從信號與系統到控制

單元：數學工具-3

多重的離散時間 三角 與 指數 函數 之總和

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論離散時間傅立葉級數計算過程中，
- 多重三角函數與指數函數總和之計算過程

離散時間三角函數

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\left[\ 1+\boxed{\sin}\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\boxed{\cos}\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\boxed{\cos}\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\ \right]$$

- 因為尤拉關係式：

$$\cos(s) = \frac{1}{2}\left(e^{js} + e^{-js}\right)$$

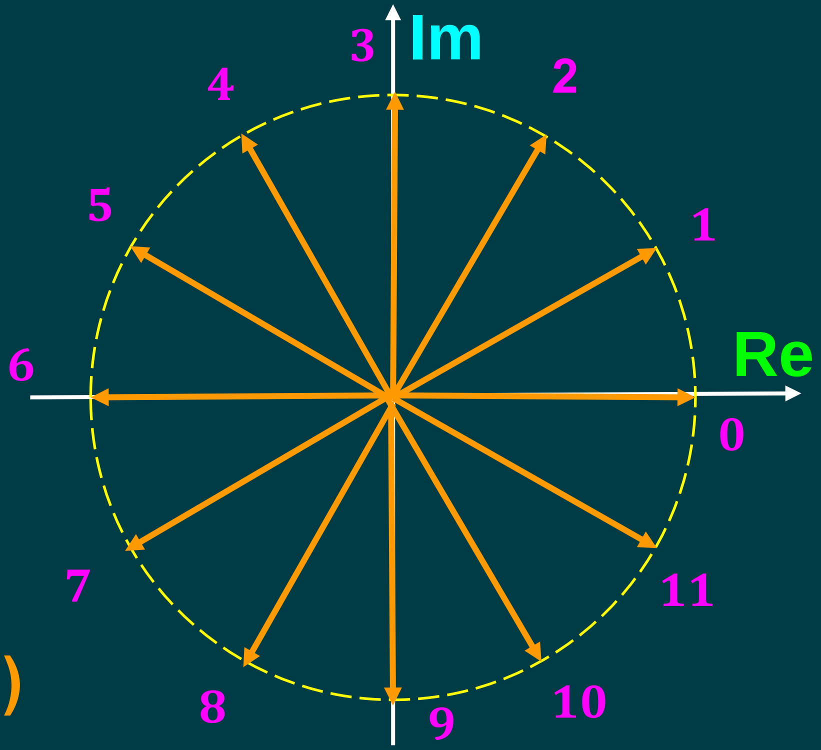
$$\sin(s) = \frac{1}{2j}\left(e^{js} - e^{-js}\right)$$

多個複數的總和

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1}} e^{jk\boxed{\frac{2\pi}{N}}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}\boxed{n}} = 0$$

$$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$$



離散時間三角函數

$$a_0 = \frac{1}{N}\boxed{\sum_{n=\langle N\rangle}}\left[\,1+\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)}\,\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) = 0$$

$$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) = 0$$

離散時間三角函數

$$a_0 = \frac{1}{N}\boxed{\sum_{n=\langle N\rangle}}\left[\boxed{1}+\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\boxed{\sum_{n=\langle N\rangle}[1]}$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\quad N$$

$$a_0 = \quad 1$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) = 0$$

離散時間三角函數

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left[1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\right]\boxed{e^{-j1w_0 n}}$$

- 因為尤拉關係式：

$$\cos(s) = \frac{1}{2}\left(e^{js} + e^{-js}\right)$$

$$\sin(s) = \frac{1}{2j}\left(e^{js} - e^{-js}\right)$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} \left[\boxed{e^{j a w_0 n}} + \boxed{e^{j b w_0 n}} \right] \boxed{e^{-j c w_0 n}}$$

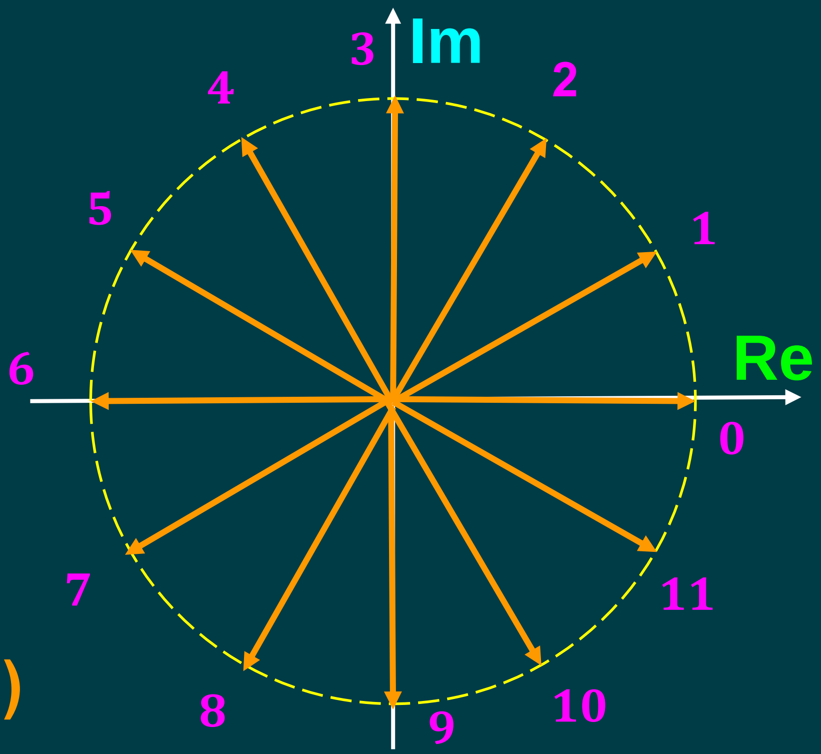
$$= \sum_{n=\langle N\rangle} \left[e^{j(a-c) w_0 n} + e^{j(b-c) w_0 n} \right]$$

多個複數的總和

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = 0$$

$$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$$



離散時間三角函數

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

$$= \sum_{n=\langle N\rangle} \left[\boxed{e^{j(a-c)w_0 n}} + \boxed{e^{j(b-c)w_0 n}} \right]$$

$$\boxed{\sum_{n=\langle N\rangle} \boxed{e^{j(k-m)w_0 n}}} \quad = \quad 0 \qquad k \neq m$$

$$= 1 + 1 + \ldots + 1 \quad = \quad N \qquad k = m$$

$$e^{j(0)w_0 n} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = 0$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left[\boxed{1}+\boxed{\sin\left(\boxed{\frac{2\pi}{N}}n\right)+3\cos\left(\boxed{\frac{2\pi}{N}}n\right)}+\cos\left(\boxed{\frac{4\pi}{N}}n+\frac{\pi}{2}\right)\right]\boxed{e^{-j1\boxed{w_0}n}}$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left[\quad \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \quad\right] e^{-j1w_0n}$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \left[\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right)} + 3\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right)} \right] e^{-j1w_0 n}$$

$$\cos(s) = \frac{1}{2}\left(e^{js} + e^{-js} \right)$$

$$\sin(s) = \frac{1}{2j}\left(e^{js} - e^{-js} \right)$$

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) + 3\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

離散時間三角函數

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\frac{1}{2j} \left(\boxed{e^{j\frac{2\pi}{N}n}} - \boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} \right) + 3\,\frac{1}{2} \left(\boxed{e^{j\frac{2\pi}{N}n}} + \boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} \right) \right]$$

$$\boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$a_1 = \frac{1}{N} \boxed{\sum_{n=\langle N \rangle}} \left[\frac{1}{2j} \left(\boxed{1} - \boxed{e^{-2j\frac{2\pi}{N}n}} \right) + 3\,\frac{1}{2} \left(\boxed{1} + \boxed{e^{-2j\frac{2\pi}{N}n}} \right) \right]$$

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\frac{1}{2j} \left(1 \qquad \right) + 3\,\frac{1}{2} \left(1 \qquad \right) \right]$$

離散時間三角函數

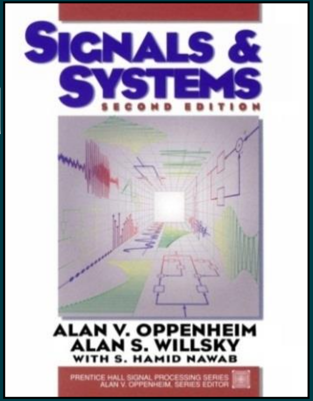
$$a_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\frac{1}{2j} \left(1 \qquad \right) + 3\frac{1}{2} \left(1 \qquad \right) \right]$$

$$a_1 = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2j} + \frac{3}{2} \right] \boxed{\sum_{n=\langle N \rangle} 1}$$

$$a_1 = \boxed{\frac{1}{N}} \left[\frac{1}{2j} + \frac{3}{2} \right] \boxed{N} = \left[\frac{1}{2j} + \frac{3}{2} \right]$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/