從信號與系統到控制

單元：Z轉換系統-2

Z轉換 的 系統性質 – 穩定性

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 瞭解 Z轉換操作 之下
  所衍生出來的 系統 性質與定理
  - 因果性
  - 穩定性

系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的定義 (Definition)
- 輸入該系統的微小的輸入信號，
  並不會產生發散的輸出信號。
- 也就是：
- 針對每一個時刻的數值是有限的輸入信號，
  所產生的輸出信號的數值大小，也是會有限的。

離散時間系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m]$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y[n]$$

$h[n]$

- 如果： $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$
- 當： $|x[n]| < B$ for all n
- 則： $|y[n]| < M$ for all n

離散時間系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}}^{\,h[n]} \longrightarrow y[n]$$

- 如果： $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty}$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, \boxed{z^{-n}}$$

$|z| = 1$

- $|z| = 1$ 之時，Z轉換存在
- $|z| = 1$ 在收斂區間之內

離散時間系統的穩定性 的 範例

$|z| = 0.5$

$|z| = 1$

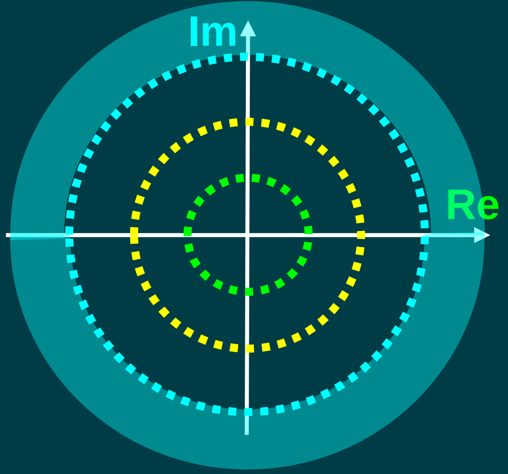
$|z| = 2$

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-2}$$

- $|z| > 2$
  - $|z| = 1$ 不在收斂區間之內
  - 所以，不穩定的系統

$0 \quad \infty$

$$h[n] = \boxed{0.5^n\, u[n]} + \boxed{2^n\, u[n]}$$



離散時間系統的穩定性 的 範例

$|z| = 0.5$

$|z| = 1$

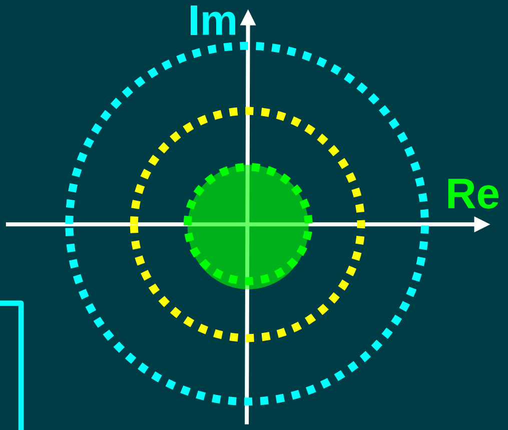
$|z| = 2$

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-2}$$

- $|z| < 0.5$
  - $|z| = 1$ 不在收斂區間之內
  - 所以，不穩定的系統

∞ 0

$$h[n] = \boxed{0.5^n\, u[-n-1]} + \boxed{2^n\, u[-n-1]}$$



離散時間系統的穩定性 的 範例

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-2}$$

$|z| = 0.5$

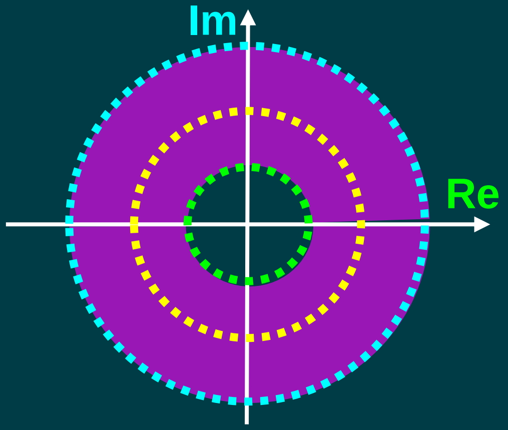
$|z| = 1$

$|z| = 2$

- $0.5 < |z| < 2$
  - $|z| = 1$ 在收斂區間之內
  - 所以，穩定的系統

0

$$h[n] = \boxed{0.5^n\, u[n]} + \boxed{2^n\, u[-n-1]}$$



離散時間系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n]$$

$h[n]$

- 如果：$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty}$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, \boxed{z^{-n}}$$

$|z| = 1$

- $|z| = 1$ 之時，Z轉換存在
- $|z| = 1$ 在收斂區間之內

離散時間系統的穩定性

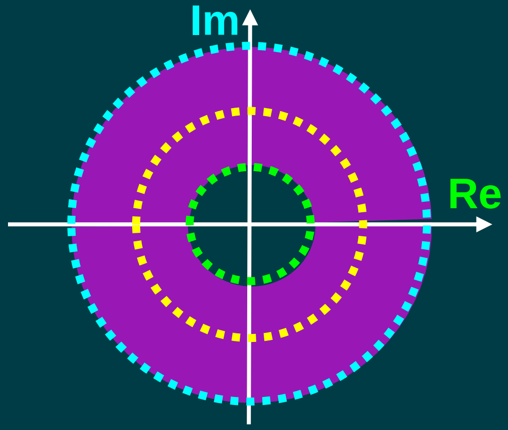
$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m]$$

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$x[n] \rightarrow \boxed{\mathrm{LTI}\ h[n]} \rightarrow y[n]$$

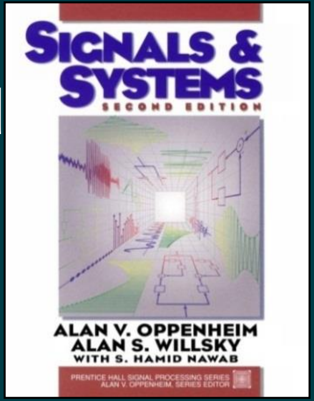
- 如果： $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[\,k\,]| < \infty}$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[\,n\,]\, z^{-n} \qquad |z| = 1$$



- $|z| = 1$ （單位圓）在收斂區間之內

參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/