

基測和學測題目適當性探討

數學三 B93201013 蘇家寶

數學三 B93201042 沈宛瑩

怎樣算是好題目？

- 題意清楚
- 能測量出該題所要求的東西
- 需要思考而不是單純代公式的題目
- 具有教材的代表性
- 鑑別度佳

怎樣算是不好的題目？

- 題意不清
- 題幹過長
- 誤導思考方向
- 測不出該題所要求具備的能力
- 缺乏鑑別度

學科能力測驗題目分析

參考試題：九十六學年度學科能力測驗 數學考科

- 學科能力測驗的試題應以評量考生高一、高二應具備的基本數學知識、概念或方法為主。
- 整體而言，這是一份相當不錯的學測試卷。試題設計靈活，考的是基本的概念，多數試題高中生雖不陌生，但由於設計用心，整體試題具有鑑別度，可測出中上程度的考生。（平均級分較往年略低）

三個好題目

(一)

9. 坐標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑為 1 的球兩兩相切，設其球心分別為 A, B, C 。今將第四個半徑為 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心為 P ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 點 A, B, C 所在的平面和 xy 平面平行
- (2) 三角形 ABC 是一個正三角形
- (3) 三角形 PAB 有一邊長為 $\sqrt{2}$
- (4) 點 P 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{3}$
- (5) 點 P 到 xy 平面的距離為 $1+\sqrt{3}$

- 這題考的是正四面體邊長和高的關係。
- 對應 95 暫綱

二、空間中的直線與平面

1. 空間概念

1-1 空間中的直線與直線、直線與平面、和平面與平面的位置關係。

- 利用球體堆疊的空間概念來設計題目，讓題目不致於會太死板。同時使的習慣死記的考生無法很容易看穿這個題目。
- 可以評量出題評量學生平面向量與圖形的連結和空間思考能力。

(二)

11. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1，已知 $f(1)=1, f(2)=2, f(5)=5$ ，則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？

- (1) $(-\infty, 0)$ (2) $(0, 1)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(2, 5)$ (5) $(5, \infty)$

- 這題所測驗的是對於三次方程式圖形概念的了解程度。(係數與圖形的關係，所求的解在圖形上的意義。)

- 對應 95 暫綱

三、多項式

5. 多項式方程式

5-1 含代數基本定理的介紹、勘根定理和實係數多項方程式虛根成對定理。

- 先由三個點求出方程式，再進行勘根。
- 這題對觀念清楚的人可以很快的看出解題方法，而觀念不清楚的人可能就要花很多時間思考，而不知從何著手。

(三)

G. 摸彩箱裝有若干編號為 $1, 2, \dots, 10$ 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k ；乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11-k$ ($k=1, 2, \dots, 10$)。已知依甲案每摸取一球的期望值為 $\frac{67}{14}$ ，則依乙案每摸取一球的期望值為 $\frac{\textcircled{34} \textcircled{35}}{\textcircled{36} \textcircled{37}}$ 。(化成最簡分數)

- 這題是考機率和期望值的概念。
- 對應 95 暫綱
六、機率與統計 (I)
2. 機率的性質
3. 數學的期望值
- 屬於較新的題目設計方式，對於死硬背公式而觀念不清楚的學生有不小的殺傷力。
- 對觀念清楚的人，這題只需要把式子依照題意列出來，答案自然就很明顯的出現。

三個壞題目

(一)

8. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 這題是考矩陣的基本列運算能力。
- 對應 95 暫綱
 - 二、空間中的直線與平面
 - 6. 一次方程組
 - 6-1 二元、三元
 - 6-2 含高斯消去法
- 但是矩陣運算很耗時，不適合出成這種多選題，這樣意義不大。(連算 5 個同類型的矩陣運算，還要擔心計算錯誤)
- 但這題如果把它當成算三元一次聯立方程式的解，所需要的計算量就比較輕鬆。(題目誤導思考方向)

修正

- 可以設計成單一的單選題或選填題，一方面可以測得相同的能力，一方面可以減少學生的負擔，或是可以改成較有變化的矩陣運算題型。

- 利用列運算把 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 化成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$
則 $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ， $c = \underline{\quad}$ 。

(二)

E. 設 P, A, B 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓上三點，其中 P 點坐標為 $(1, 0)$ ， A 點坐標為

$(\frac{-12}{13}, \frac{5}{13})$ ，且 $\angle APB$ 為直角，則 B 點坐標為 $(\frac{\textcircled{24}}{\textcircled{26}}, \frac{\textcircled{25}}{\textcircled{27}})$ ， $(\frac{\textcircled{28}}{\textcircled{30}}, \frac{\textcircled{29}}{\textcircled{31}})$ 。(化成最簡分數)

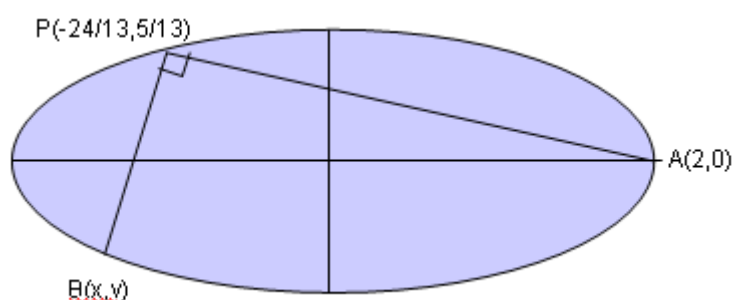
- 這題乍看之下是考向量的乘法：
兩向量夾 90 度角內積 = 0
(原題意也應該是這樣)
- 對應 95 暫綱
 - 一、向量
 - 4. 平面向量的內積
 - 4-1 含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角、點到直線的距離。

- 但是因為發生在圓上，由國中學過：
通過圓心的弦所對應的圓內角 = 90 度
可以很直接的看出答案，完全不用計算。
(連 P 點座標沒用到)

- 此題可以藉由小技巧解掉，考不出要測的能力，所以不是個好題目。

修正

- 可以把單位圓改成橢圓或其他圖形，藉此避開用技巧性方法解題。



(三)

D. 某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排(即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有 20212223 個座位。

- 這題是考數列級數的概念和運算。

- 對應 95 暫綱

二、數列與級數

1. 等差級數與等比級數

1-1 含數列與級數的基本概念

- 不過在大學學測出這種，不需要數列級數概念的國中生甚至國小生都會解的題目，應該不適合。(太簡單沒有鑑別度)

修正

- 可以出些較難的數列級數題目類型。
- 例如等比級數、差比級數，或其它級數。

$$\frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} + \frac{1}{182} + \frac{1}{210} + \frac{1}{240} = ?$$

國中基本學力測驗題目分析

參考試題：95 年第一次基本學力測驗 數學考科

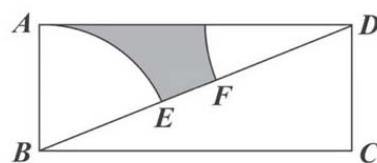
- 國中基本學力測驗以考基本觀念為主，故試題通常偏簡單。在考簡單的基本觀念中，如何活化觀念，真正的測驗學生是否掌握觀念，是一件有不容易的事。

三個好題目

(一)

15. 如圖(五)，四邊形 $ABCD$ 為長方形， \overline{BD} 為對角線。今分別以 B 、 D 為圓心， \overline{AB} 為半徑畫弧，交 \overline{BD} 於 E 、 F 兩點。若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 5\pi$ ，則圖中灰色區域的面積為何？

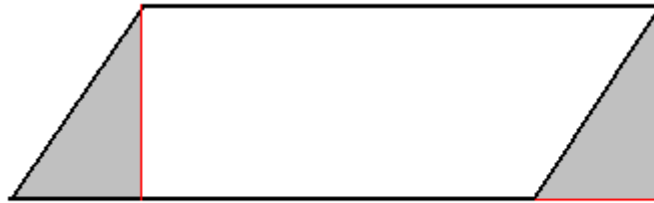
- (A) 4π
- (B) 5π
- (C) 8π
- (D) 10π



圖(五)



- 此題目測驗學生的面積概念。



灰色面積相等

對應能力指標

- 8-s-25 能理解平行四邊形的面積公式 8-s-30 能利用圓的性質解決扇形面積問題
- 基本概念變化題。

(二)

17. $(69\frac{17}{23}) \times (70\frac{6}{23}) = a + b$ ，若 a 為正整數且 $0 < b < 1$ ，則 $a = ?$

- (A) 3583
- (B) 3584
- (C) 4899
- (D) 4900

- ”平方差公式”或”分配律”的應用。

對應能力指標

- 8-a-01 能熟練二次式的乘法公式 A-2-01 能在具體情況中，理解乘法結合律、乘法對加法的分配律與其他乘除混合計算之性質，並運用於簡化計算。
- 典型題目笨拙如下：，而此題較活用。

9. 下列哪一個式子是錯誤的？

(A) $\frac{2}{25} + \frac{3}{35} + \frac{4}{45} = \frac{3}{35} + \frac{2}{25} + \frac{4}{45}$

(B) $\frac{2}{25} - \frac{3}{35} - \frac{4}{45} = \frac{2}{25} - \frac{4}{45} - \frac{3}{35}$

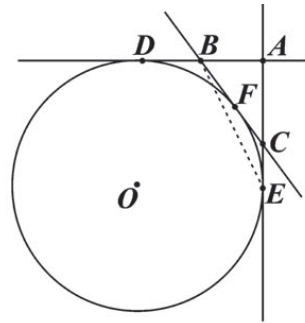
(C) $\frac{2}{25} \times \frac{3}{35} \times \frac{4}{45} = \frac{4}{45} \times \frac{3}{35} \times \frac{2}{25}$

(D) $\frac{2}{25} \div \frac{3}{35} \div \frac{4}{45} = \frac{3}{35} \div \frac{2}{25} \div \frac{4}{45}$

(三)

21. 如圖(七)， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AC}=4$ ， $\overline{BC}=5$ 。
若三直線 AB 、 AC 、 BC 分別與圓 O 切於 D 、 E 、 F 三點，
則 $\overline{BE} = ?$

- (A) 6
(B) $\frac{25}{3}$
(C) $\sqrt{45}$
(D) $\sqrt{72}$



圖(七)

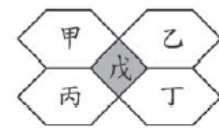
- 三角形與圓的性質的運用對應能力指標
- 7-a-11 能運用直角坐標系來標定位置
- 8-a-09 能理解勾股定理的應用
- 9-s-11 能以三角形和圓的性質為題材來學習推理
- 題目靈活，運用基本概念。
- 此題目結合 3 種以上的基本知識，畢氏定理、圓切線基本性質及一元一次方程式。
- 學生也可從其它觀念著手，如坐標概念，亦不難解決題目。

三個壞題目：

(一)

33. 如圖(廿一)，甲、乙、丙、丁為四個全等的六邊形，且緊密地圍著灰色正方形戊。若甲、乙、丙、丁、戊的每一邊長均為 1，則戊面積與甲面積的比值為何？

- (A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(D) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$



圖(廿一)

- 全等性質、幾何概念及面積。

對應能力指標

- S-2-08 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
- S-3-01 能利用幾何圖形體的性質解決簡單的幾何問題。

- 此題題目本身有誤，甲和戊之面積比值非定值。
說明：如圖(廿一)，只要固定與戊相連的邊，其它四邊均的任意調整、變形，因此導致其圖形並不唯一。
- 修正：應補充題意，使得甲這個六邊形唯一。加上六邊形之對邊平行及如下圖限定紅色線段為直線。



圖廿一之2

(二)選項不佳

2. 下列何者為 $\frac{2}{25}$ 的科學符號(即科學記號)?

- (A) 8×10^{-1}
- (B) 8×10^{-2}
- (C) 2.3×10^{-1}
- (D) 2.3×10^{-2}

對應能力指標

- N-3-13 能認識科學記號，並理解其運算規則。
- 本題選項設計不佳：4 個選項中，僅有一個選項的值與 $=0.08$ 相同，因此無法有效測得學生是否認識科學記號。應將四個選項改成其值皆與

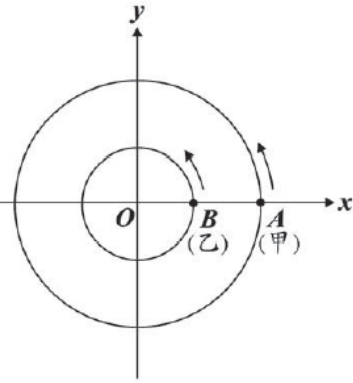
$\frac{2}{25}$ 相同，如以下選項：

- (A) 0.8×10^{-1}
- (B) 8×10^{-2}
- (C) 0.08
- (D) $\frac{2}{25}$

(三)題意不清楚

25. 如圖(十), A 、 B 兩點在 x 軸上。今甲、乙兩車分別從 A 、 B 兩點同時出發, 以逆時針方向分別繞著大、小圓周行駛。若甲車每 35 分鐘繞一圈, 乙車每 20 分鐘繞一圈, 則當乙車剛好繞完第三圈時, 甲車位於第幾象限?

- (A) 一
- (B) 二
- (C) 三
- (D) 四



圖(十)

- 此題目測驗基本的比例及直角坐標。

對應能力指標

- 7-a-11 能運用直角坐標系來標定位置
- 7-n-17 能熟練比例式的基本運算題意不清：未說明甲、乙等做速率圓周運動。因此任意解皆有可能。
以原題意來說：答案應該條件不足無法判斷。
- "本意"為甲、乙同時進行等速率運動，因此有答案(C)。
大部分學生仍可猜測其意，但仍不適當。
- 修正：本題題目應加上甲、乙同時進行等速率圓周運動，方可使題意完整。如下如圖十， A 、 B 兩點在 x 軸上。今甲、乙兩車分別從 A 、 B 兩點同時出發，以逆時針方向分別繞著大、小圓同時行駛，**做等速率圓周運動**。若甲車每 35 分鐘繞一圈，乙車每 20 分鐘繞一圈，則當乙車剛好繞完第三圈，甲車位於第幾象限？

就整份題目而言，除去爭議性的題目，題數稍多，因此難度偏簡單。但以國中基本學力測驗最初設立之目的來說，已經足夠達成目標。