從信號與系統到控制

單元：L轉換性質-2

拉普拉斯轉換 的 平移 性質

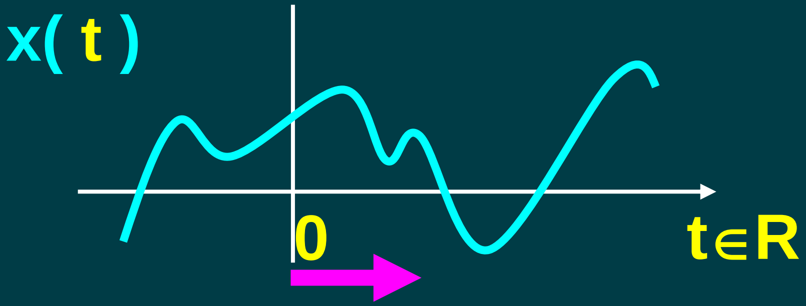
授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

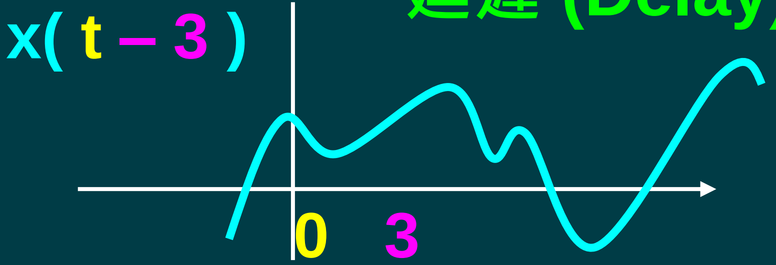
- 根據 拉普拉斯轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 與 複數平面 的平移
  - 時間軸的擴張壓縮 與 複數平面上 的變形
  - 摺積計算關係式
  - 微分 與 積分
  - 初值定理 與 終值定理

信號在時間軸的平移

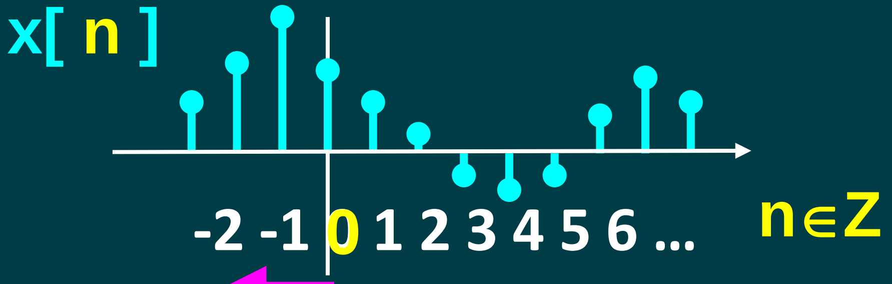
- 連續時間信號 (CT)



- 延遲 (Delay)

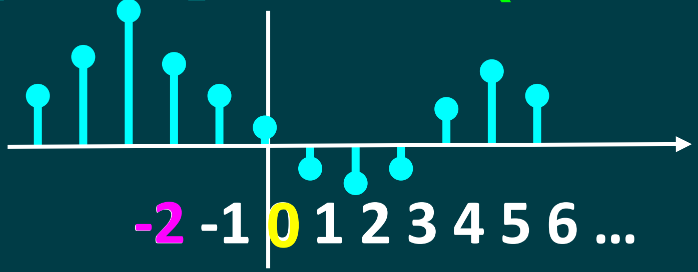


- 離散時間信號 (DT)



x[n + 2]

- 超前 (Advance)



時間軸上平移的關係式

- 如果有一個信號：x(t)

$$x(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad ROC = Rx$$

$$x(t-a) \overset{LT}{\longleftrightarrow} e^{s(-a)} X(s) \qquad ROC = Rx$$

$$\boxed{e^{-sa}} \; X(s)$$

時間軸上平移的關係式

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x(\boxed{t-a}) \right) e^{-s\boxed{t}}\, \boxed{dt}$$

$t - a = q \qquad t = q + a \qquad dt = dq$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(q)\, e^{-s\boxed{(q+a)}}\, dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(q)\, e^{-sq}\, e^{-sa}\, dq$$

時間軸上平移的關係式

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\quad x(t-a) \quad \right) e^{-st} \quad dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(q)\, e^{-sq}\, \boxed{e^{-sa}}\, dq$$

$$= \quad e^{-sa} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(q)}\, e^{-sq}\, dq}$$

$$= \quad e^{-sa} \quad X(s)$$

時間軸上平移的關係式

$$\boxed{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, e^{-st}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\boxed{x(t-a)} \right) e^{-st}\, dt$$

LT

$$= \boxed{e^{-sa}\ X(s)}$$

時間軸上平移的關係式

- 如果有一個信號：$x(t)$

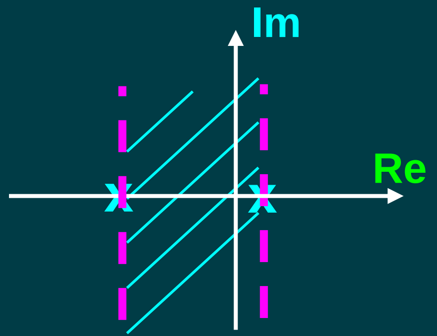
$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s) \qquad ROC = Rx$$

$$x(t-a) \xleftrightarrow{LT} \boxed{e^{-sa}}\, X(s) \qquad ROC = Rx$$

$$\cancel{\frac{(s+p)}{(s+n)(s+m)}}$$

- 不會改變 $X(s)$ 的分母的根（極點）

S 平面上的平移

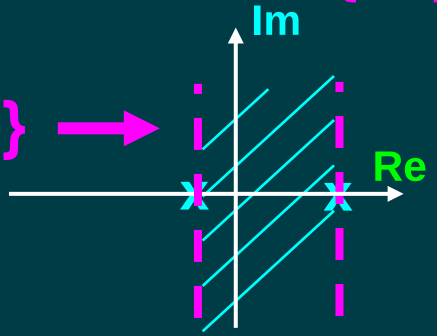


- 如果有一個信號：x(t)

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s) \qquad \text{ROC} = R_x$$

$$e^{bt}\, x(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} X(s-b) \qquad \text{ROC} = R_x + Re\{\, b \,\}$$

$+\, Re\{\, b \,\} \longrightarrow$



S 平面上的平移

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt}$$

$$X(\boxed{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\boxed{s}\,t}\, dt$$

$$X(s-b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \boxed{e^{-(s-b)}}\,t\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, e^{bt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{bt}\, e^{-st}\, dt$$

S 平面上的平移

$$\boxed{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, e^{-st}\, dt$$

$$\boxed{X(s-b)} \xleftrightarrow{\text{LT}} \; = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)\ e^{bt}}\, e^{-st}\, dt$$

時間軸 與 S平面 的 平移關係式

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s) \qquad ROC = Rx$$

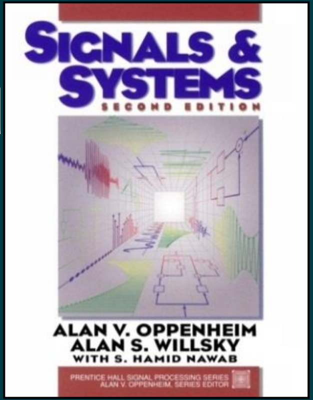
$$x(t-a) \xleftrightarrow{LT} e^{-sa}\, X(s) \qquad ROC = Rx$$

$$e^{bt}\, x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s-b)$$

$$ROC = Rx + Re\{b\}$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/