從信號與系統到控制

單元：L轉換系統-2

拉普拉斯轉換 的 系統性質 – 穩定性

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 瞭解 經由 拉普拉斯轉換操作 之下 所衍生出來的 系統 性質與定理
  - 因果性
  - 穩定性

系統的穩定性

- 穩定的系統 (Stable) 的定義 (Definition)
- 輸入該系統的微小的輸入信號，

  並不會產生發散的輸出信號。
- 也就是：
- 針對每一個時刻的數值是有限的輸入信號，

  所產生的輸出信號的數值大小，也是會有限的。

連續時間系統的穩定性

$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\,d\tau$$

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$x(t) \longrightarrow \overset{h(t)}{\boxed{\text{LTI}}} \longrightarrow y(t)$$

- 如果： $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty}$
- 當： $|x(t)| < B$ for all t
- 則： $|y(t)| < M$ for all t

連續時間系統的穩定性

$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\,d\tau$$

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}}\overset{h(t)}{} \longrightarrow y(t)$$

- 如果：$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\,t\,)|\,dt \;<\; \infty$

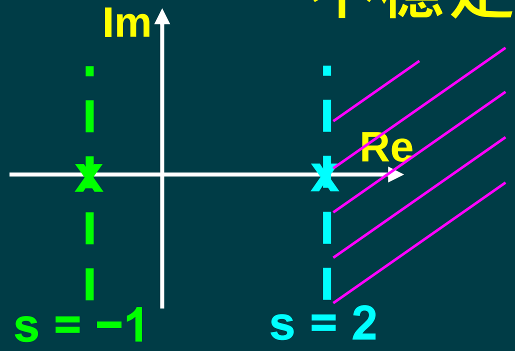
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\boxed{e^{-st}}\,dt$$

$s = 0$

- $s = 0$ 之時，拉普拉斯轉換存在
- $s = 0$ 在收斂區間之內

連續時間系統的穩定性 的 範例

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$



- 不穩定

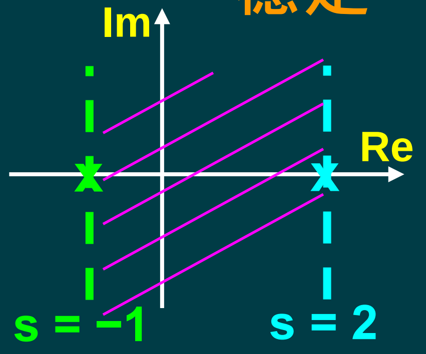
$$h(t) = \boxed{\left[\frac{2}{3}e^{-1t} + \frac{1}{3}\boxed{e^{2t}}\right]u(t)}$$

- 發散

連續時間系統的穩定性 的 範例

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

- 穩定

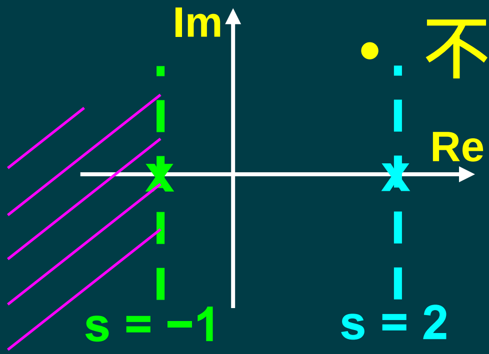


- 收斂

$$h(t) = \boxed{\frac{2}{3}\boxed{e^{-1t}\boxed{u(t)}} - \frac{1}{3}\boxed{e^{2t}\boxed{u(-t)}}}$$

連續時間系統的穩定性 的 範例

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$



- 不穩定

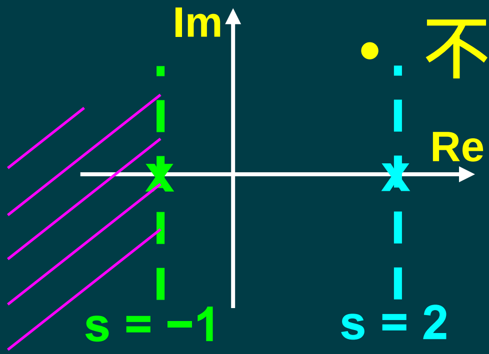
$$h(t) = \boxed{-\left[\frac{2}{3}\boxed{e^{-1t}} + \frac{1}{3}e^{2t}\right]\boxed{u(-t)}}$$

- 發散

連續時間系統的穩定性 的 範例

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

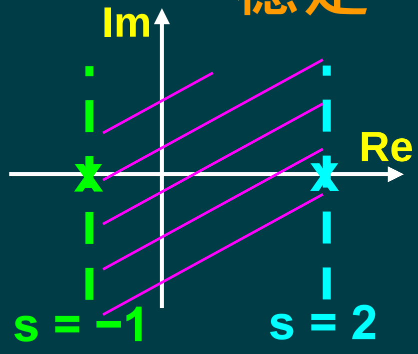
- 不穩定



$$h(t) = -\left[\frac{2}{3}e^{-1t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right]u(-t)$$

- 發散

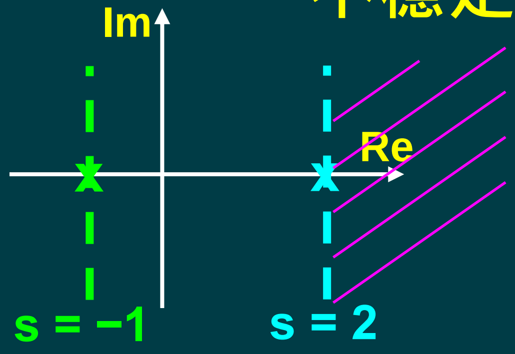
- 穩定



$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-1t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

- 收斂

- 不穩定



$$h(t) = \left[\frac{2}{3}e^{-1t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right]u(t)$$

- 發散

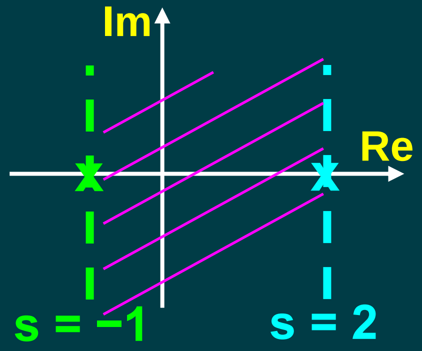
連續時間系統的穩定性

$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

- 穩定的系統 (Stable) 的主要判斷準則

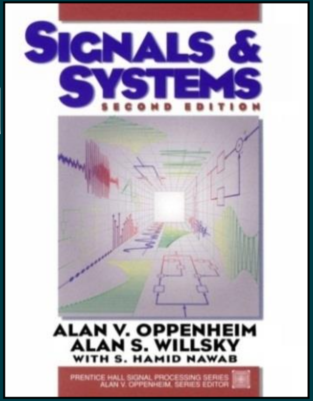
- 如果：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty}$$



- s = 0 （虛軸）在收斂區間之內

參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/