

# 從信號與系統到控制

單元：Z轉換性質-4  
Z轉換的擴張性質

授課老師：連 豐 力

# 單元學習目標與大綱

- 根據  $Z$  轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 的 平移 翻轉 與 擴張
  - 複數  $Z$  平面上的 變形
  - 摺積計算關係式
  - 複數  $Z$  平面 的微分
  - 初值定理 與 終值定理

# 時間軸上 平移-翻轉-擴張 性質

- 如果有一個信號： $x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) \quad \text{ROC} = R_x$$

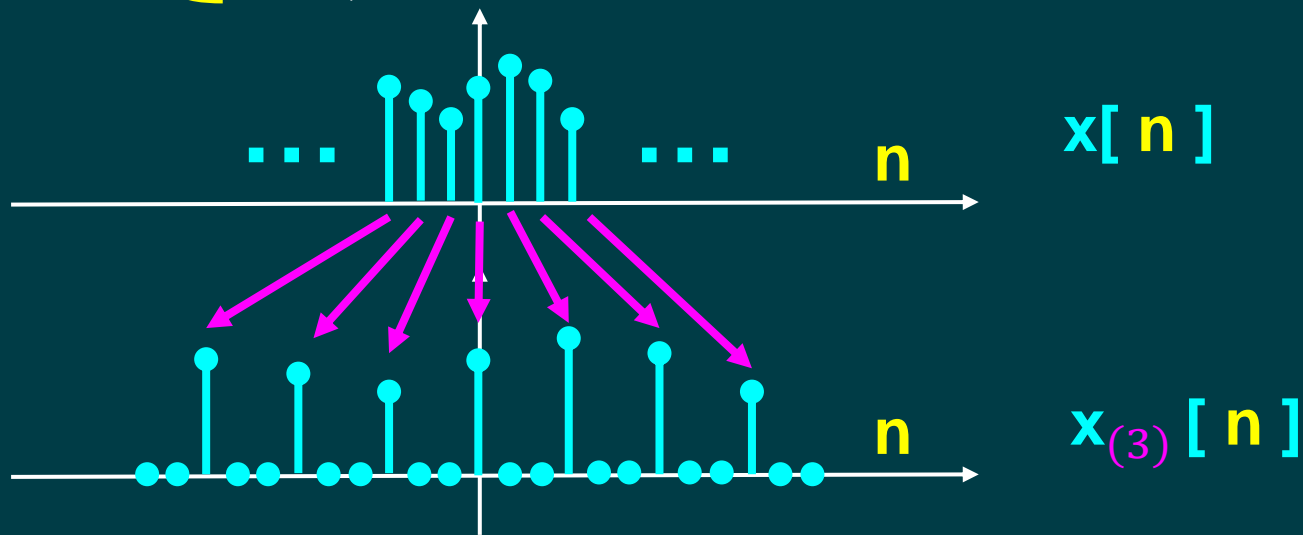
$$x[n - a] \xleftrightarrow{\text{ZT}} z^{-a} X(z) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z^k) \quad \text{ROC} = R_x \frac{1}{k}$$

# 時間軸上的擴張

$$x_{(k)}[m] = \begin{cases} x[m/k], & \text{如果 } m \text{ 是 } k \text{ 的整數倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



# 時間軸上擴張的關係式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_{(k)}[n]) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x_{(k)}[m] = \begin{cases} x[m/k], & \text{如果 } m \text{ 是 } k \text{ 的整數倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{n}{k}\right] z^{-n}$$

# 時間軸上擴張的關係式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_{(k)}[n]) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{n}{k}\right] z^{-n} \quad n = km \quad = X(z^k)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{km}{k}\right] z^{-km} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] (z^k)^{-m}$$

# 時間軸上擴張的關係式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ( \boxed{x_{(k)}[n]} ) z^{-n}$$

$$\boxed{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[n]} z^{-n}$$

ZT

$$= \boxed{X(z^k)}$$

# 時間軸上擴張的關係式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_{(k)}[n]) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

ZT

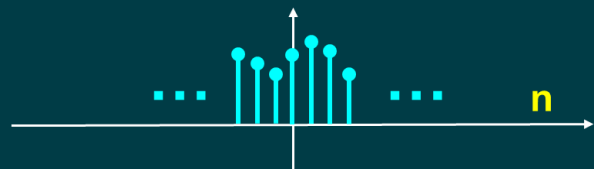
$$= X(z^k)$$

$$\text{ROC} = R_x \frac{1}{k}$$



# 時間軸上擴張的關係式

- 如果有一個信號： $x[n]$



$x[n]$



$X(z)$

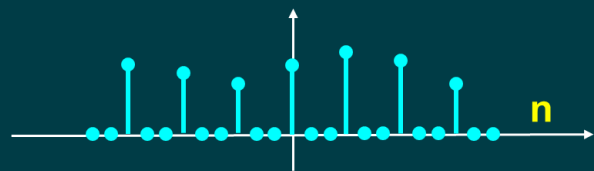
$ROC = R_x$

$x_{(k)}[n]$



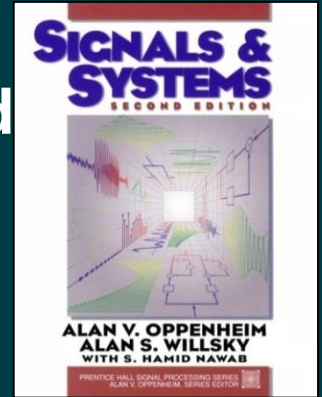
$X(z^k)$

$ROC = R_x \frac{1}{k}$



# 參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid  
**Signals & Systems**,  
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**  
Open source software for numerical computation  
<http://www.scilab.org/>