

# 從信號與系統到控制

單元：Z轉換性質-1

Z轉換的線性性質

授課老師：連 豐 力

# 單元學習目標與大綱

- 根據  $Z$  轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 的 平移 翻轉 與 擴張
  - 複數  $Z$  平面上的 變形
  - 摺積計算關係式
  - 複數  $Z$  平面 的微分
  - 初值定理 與 終值定理

# 線性組合的關係

- 如果有兩個信號： $x[n]$  與  $y[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$y[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} Y(z) \quad \text{ROC} = R_y$$

$$a x[n] + b y[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} a X(z) + b Y(z)$$

ROC 包含  $R_x \cap R_y$

# 線性組合的關係

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a x[n] + b y[n]) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a x[n] z^{-n} + b y[n] z^{-n}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a x[n] z^{-n}) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b y[n] z^{-n}) \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n} = a X(z) + b Y(z) \end{aligned}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

# 線性組合的關係

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a x[n] + b y[n]) z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

ZT



$$= a X(z) + b Y(z)$$

# 線性組合的關係

$$\frac{1}{2\pi j} \oint (a X(z) + b Y(z)) (z)^{n-1} dz \quad \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) (z)^{n-1} dz}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint (a X(z) z^{n-1} + b Y(z) z^{n-1}) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint a X(z) z^{n-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint b Y(z) z^{n-1} dz$$

$$= a \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz + b \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{n-1} dz = a x[n] + b y[n]$$

# 線性組合的關係

$$\frac{1}{2\pi j} \oint [a X(z) + b Y(z)] (z)^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) (z)^{n-1} dz$$

ZT

$$= a x[n] + b y[n]$$

# 線性組合的關係

- 如果有兩個信號： $x[n]$  與  $y[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$y[n] \xleftrightarrow{\text{LT}} Y(z) \quad \text{ROC} = R_y$$

$$a x[n] + b y[n] \xleftrightarrow{\text{LT}} a X(z) + b Y(z)$$

ROC 包含  $R_x \cap R_y$

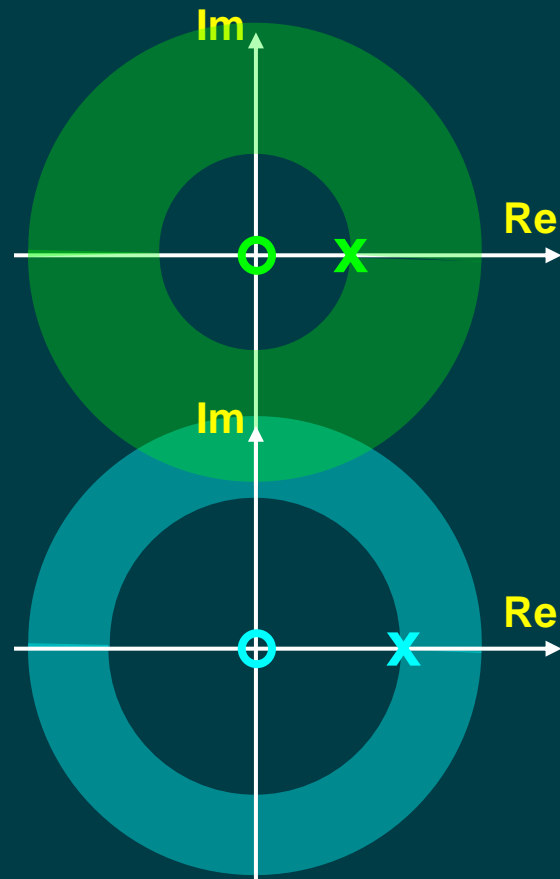


# 線性組合的範例

$$X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} Z(z) &= 7X(z) - 6Y(z) \\ &= \frac{7z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)} - \frac{6z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$



# 線性組合的範例

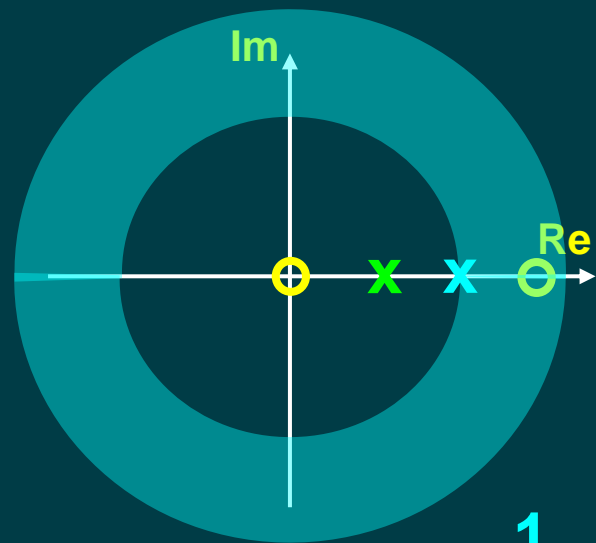
$$X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$Z(z) = 7X(z) - 6Y(z)$$

$$= \frac{7z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)} - \frac{6z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{z\left(z - \frac{3}{2}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$



# 線性組合的範例

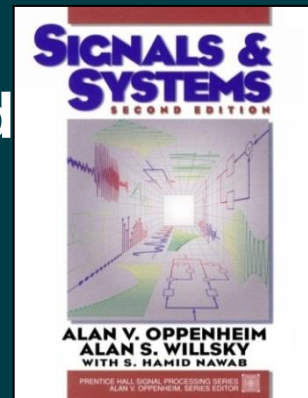
$$X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad \boxed{|z| > \frac{1}{3}} \quad \xleftrightarrow{ZT} \quad \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}$$

$$Y(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad \boxed{|z| > \frac{1}{2}} \quad \xleftrightarrow{ZT} \quad \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

$$Z(z) = 7 \boxed{X(z)} - 6 \boxed{Y(z)} \quad \xleftrightarrow{ZT} \quad 7 \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]} - 6 \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$
$$= \frac{7z \left(z - \frac{3}{2}\right) - 6z}{\left(z - \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad \boxed{|z| > \frac{1}{2}}$$

# 參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid  
**Signals & Systems**,  
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**  
Open source software for numerical computation  
<http://www.scilab.org/>