從信號與系統到控制

單元：L轉換性質-5

拉普拉斯轉換 的 微分-積分 性質

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 拉普拉斯轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 與 複數平面 的 平移
  - 時間軸 的 擴張壓縮 與 複數平面上 的 變形
  - 摺積計算關係式
  - 微分 與 積分
  - 初值定理 與 終值定理

微分與積分的關係式

- 如果有一個信號：x(t)

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s) \qquad \text{ROC} = Rx$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{LT} s\,X(s) \qquad \text{ROC 包含 } Rx$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(q)\,dq \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}X(s) \qquad \text{ROC 包含 } Rx \cap Re\{s\}>0$$

$$(-t)\,x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds}X(s) \qquad \text{ROC} = Rx$$

微分的關係式

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{LT} s\,X(s) \qquad \text{ROC 包含 } R_x$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty} X(s)\,\boxed{e^{st}}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty} X(s)\,\boxed{\frac{d}{dt}e^{st}}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty} X(s)\,s\,e^{st}\,ds$$

微分的關係式

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{LT} s\ \ X(s) \qquad \text{ROC 包含 } R_x$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t)} = \frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty} \boxed{X(s)\ \ s}\ e^{st}\, ds$$

LT

微分的關係式

$$(-t)\,x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{d}{ds} X(s) \qquad \text{ROC} = R_x$$

$$\frac{d}{ds} X(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \boxed{e^{-st}}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \boxed{\frac{d}{ds} e^{-st}}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, (-t)\, e^{-st}\, dt$$

微分的關係式

$$(-t)\,x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{d}{ds} X(s) \qquad \text{ROC} = \text{Rx}$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} X(s)} \xleftrightarrow{\text{LT}} \;= \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)\;(-t)}\, e^{-st}\, dt$$

積分的關係式

$$\int_{-\infty}^{t} x(q)\,dq \overset{LT}{\longleftrightarrow} \boxed{\frac{1}{s}}\,X(s)$$

ROC 包含
$R_x \cap \boxed{Re\{s\}>0}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(q)\,dq} = x(t) * u(t)$$

$$\overset{LT}{\Big\updownarrow}$$

$$X(s) \cdot U(s) = \boxed{X(s) \cdot \frac{1}{s}}$$

微分與積分的關係式

- 如果有一個信號：x(t)

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s) \qquad \text{ROC} = R_x$$

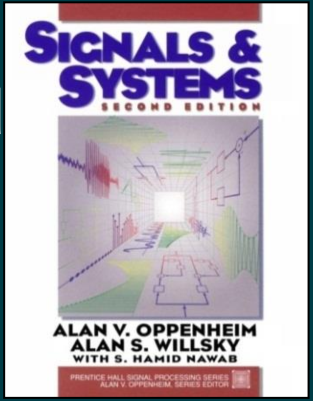
$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{LT} s\,X(s) \qquad \text{ROC 包含 } R_x$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(q)\,dq \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}X(s) \qquad \text{ROC 包含 } R_x \cap \mathcal{Re}\{s\}>0$$

$$(-t)\,x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds}X(s) \qquad \text{ROC} = R_x$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/