從信號與系統到控制

單元：Z轉換-5

Z轉換 的 逆轉換

授課老師： 連　豊　力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 的關係式
- 推導出 Z轉換 的 逆轉換
- 介紹 Z轉換的逆轉換 的範例

推導 Z轉換 的 逆轉換

- 根據定義： $z = r\, e^{jw}$

$$\boxed{X(r\, e^{jw})} = X(z) = \mathcal{Z}\{\, x[n] \,\} = \boxed{\mathcal{F}\{\, x[n]\,(r)^{-n} \,\}}$$

$$x[n]\,\boxed{(r)^{-n}} = \mathcal{F}^{-1}\{\, X(r\, e^{jw}) \,\}$$

$$x[n] = r^{n}\,\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{\, X(r\, e^{jw}) \,\}}$$

$$= r^{n}\, \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(r\, e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$$

推導 Z轉換 的 逆轉換

w : 2π

z : 繞一圈

$$\boxed{z = r\,e^{jw}}$$

$$dz = \boxed{r}\,j\,\boxed{e^{jw}}\,dw = \boxed{j\,z}\,dw$$

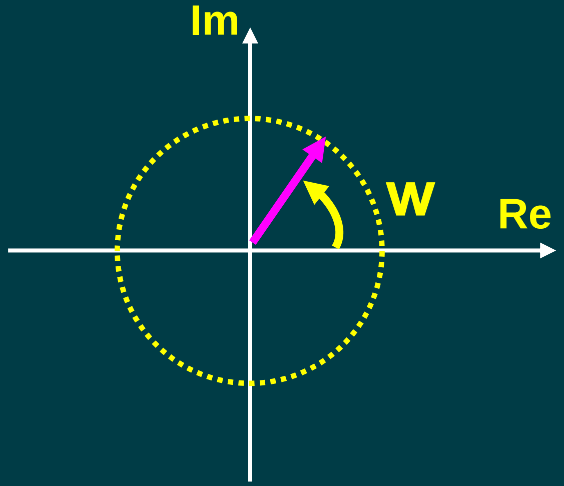
$$x[n] = \boxed{r^n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(r\,e^{jw})\,\boxed{e^{jwn}}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\boxed{\int_{2\pi}} X(\boxed{r\,e^{jw}})\,\boxed{(\boxed{r e^{jw}})^n}\,dw$$

$$(z)^n$$

$$dw = \frac{1}{j\boxed{z}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\boxed{\oint} X(z)\,\boxed{(z)^{n-1}}\,dz$$



Z轉換 與 它的 逆轉換

$$x[n] \xleftrightarrow{ZT} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\ z^{-n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \boxed{\oint X(z)\,(z)^{n-1}\,dz}$$

- 不好計算，需要在複數平面的積分

Z轉換 的 公式

$$x[n] \xleftrightarrow{ZT} X(z)$$

$$\boxed{a^n}\,\boxed{u[n]} \xleftrightarrow{ZT} \boxed{\frac{z}{z-a}} \qquad \boxed{|z| > |a|}$$

- 右邊函數（負的時間：數值為零）
- 半徑 = |a| 圓的 外部的區域

$$\boxed{-}\,\boxed{a^n}\,\boxed{u[-n-1]} \xleftrightarrow{ZT} \boxed{\frac{z}{z-a}} \qquad \boxed{|z| < |a|}$$

- 左邊函數（正的時間：數值為零）
- 半徑 = |a| 圓的 內部的區域

Z轉換 的 公式

$$a^n\, u[n] \xleftrightarrow{ZT} \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

$$-a^n\, u[-n-1] \xleftrightarrow{ZT} \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a|$$

$$X(z) = A\frac{z}{z-\boxed{a}} + B\frac{z}{z-\boxed{b}} + C\frac{z}{z-c} + \ldots$$

$$x[n] = A\boxed{a^n}\,\boxed{u[n]} - B\boxed{b^n}\,\boxed{u[-n-1]} + \ldots$$

ROC：半徑 |a| 圓外部　　　ROC： 半徑 |b| 圓內部

Z轉換 的 範例

$$X(z) = \frac{3\boxed{z}\boxed{\left(z - \frac{5}{18}\right)}}{\boxed{\left(z - \frac{1}{4}\right)}\boxed{\left(z - \frac{1}{3}\right)}}$$

$= 0$

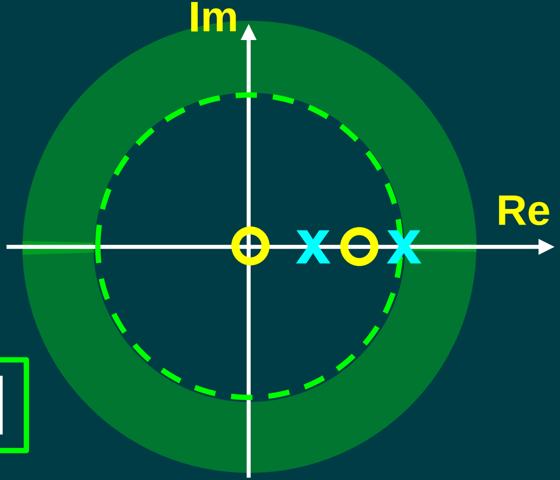
$= 0$

$$\boxed{|z| > \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{z}{\left(z - \boxed{\frac{1}{4}}\right)} + \frac{2z}{\left(z - \boxed{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \boxed{u[n]} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \boxed{u[n]}$$

- 零點： $z = 0$ $z = \frac{5}{18}$
- 極點： $z = \frac{1}{4}$ $z = \frac{1}{3}$



Z轉換 的 範例

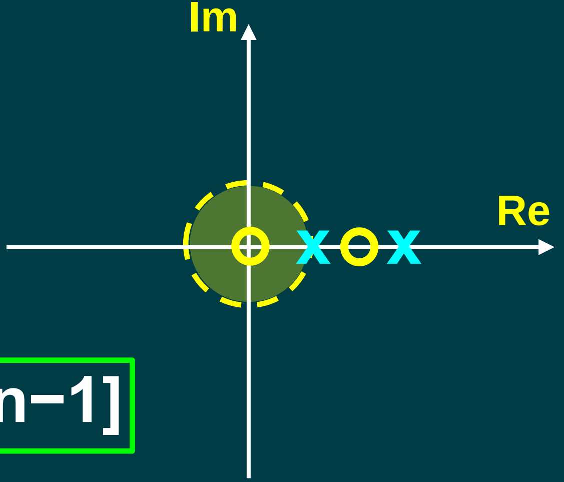
$$X(z) = \frac{3\boxed{z}\boxed{\left(z - \frac{5}{18}\right)}}{\boxed{\left(z - \frac{1}{4}\right)}\boxed{\left(z - \frac{1}{3}\right)}} \quad \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{|z| < \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{z}{\left(z - \boxed{\frac{1}{4}}\right)} + \frac{2z}{\left(z - \boxed{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \boxed{u[-n-1]} \; - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \boxed{u[-n-1]}$$

- 零點： $z = 0 \quad z = \frac{5}{18}$
- 極點： $z = \frac{1}{4} \quad z = \frac{1}{3}$



Z轉換 的 範例

$$X(z) = \frac{3\boxed{z}\boxed{\left(z-\frac{5}{18}\right)}}{\boxed{\left(z-\frac{1}{4}\right)}\boxed{\left(z-\frac{1}{3}\right)}}$$

$= 0$

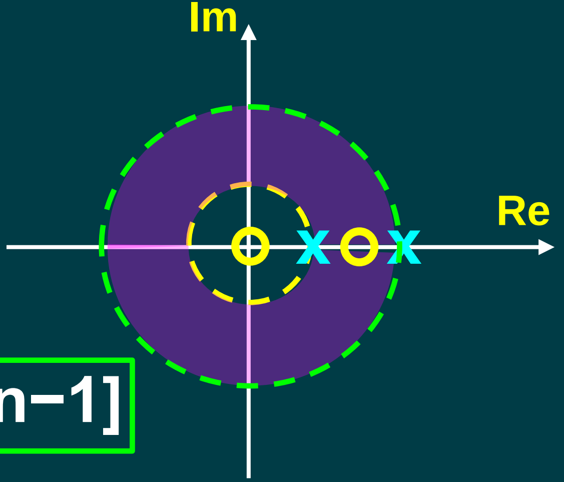
$= 0$

$$\boxed{\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{z}{\left(z-\boxed{\frac{1}{4}}\right)} + \frac{2z}{\left(z-\boxed{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \boxed{u[n]} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \boxed{u[-n-1]}$$

- 零點： $z = 0$ $\quad z = \frac{5}{18}$
- 極點： $z = \frac{1}{4}$ $\quad z = \frac{1}{3}$



Z轉換 的 公式

$$\boxed{a}^{n}\,\boxed{u[n]} \xleftrightarrow{ZT} \boxed{\frac{z}{z-a}} \qquad \boxed{|z| > |a|}$$

$$\boxed{-}\,\boxed{a}^{n}\,\boxed{u[-n-1]} \xleftrightarrow{ZT} \boxed{\frac{z}{z-a}} \qquad \boxed{|z| < |a|}$$

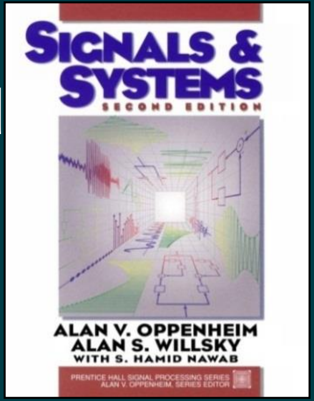
$$X(z) = A\frac{z}{z-\boxed{a}} + B\frac{z}{z-\boxed{b}} + C\frac{z}{z-c} + \ldots$$

$$x[n] = A\,\boxed{a^{n}}\,\boxed{u[n]} - B\,\boxed{b^{n}}\,\boxed{u[-n-1]} + \ldots$$

ROC： 半徑 |a| 圓外部 ROC： 半徑 |b| 圓內部

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/