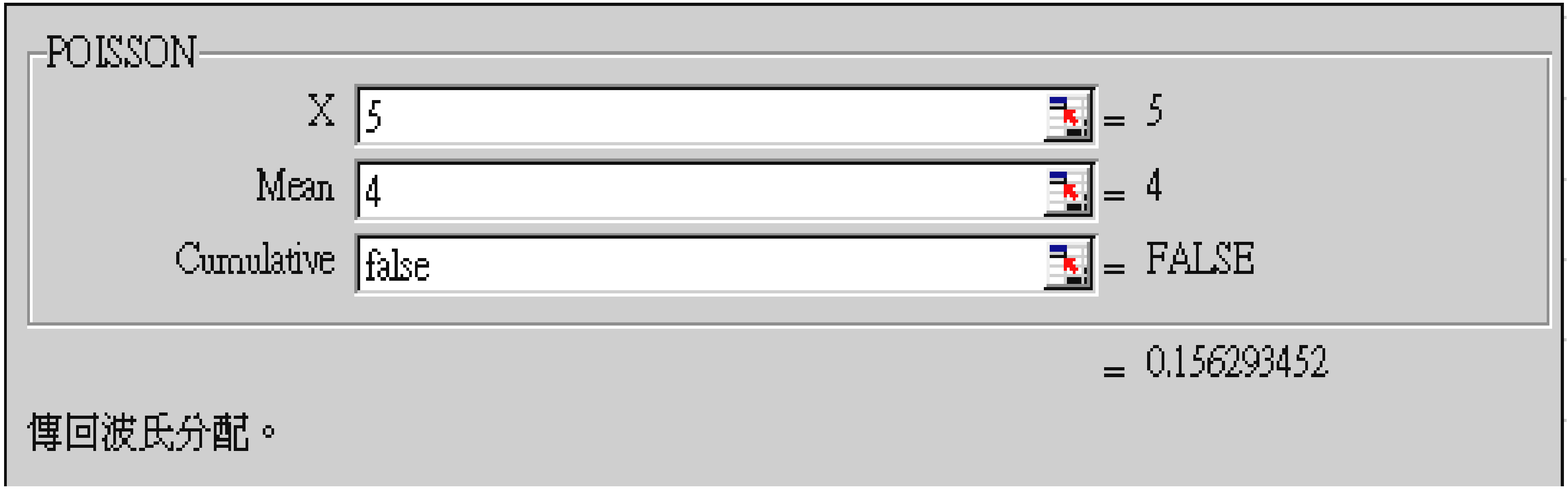
◎ 泊松分配須滿足二個條件

1. $0 \leq f(x) \leq 1$

2. $$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

因 $$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$$

圖6.13 泊松分配對話方塊圖



EX6.25 台大醫院藥師偵測到處方失誤平均一星期有2.4筆. 請問 (1)每星期發生5筆處方失誤的機率爲何? (2)連續兩個星期沒有處方失誤的機率?

Solution:

(1) 一星期發生X1筆處方失誤的機率函數 $f(x)=\dfrac{2.4^{x}e^{-2.4}}{x!}$

$$f(5)=\frac{2.4^{5}e^{-2.4}}{5!}=0.0602$$ (查表)

(2) 二星期 λ=2*2.4=4.8

$$f(0)=\frac{4.8^{0}e^{-4.8}}{0!}=0.0082$$

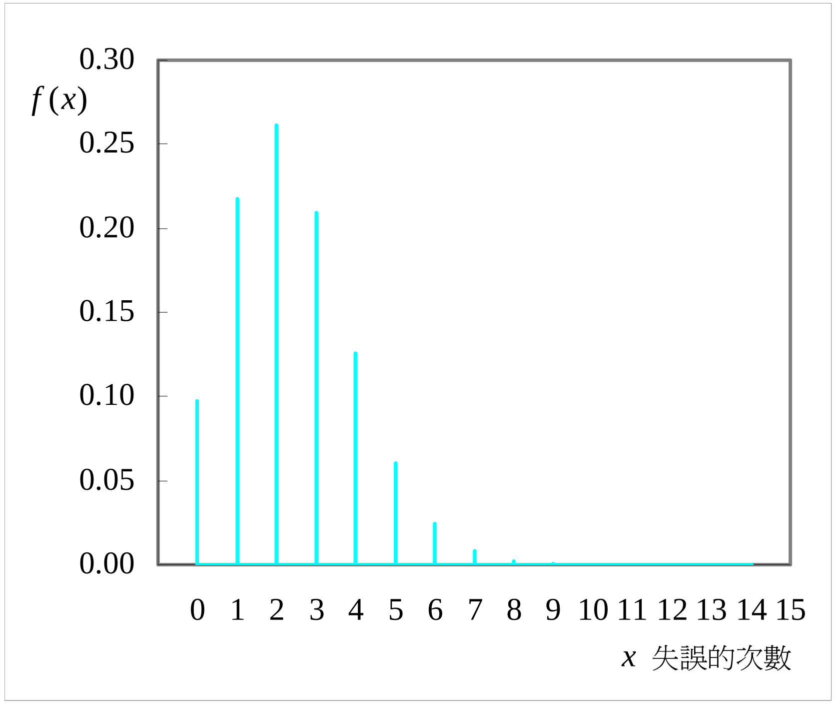
林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表6.20　$\lambda = 2.4$及　$\lambda = 4.8$ 的泊松機率分配

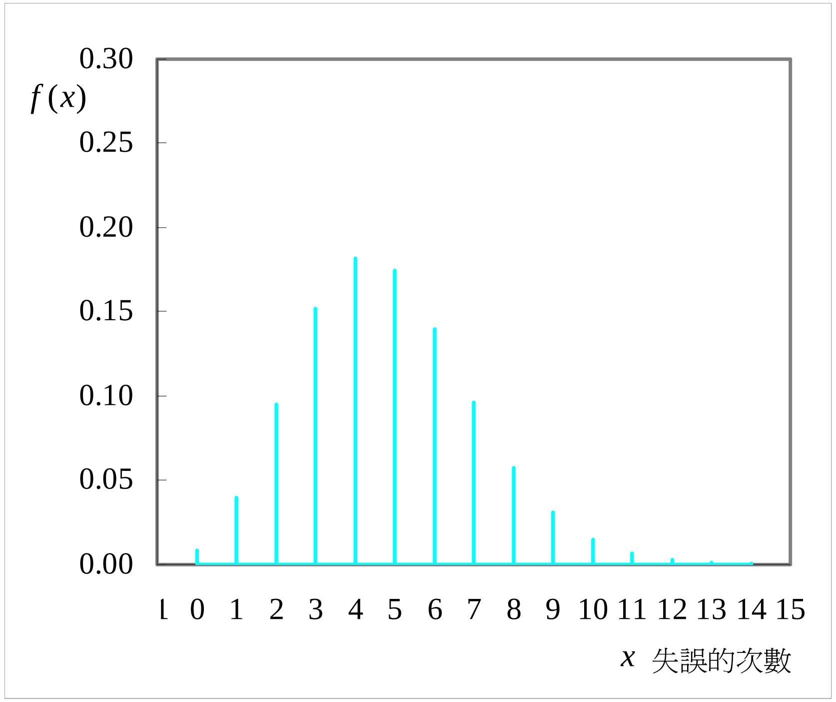
	A	B	C	D
1	x	$f(x)$		
2		$\lambda = 2.4$	$\lambda = 4.8$	
3	0	0.090718	0.008230	
4	1	0.217723	0.039503	
5	2	0.261268	0.094807	
6	3	0.209014	0.151691	
7	4	0.125408	0.182029	
8	5	0.060196	0.174748	
9	6	0.024078	0.139798	
10	7	0.008255	0.095862	
11	8	0.002477	0.057517	
12	9	0.000660	0.030676	
13	10	0.000159	0.014724	
14	11	0.000035	0.006425	
15	12	0.000007	0.002570	
16	13	0.000001	0.000949	
17	14	0.000000	0.000325	

圖6.14 電腦處方失誤筆數的機率分配

$\lambda = 2.4$的泊松分配



$\lambda = 4.8$的泊松分配



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

6.6.2 泊松分配的特性

(1)泊松分配的由來

泊松分配可由n很大的二項分配導出

$$\lim_{n\to\infty} C_x^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

(2) 平均數=變異數 E(X)=V(X)=λ

(3) 偏態係數 $\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 峰態係數 $\alpha_4 = 3 + \dfrac{1}{\lambda}$

(4)加法性：設隨機變數X與Y均為泊松分配,平均數分別為 λ_1與λ_2, 且X與Y獨立, 則X加Y仍為泊松分配,平均數為 $\lambda_1+\lambda_2$,

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

EX6.27 假設每天早上7:00~9:00與傍晚5:00~7:00尖峰時間的車禍為每小時2件, 現問這兩段尖峰時間發生車禍的件數的分配為何? 其平均數, 變異數, 偏態係數, 峰態係數又為何? 又一天兩尖峰時間共發生兩件以上車禍的機率為何?

Solution:

(1). 兩尖峰時間發生車禍件數(X+Y=W)的分配仍為泊松分配

$$f(w) = \frac{8^w e^{-8}}{x!}$$

(2) 平均數與變異數分別為 E(w)=8, V(w)=8

(3) 偏態係數

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

(4) 峰態係數

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{8} = 3.125$$

(5) 兩段尖峰時間發生2件以上車禍的機率 (查表)

$$P(w > 2) = 1 - P(w \le 2) = 1 - \sum_{w=0}^{2} \frac{8^w e^{-8}}{w!}$$

$$= 1 - [0.003 + 0.0027 + 0.0107] = 0.9863$$

6.6.3 泊松分配與二項分配

二項分配當n很大, p很小, 會趨近於泊松分配.

亦即二項分配的機率值可用λ=np的泊松分配代替

Q: 何謂n 很大? 何謂p很小?

一般爲 $n \geqq 20,\ np \leqq 1$

$n \geqq 50,\ np \leqq 5$

$n \geqq 100,\ np \leqq 10$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表6.21 二項分配與泊松分配

	A	B	C	D
1	x	二項分配	泊松分配	B-C
2	0	2.65614E-05	4.53999E-05	-1.88385E-05
3	1	0.000295127	0.000453999	-0.000158873
4	2	0.001623197	0.002269996	-0.0006468
5	3	0.005891602	0.007566655	-0.001675052
6	4	0.015874596	0.018916637	-0.003042042
7	5	0.033865804	0.037833275	-0.003967471
8	6	0.059578729	0.063055458	-0.003476729
9	7	0.088895246	0.090079226	-0.001183979
10	8	0.114823027	0.112599032	0.002223994
11	9	0.130416277	0.125110036	0.005306241
12	10	0.131865347	0.125110036	0.006755311

圖6.15　二項分配

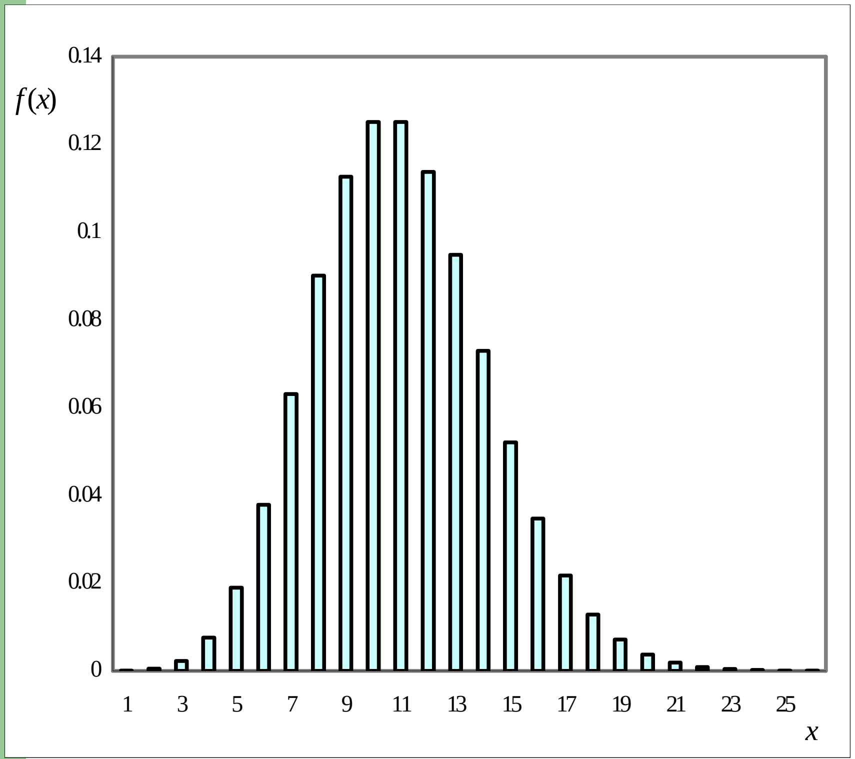


圖6.16　泊松分配

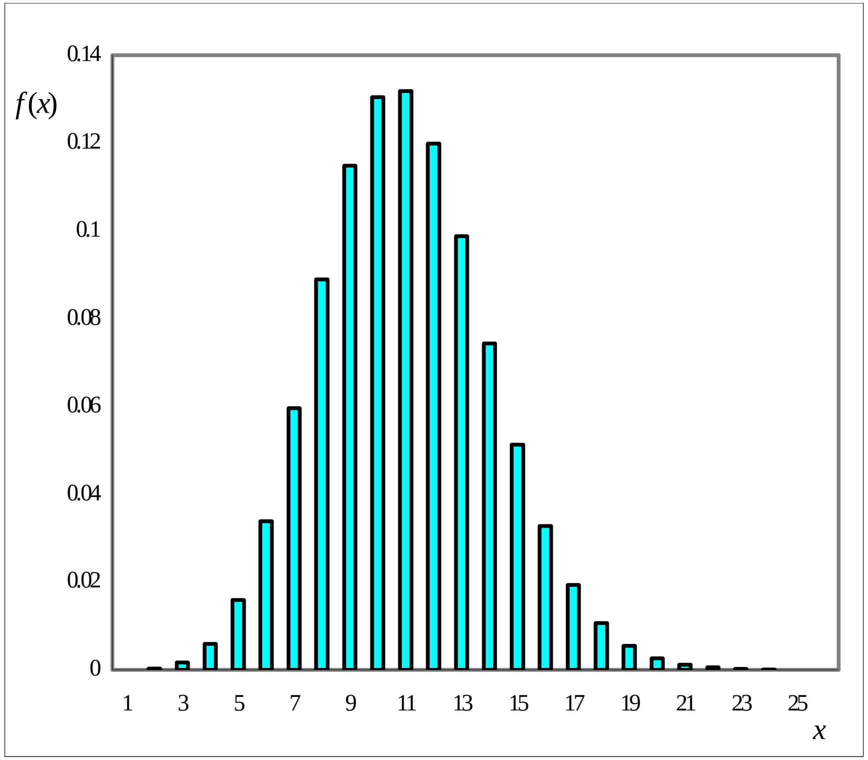
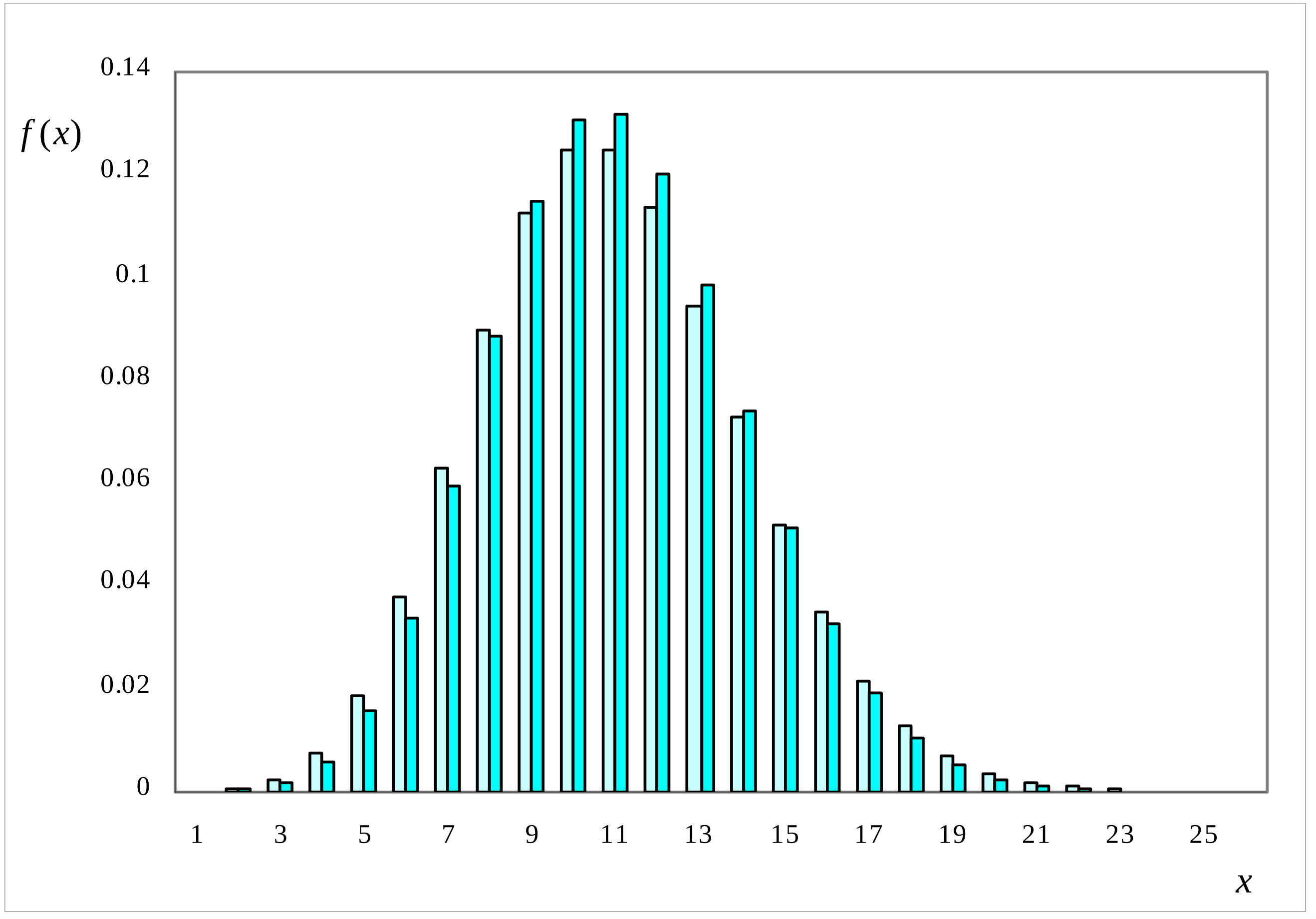


圖6.17 二項分配與泊松分配



6.7 幾何分配

◎ 問題型態

做一件事(考公務員, 追女朋友..)要到第n次才成功

◎ 幾何分配

設X為一間斷隨機變數,若

$$f(x) = q^{x-1} \cdot p \qquad x = 1,2,\cdots,\infty$$

則f(x)為幾何分配

x: 直到第一次成功試行的總次數

p: 成功的機率

q: 失敗的機率 q=1-p

◎ 滿足幾何分配的條件

1. $0 \leq f(x) \leq 1$

2. $$\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p = \frac{p}{1-q} = 1$$

◎ 幾何分配的平均數與變異數

平均數 E(X)=1/p

變異數

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表6.21 撲克牌點數和不超過「10點半」的組合

撲克牌組合	點數和	發生機率
HHHHH	5.5	C_5^{12}/C_5^{52}
A	6.0	$C_4^{12}C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
8	10.0	$C_4^{12}C_1^4/C_5^{52}$
HHHAA	3.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
2	4.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
8	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHH22	5.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
3	6.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
7	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHH33	7.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
4	8.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
6	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHH44	9.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
5	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHAAA	4.0	$C_2^{12}C_3^4/C_5^{52}$
2	5.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$

⋮	⋮	⋮
7	10.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$
HHA22	6.0	$C_2^{12}C_1^4C_2^4/C_5^{52}$
3	7.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
6	10.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHA33	8.0	$C_2^{12}C_1^4C_2^4/C_5^{52}$
4	9.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
5	10.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHA44	10.0	$C_2^{12}C_1^4C_2^4/C_5^{52}$
HH222	7.0	$C_2^{12}C_3^4/C_5^{52}$
3	8.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
5	10.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$
HH333	10.0	$C_2^{12}C_3^4/C_5^{52}$
HAAAA	4.5	$C_1^{12}C_4^4/C_5^{52}$
2	5.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
7	10.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
H2222	8.5	$C_1^{12}C_4^4/C_5^{52}$
3	9.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$
4	10.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$

附註：H 代表出現「J 、Q 或 K 」，點數爲半點。

表6.23 間斷機率分配的函數、平均數與變異數

機率分配	機率函數	平均數	變異數
二項分配	$f(x)=C_x^n p^x q^{n-x} \quad x=0,1,2,\cdots,n$	np	npq
超幾何分配	$f(x)=\dfrac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N} \quad x=0,1,2,\cdots,n$ $x\le k \quad n-x\le N-k$	$n\cdot\dfrac{K}{N}$	$n\cdot\dfrac{K}{N}\cdot\dfrac{N-K}{N}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$
泊松分配	$f(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x=0,1,2,\cdots,\infty$	λ	λ
幾何分配	$f(x)=q^{x-1}p \quad x=1,2,\cdots,\infty$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004