從信號與系統到控制

單元：Z轉換性質-8

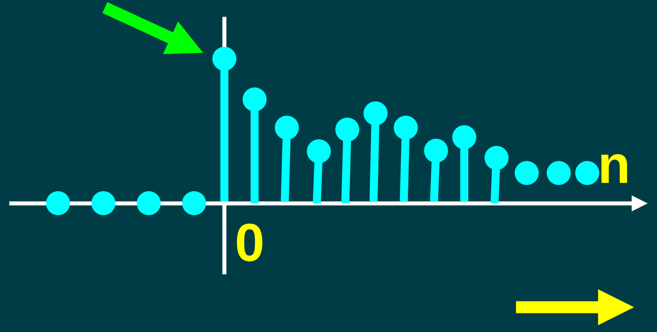
Z轉換 的 初值定理 與 終值定理

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 Z轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 的 平移 翻轉 與 擴張
  - 複數Z平面上 的變形
  - 摺積計算關係式
  - 複數Z平面 的微分
  - 初值定理 與 終值定理

初值定理 與 終值定理



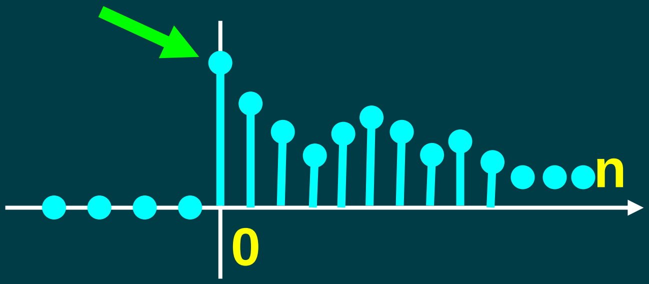
- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$
- 那麼 $\boxed{x[0]} = \lim_{\boxed{z \to \infty}} X(z)$

- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$

  而且當 $n \to \infty$， $x[n]$ 的數值存在
- 那麼 $\lim_{\boxed{n \to \infty}} x[n] = \lim_{\boxed{z \to 1}} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)$

初值定理

- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$



- 那麼 $\boxed{x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)}$

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \boxed{x[0]\, \boxed{z^{-0}}} = x[0]$$

$= 1$

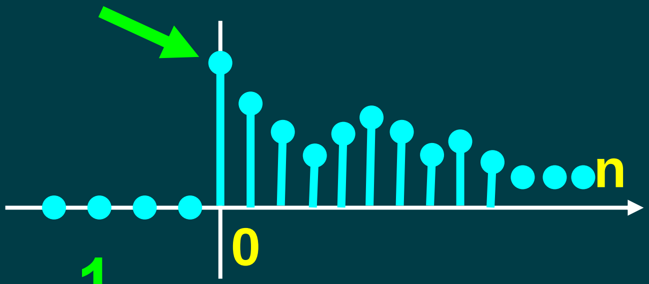
$$+\, x[1]\, \boxed{z^{-1}} \quad = 0$$

$$z \to \infty$$

$$+\, x[2]\, \boxed{z^{-2}} \quad = 0 \quad + \ldots + \, x[k]\, \boxed{z^{-k}} \quad = 0$$

終值定理

- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$
  而且當 $n \to \infty$，$x[n]$ 的數值存在



- 那麼 $\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)$

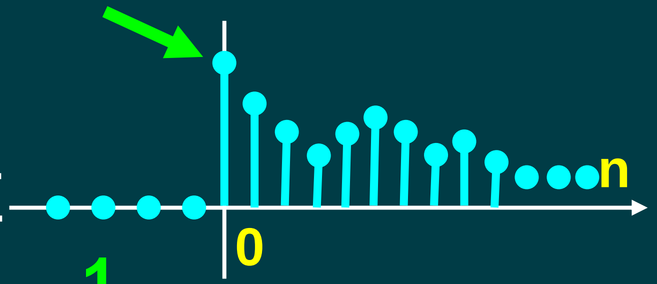
$$X(z) = x[0] + x[1]\, z^{-1} + x[2]\, z^{-2} + \dots$$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

終值定理

- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$

  而且當 $n \to \infty$，$x[n]$ 的數值存在



- 那麼 $\lim\limits_{n \to \infty} x[n] = \lim\limits_{z \to 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)$

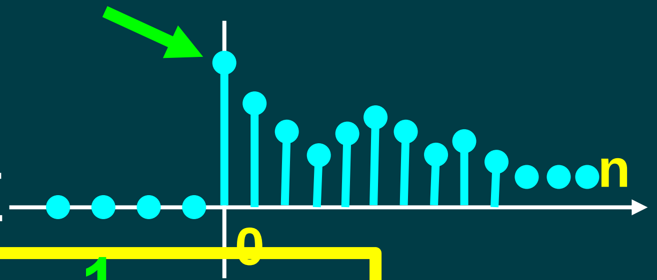
$$X(z) = x[0] + x[1]\,z^{-1} + x[2]\,z^{-2} + \dots$$

$$-\left(\frac{1}{z}\right) X(z) = -\,x[0]\,z^{-1} - x[1]\,z^{-2} - x[2]\,z^{-3} - \dots$$

$x[\infty]$

終值定理

- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$
  而且當 $n \to \infty$，$x[n]$ 的數值存在



- 那麼 $\boxed{\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)}$

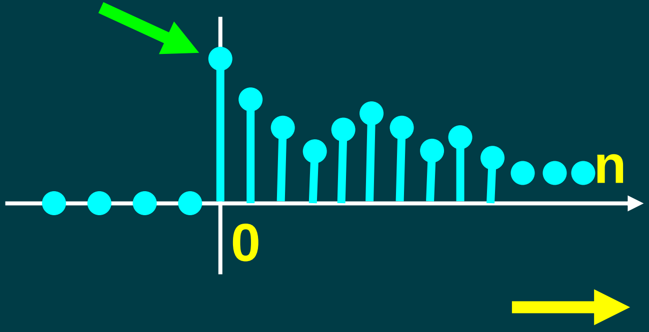
$$X(z) = x[0] + x[1]\,z^{-1} + x[2]\,z^{-2} + \cdots$$

$$-\left(\frac{1}{z}\right) X(z) = -x[0]\,\underbrace{z^{-1}}_{=1} - x[1]\,\underbrace{z^{-2}}_{=1} - x[2]\,\underbrace{z^{-3}}_{=1} - \cdots$$

$z \to 1$

$\boxed{x[\infty]}$

初值定理 與 終值定理

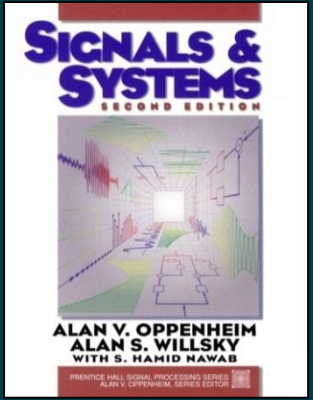


- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$
- 那麼 $\boxed{x[0]} = \lim_{z \to \infty} X(z)$

- 如果 $x[n] = 0$ for $n < 0$
  而且當 $n \to \infty$， $x[n]$ 的數值存在
- 那麼 $\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab, Signals & Systems, Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/