

從信號與系統到控制

單元：L轉換性質-3

拉普拉斯轉換的變形性質

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

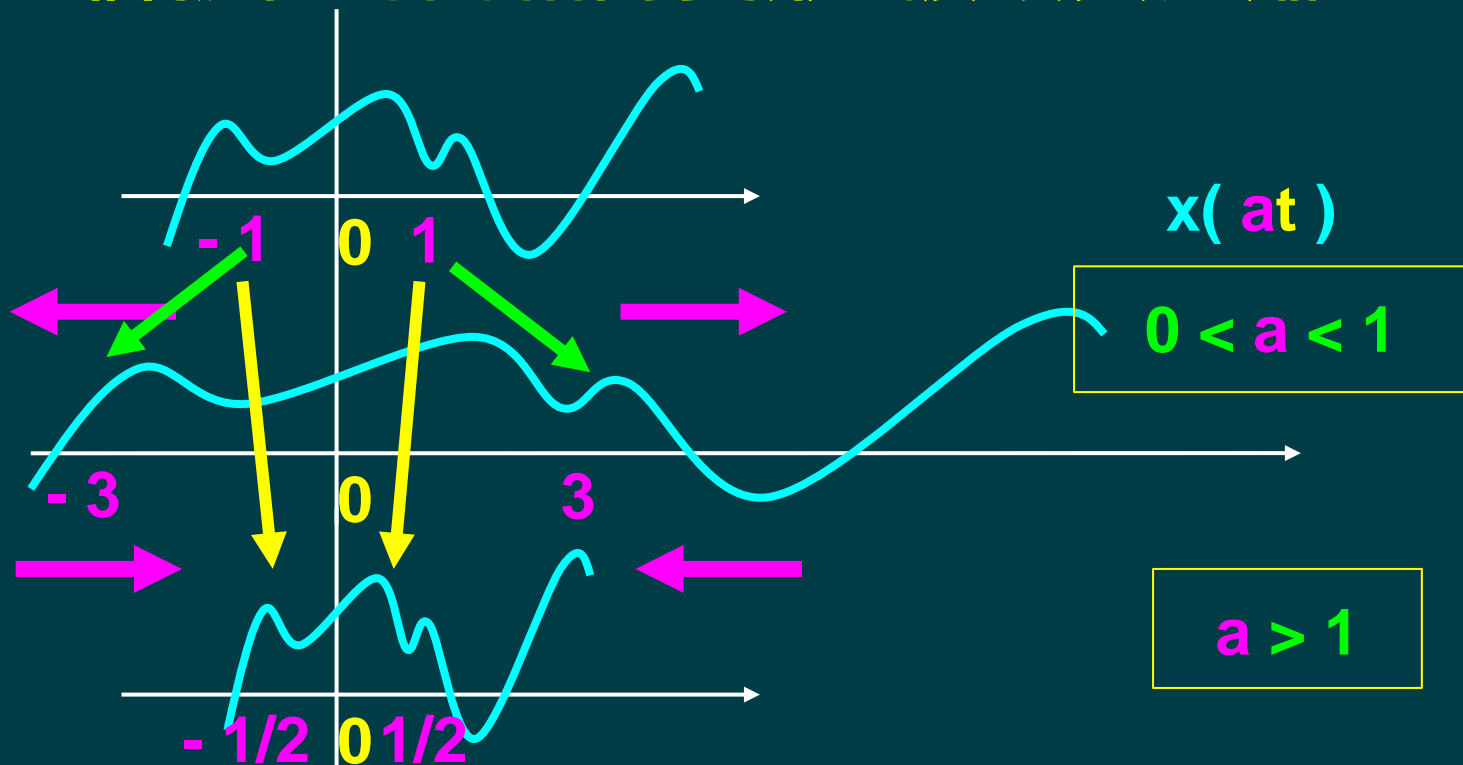
- 根據拉普拉斯轉換關係式，有下面的性質：
 - 線性組合
 - 時間軸與複數平面的平移
 - 時間軸的擴張壓縮與複數平面上的變形
 - 摺積計算關係式
 - 微分與積分
 - 初值定理與終值定理

信號在時間軸的變形- 擴張與壓縮

$x(t)$

$x(1/3 t)$

$x(2 t)$



時間軸的擴張與壓縮關係

- 如果有一個信號： $x(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$x(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC} = a R_x$$

時間軸的擴張與壓縮關係

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-st} dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$at = q \quad t = \frac{1}{a} q \quad dt = \frac{1}{a} dq$$

$a > 0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(q) e^{-s \frac{1}{a} q} \frac{1}{a} dq$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(q) e^{-\frac{s}{a} q} dq = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

時間軸的擴張與壓縮關係

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-st} dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$at = q \quad t = \frac{1}{a} q \quad dt = \frac{1}{a} dq$$

$a < 0$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x(q) e^{-s \frac{1}{a} q} \frac{1}{a} dq$$

$$= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(q) e^{-\frac{s}{a} q} dq = -\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

時間軸的擴張與壓縮關係

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(at)} e^{-st} dt$$

$$\boxed{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)} e^{-st} dt$$

LT

$$\boxed{a > 0}$$

$$= \boxed{\frac{1}{a}} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\boxed{a < 0}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{a}} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

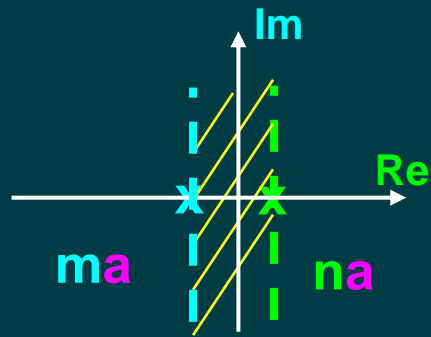
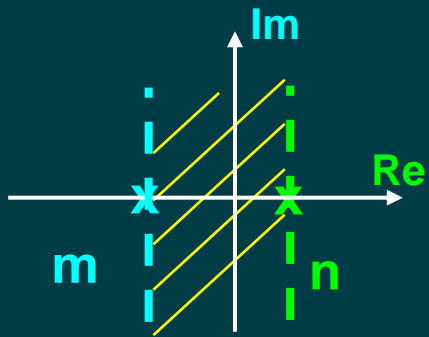
$$= \boxed{\frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)}$$

S 平面上的變形

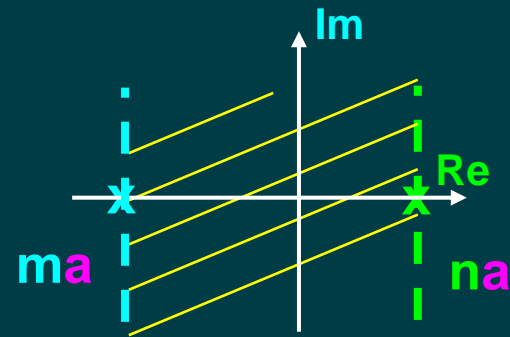
$$\text{ROC} = \text{Re } s > \sigma_x$$

$$X(s) \rightarrow X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$0 < a < 1$$



$$1 < a$$



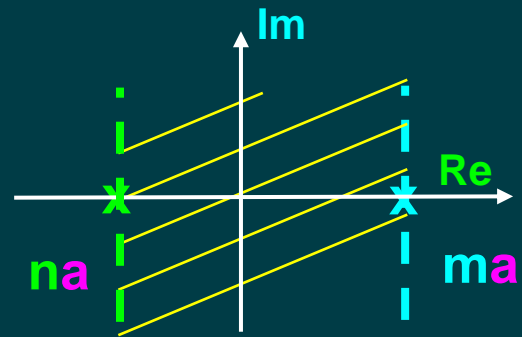
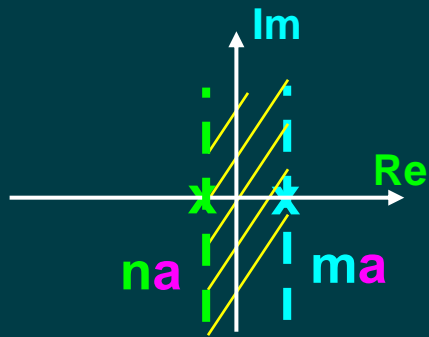
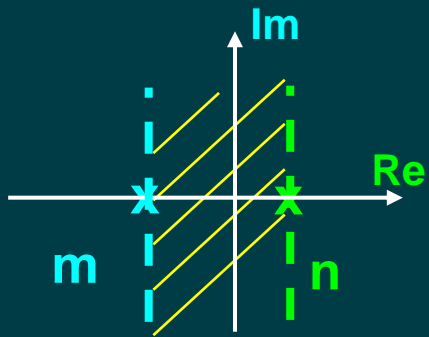
S 平面上的變形

$$\text{ROC} = \text{Re } s < -\sigma$$

$$X(s) \rightarrow X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$-1 < a < 0$$

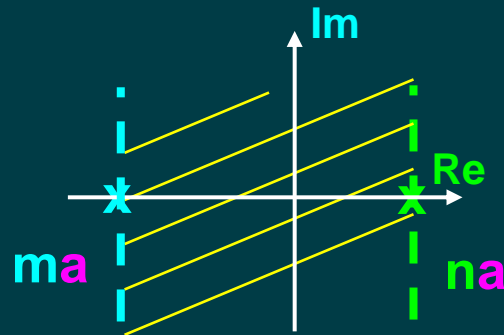
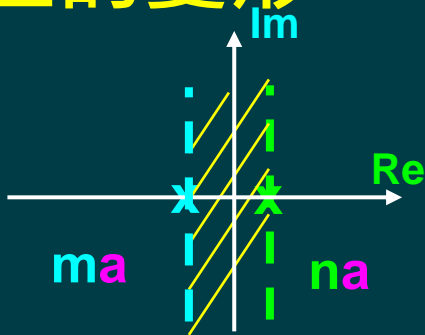
$$a < -1$$



S 平面上的變形

$$\text{ROC} = \text{Rx}$$

$$X(s) \rightarrow X\left(\frac{s}{a}\right)$$

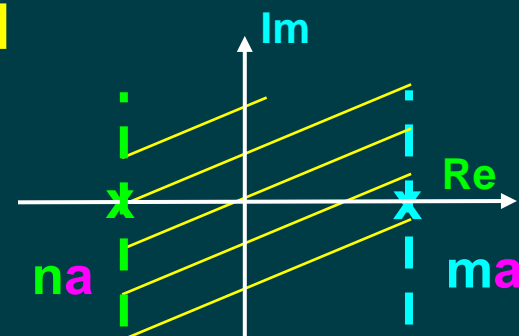
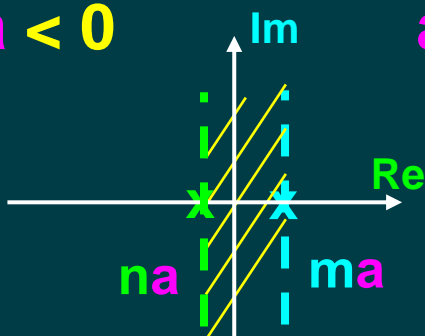
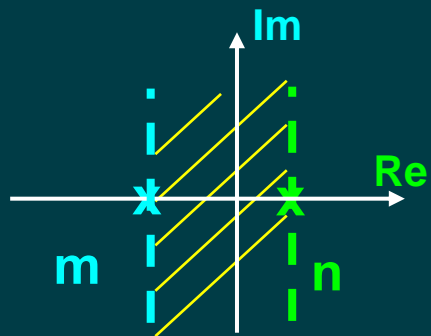


$$0 < a < 1$$

$$-1 < a < 0$$

$$1 < a$$

$$a < -1$$



時間軸的擴張壓縮 與 S平面的變形

- 如果有一個信號： $x(t)$

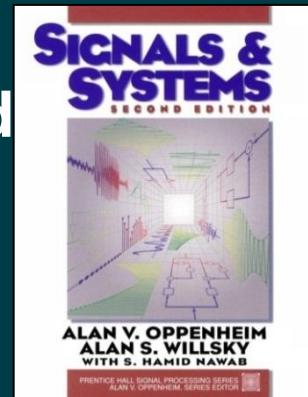
$$x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \quad \text{ROC} = R_x$$

$$x(at) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC} = a R_x$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(-s) \quad \text{ROC} = -R_x$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>