

從信號與系統到控制

單元：L轉換性質-5

拉普拉斯轉換 的 微分-積分 性質

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據拉普拉斯轉換關係式，有下面的性質：
 - 線性組合
 - 時間軸與複數平面的平移
 - 時間軸的擴張壓縮與複數平面上的變形
 - 摺積計算關係式
 - 微分與積分
 - 初值定理與終值定理

微分與積分的關係式

- 如果有一個信號： $x(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} s X(s) \quad \text{ROC 包含 } R_x$$

$$\int_{-\infty}^t x(q) dq \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s} X(s) \quad \text{ROC 包含 } R_x \cap \text{Re}\{s\} > 0$$

$$(-t) x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{d}{ds} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

微分的關係式

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} s X(s) \quad \text{ROC 包含 } \text{Re}\{s\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \frac{d}{dt} e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) s e^{st} ds \end{aligned}$$

微分的關係式

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} s X(s) \quad \text{ROC 包含 } R_x$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} x(t)} \xleftrightarrow{\text{LT}} \int_{r-j\infty}^{r+j\infty} \boxed{X(s) s} e^{st} ds$$

The diagram illustrates the Laplace Transform (LT) relationship for differentiation. It shows the time-domain derivative $\frac{d}{dt} x(t)$ (enclosed in a blue box) transforming to the frequency-domain expression $s X(s)$ (where $X(s)$ is also enclosed in a blue box). The Region of Convergence (ROC) for the transformed function is stated as containing the original ROC, R_x . A second part of the diagram shows the inverse Laplace Transform of the boxed $s X(s)$ term, resulting in the integral expression $\int_{r-j\infty}^{r+j\infty} X(s) s e^{st} ds$, where the integrand $X(s) s$ is enclosed in a blue box.

微分的關係式

$$(-t) x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{d}{ds} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} X(s) &= \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-s t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-s t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-t) e^{-s t} dt \end{aligned}$$

微分的關係式

$$(-t) x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{d}{ds} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$\frac{d}{ds} X(s)$$

$$\xleftrightarrow{\text{LT}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-t) e^{-s t} dt$$

積分的關係式

$$\int_{-\infty}^t x(q) dq \xleftrightarrow{\text{LT}} \boxed{\frac{1}{s}} X(s)$$

ROC 包含
 $R_x \cap \boxed{\text{Re}\{s\} > 0}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(q) dq} = x(t) * u(t)$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \text{LT} \\ X(s) \cdot U(s) = \boxed{X(s) \cdot \frac{1}{s}} \end{array}$$

微分與積分的關係式

- 如果有一個信號： $x(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

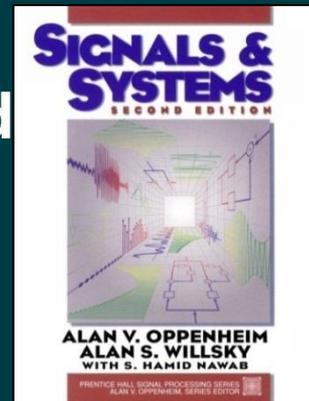
$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} s X(s) \quad \text{ROC 包含 } R_x$$

$$\int_{-\infty}^t x(q) dq \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s} X(s) \quad \text{ROC 包含 } R_x \cap \text{Re}\{s\} > 0$$

$$(-t) x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{d}{ds} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>