

# 從信號與系統到控制

## 單元：Z轉換系統-2

### Z轉換的系統性質－穩定性

授課老師：連 豐 力

# 單元學習目標與大綱

- 瞭解  $Z$  轉換操作 之下  
所衍生出來的 系統 性質與定理
  - 因果性
  - 穩定性

# 系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的定義 (Definition)
- 輸入該系統的微小的輸入信號，  
並不會產生發散的輸出信號。
- 也就是：
- 針對每一個時刻的數值是有限的輸入信號，  
所產生的輸出信號的數值大小，也是會有限的。

# 離散時間系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則



$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[n-m]$$

- 如果：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

- 當： $|x[n]| < B$  for all  $n$

- 則： $|y[n]| < M$  for all  $n$

# 離散時間系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則



$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[n-m]$$

- 如果：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

- $|z| = 1$  之時，Z轉換存在
- $|z| = 1$  在收斂區間之內

$$|z| = 1$$

# 離散時間系統的穩定性的範例

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.5} + \frac{z}{z - 2}$$

$$|z| = 0.5$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 2$$

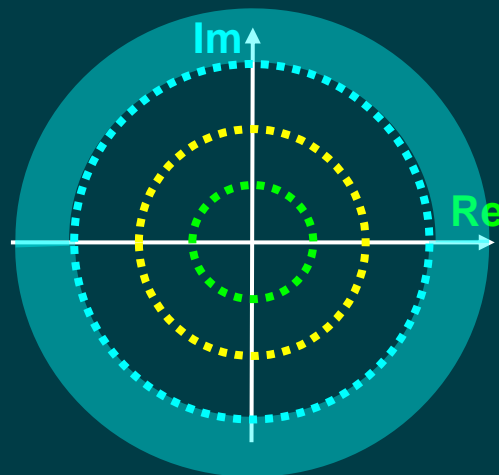
- $|z| > 2$

- $|z| = 1$  不在收斂區間之內

- 所以，不穩定的系統

$$h[n] = \boxed{0.5^n u[n]} + \boxed{2^n u[n]}$$

Diagram: A pink arrow points from the text "不穩定的系統" to the term  $0.5^n u[n]$  in the equation. Another pink arrow points from the same text to the term  $2^n u[n]$  in the equation. A pink infinity symbol  $\infty$  is placed to the right of the second term.



# 離散時間系統的穩定性的範例

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-2}$$

$$|z| = 0.5$$

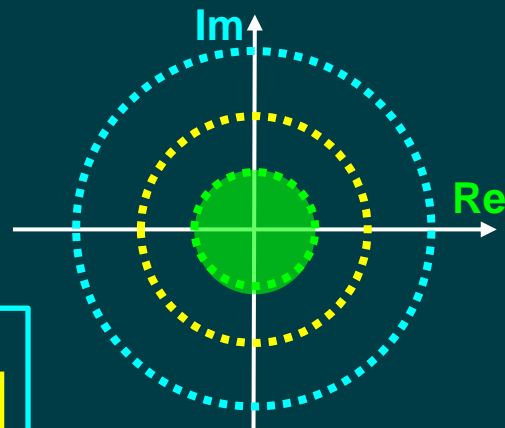
$$|z| = 1$$

$$|z| = 2$$

- $|z| < 0.5$

- $|z| = 1$  不在收斂區間之內

- 所以，不穩定的系統



$$h[n] = 0.5^n u[-n-1] + 2^n u[-n-1]$$

# 離散時間系統的穩定性的範例

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-2}$$

$$|z| = 0.5$$

$$|z| = 1$$

$$|z| = 2$$

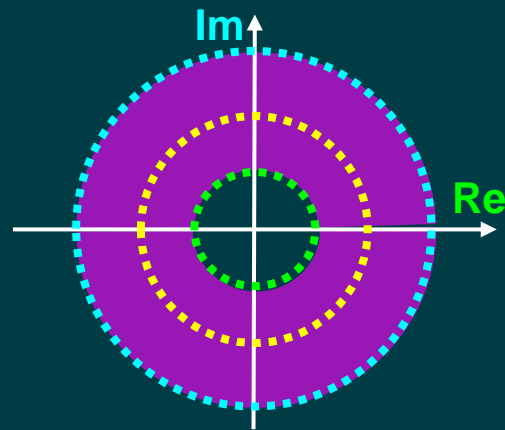
- $0.5 < |z| < 2$

- $|z| = 1$  在收斂區間之內

- 所以，穩定的系統

$$h[n] = \boxed{0.5^n u[n]} + \boxed{2^n u[-n-1]}$$

Diagram: A pink arrow points from the word "穩定" (stable) to the term  $0.5^n u[n]$ . A red arrow points from the word "穩定" to the term  $2^n u[-n-1]$ . A red '0' is placed between the two terms, with arrows pointing to it from the words "穩定" and "系統".





# 離散時間系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則



$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[n-m]$$

- 如果：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

- $|z| = 1$  之時，Z轉換存在
- $|z| = 1$  在收斂區間之內

$$|z| = 1$$

# 離散時間系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則



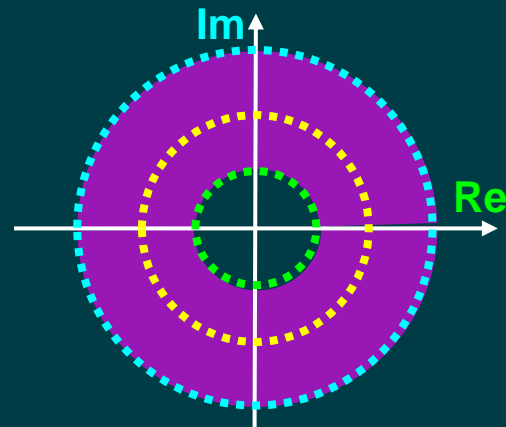
$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[n-m]$$

- 如果：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

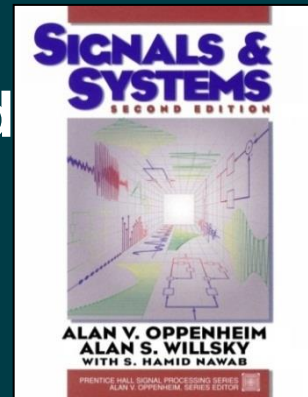
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \quad |z| = 1$$

- $|z| = 1$  (單位圓) 在收斂區間之內



# 參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid  
**Signals & Systems**,  
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**  
Open source software for numerical computation  
<http://www.scilab.org/>