從信號與系統到控制

單元：Z轉換性質-2

Z轉換 的 平移 性質

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 Z轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 的 平移 翻轉 與 擴張
  - 複數Z平面上 的變形
  - 摺積計算關係式
  - 複數Z平面 的微分
  - 初值定理 與 終值定理

時間軸上 平移-翻轉-擴張 性質

- 如果有一個信號：$x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{ZT} X(z) \qquad ROC = Rx$$

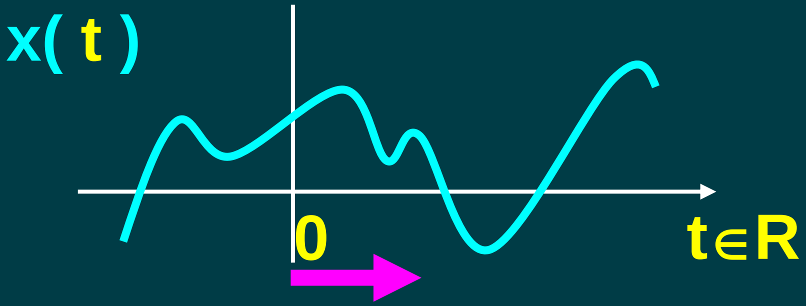
$$\boxed{x[n-a] \xleftrightarrow{ZT} z^{(-a)}\, X(z)} \qquad ROC = Rx$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{ZT} X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad ROC = \frac{1}{Rx}$$

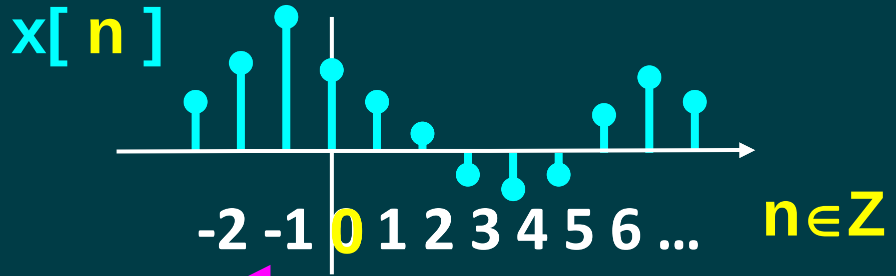
$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{ZT} X(z^{k}) \qquad ROC = Rx^{\frac{1}{k}}$$

信號在時間軸的平移

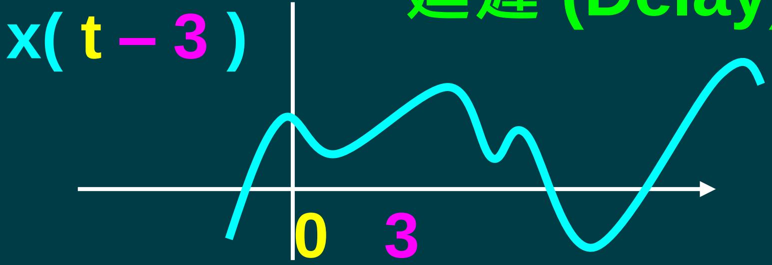
- 連續時間信號 (CT)



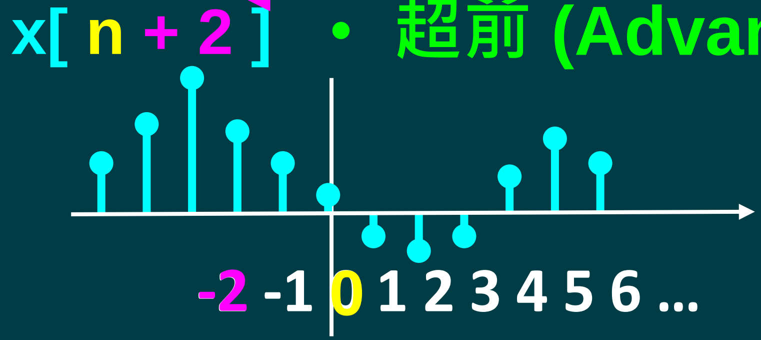
- 離散時間信號 (DT)



- 延遲 (Delay)



- 超前 (Advance)



時間軸上 平移的關係式

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[\boxed{n-a}] \right) z^{-\boxed{n}}$$

$n - a = q \quad n = q + a$

$$= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} x[q]\, z^{\boxed{-(q+a)}}$$

$$= \boxed{\sum_{q=-\infty}^{+\infty} x[q]\, z^{-q}}\ \boxed{z^{-a}} = X(z)\, z^{-a}$$

時間軸上 平移的關係式

$$\boxed{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[n]}\, z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\boxed{x[n-a]} \right) z^{-n}$$

ZT

$$= \boxed{X(z)\, z^{-a}}$$

時間軸上 平移的關係式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n-a] \right) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, z^{-n}$$

ZT

$$\cancel{\frac{(z+p)}{(z+n)(z+m)}}$$

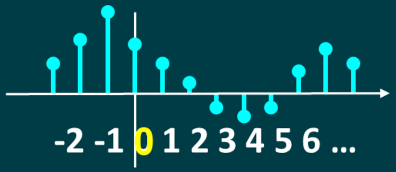
- 不會改變 X(z) 的分母的根（極點）

$$= X(z) \boxed{z^{-a}}$$

ROC = Rx

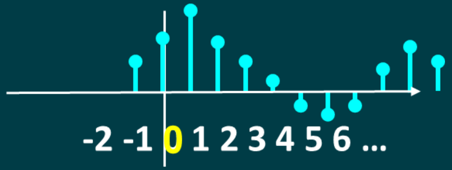
時間軸上 平移的關係式

- 如果有一個信號：$x[n]$

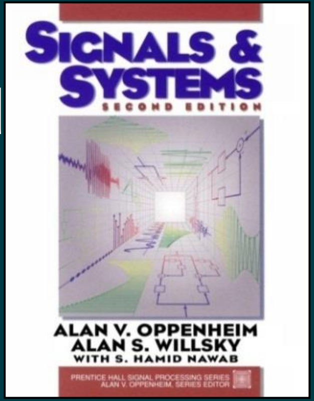


$$x[n] \xleftrightarrow{ZT} X(z) \qquad ROC = Rx$$

$$x[n-a] \xleftrightarrow{ZT} \boxed{z^{(-a)}}\, X(z) \qquad ROC = Rx$$



參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/