從信號與系統到控制

單元：L轉換系統-1

拉普拉斯轉換 的 系統性質 – 因果性

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 瞭解 經由 拉普拉斯轉換操作 之下 所衍生出來的 系統 性質與定理
  - 因果性
  - 穩定性

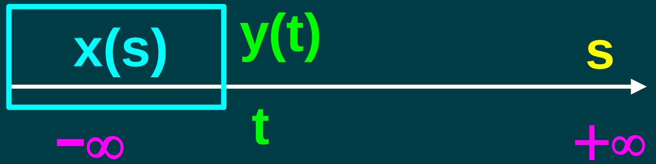
系統的因果性

- 因果性的系統 (Causal) 的定義 (Definition)
- 一個所謂的具有因果性的系統，則：
- 該系統的輸出信號只跟目前與過去的輸入信號有關。
- 也就是：
- 該系統的輸出信號跟未來的輸入信號無關。

連續時間系統的因果性

- 該系統的輸出信號跟未來的輸入信號無關。

$$x(t) \longrightarrow \underset{}{\overset{h(t)}{\boxed{\text{LTI}}}} \longrightarrow y(t)$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\boxed{+\infty}} x(\boxed{s})\, h(t-s)\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(s)\, h(t-s)\, ds + \overbrace{\int_{t}^{+\infty} x(s)\, h(t-s)\, ds}^{0}$$

連續時間系統的因果性

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\,h(t-s)\,ds + \int_{t}^{+\infty} x(s)\,\underbrace{h(t-s)}_{0}\,ds$$

$$h(t-s) = 0 \qquad \text{for} \quad s > t$$

$$t - s = v \qquad\qquad s = t - v$$

$$h(v) = 0 \qquad \text{for} \quad v < 0$$

連續時間系統的因果性

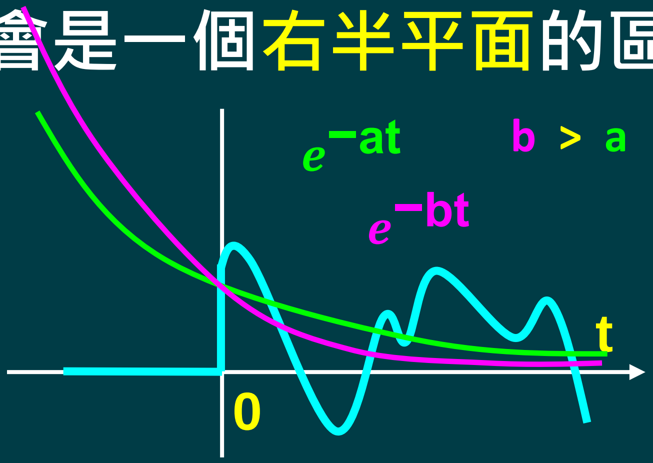
- 因果性的系統 (Causal) 的定理 (Theorem)
- 一個線性非時變的系統，
  如果有下面的性質的話，則為具有因果性的系統：

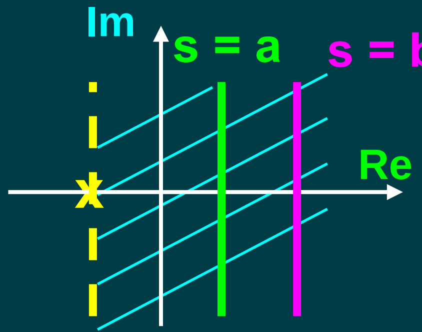
  脈衝響應： $h(t) = 0 \quad \text{for} \quad t < 0$
- 也就是說：這個系統剛開始的初始狀態是休息的狀態
- 也可以這樣說：$h(t)$ 是一個 往右邊 有數值 的函數

連續時間系統的因果性

- 對於一個具有因果性的系統 (Causal System)
- 其系統脈衝響應 h(t) 的拉普拉斯轉換 H(s) 的收斂區間
- 會是一個右半平面的區間

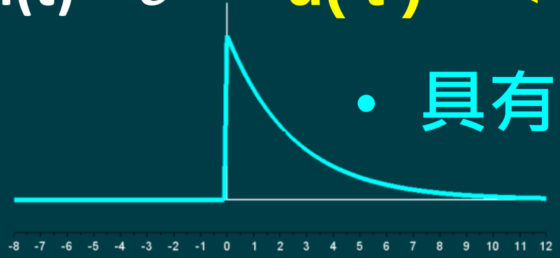
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \boxed{e^{-st}}\, dt$$



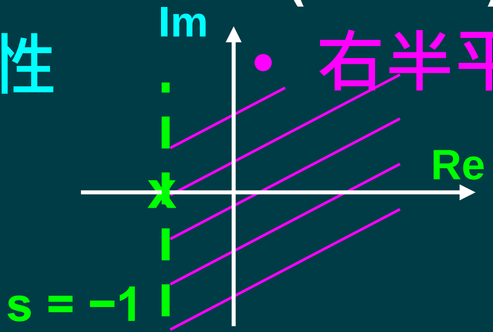


連續時間系統的因果性 的 範例

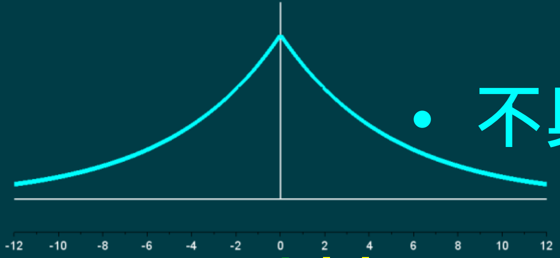
$h(t) = e^{-1t}\,u(t) \xleftrightarrow{LT} H(s) = \dfrac{1}{(s+1)}$ $\quad Re\{s\} > -1$



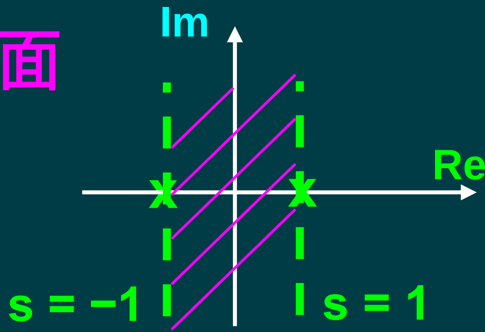
• 具有因果性



• 右半平面



• 不具因果性



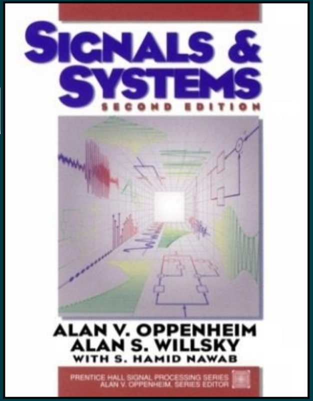
• 不會是右半平面

$-1 < Re\{s\} < 1$

$h(t) = e^{-1\,|t|} \xleftrightarrow{LT} H(s) = \dfrac{-2}{(s+1)(s-1)}$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/