

從信號與系統到控制

單元：L轉換性質-4

拉普拉斯轉換的摺積性質

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 拉普拉斯轉換 關係式，有下面的性質：
 - 線性組合
 - 時間軸 與 複數平面的 平移
 - 時間軸 的 擴張壓縮 與 複數平面上的 變形
 - 摺積計算關係式
 - 微分 與 積分
 - 初值定理 與 終值定理

摺積計算關係式

- 如果有兩個信號： $x(t)$ 與 $y(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} Y(s) \quad \text{ROC} = R_y$$

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \cdot Y(s)$$

ROC 包含 $R_x \cap R_y$

從摺積計算開始

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) y(t-q) dq$$

$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) y(t-q) dq e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) y(t-q) e^{-st} dt dq$$

從摺積計算開始

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(q)} y(t-q) e^{-st} dt dq$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) \int_{-\infty}^{\infty} y(\boxed{t-q}) e^{-\boxed{st}} \boxed{dt} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) \int_{-\infty}^{\infty} y(r) \boxed{e^{-s(r+q)}} dr dq$$

$t - q = r \quad t = r + q \quad dt = dr$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) \int_{-\infty}^{\infty} y(r) e^{-sr} e^{-sq} dr dq$$

從摺積計算開始

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) \int_{-\infty}^{\infty} y(r) e^{-sr} e^{-sq} dr dq$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) e^{-sq} \int_{-\infty}^{\infty} y(r) e^{-sr} dr dq$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) e^{-sq} Y(s) dq$$

$$= Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) e^{-sq} dq$$

從摺積計算開始

$$Z(s) = Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) e^{-sq} dq$$

LT

$$= Y(s) \bullet X(s)$$

LT

$$z(t) = y(t) * x(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

摺積計算關係式

- 如果有兩個信號： $x(t)$ 與 $y(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

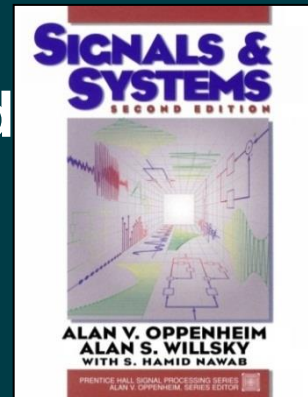
$$y(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} Y(s) \quad \text{ROC} = R_y$$

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \cdot Y(s)$$

ROC 包含 $R_x \cap R_y$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>