

# 從信號與系統到控制

## 單元：Z轉換-3

### Z轉換範例 – 負時間指數函數

授課老師：連 豐 力

# 單元學習目標與大綱

- 根據 **Z轉換** 的公式與關係式
- 計算**負時間指數函數** 的 **Z轉換**
- 介紹 **Z轉換** 後的 **收斂區間** 特性

# 傅立葉轉換 與 Z轉換



$$r e^{j\omega} = z$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F} \{ x(t) \} \quad X(z) = \mathcal{Z} \{ x[n] \}$$

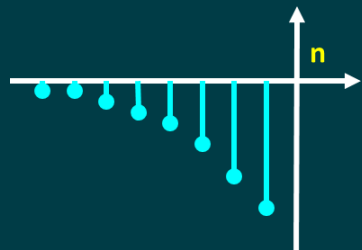
$$x[n] = \mathcal{F}^{-1} \{ X(e^{j\omega}) \} \quad x[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{ X(z) \}$$

# 負時間指數函數的 Z 轉換

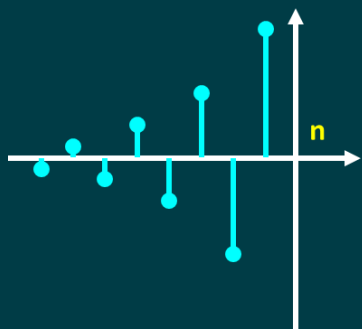
$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$|a| > 1$$

$$a > 1$$

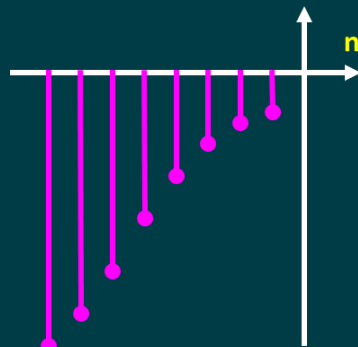


$$a < -1$$



$$|a| < 1$$

$$0 < a < 1$$



$$-1 < a < 0$$



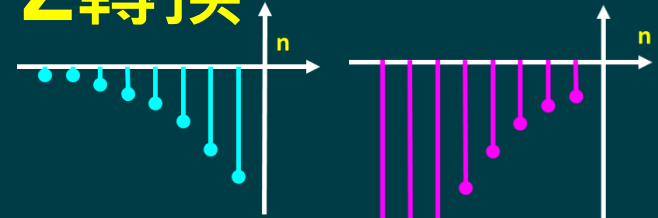
# 負時間指數函數的 Z 轉換

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

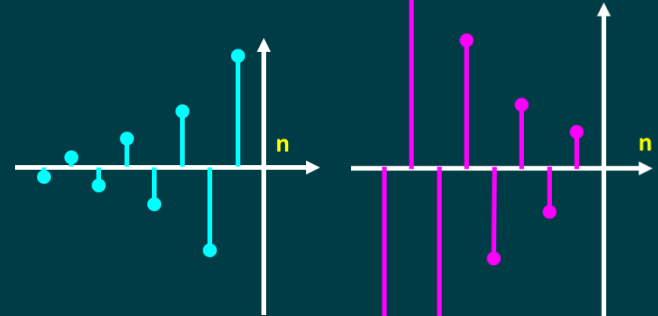
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n}$$



$|a| > 1$



$|a| < 1$

# 負時間指數函數的 Z 轉換

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \quad n \rightarrow -n \quad = - \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} z)^n \quad |a^{-1} z| < 1$$

$$= - \frac{(a^{-1} z)^1 [1 - (a^{-1} z)^{\infty}]}{1 - (a^{-1} z)}$$

# 負時間指數函數的 Z 轉換

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^{-1}z)^n [1 - (a^{-1}z)^{\infty}]$$

$$|a^{-1}z| < 1$$

$$= \frac{a^{-1}z}{(a^{-1}z) - 1} \cdot \frac{a}{a} = \frac{z}{z - a}$$

# 負時間指數函數的 Z 轉換

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{\text{ZT}} X(z) = \frac{z}{z-a}$$

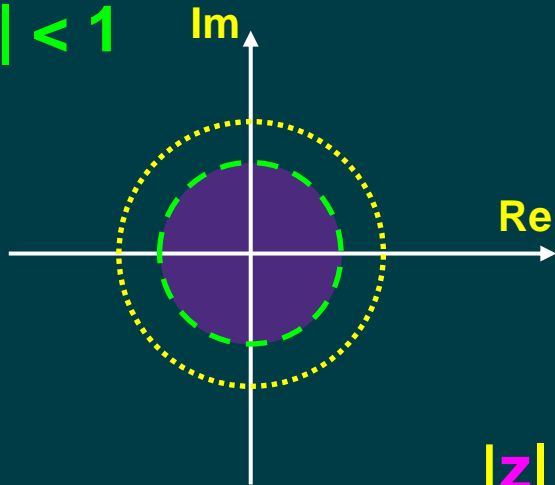
$$|z| < |a|$$

$$|a^{-1}z| < 1$$

$$|a|^{-1}|z| < 1$$

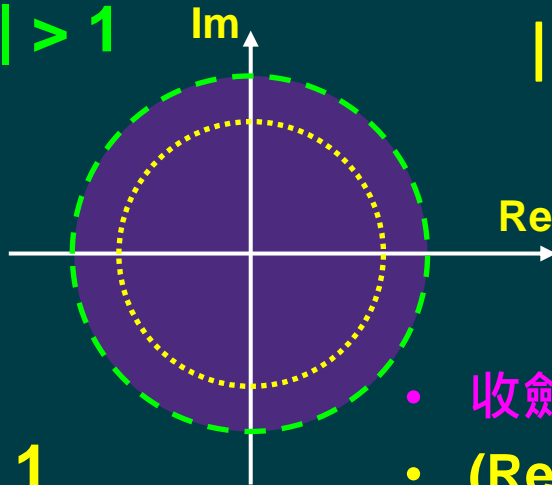
$$|z| < |a|$$

$$|a| < 1$$



$$|a| > 1$$

$$|z| = 1$$



- 收斂區間 (ROC)
- (Region of Convergence)



# Z轉換

$$x[n] = a^n u[n]$$

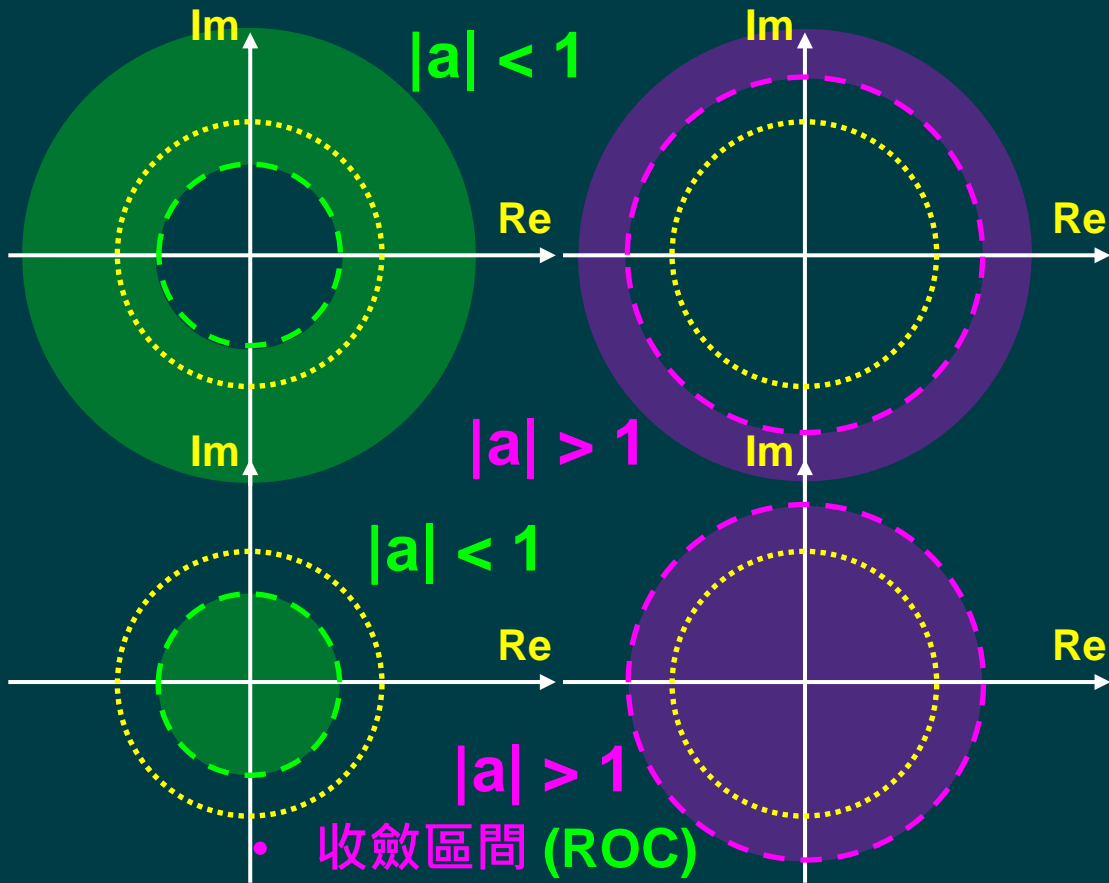
$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

→  $|z| > |a|$

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

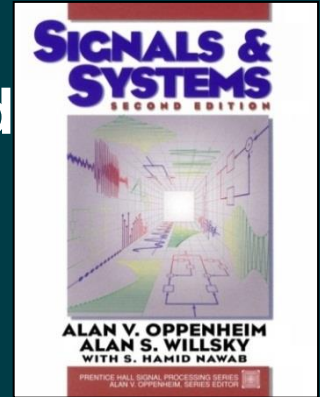
$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

→  $|z| < |a|$



# 參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid  
**Signals & Systems**,  
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**  
Open source software for numerical computation  
<http://www.scilab.org/>

# 指數函數的 Z 轉換

$$x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1$$

$$X(z) = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad |a| < 1$$

$$X(z) = \frac{z}{z - a} \quad |z| < |a|$$

