從信號與系統到控制

單元：拉普拉斯轉換-5
拉普拉斯轉換 的 逆轉換

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 的關係式
- 推導出 拉普拉斯轉換 的 逆轉換
- 介紹 拉普拉斯 逆轉換 的範例

傅立葉轉換 與 拉普拉斯轉換

$$\boxed{x(t)} \xleftrightarrow{FT} \boxed{X(jw)} \qquad \boxed{x(t)} \xleftrightarrow{LT} \boxed{X(s)}$$

$$\boxed{r} + \boxed{jw} = \boxed{s}$$

$$\boxed{X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\boxed{e^{-jw\,t}}\,dt} \qquad \boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\boxed{e^{-s\,t}}\,dt}$$

$$X(jw) = \mathcal{F}\{\ x(t)\ \} \qquad X(s) = \mathcal{L}\{\ x(t)\ \}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\ X(jw)\ \} \qquad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ X(s)\ \}$$

推導 拉普拉斯轉換 的 逆轉換

- 根據定義： $s = r + jw$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\boxed{X(r+jw)} = \mathcal{F}\{\, x(t)\, e^{-rt} \,\} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)\, e^{-rt}}\, e^{-jwt}\, dt$$

$$x(t)\, e^{-rt} = \mathcal{F}^{-1}\{\, X(r+jw) \,\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(r+jw)\, e^{jwt}\, dw$$

推導 拉普拉斯轉換 的 逆轉換

$$x(t)\,\boxed{e^{-r\,t}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\,r + jw\,)\; e^{jwt}\,dw$$

$$x(t) = \boxed{e^{+rt}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\,r + jw\,)\; e^{jwt}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\,r + jw\,)\;\boxed{e^{rt}}\,\boxed{e^{jwt}}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\,r + jw\,)\; e^{(\,r+jw\,)\,t}\,dw$$

推導 拉普拉斯轉換 的 逆轉換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\boxed{r + jw})\, e^{(\boxed{r + jw})\,t}\, \boxed{dw}$$

$$\boxed{r + jw = s} \qquad ds = j\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\boxed{r-j\infty}}^{\boxed{r+j\infty}} X(s)\, e^{(s)\,t}\, \frac{1}{\boxed{j}}\, ds$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{r-j\infty}^{r+j\infty} X(s)\, e^{(s)\,t}\, ds$$

拉普拉斯轉換 與 其逆轉換

- 整理一下： $x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s)$

$$\boxed{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, \boxed{e^{-st}}\, dt$$

$$\boxed{x(t)} = \boxed{\frac{1}{2\pi j} \int_{r-j\infty}^{r+j\infty} \boxed{X(s)}\, \boxed{e^{st}}\, ds}$$

- 不好計算，需要在複數平面的積分

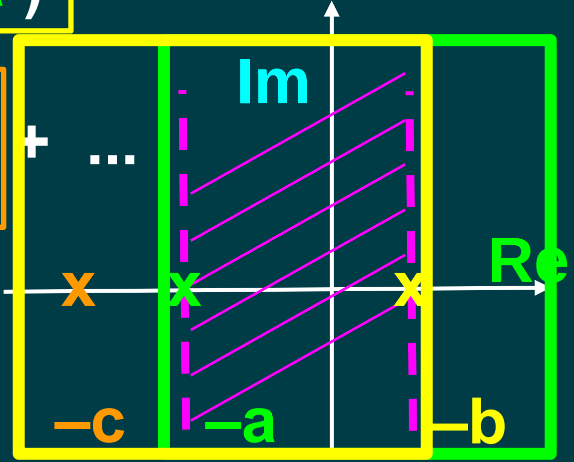
拉普拉斯轉換 與 逆轉換 – 直接比較

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+a)} \quad Re\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+a)} \quad Re\{s\} < -a$$

$$X(s) = \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)} + \frac{C}{(s+c)} + \ldots$$

$$x(t) = A\,e^{-at}u(t) - B\,e^{-bt}u(-t) + \ldots\ldots$$



拉普拉斯轉換 與 逆轉換 的範例

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\boxed{Re\{s\} > -1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{(s+1)}} - \boxed{\frac{1}{(s+2)}}$$

$$\boxed{e^{-at}u(t)} \overset{LT}{\longleftrightarrow} \boxed{\frac{1}{(s+a)}}$$

$$\boxed{Re\{s\} > -a}$$

$$x(t) = e^{-1t}\boxed{u(t)} - e^{-2t}\boxed{u(t)} = [e^{-1t} - e^{-2t}]u(t)$$

$$[e^{-1t} - e^{-2t}]u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad Re\{s\} > -1$$

拉普拉斯轉換 與 逆轉換 的範例

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\boxed{Re\{s\} < -2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{(s+1)}} - \boxed{\frac{1}{(s+2)}}$$

$$\boxed{-e^{-at}\,u(-t)} \overset{LT}{\longleftrightarrow} \boxed{\frac{1}{(s+a)}}$$

$$\boxed{Re\{s\} < -a}$$

$$x(t) = -e^{-1\,t}\,\boxed{u(-t)} - \left(-e^{-2\,t}\,\boxed{u(-t)}\right) = \left[-e^{-1\,t} + e^{-2\,t}\right]u(-t)$$

$$\left[-e^{-1t} + e^{-2t}\right]u(-t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)\,(s+2)} \quad Re\{s\} < -2$$

拉普拉斯轉換 與 逆轉換 的範例

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \boxed{\boxed{-2 < Re\{s\}} < -1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{(s+1)}} - \boxed{\frac{1}{(s+2)}}$$

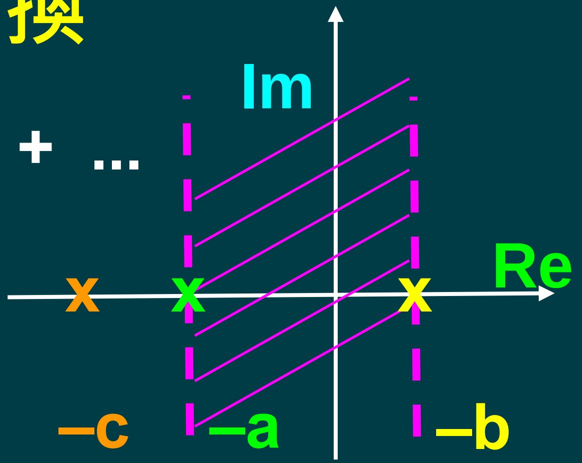
$$\boxed{-e^{-at}u(-t)} \overset{LT}{\longleftrightarrow} \boxed{\frac{1}{(s+a)}} \quad \boxed{Re\{s\} < -a}$$

$$\boxed{e^{-at}u(t)} \overset{LT}{\longleftrightarrow} \boxed{\frac{1}{(s+a)}} \quad \boxed{Re\{s\} > -a}$$

$$x(t) = -e^{-1t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

拉普拉斯轉換 與 逆轉換

$$X(s) = \frac{A}{\boxed{(s+a)}} + \frac{B}{\boxed{(s+b)}} + \frac{C}{(s+c)} + \cdots$$



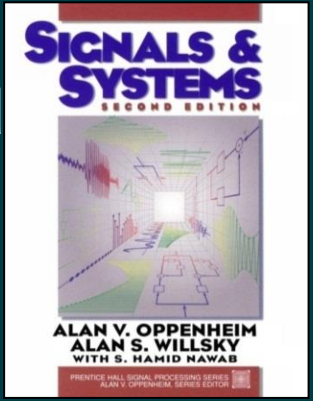
$$e^{-at}\,u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+a)} \qquad \boxed{Re\{s\} > -a}$$

$$-e^{-at}\,u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+a)} \qquad \boxed{Re\{s\} < -a}$$

$$x(t) = A\,\boxed{e^{-at}}\,\boxed{u(t)} - B\,\boxed{e^{-bt}}\,\boxed{u(-t)} + \cdots\cdots$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab,
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/