從信號與系統到控制

單元：L轉換性質-1

拉普拉斯轉換 的 線性 性質

授課老師：連　豊　力

單元學習目標與大綱

- 根據 拉普拉斯轉換 關係式，有下面的性質：
  - 線性組合
  - 時間軸 與 複數平面 的平移
  - 時間軸的擴張壓縮 與 複數平面上 的變形
  - 摺積計算關係式
  - 微分 與 積分
  - 初值定理 與 終值定理

線性組合的關係

- 如果有兩個信號：x(t) 與 y(t)

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s) \qquad ROC = Rx$$

$$y(t) \xleftrightarrow{LT} Y(s) \qquad ROC = Ry$$

$$a\,x(t) + b\,y(t) \xleftrightarrow{LT} a\,X(s) + b\,Y(s)$$

ROC 包含 $Rx \cap Ry$

線性組合的關係

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(a\, x(t) + b\, y(t) \right) \boxed{e^{-st}}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\boxed{a\, x(t)\, e^{-st}} + \boxed{b\, y(t)\, e^{-st}} \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{a}\, x(t)\, e^{-st}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{b}\, y(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= a \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt} + b \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-st}\, dt} = a\, X(s) + b\, Y(s)$$

線性組合的關係

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\boxed{a\,x(t) + b\,y(t)} \right) e^{-st}\, dt$$

$$\boxed{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, e^{-st}\, dt$$

LT

$$= \boxed{\begin{aligned} &a\,X(s) \\ +\ &b\,Y(s) \end{aligned}}$$

線性組合的關係

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}\left(a\,X(s)+b\,Y(s)\right)\boxed{e^{st}}\,ds$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}X(s)\,e^{st}\,ds}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}\left(\boxed{a\,X(s)\,e^{st}}+\boxed{b\,Y(s)\,e^{st}}\right)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}\boxed{a}\,X(s)\,e^{st}\,ds+\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}\boxed{b}\,Y(s)\,e^{st}\,ds$$

$$=a\boxed{\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}X(s)\,e^{st}\,ds}+b\boxed{\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}Y(s)\,e^{st}\,ds}=a\,x(t)+b\,y(t)$$

線性組合的關係

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}\boxed{\left(\ a\,X(s) + b\,Y(s)\ \right)}\,e^{st}\quad ds$$

$$\boxed{x(t)} = \frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}\boxed{X(s)}\,e^{st}\,ds$$

LT

$$\boxed{\begin{aligned} &= \ a\,x(t) \\ &+ \ b\,y(t) \end{aligned}}$$

線性組合的關係

- 如果有兩個信號：x(t) 與 y(t)

$$x(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad \text{ROC} = R_x$$

$$y(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} Y(s) \qquad \text{ROC} = R_y$$

$$a\,x(t) + b\,y(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} a\,X(s) + b\,Y(s)$$

ROC 包含 $R_x \cap R_y$

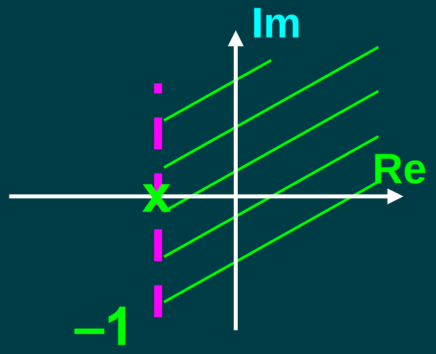
線性組合的範例

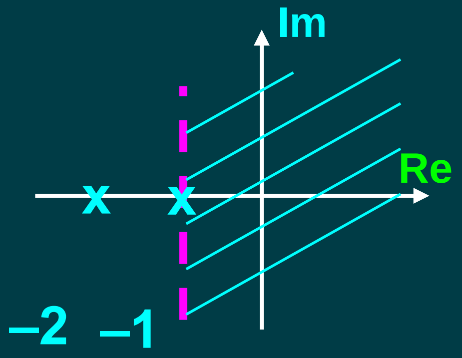
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$Z(s) = X(s) - Y(s)$$

$$= \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$





線性組合的範例

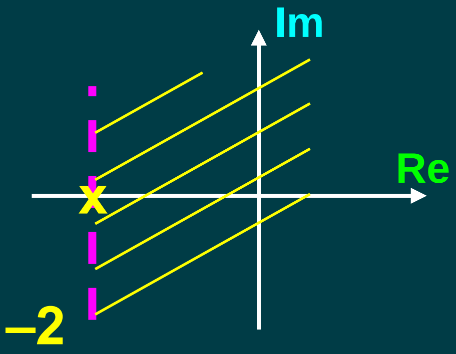
$$Z(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{\boxed{(s+2)}}{(s+1)(s+2)} - \frac{\boxed{1}}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)}$$

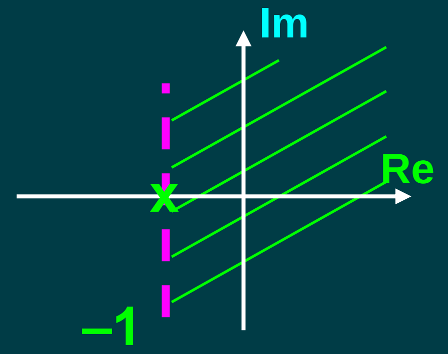
$$= \frac{1}{\boxed{(s+2)}}$$

$$Re\{s\} > -2$$



線性組合的範例

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} \qquad Re\{s\} > -1$$

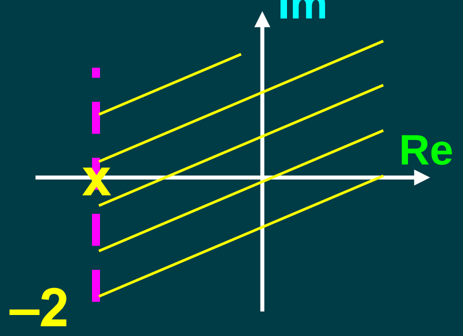


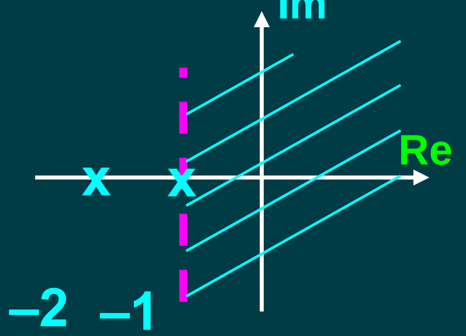
$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$Z(s) = X(s) - Y(s)$$

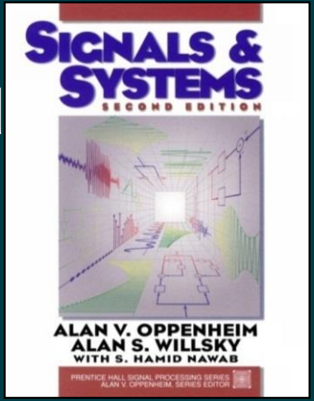
$$= \frac{1}{(s+2)}$$

$$Re\{s\} > -2$$





參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab, Signals & Systems, Prentice Hall, 2nd Edition, 1997**

- **SciLab: Open source software for numerical computation http://www.scilab.org/**