

從信號與系統到控制

單元：Z轉換性質-5
Z轉換的變形性質

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 Z 轉換 關係式，有下面的性質：
 - 線性組合
 - 時間軸 的 平移 翻轉 與 擴張
 - 複數 Z 平面上的變形
 - 摺積計算關係式
 - 複數 Z 平面的微分
 - 初值定理 與 終值定理

Z平面上的變形

- 如果有一個信號： $x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{ROC} = |a| R_x$$

z平面上的變形

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n x[n]) z^{-n}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

$$= X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Z平面上的變形

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n x[n]) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

ZT

$$= X\left(\frac{z}{a}\right)$$

z平面上的變形

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n x[n]) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

ZT



$$= X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\text{ROC} = |a| R_x$$

Z平面上的變形

$$\frac{1}{2\pi j} \oint \left(X\left(\frac{z}{a}\right) \right) (z)^{n-1} dz$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) (z)^{n-1} dz$$

$$\frac{z}{a} = y \quad z = a y \quad dz = a dy$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint X(y) (a y)^{n-1} a dy$$

$$= a^n \left[\frac{1}{2\pi j} \oint X(y) y^{n-1} dy \right] = a^n x[n]$$

Z平面上的變形

$$\frac{1}{2\pi j} \oint \left(X\left(\frac{z}{a}\right) \right) (z)^{n-1} dz$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) (z)^{n-1} dz$$

ZT

$$= a^n x[n]$$

Z平面上的變形

- 如果有一個信號： $x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{ROC} = |a| R_x$$

Z平面上變形的範例

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ZT

$$X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

$$|z| > \frac{1}{3}$$

$$6^n \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

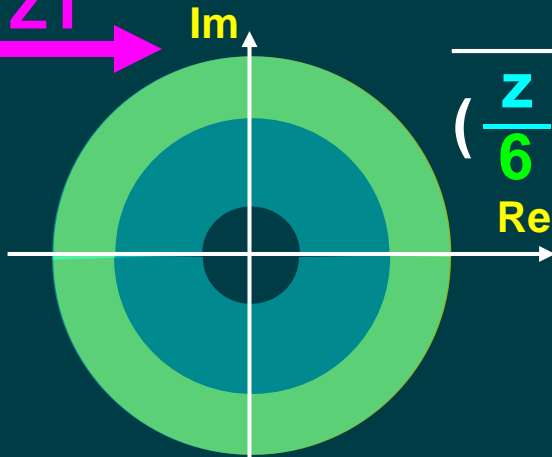
ZT

$$\frac{\frac{z}{6}}{\left(\frac{z}{6} - \frac{1}{3}\right)}$$

$$\left|\frac{z}{6}\right| > \frac{1}{3}$$

$$= \left(\frac{6}{3}\right)^n u[n]$$

$$= (2)^n u[n]$$

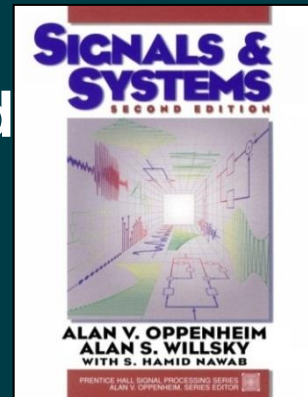


$$|z| > \frac{6}{3}$$

$$|z| > 2$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>