從信號與系統到控制

單元：拉普拉斯轉換-2

拉普拉斯轉換範例 – 正時間的指數函數

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 拉普拉斯轉換 的公式與關係式
- 計算 正時間有數值 的 指數函數
  的 拉普拉斯轉換
- 介紹 拉普拉斯轉換 後的 收斂區間 特性

傅立葉轉換 與 拉普拉斯轉換

$$\boxed{x(t)} \xleftrightarrow{FT} \boxed{X(jw)} \qquad \boxed{x(t)} \xleftrightarrow{LT} \boxed{X(s)}$$

$$\boxed{r} + \boxed{jw} = \boxed{s}$$

$$\boxed{X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \boxed{e^{-jwt}}\, dt} \qquad \boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \boxed{e^{-st}}\, dt}$$

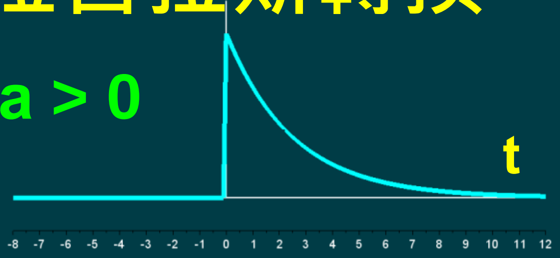
$$X(jw) = \mathcal{F}\{\, x(t) \,\} \qquad X(s) = \mathcal{L}\{\, x(t) \,\}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\, X(jw) \,\} \qquad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\, X(s) \,\}$$

正時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = \boxed{e^{-at}}\, u(t)$$

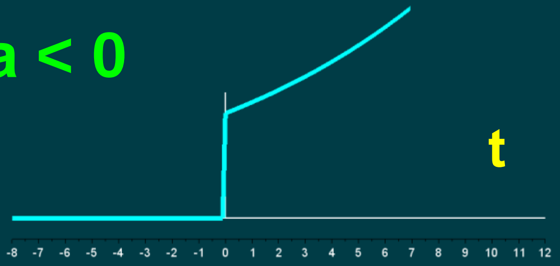
a > 0



$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{\boxed{-\infty}}^{\infty} e^{-at}\, \boxed{u(t)}\, e^{-st}\, dt$$

a < 0



$$= \int_{0}^{\infty} e^{\boxed{-at}}\, e^{\boxed{-st}}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt$$

正時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} \boxed{e^{-(a+s)t}}\, dt$$

$$= \frac{1}{-(a+s)} e^{-(a+s)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{-(a+s)} e^{-(a+s)\infty} - \frac{1}{-(a+s)} e^{-(a+s)0}$$

正時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = e^{-at}\,u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{-(a+s)}\,\boxed{e^{-(a+s)\infty}} - \frac{1}{-(a+s)}\,\overbrace{e^{-(a+s)0}}^{1}$$

$$a + s = a + r + jw$$

$$\boxed{e^{-jw} = \cos(w) - j\sin(w)}$$

$$e^{-(a+s)\infty} = e^{-(a+r+jw)\infty} = \boxed{e^{-(a+r)\infty}}\,\boxed{e^{-(jw)\infty}}$$

$$a + r > 0 \quad \Rightarrow \quad a + Re\{s\} > 0 \quad \Rightarrow \quad Re\{s\} > -a$$

正時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = e^{-at}\,u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{-(a+s)}\,\overset{0}{\boxed{e^{-(a+s)\infty}}} - \frac{1}{-(a+s)}\,\overset{1}{e^{-(a+s)0}}$$

$$\boxed{Re\{s\} > -a}$$

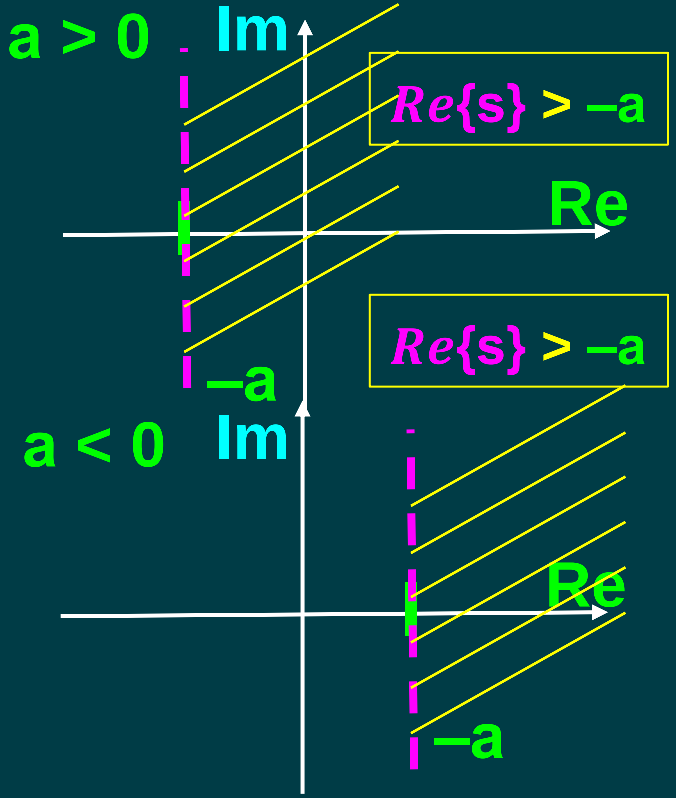
$$= 0 - \frac{1}{-(a+s)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{(a+s)}}$$

正時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(s) = \boxed{\frac{1}{(s+a)}} \quad \boxed{Re\{s\} > -a}$$

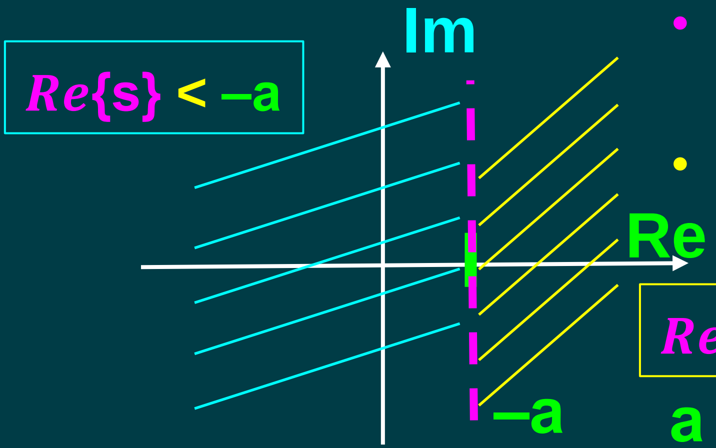


正-負時間指數函數 的 拉普拉斯轉換

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{(s+a)} \qquad \boxed{Re\{s\} > -a}$$

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{(s+a)} \qquad \boxed{Re\{s\} < -a}$$

- 收斂區間 (ROC)
- (Region of Convergence)

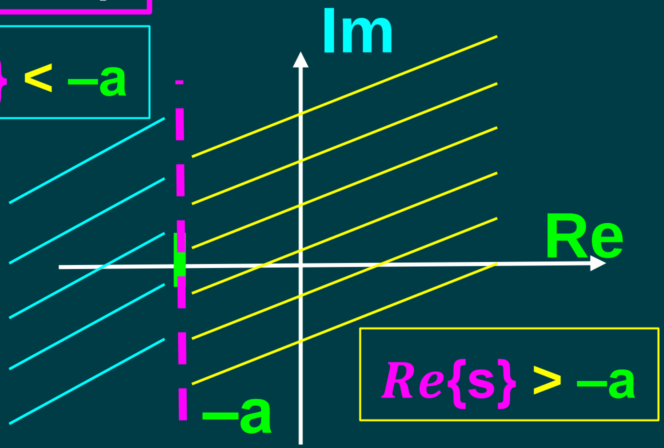


Re{s} > –a

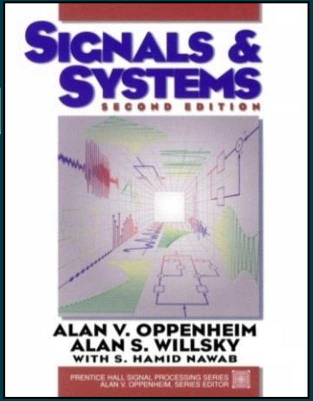
a < 0

a > 0

Re{s} < –a



參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/