從信號與系統到控制

單元：拉普拉斯轉換-3

拉普拉斯轉換範例 – 負時間的指數函數

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 拉普拉斯轉換 的公式與關係式
- 計算 負時間有數值 的 指數函數 的 拉普拉斯轉換
- 介紹 拉普拉斯轉換 後的 收斂區間 特性

傅立葉轉換 與 拉普拉斯轉換

$$\boxed{x(t)} \xleftrightarrow{FT} \boxed{X(jw)} \qquad \boxed{x(t)} \xleftrightarrow{LT} \boxed{X(s)}$$

$$\boxed{r} + \boxed{jw} = \boxed{s}$$

$$\boxed{X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\boxed{e^{-jw\,t}}\,dt} \qquad \boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\boxed{e^{-s\,t}}\,dt}$$

$$X(jw) = \mathcal{F}\{\ x(t)\ \} \qquad X(s) = \mathcal{L}\{\ x(t)\ \}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\ X(jw)\ \} \qquad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ X(s)\ \}$$

負時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

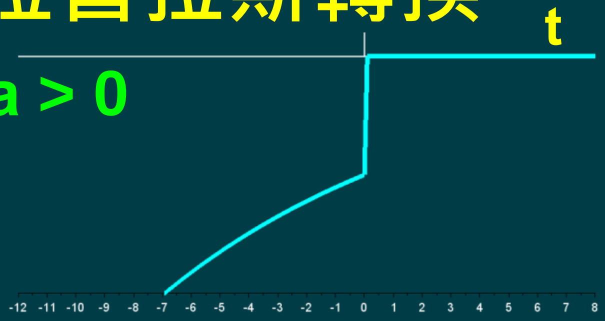
$$x(t) = \boxed{-}\,\boxed{e^{-at}}\,\boxed{u(-t)}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, e^{-st}\, dt$$

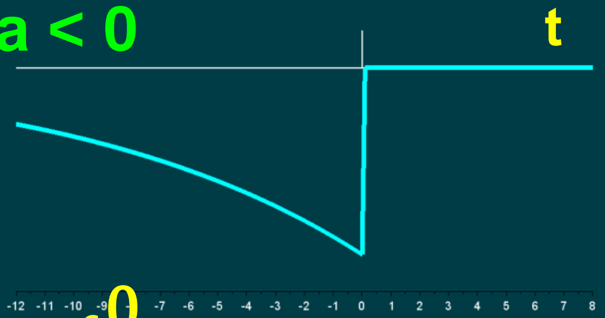
$$= \int_{-\infty}^{\boxed{\infty}} -e^{-at}\, \boxed{u(-t)}\, e^{-st}\, dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{\boxed{-at}}\; e^{\boxed{-st}} dt \;=\; -\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)t}\, dt$$

a > 0



a < 0



負時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} \boxed{e^{-(a+s)t}}\,dt$$

$$= \boxed{-}\,\frac{1}{-(a+s)}\,e^{-(a+s)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{(a+s)}\,e^{-(a+s)0} - \frac{1}{(a+s)}\,e^{-(a+s)(-\infty)}$$

負時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{(a+s)} e^{-(a+s)0} - \frac{1}{(a+s)} \boxed{e^{-(a+s)(-\infty)}}$$

1

$$a + s = a + r + jw$$

$$\boxed{e^{jw} = \cos(w) + j\sin(w)}$$

$$e^{(a+s)\infty} = e^{(a+r+jw)\infty} = \boxed{e^{(a+r)\infty}}\ \boxed{e^{(jw)\infty}}$$

$$a + r < 0 \Rightarrow a + Re\{s\} < 0 \Rightarrow Re\{s\} < -a$$

負時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = -\,e^{-at}\,u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{(a+s)}\,\overset{1}{e^{-(a+s)\,0}} - \frac{1}{(a+s)}\,\boxed{\overset{0}{e^{-(a+s)(-\infty)}}}$$

$$\boxed{Re\{s\} < -a}$$

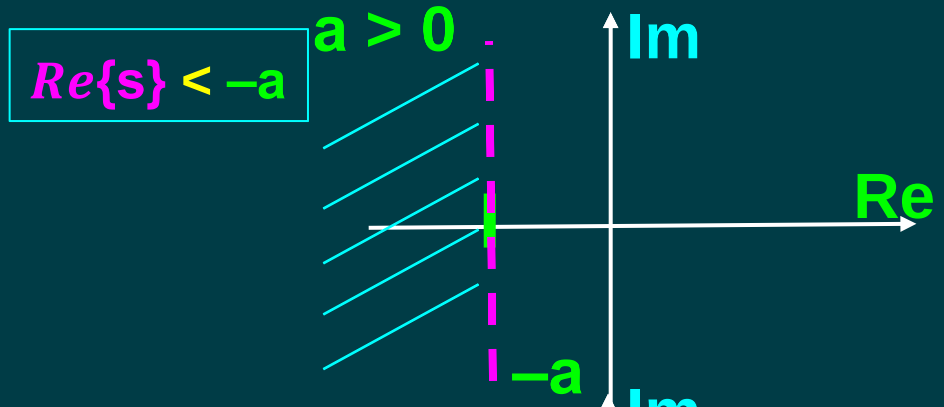
$$= \frac{1}{(a+s)} - 0$$

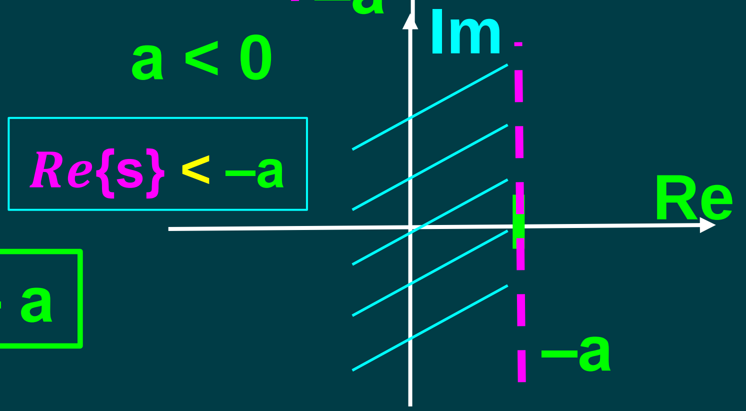
$$= \boxed{\frac{1}{(a+s)}}$$

負時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \boxed{\frac{1}{(s+a)}} \quad \boxed{Re\{s\} < -a}$$





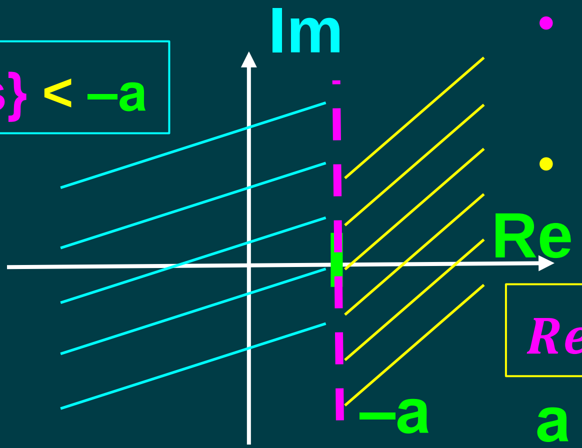
正-負時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$e^{-at}u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{(s+a)}$ $\quad Re\{s\} > -a$

$-e^{-at}u(-t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{(s+a)}$ $\quad Re\{s\} < -a$

- 收斂區間 (ROC)
- (Region of Convergence)

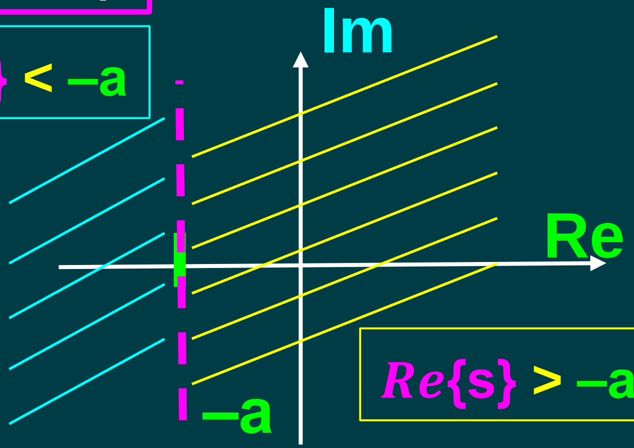
$Re\{s\} < -a$



$Re\{s\} > -a$

$a < 0$

$Re\{s\} < -a$

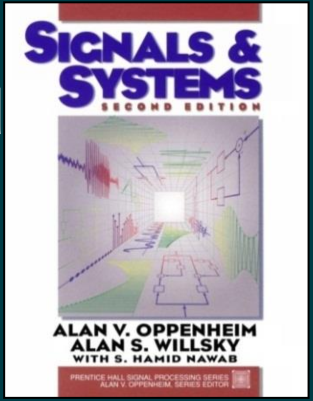


$Re\{s\} > -a$

$a > 0$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/