從信號與系統到控制

單元：L轉換性質-6

拉普拉斯轉換 的 初值定理 與 終值定理

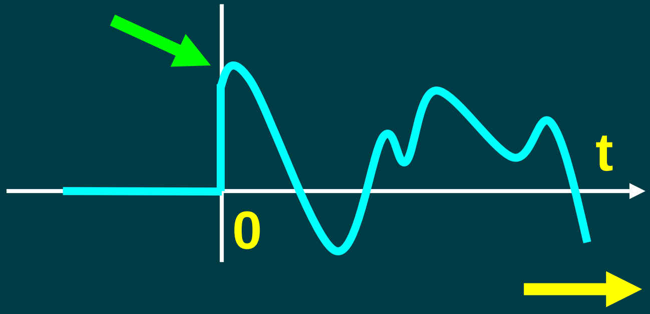
授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 拉普拉斯轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 與 複數平面 的 平移
  - 時間軸 的 擴張壓縮 與 複數平面上 的 變形
  - 摺積計算關係式
  - 微分 與 積分
  - 初值定理 與 終值定理

初值定理 與 終值定理

- 如果 $x(t) = 0 \quad \text{for} \quad t < 0$
- 那麼 $\boxed{x(0^+)} = \lim_{\boxed{s \to \infty}} s\,X(s)$



- 如果 $x(t) = 0 \quad \text{for} \quad t < 0$

  而且當 $t \to \infty$， $x(t)$ 的數值存在

- 那麼 $\lim_{\boxed{t \to \infty}} x(t) = \lim_{\boxed{s \to 0}} s\,X(s)$

初值定理 與 終值定理

$$L\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = \int_{\boxed{-\infty}}^{\infty} \frac{d}{dt}\boxed{x(t)}\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0+}^{\infty} \boxed{\frac{d}{dt}x(t)}\, \boxed{e^{-st}}\, dt \qquad \boxed{(-s)}\, e^{-st}$$

$$= x(t)\, e^{-st} \Big|_{0+}^{\infty} \boxed{-} \int_{0+}^{\infty} x(t)\left(\boxed{\frac{d}{dt} e^{-st}}\right) dt$$

$$= [\; 0 - x(0+) \;] + s \int_{0+}^{\infty} x(t)\, (\, e^{-st})\, dt$$

初值定理 與 終值定理

$$L\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = [\,0 - x(0+)\,] + s\boxed{\int_{0+}^{\infty} x(t)\,(e^{-st})\,dt}$$

$$= -x(0+) + s\,X(s)$$

$$= s\,X(s) - x(0+)$$

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)\,e^{-st}\,dt = s\,X(s) - x(0+)$$

初值定理 與 終值定理

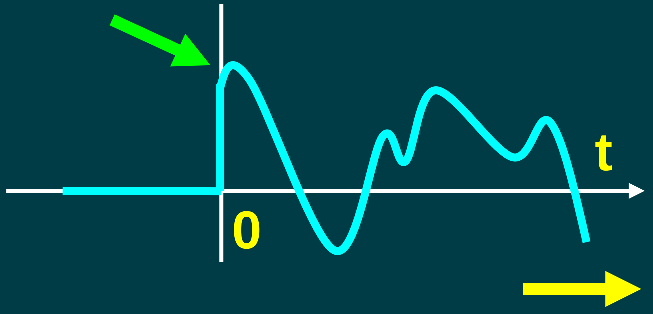
$$\lim_{s \to \infty} \int_{0+}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t)\, \cancelto{0}{e^{-st}}\, dt = \lim_{s \to \infty} s\,X(s) - x(0+)$$

$$\boxed{\lim_{s \to \infty} s\,X(s) = x(0+)}$$

$$\lim_{s \to 0} \int_{0+}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t)\, \cancelto{1}{e^{-st}}\, dt = \boxed{\lim_{s \to 0} s\,X(s)} - \cancel{x(0+)}$$

$$= x(t) \Big|_{0+}^{\infty} = \boxed{\lim_{t \to \infty} x(t)} - \cancel{x(0+)}$$

初值定理 與 終值定理



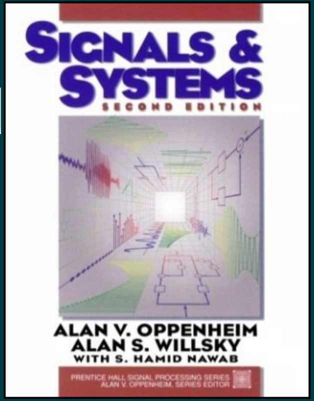
- 如果 $x(t) = 0$ for $t < 0$
- 那麼 $\boxed{x(0+) = \lim_{s \to \infty} s\,X(s)}$

- 如果 $x(t) = 0$ for $t < 0$

  而且當 $t \to \infty$， $x(t)$ 的數值存在

- 那麼 $\boxed{\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s\,X(s)}$

參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/