第5章　機率論

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

◎ 日常生活的機率問題

1. 王建民下一場的出賽會贏嗎?
2. 美國股票漲, 台灣股票會上漲的機率有多高?
3. 買大樂透中頭獎的機率有多高?

→ 面對不確定事件時, 事前的機率估計, 有助於進行決策.

◎ 統計觀點

機率是統計推論(Ch10以後)的橋樑

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4. 熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
5. 學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。
6. 認識貝氏定理及應用貝氏定理。

本章結構

- 機率論
  - 隨機實驗
    - 隨機實驗的意義
    - 隨機實驗的基本觀念
  - 機率理論
    - 機率理論的種類
    - 三個機率理論的比較
    - 機率的公理體系
  - 事件機率
    - 事件機率的定義
    - 聯合機率
    - 邊際機率
    - 條件機率
  - 事件的性質與事件機率的運算
    - 事件的性質與關係
    - 事件機率的運算法則
  - 貝氏定理
  - Excel的使用

5.1 隨機實驗 (random experiment)

❍ 隨機實驗的意義

隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。在實驗前已知所有可能出現的結果，而實驗後的結果為所有可能的結果之一，但實驗前並未能正確的、肯定的預知它是何種結果。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則。

表5.1 隨機實驗、出象與樣本空間

隨機實驗 (random experiment)	出象 (outcome)	樣本空間 (sample space)
產品品質檢驗	良品，不良品	$S=\{$良品, 不良品$\}$
一場足球賽	贏，輸，和	$S=\{$贏, 輸, 和$\}$
丟一個骰子 1 次	1,2,3,4,5,6	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
新生小孩的性別	男性，女性	$S=\{$男性, 女性$\}$

5.1.2 隨機實驗的基本觀念

- **隨機（random)**

  隨機是指一個現象事先無法預知是否發生，但在長期多次重複實驗之後，該現象的發生會出現有規則的型態。

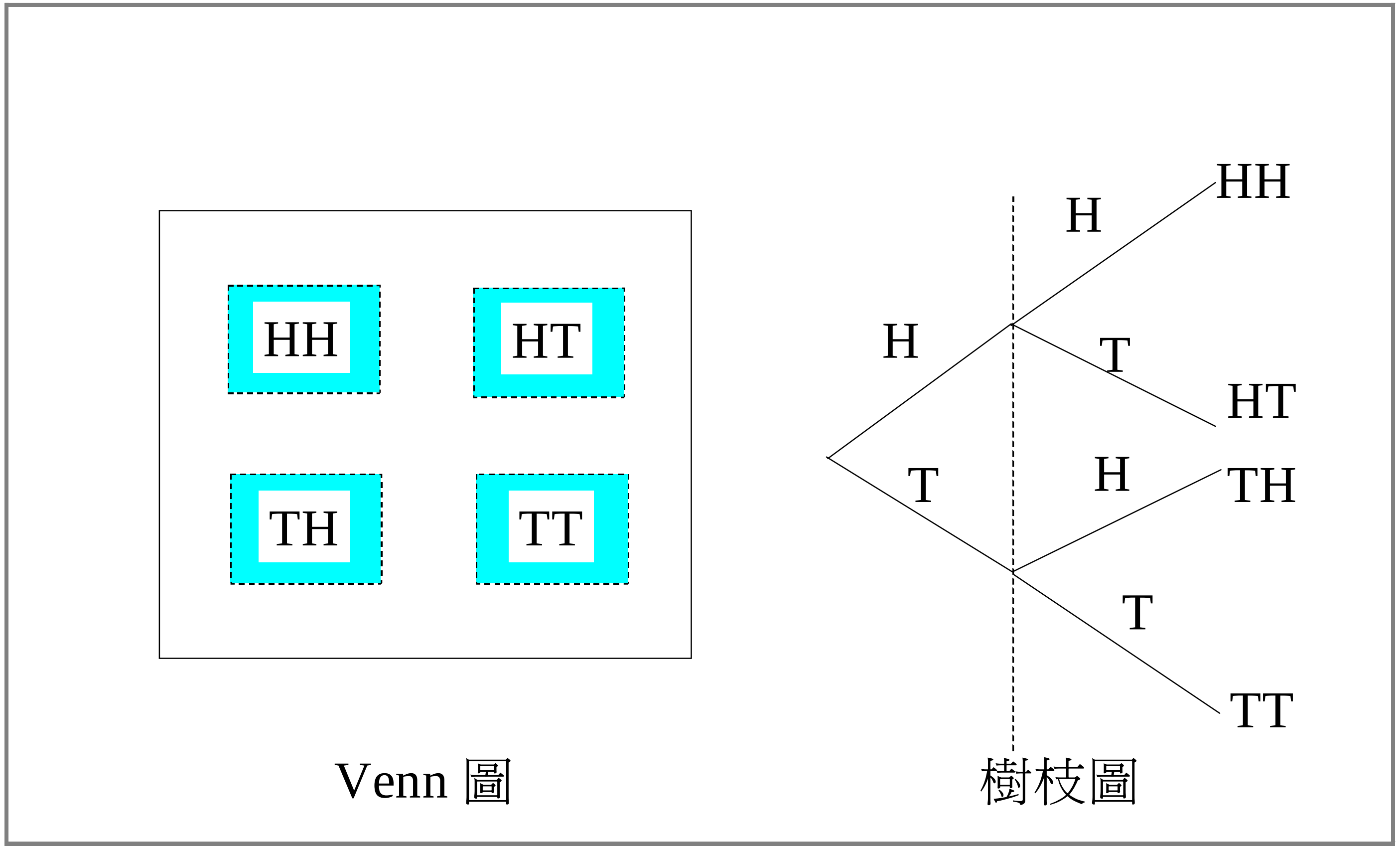
- **基本出象 (basic outcome)**

  隨機實驗的每個可能的結果稱爲基本出象，又稱爲樣本點。

- **樣本空間 (sample space)**

  一個隨機實驗中，所有可能出象的集合稱爲樣本空間。通常以英文大寫字母*S*表示之。

圖5.1 擲一個銅板兩次的樣本空間



林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

例5.3 淡水河邊打香腸

淡水河邊香腸伯的香腸攤, 可以直接買,也可以玩碗公的”十八啦” (擲三個骰子比大小)

Solution:

Outcome: (1,1,1), (1,1,2),,,,,(6,6,6)

6*6*6=216個可能結果, 任何一個都是樣本點

Sample space S= {3,4, 5,…,18}

隨機實驗的基本觀念

- **事件 (event)**

  樣本空間的部份集合稱爲事件。

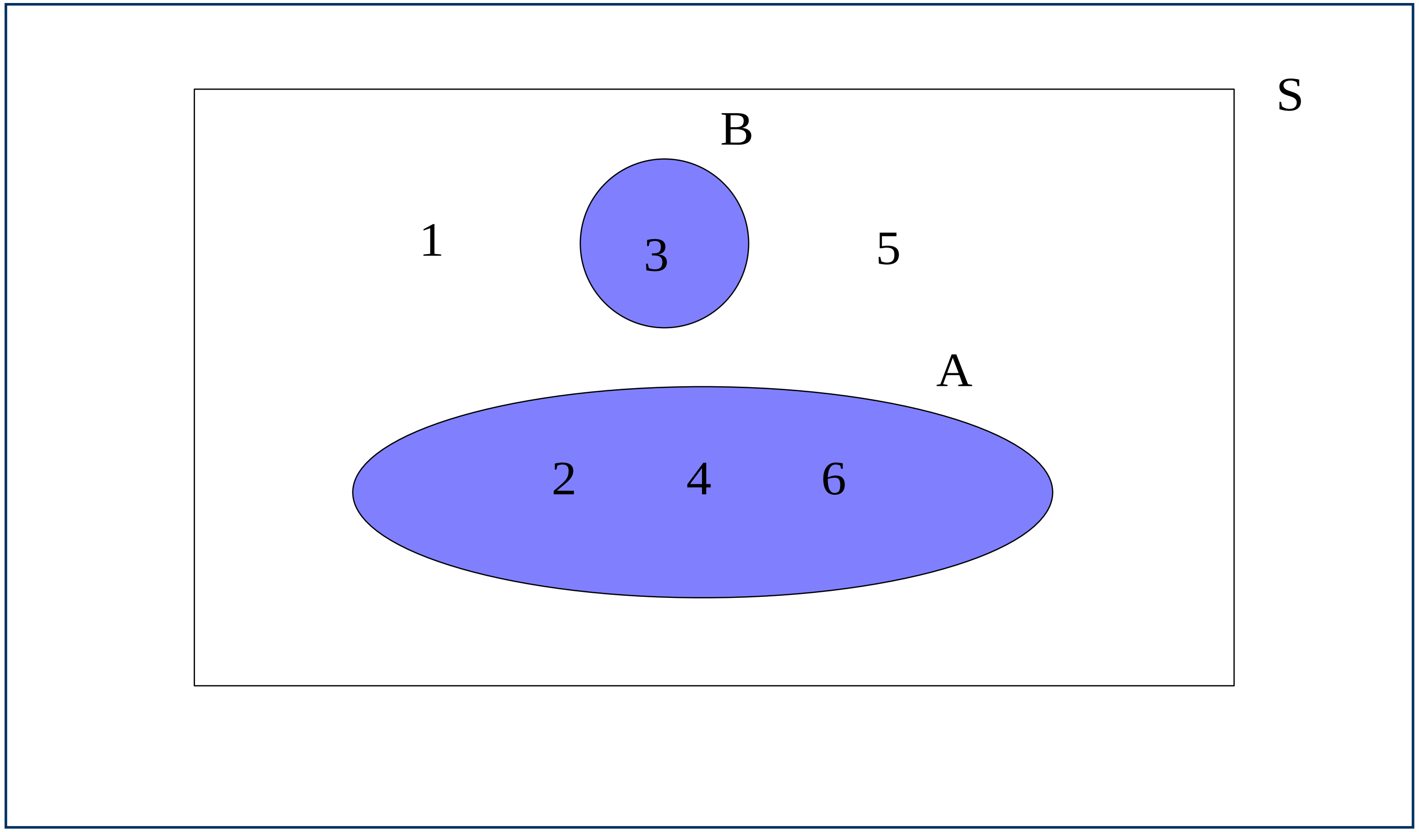
- **簡單事件 (simple event)**

  事件只包含一個基本出象者稱爲簡單事件。

- **複合事件 (composite event)**

  事件包含二個或二個以上基本出象者稱爲複合事件。

A:出現偶數點數　B:骰子點數為3
C: 二個骰子點數和為13
圖5.2　簡單事件與複合事件



◎ 計算樣本點的法則

1. 乘數定理

設一隨機實驗包含k個實驗, $E_1,E_2,\ldots E_k$, 若每一實驗Ei有n_i種結果, $i=1,2,\ldots k$, 則該實驗有 $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ 種結果

2.排列 (permutation)

自一個包含n個元素的集合中, 一次抽出r個元素, 則有 P_r^n 個不同排列的樣本組

C_r^n

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

3. 組合 (combination)

自一個包含n個元素的集合中, 一次抽出r個元素,若不考慮r個被抽中元素的順序, 則共有 C_r^n 個不同組合

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!}$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex 5.4 手機密碼的設定

4個數字的開機密碼,有幾種設定方式? 若要求4個數字皆不相同, 則有幾種不同的設定方式?

Solution

1. 10*10*10*10= 10,000

2.

$$P_r^n = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex 5.5 張小姐擁有8張不同銀行發行的信用卡

1. 若隨機從中抽取兩張來用, 則共有多少樣本點?

2. 若8張中有5張是VISA卡, 3張是Master卡, 則抽中1張VISA卡和 1張Master卡的樣本點有幾個?

Solution:

1. 樣本空間的樣本點個數

$$C_2^8 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8\times 7}{2!} = 28$$

2. 抽中1張VISA卡和 1張Master卡的樣本點個數

$$C_1^5 C_1^3 = \frac{5!}{1!4!}\times\frac{3!}{1!2!} = 15$$

5.2 機率理論

5.2.1 機率理論的種類

1. 古典的機率理論 (classical probability)

又稱先驗的機率理論(priori probability), 指若在某一隨機實驗中, 有N種互相排斥且同等可能出現的出象,則任一出象E的機率,以P(E)表示爲

$$P(E) = \frac{1}{N}$$

Ex 5.6 擲一粒骰子, 出現偶數點的機率?

設A爲骰子出現偶數點的事件 (2, 4, 6點)

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

2. 客觀的機率理論(objective probability)

又稱為相對次數的機率理論(relative frequency probability)

指在長期重複的隨機實驗中,事件E發生的機率為出現該事件之次數與隨機實驗的總次數之比

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

n(E)表示事件E出現的次數, n表隨機實驗的總次數

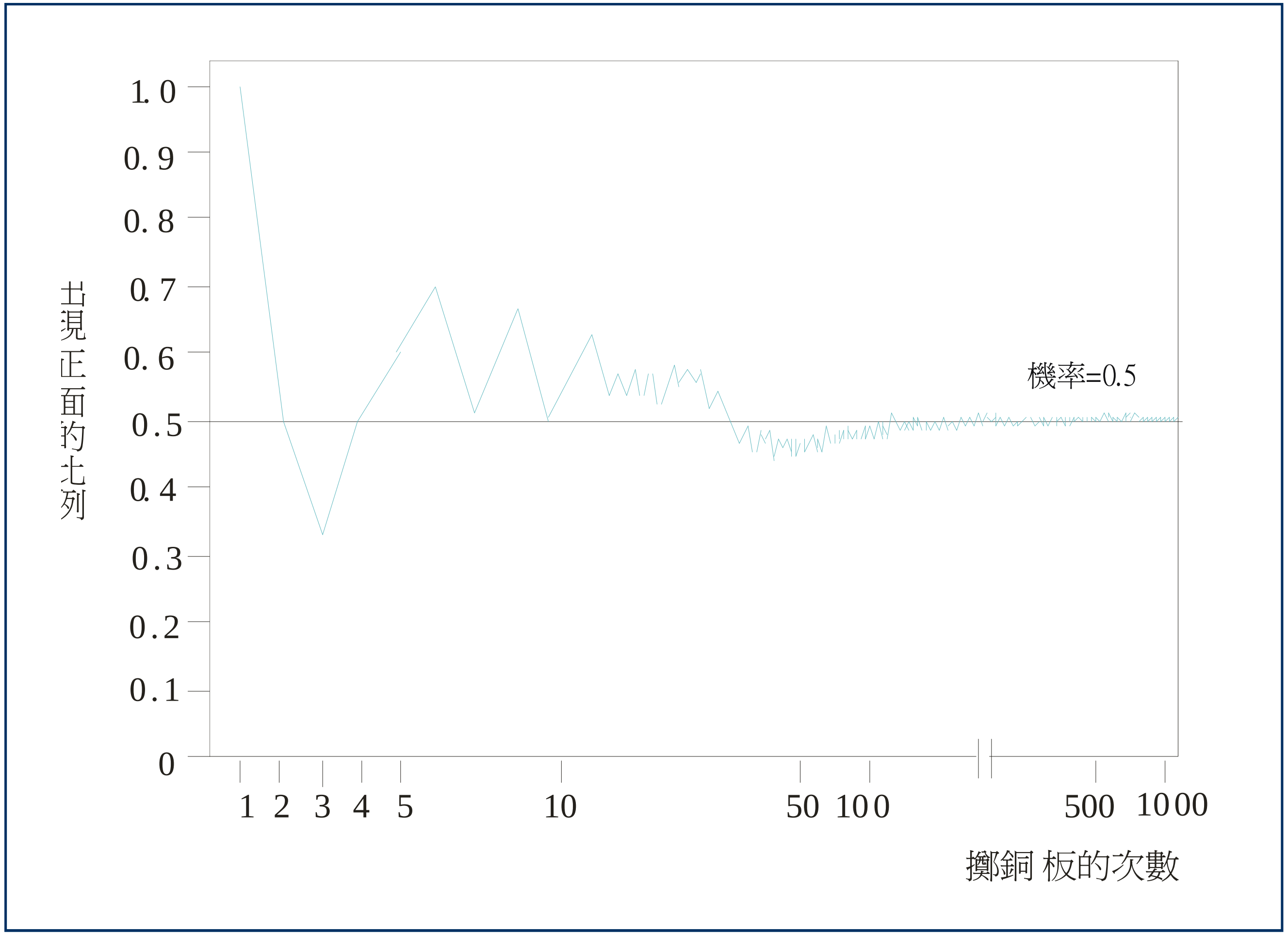
Ex: 擲一枚銅板1000次

→ 大數法則 (law of large number)

若偶事件有既定的機率,而我們不斷的進行相同的實驗,則該事件發生的次數比例會越來越接近這個既定的機率

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

圖5.3 投擲銅板出現正面的機率



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

3. 主觀的機率理論

指事件發生的機率, 決定於人們對發生此事件的相信程度

P(E)=[對事件E發生的信心]

EX5.8 憂國憂民的使命感

2008年的總統大選即將開打, 除了藍綠兩組候選人之外,電視報導傳聞 王文洋即將參選, 他的競選總幹事 相信 王先生當選的機率爲40%

5.2.3 機率的公理

- **公理一**

  $0 \le P(E_i) \le 1$，表示任一事件 E_i 若可能發生，則其機率大於0小於1。若事件不發生，則其機率等於0。若事件一定發生，則機率等於1。

- **公理二**

  $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$，$E_1, E_2, \cdots, E_n$ 互斥，表示若有n個互斥事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，則 E_1 發生或 E_2 發生或 E_n 發生的機率爲其個別機率的和。

- **公理三**

  $P(S) = 1$，表示樣本空間中所有事件均發生的機率總合等於1。

Ex: 5.10 無偏銅板的機率

擲銅板的隨機實驗,其樣本空間為{正面,反面},因此, 依照機率的三個公理,對應樣本空間的任一事件(正面或反面)均有一實數值與之對應,如P(E1=正面)=1/2, P(E2=反面)=1/2, 且滿足下列三條件

1. $0 \le P(E_i) \le 1$,因0< ½ <1

2. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

3. P(S)=1, 因 P(S)=1/2 +1/2 =1

由此可知,他們符合機率的公理體系

5.3 事件機率

5.3.1 事件機率的定義

設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率*P*(*A*)爲事件A之基本出象的機率總和，即

$$P(A) = \sum P(E_i), E_i \in A$$

5.3.2 聯合機率 (joint probability)

二個或二個以上事件同時發生的機率稱爲聯合機率。

$$P(A \cap B) = P(E_i), E_i \in A \cap B$$

表5.2 事件的聯合（聯合次數分配）

$A \backslash B$	B_1	B_2	$\cdots$	B_c
A_1	$A_1 \cap B_1$	$A_1 \cap B_2$	$\cdots$	$A_1 \cap B_c$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$A_r \cap B_1$	$A_r \cap B_2$	$\cdots$	$A_r \cap B_c$

表5.3　聯合機率分配表

$A\backslash B$	B_1	B_2	$\cdots$	B_c
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$	$\cdots\cdots$	$P(A_1 \cap B_c)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$P(A_r \cap B_1)$	$P(A_r \cap B_2)$	$\cdots$	$P(A_r \cap B_c)$

Ex 5.12 問模具狀況佳(或不佳)與產品為良品(或瑕疵品)的機率為何?

表5.4 汽車墊片的品質與模具狀況分析表

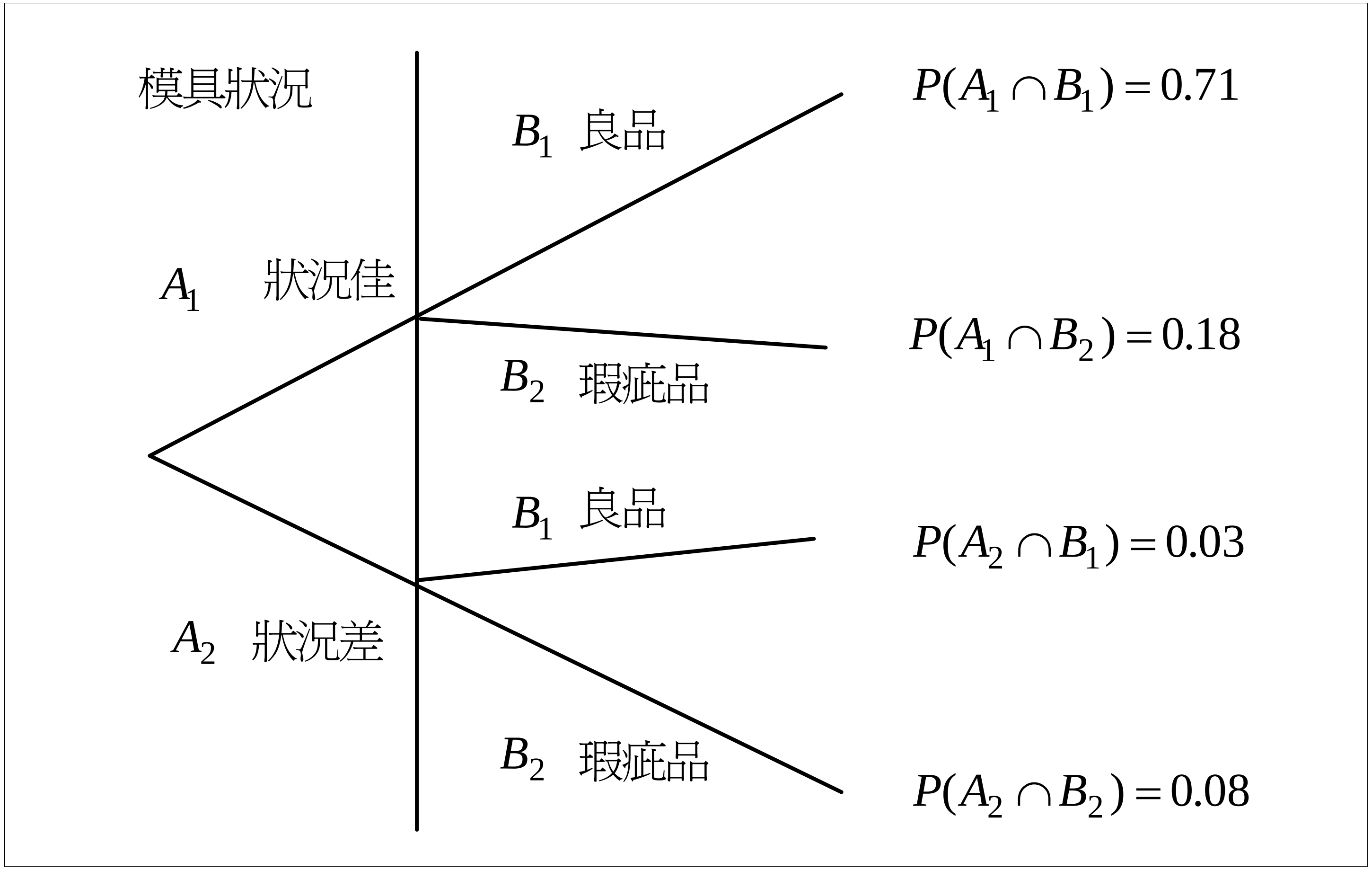
		產品（B）		合 計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	320	80	400
	狀況差（A_2）	14	36	50
合 計		334	116	450

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表5.5 汽車墊片的品質與模具狀況的機率表

		產品		$P(A_i)$
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具	狀況佳（A_1）	$P(A_1 \cap B_1) = 0.71$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$P(A_1) = 0.89$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
$P(B_i)$		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	1.00

圖5.4 汽車墊片的品質與模具狀況的樹枝圖



林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

5.3.3 邊際機率 (marginal probability)

在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱爲邊際機率。

下頁表5.6

垂直加總

$$P(A_i)=\sum_{j=1}^{c}P(A_i\cap B_j)=P(A_i\cap B_1)+P(A_i\cap B_2)+\ldots+P(A_i\cap B_c)$$

i=1,2,…,r

平行加總

$$P(B_j)=\sum_{i=1}^{r}P(A_i\cap B_j)=P(A_1\cap B_j)+P(A_2\cap B_j)+\ldots+P(A_r\cap B_j)$$

j=1,2,…,c

表5.6　一般化的聯合機率分配表

$A \backslash B$	B_1	$\cdots$	B_c	$P(A_i)$
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$\cdots$	$P(A_1 \cap B_c)$	$\sum_{j=1}^{c} P(A_1, B_j) = P(A_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$P(A_r \cap B_1)$	$\cdots$	$P(A_r \cap B_c)$	$\sum_{j=1}^{c} P(A_r, B_j) = P(A_r)$
$P(B_j)$	$\sum_{i=1}^{r} P(A_i, B_1) = P(B_1)$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{r} P(A_i, B_c) = P(B_c)$	1

Ex 5.13 在例5.12中, 良品與瑕疵品的機率爲何?

Solution:

良品的比例爲

P(良品)= $P(B_1)=P(A_1\cap B_1)+P(A_2\cap B_1)$

= P(狀況佳,良品)+P(狀況差, 良品)

=0.71+0.03 =0.74

瑕疵品的比例爲

P(瑕疵品)= $P(B_2)=P(A_1\cap B_2)+P(A_2\cap B_2)$

= = P(狀況佳,瑕疵品)+P(狀況差,瑕疵品)

=0.18+0.08 =0.26

5.3.4 條件機率 (conditional probability)

令A、B爲定義於樣本空間的事件，已知發生事件B之後再發生事件A的機率，稱爲事件A的條件機率。

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\qquad P(B)\neq 0$$

若已知發生事件A之後再發生事件B的機率

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\qquad P(A)\neq 0$$

圖5.5 事件A的條件機率

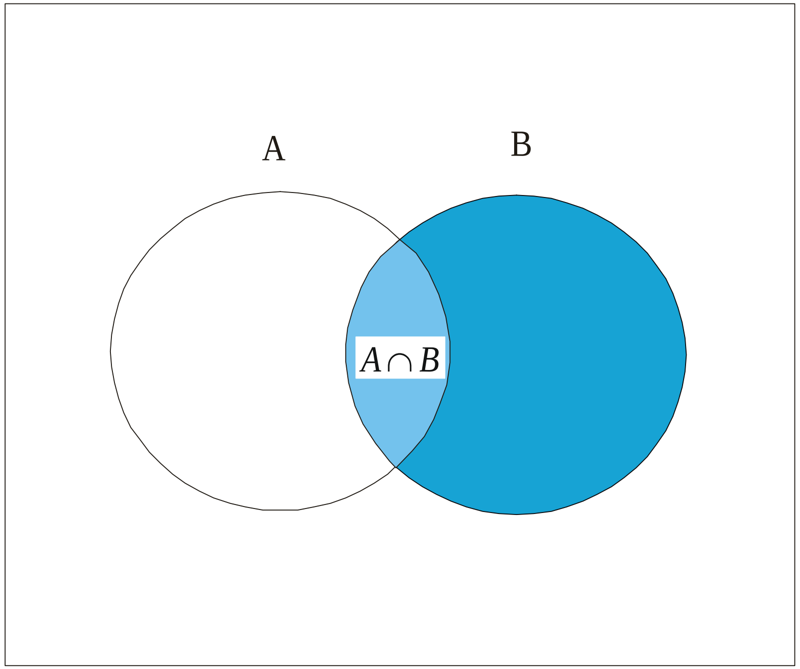
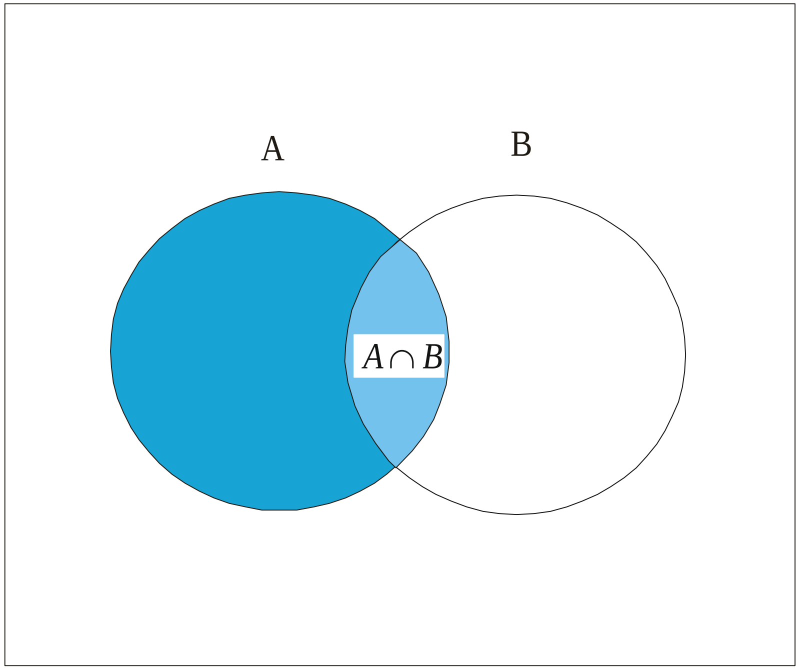


圖5.6 事件B的條件機率



個案研究 紐約股市與台北股市的關連

表5.7 台北與紐約股市關聯表

		台北股市		小計
		漲	跌	
紐約股市	漲	24	10	34
	跌	12	16	28
小計		36	26	62

時間：2003年6月1日~8月31日。資料來源：大師資訊。

表5.8 台北與紐約股市漲跌機率表 (聯合機率)

		台北股市 漲	台北股市 跌	小計
紐約股市	漲	0.387	0.161	0.548
	跌	0.194	0.258	0.452
小計		0.581	0.419	1.000

$$P(TPU \mid NYU) = \frac{P(TPU \cap NYU)}{P(NYU)} = \frac{0.387}{0.548} = 0.706$$

$$P(TPU \mid NYD) = \frac{P(TPU \cap NYD)}{P(NYD)} = \frac{0.194}{0.452} = 0.429$$

EX: 5.14 問已知模具狀況佳的情況下, 良品與瑕疵品的機率各爲何?

Solution:

$$\text{P(良品 | 狀況佳)} = P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{0.71}{0.89} = 0.80$$

$$\text{P(良品 | 狀況差)} = P(B_1 \mid A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)} = \frac{0.03}{0.11} = 0.27$$

5.4 事件的性質與關係

5.4.1 事件的性質與關係

一個事件依其與其他事件的關係可區分爲獨立事件(independent event), 相依事件(dependent event), 和互斥事件(mutually exclusive event)

◎ 獨立事件 (independent event)

獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。

❍ 若A、B兩事件合乎於下列任一條件，則A、B互爲獨立。

1. P(A | B)=P(A)
2. P(B | A)=P(B)
3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex 5.15 體重控制方法之間是否有關係

調查315位体重過重的國中生,結果發現沒有任何體重控制行爲的佔23.9%, 有控制行爲的佔76.1%. 有控制行爲者採用飲食控制的佔98.5%,採運動控制的佔74.9%,兩種控制方法都採用的佔73.8%. 請問這兩種控制方法之間是否有關?

Solution:

設A: 採飲食控制, B:採運動控制, 已知 $P(A \cap B) = 0.738$

且知 P(A)*P(B)=0.985*0.761=0.738

因此可得 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.738$

故兩種體重控制方法獨立無關

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

◎ 三事件獨立

若A, B,C三事件合乎下列四條件,則A, B, C互爲獨立

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
2. $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Ex: 自撲克牌以抽出放回的方式抽取3張牌, 設A事件爲第1張爲K, B事件爲第2張爲K, C事件爲第3張爲K, 試問A,B,C三事件是否爲獨立?

YES (請自行運算)

◎ 相依事件 (dependent event)

相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率

Ex:自52張撲克牌中抽取2張牌. 設事件A爲抽取第1張爲老K, 事件B爲抽取第2張爲老K. 問A,B倆事件的相互關係爲何? 又若自撲克牌中以抽出放回的方式抽取2張, 則A,B事件的關係又爲何?

Solution:

概念: 先求事件A與事件B的機率, 然後再求事件A發生後再發生事件B的機率. 若條件機率等於邊際機率時, 則兩事件爲獨立. 若不相等, 則不獨立.

1. 抽取2張抽出不放回

P(A)=4/52=1/13

$$P(B)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}+\frac{48}{52}\times\frac{4}{51}=\frac{1}{13}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}}{\frac{4}{52}}=\frac{3}{52}=\frac{1}{17}$$

故 $P(B|A)\neq P(B)$ P(B|A)=1/17是因當抽出不放回時,第2張出現老K的機率受到第1張老K影響. 故事件A,B不獨立

2.抽取2張抽出放回

P(A)=4/52=1/13, P(B)=4/52=1/13

P(B|A)=4/52=1/13

因此, P(B|A)=P(B), 事件A,B獨立

700衛高中畢業生參加電機學院以及文學院的甄試入學,結果如下表.有家長質疑女生的錄取率偏低,有性別歧視之嫌. 請問真有性別歧視嗎?

表5.9　高中應屆畢業生申請參加甄試的結果

		甄試結果		合計
		錄取（B_1）	不錄取（B_2）	
性別	男生（A_1）	175	225	400
	女生（A_2）	100	200	300
合計		275	425	700

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Solution:

男女生的錄取率分別爲

$P(B_1|A_1)=175/400 = 44\%$

$P(B_1|A_2)=100/300 = 33\%$

由此可知,男生錄取率比女生錄取率高11%. 同時由上表得知條件機率不等於邊際機率. 因此, 男女性別與路不錄取有關.

Q: 是否性別歧視?

進一步考慮學院別如下表5.10, 5.11

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

表5.10 電機學院甄試結果

	男	女
錄取	150	50
不錄取	150	50
合計	300	100

表5.11 文學院甄試結果

	男	女
錄取	25	50
不錄取	75	150
合計	100	200

P(錄取| 男生∩電機學院)=150/300=1/2
P(錄取| 女生∩電機學院)=50/100=1/2
P(錄取| 男生∩文學院)= 25/100=1/4
P(錄取| 女生∩文學院)=50/200=1/4
女生參加文學院的真是較多

◎ 互斥事件 (mutually exclusive event)

如果事件沒有共同的元素(樣本點)，則稱爲互斥事件

Ex 5.18 自52張撲克牌中抽取1張, 設事件A爲出現老K, 事件B爲出現人頭(J,Q,K),事件C爲出現A. 問A,B,C是否爲互斥事件?

Solution:

因 $P(A \cap B) = 4/52 \neq 0$, 故 A, B不互斥

因 $P(A \cap C)=0$, 故A, C互斥

因 $P(B \cap C)=0$, 故B, C互斥

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

◎ 互斥事件與獨立事件的關係

互斥事件和獨立事件的相互關係可分為三種

1. 若A,B獨立, 則A,B不互斥

   若A,B獨立, 則$P(A \cap B)=P(A)*P(B)$,但因$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$,則$P(A \cap B) \neq 0$, 所以A,B不互斥. 但若A,B不互斥, A,B不一定獨立

2. 若A,B互斥, 則A,B不獨立

   若A,B互斥, 則$P(A \cap B)=0$, 只要$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$,則 $P(A \cap B) \neq P(A)*P(B)$. 因此不獨立. 反之, 則不成立.

3. 若A,B獨立, 則 $\bar{A}$ 與 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 與B, A與 $\bar{B}$ 均獨立

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

5.4.2 事件機率的運算法則

◎ 餘集合的機率

設A為某一事件, 則其餘集合(complement of an event) $\bar{A}$
發生的機率為

◎ 加法定理 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

1. 二事件的聯集 (union)

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

若事件A與事件B互斥 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

2. 三事件聯集

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

若事件A,B, C互斥 $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex5.19 經濟系規定,輔系同學必須先修過經濟學原理與統計學.現知府系同學中,有60%修過經濟學原理,70%修過統計學.問輔系同學可以修個體經濟學的比例爲何?

Solution:

令A事件: 輔系同學修讀經濟學原理

B事件: 輔系同學修讀統計學

據加法定理

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

可以修個體經濟學的比例爲$P(A \cap B)$

$$P(A \cap B)= P(A)+P(B)-P(A \cup B)=0.6+0.7-1.0=0.3$$

輔系同學生有30%可修個體經濟學

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex 5.20 中大公司欲聘經理人員, 應徵人員須具備三要件; 大專學歷(A), 領導能力(B), 溝通能力(C). 根據應徵人員資料,具A,B,C三種特質的比例各爲0.38, 0.2, 0.3; 有兩項特質的比例爲0.15; 一項特質的比例爲0.7. 試求同時具備三項特質的機率

Solution:

由題意知 $P(A)=0.38$, $P(B)=0.2$, $P(C)=0.3$

$$P((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))=0.15,\quad P(A\cup B\cup C)=0.7$$

根據加法定理

$$P((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)$$
$$-P(A\cap B\cap C)-P(A\cap B\cap C)-P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

移項可得 $P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)$

$$=P((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))-2P(A\cap B\cap C)$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

又根據加法定理

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C) - P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

$$\rightarrow P(A \cap B \cap C)= P(A \cup B \cup C)-P(A)-P(B)-P(C)+P(A \cap B)+P(A \cap C)+P(B \cap C)$$

$$=0.7-0.38-0.2-0.3+0.15+2\,P(A \cap B \cap C)$$

故 $P(A \cap B \cap C)=0.03$

經理人才不多

林惠玲　陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

◎ 乘法定理

1. 二事件的交集

$$P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)$$

如果A,B獨立. $P(A|B)=P(A)$

則 $P(A\cap B)=P(A)\ )\times P(B)$

2.三事件的交集

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B|A)\times P(C|A\cap B)$$

如果A,B,C獨立,則

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex5.21 請利用乘法定理及直接求算男性, 大專以上, 且為經理人員之機率

表5.12 台灣地區就業者之職業及教育程度

職 業 別	教育程度		合計
	高中職以下	大專以上	
男 性：	3,891	1,709	5,600
經理人員	162	189	351
非經理人員	3,729	1,520	5,249
女 性：	2,654	1,358	4,012
經理人員	34	42	76
非經理人員	2,620	1,316	3,936

資料來源：《台灣地區人力資源統計月報》，360期，行政院主計處，92年11月。單位：千人。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Solution:

根據乘法定理計算如下

P(男性∩大專以上∩經理人員)

=P(男性) ×P(大專以上|男性) × P(經理人員|男性∩大專以上)

= (5600/9612) ×(1709/5600) ×(189/1709)

= 0.0197

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

◎ 分割定理 (條件機率的情況)

若 $A_1, A_2, \ldots A_r$ 爲分割集合, B爲一事件, 則

$$P(B) = \sum_{i=1}^{r} P(B \cap A_i)$$,

且由 $$P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

故

$$P(B) = \sum_{i=1}^{r} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{r} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

Ex 5.23 用表5.12data回答下列問題

1. 抽取任一就業者其為婦女且受過大專以上教育之機率?
2. 抽取任一就業者其為經理或大專畢業的機率?
3. 女性擔任經理人員的機率是否與男性擔任經理人員的機率相同?
4. 教育程度大專理上的女性與男性擔任經理人的機率有多少?

職業別	教育程度		合計
	高中職以下	大專以上	
男 性：	3,891	1,709	5,600
經理人員	162	189	351
非經理人員	3,729	1,520	5,249
女 性：	2,654	1,358	4,012
經理人員	34	42	76
非經理人員	2,620	1,316	3,936

資料來源：《台灣地區人力資源統計月報》，360期，行政院主計處，92年11月。單位：千人。

Solution:

令 事件C: 教於程度爲大專以上 事件M: 職業爲經理人員

事件F: 女性

1. 總就業者共有9612千人,女性且爲大專以上者爲F∩C集合,有1358千人

故 $P(F \cap C) = 1358/9612 = 0.1413$

2.任一就業者其爲經理或大專以上畢業者的集合爲M∪C

$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C)$

$= 0.0444 + 0.3191 + 0.0240 = 0.3395$

其中, $P(M) = (351+76)/9612 = 0.0444$

$P(C) = (1709+1358)/9612 = 0.3191$

$P(M \cap C) = (189+42)/9612 = 0.0240$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

3. 女性擔任經理人的機會應求在女性條件下爲經理人的條件機率:

$$P(M \mid F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0.0079}{0.4174} = 0.0189$$

其中, P(F)=4012/9612=0.4174

P(M∩F)=76/9612 =0.0079

男性擔任經理人的機率:

$$P(M \mid \bar{F}) = \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0.0365}{0.5826} = 0.0627$$

其中

$$P(\bar{F}) = \frac{5600}{9612} = 0.5826, \quad P(M \cap \bar{F}) = \frac{351}{9612} = 0.0365$$

男性擔任經理人的機率(0.0627)高於女性(0.0189)

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

4. 是否受大專教育可能影響擔任經理人員的機會. 爲排除男女性別及教育程度的影響,進一步檢驗大專以上擔任經理人員的機率, 該機率表爲

$$P(M|F\cap C)=\frac{P(M\cap F\cap C)}{P(F\cap C)}=\frac{42/9612}{0.1413}=\frac{0.0044}{0.1413}=0.031$$

同理可求大專以上男性擔任經理人員的機率

$$P(M|\bar{F}\cap C)=\frac{P(M\cap \bar{F}\cap C)}{P(\bar{F}\cap C)}=\frac{189/9612}{0.1778}=\frac{0.0197}{0.1778}=0.1108$$

男性機率高於女性, 好像有性別歧視, 但不能妄下斷論, 尚有其他因素未考慮

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

5.5 貝氏定理

若已知 $A_1,\cdots,A_r$ 爲樣本空間的分割集合，B爲某事件，且已知 $P(A_i)$ 及 $P(B|A_i)$ ，則B條件下發生事件 A_i 之機率表爲 $P(A_i|B)$ ：

$$P(A_i|B)=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots+P(B\cap A_r)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_r)P(B|A_r)}$$

式中： $P(A_i)$ ：事前機率， $P(B|A_i)$ ：概似機率， $P(A_i|B)$ ：事後機率。

海山唱片想推出新唱片，根據過去經驗，推出新唱片有60%是成功的，40%是失敗的

事件A_1: 上市成功

事件A_2: 上市失敗

表5.13 新唱片上市成功的機率

上市情況	機率
成功	0.6
失敗	0.4
合計	1.00

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

市調並非百分之百準確, 根據經驗, 若推出成功,調查結果客戶喜歡的機率為90%, 不喜歡的機率為10%; 相反的,若推出不成功,客戶不喜歡的機率為70%, 喜歡的機率為30%.

事件B: 調查報告為客戶喜歡

事件 $\overline{B}$: 調查報告為客戶不喜歡

表5.14　新唱片上市成功與調查報告

	上市成功（A_1）	上市失敗（A_2）
客戶喜歡（B）	0.90	0.30
客戶不喜歡（$\overline{B}$）	0.10	0.70
合計	1.00	1.00

調查報告為客戶喜歡而上市成功的機率為

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{0.54}{0.66} = 0.82$$

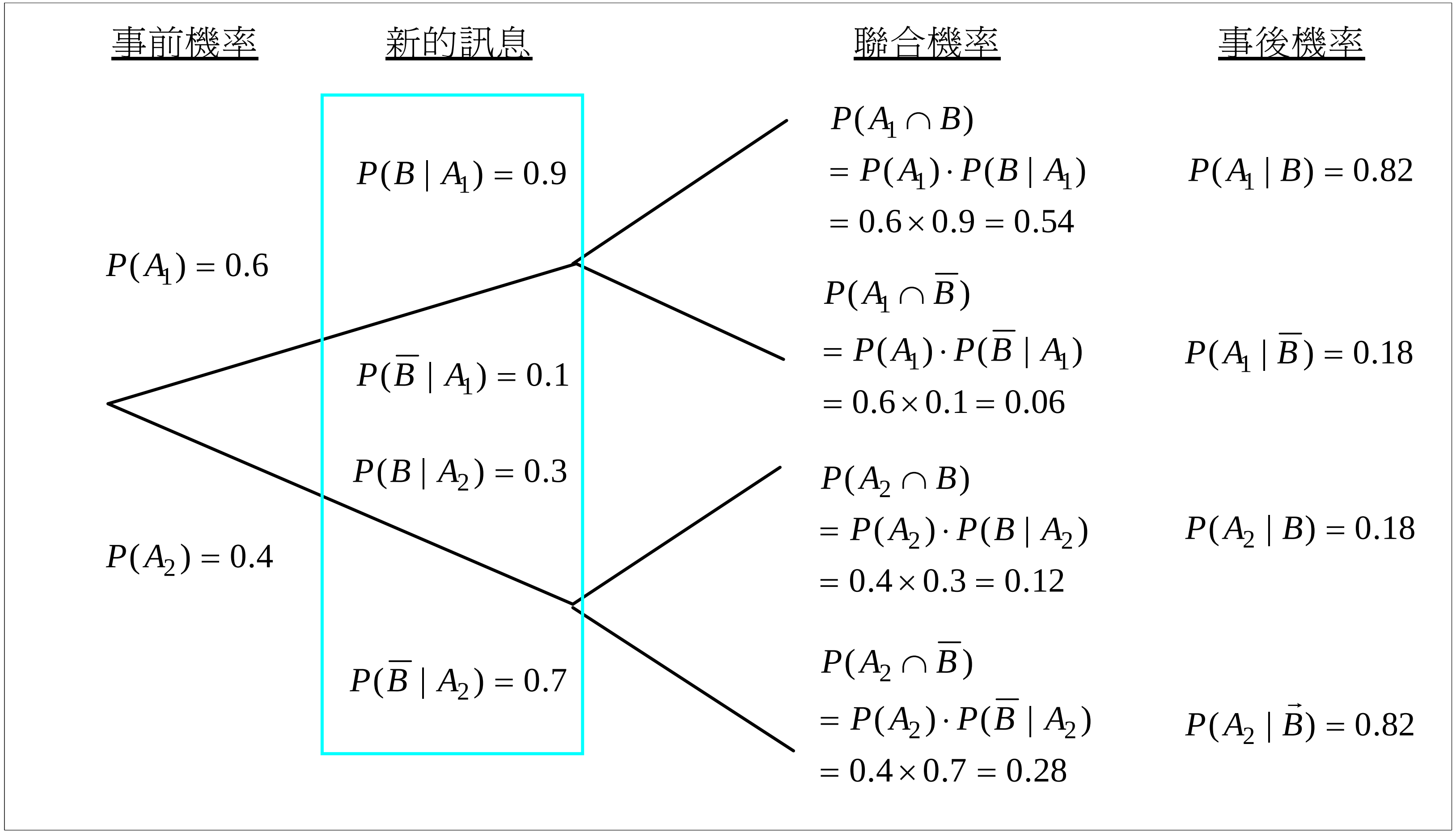
調查報告為客戶喜歡而上市失敗的機率為

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.66} = 0.18$$

表5.15 上市成功與失敗的聯合機率分配表

	上市成功（A_1）	上市失敗（A_2）	
客戶喜歡（B）	$P(B \cap A_1) = 0.54$	$P(B \cap A_2) = 0.12$	$P(B) = 0.66$
客戶不喜歡（$\bar{B}$）	$P(\bar{B} \cap A_1) = 0.06$	$P(\bar{B} \cap A_2) = 0.28$	$P(\bar{B}) = 0.34$
	$P(A_1) = 0.60$	$P(A_2) = 0.40$	1.00

圖5.7 貝氏定理的樹枝圖



例5.24 某電子公司的網路卡有一特殊設計的IC, 該IC購自三個供應商A_1,A_2, A_3., 購買比例分別爲0.5, 0.3, 0.2. 根據過去的資料, A_1,A_2, A_3.產品的不良率分別爲0.04, 0.03, 0.05.

該電子公司在買入零件時並未檢驗, 而直接安裝在網路卡上, 因此若網路卡發生問題,最可能的原因是來自外購的這個IC. 現問有瑕疵的網路卡是A_2, 供應商生產的機率爲何?

Solution:

三家供應商的供應比例爲

$P(A_1)=0.5$, $P(A_2)=0.3$, $P(A_3)=0.2$

設 B_1: IC瑕疵品　　B_2: IC爲良品

已知三家供應商產品的不良率爲

$P(B_1|A_1)=0.04$, $P(B_1|A_2)=0.05$, $P(B_1|A_3)=0.03$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004

網路卡爲瑕疵品而其零件來自A_2供應商的機率表爲$P(A_2|B_1)$

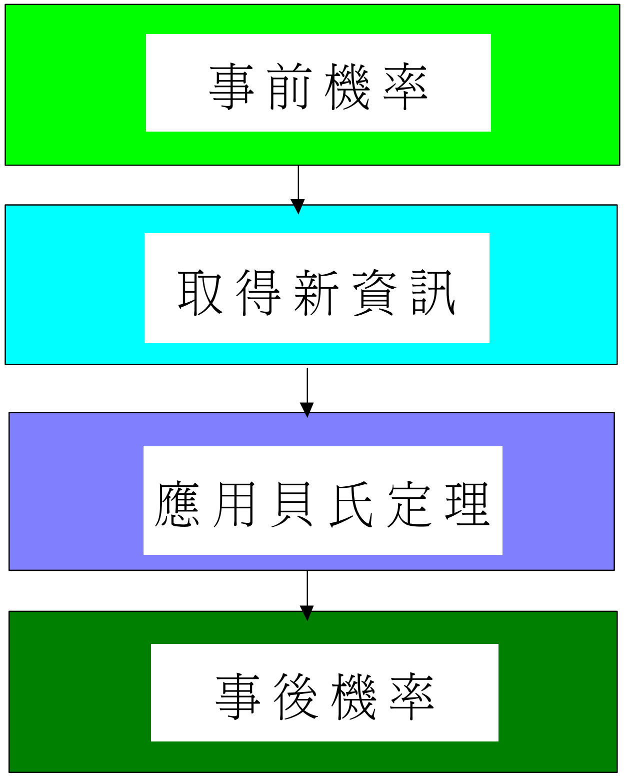
$$P(A_2 \mid B_1)=\frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(B_1)}=\frac{0.3\times 0.05}{0.041}=0.37$$

其中

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1\cap B_1)+P(A_2\cap B_1)+P(A_3\cap B_1)\\&=P(A_1)\cdot P(B_1\mid A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1\mid A_2)+P(A_3)\cdot P(B_1\mid A_3)\\&=0.5\times 0.04+0.3\times 0.05+0.2\times 0.03\\&=0.02+0.015+0.006=0.041\end{aligned}$$

故若網路卡爲瑕疵品, 則來自A_2的機率爲0.37

圖5.8 貝氏定理的應用



The system is designed to detect intruders with a probability of 0.90
Various weather conditions: clear 75%, cloudy 20%, and raining 5%

Q: Using this information to find the probability of detecting an intruder, given rainy weather condition.

Solution:

Define D to be the event that the intruder is detected by the system

$P(D)=0.90$	$P(D^c)=0.10$
$P(Clear\|D)=0.75$	$P(Clear\|D^c)=0.60$
$P(Cloudy\|D)=0.20$	$P(Cloudy\|D^c)=0.30$
$P(Rainy\|D)=0.05$	$P(Rainy\|D^c)=0.95$

$$P(Rainy \cap D)=P(D)\times P(Rainy|D)=(0.90)(0.05)=0.045$$

$$P(Rainy \cap D^c)=P(D^c)\times P(Rainy|D^c)=(0.10)(0.10)=0.01$$

$$P(D|Rainy)=\frac{P(Rainy\cap D)}{P(Rainy)}=\frac{P(Rainy\cap D)}{P(Rainy\cap D)+P(Rainy\cap D^C)}=\frac{0.045}{0.055}=0.818$$

In applying Bayes's rule, the observed event A={Rainy} and the k=2 mutually exclusive and exhaustive events are the complementary events D={intruder detected} and D^C= {intruder not detected}. Hence

$$P(D|Rainy)=\frac{P(D)P(Rainy|D)}{P(D)P(Rainy|D)+P(D^C)P(Rainy|D^C)}$$

$$=\frac{(0.90)(0.05)}{(0.90)(0.05)+(0.10)(0.10)}=0.818$$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2004